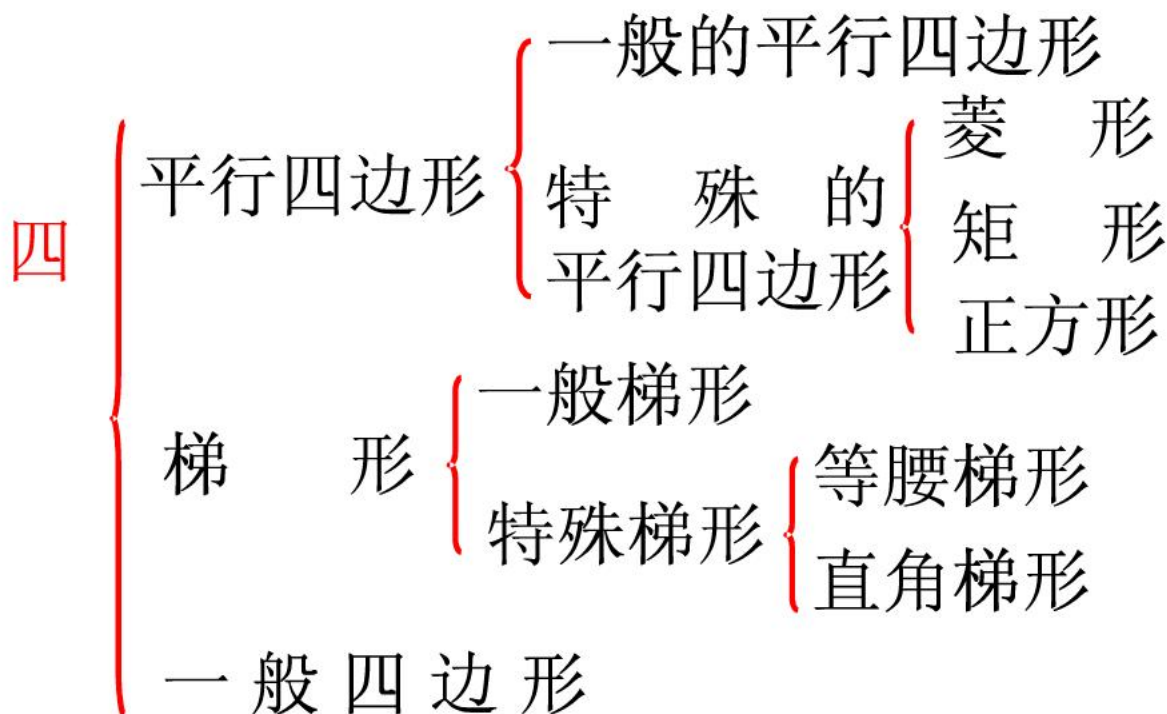
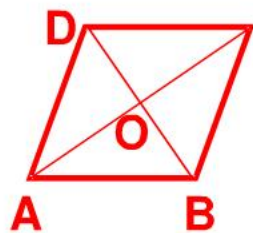


# 四边形复习集锦





文字语言叙述

几何符号表述

平行四

性质

- ①两组对边互相平行  $\therefore$  在四边形 **ABCD** 中
- ②两组对边分别相等  $AB=CD, AD=BC$
- ③一组对边平行且相等  $\therefore$  四边形 **ABCD** 是 **平行四边形**
- ④两组对角分别相等  $\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$
- ⑤对角线互相平分

判别

- ①两组对边分别平行的
- ②两组对边分别相等的
- ③一组对边平行且相等的
- ④两组对角分别相等的
- ⑤对角线互相平分的

四



平行四

定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形

菱

性质

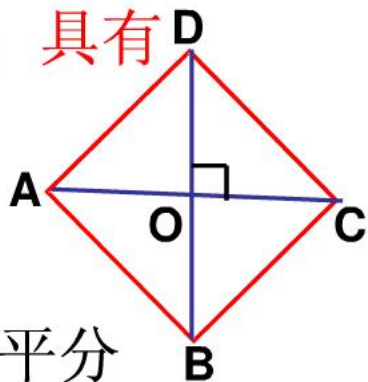
(1)菱形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的所有性质

(2)菱形的特殊性质：

①菱形的四条边都相等

②菱形的对角线互相垂直平分  
每一条对角线平分一组对角

③菱形是轴对称图形；有两条对称轴



判别

(1)四条边都相等的四边形

(2)对角线互相垂直平分的四边形

(3)有一组邻边相等的平行四边形

(4)对角线互相垂直的平行四边形



菱形

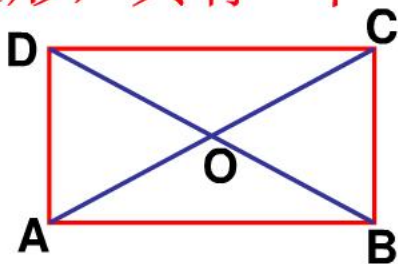
定义：有一个内角是直角的平行四边形是矩形

性质

(1)矩形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的所有性质

(2)矩形的特殊性质：

- ①矩形的四个角都是直角
- ②矩形的两条对角线相等
- ③矩形是轴对称图形；有两条对称轴



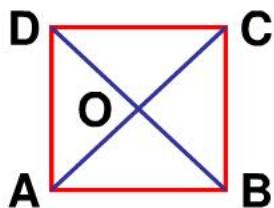
判别

- (1)有三个角都是直角的四边形
- (2)对角线互相平分且相等的四边形
- (3)有一个角是直角的平行四边形
- (4)对角线相等的平行四边形

矩形



定义：一组邻边相等的矩形叫正方形  
或 有一个内角是直角的菱形叫正方形



性质

菱形的所有性质

矩形的所有性质

(1)正方形同时具有

(2)正方形是轴对称图形；有**4**条对称轴

正  
方

判别

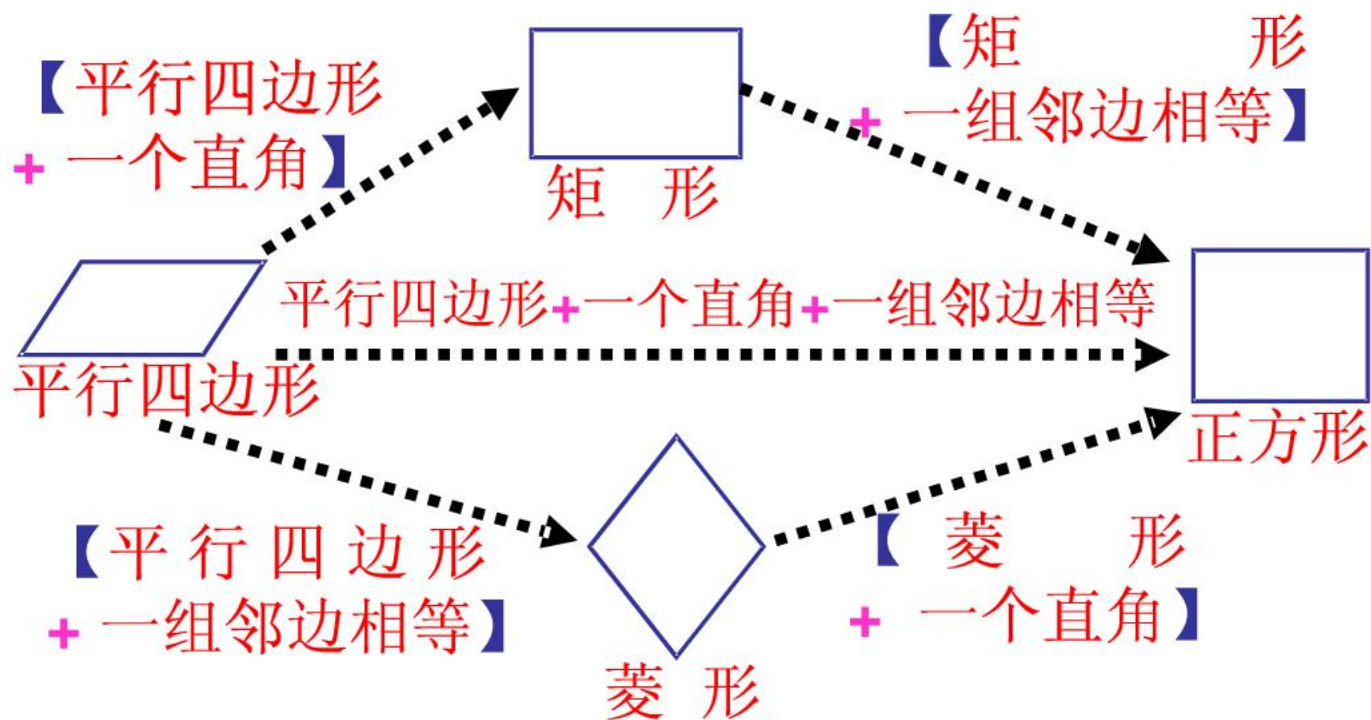
(1)先判定四边形是矩形；

再判定这个矩形是菱形

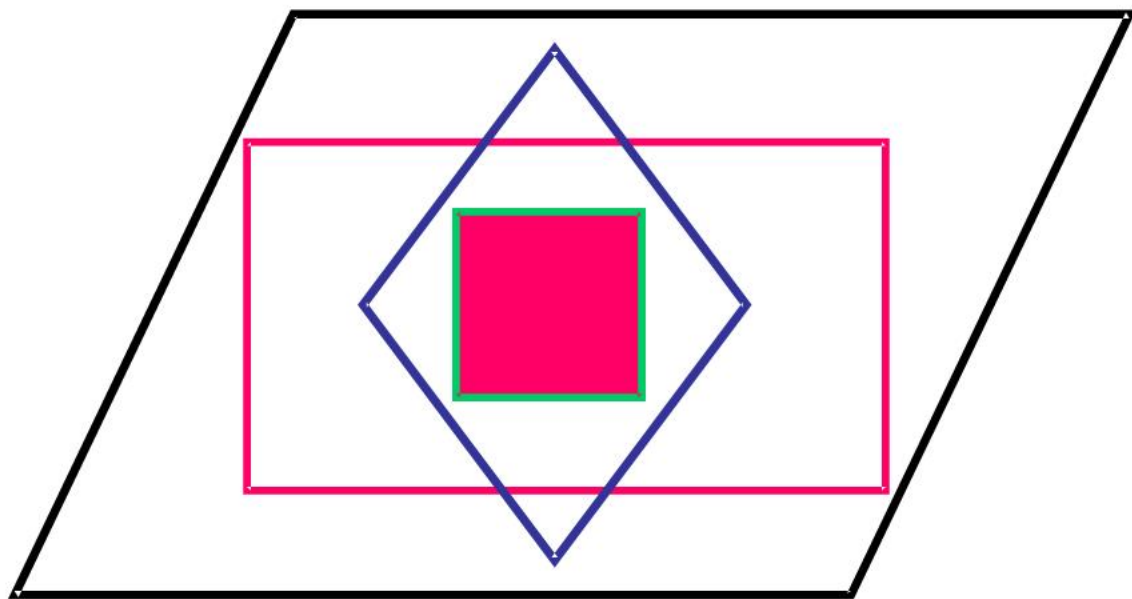
(2)先判定四边形是菱形；

再判定这个菱形是矩形

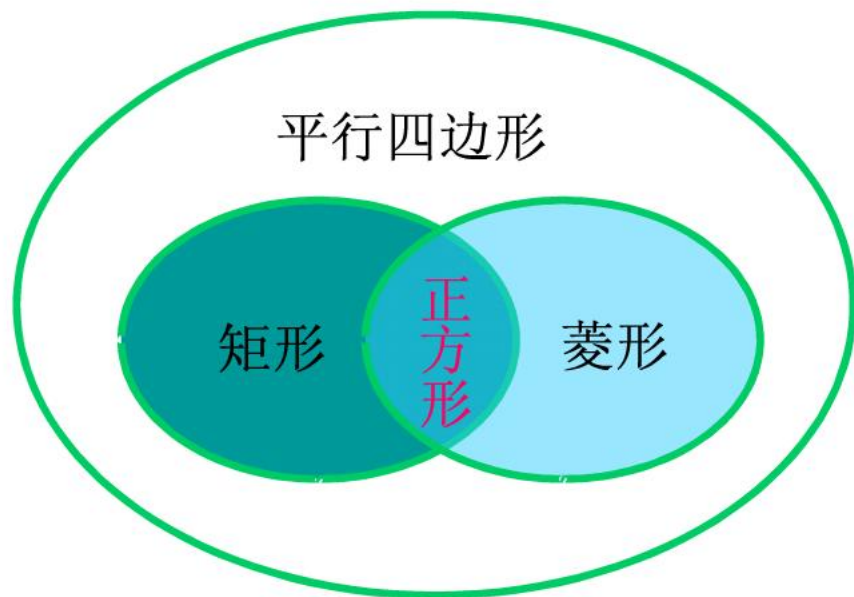
# 平行四边形与特殊平行四边形的从属关系



平行四边形、矩形、菱形、正方形之间关系



## 平行四边形、矩形、菱形、正方形之间关系



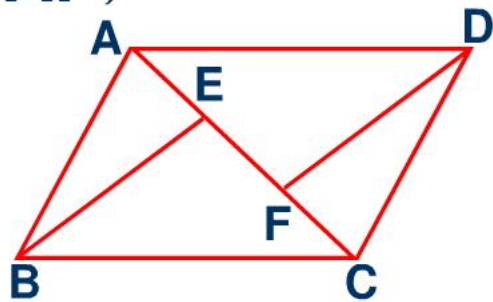


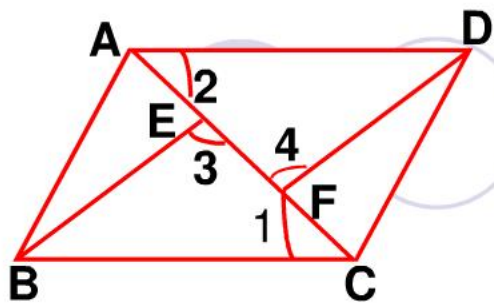
# 走进中考

典例1 (2009双柏) 如图,  
**E**, **F**是平行四边形**ABCD**的  
对角线**AC**上的点, **CE=AF**,  
请你猜想:

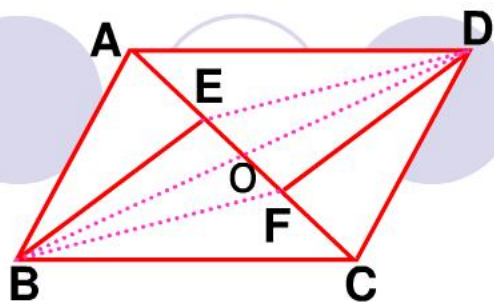
**BE**与**DF**有怎样的关系?

并对你的猜想加以证明





猜想:  
 $BE \parallel DF$ ,  
 $BE = DF$



证法1:  $\because$  四边形ABCD是平行四边形

$\therefore BC = AD, \angle 1 = \angle 2$

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle DAF$ 中

$$\begin{cases} BC = AD \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases}$$

$CE = AF$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DAF$

$\therefore BE = DF, \angle 3 = \angle 4$

$\therefore BE \parallel DF$

证法2: 连接BD, 交AC于点O,  
 连接DE, BF

$\because$  四边形ABCD是平行四边形

$\therefore BO = OD, AO = CO$

又 $\because AF = CE$

$\therefore AE = CF \quad \therefore EO = FO$

$\therefore$  四边形BEDF是平行四边形

$\therefore BE = DF, BE \parallel DF$

**典例2** 如图1, 2所示, 将一张长方形的纸片对折两次后, 沿图3中的虚线**AB**剪下, 将 $\triangle$ **AOB**完全展开.

**(1)**画出展开图形, 判断其形状, 并证明你的结论;

**(2)**若按上述步骤操作, 展开图形是正方形时, 请写出 $\triangle$ **AOB**应满足的条件.

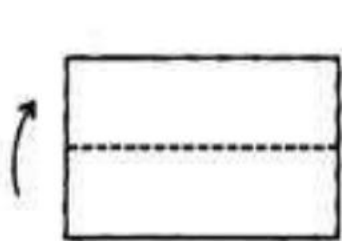


图 1



图 2

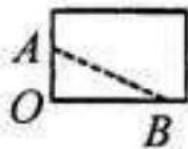


图 3

(1)展开图如图所示，它是菱形.

证明：由操作过程可知

$OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $\because OA \perp OB$ ，

即 $AC \perp BD$ ，

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是菱形.

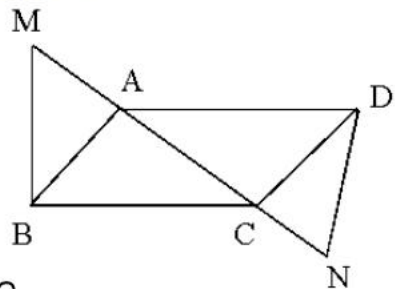
(2) $\triangle AOB$ 中， $\angle ABO=45^\circ$   
(或 $\angle BAO=45^\circ$  或 $OA=OB$ ).



典例3 如图，在平行四边形ABCD中，  
 $AB \parallel CD$ ，M、N在直线AC上，  
且 $MA=NC$ ，问BM和DN存在  
怎样的关系？说明理由。

证明：

$BM \parallel DN$ ，连接BD  
交AC于O，连接BN、DM。



$\because AB \parallel CD$ ， $\therefore$  四边形ABCD是平行四边形

$\therefore OB=OD$ ， $OA=OC$ ，

$\therefore MA=NC$

$\therefore OA+MA=OC+NC \therefore OM=ON$  又  $OB=OD$

$\therefore$  四边形MBND是平行四边形， $\therefore BM \parallel DN$

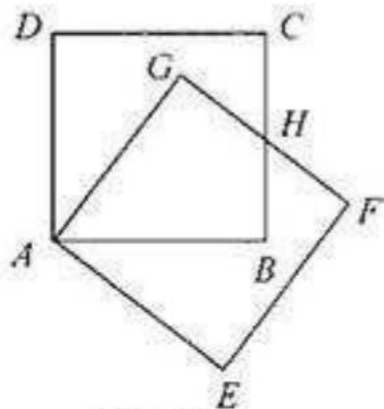


### 典例4

把正方形**ABCD**绕着点**A**，按顺时针方向旋转得到正方形**AEFG**，边**FG**与**BC**交于点**H**（如图）。

试问线段**HG**与线段**HB**相等吗？

请先观察猜想，然后再证明你的猜想。



(第4题)

解：HG=HB。

证法1：连结AH，

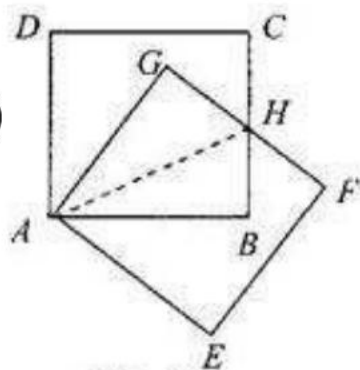
∵ 四边形ABCD，AEFG都是正方形

∴  $\angle B = \angle G = 90^\circ$

由题意知AG=AB，又AH=AH

∴  $\text{Rt}\triangle AGH \cong \text{Rt}\triangle ABH$  (HL)

∴ HG=HB



(第4题)

证法2: 连结GB

$\because$  四边形ABCD, AEFG都是正方形

$\therefore \angle ABC = \angle AGF = 90^\circ$

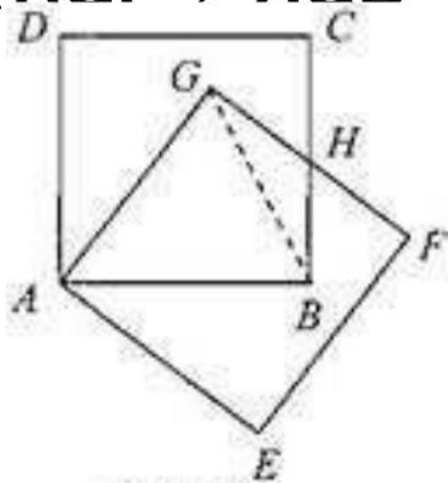
由题意知AB=AG

$\therefore \angle AGB = \angle ABG$

$\therefore \angle ABC - \angle ABG = \angle AGF - \angle AGB$

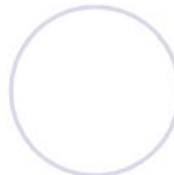
即  $\angle HBG = \angle HGB$

$\therefore HG = HB$



(第4题)

## 认真想 准确填

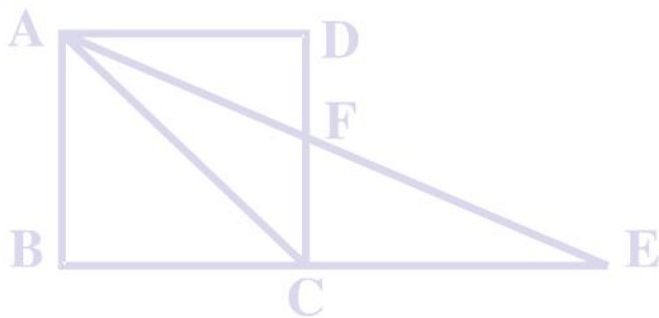


- 1.两组对角分别相等的四边形是平行四边形。
- 2.对角线互相垂直、平分且相等的  
四边形是正方形。
- 3.四边形绕其对角线交点旋转90度后与原四边形重合，这个四边形是正方形。
- 4.用一根较长的绳子怎样检验方桌面是否为矩形？\_\_\_\_\_。

## 仔细观 细心算

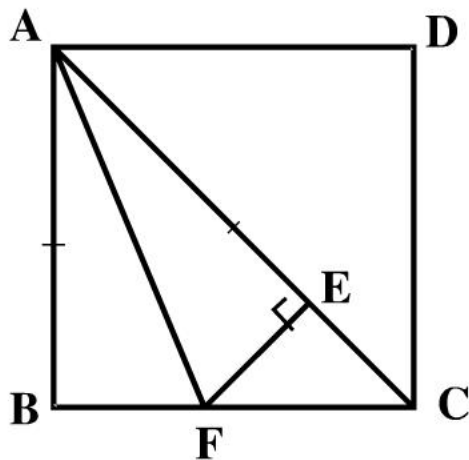
1. 菱形对角线长为4cm、8cm，其边长为  $2\sqrt{5}$  cm，面积为  $16$  cm<sup>2</sup>

2. 如图，延长正方形ABCD的边BC到E，使CE=CA，连接AE交DC于F，则  $\angle E = 22.5^\circ$ ， $\angle AFC = 112.5^\circ$ 。





**典例5：**AC为正方形ABCD的对角线，  
E为AC上一点，且AB=AE，EF⊥AC  
交BC于F，试证：EC=EF=FB



证明：∵ 四边形ABCD是正方形

$$\therefore \angle B=90^{\circ} \quad \angle ACB=45^{\circ}$$

$$\therefore \angle AEF=90^{\circ} \quad AB=AE,$$

$$AF=AF$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AFE \quad (\text{HL})$$

$$\therefore BF=EF$$

$$\text{又} \because \angle FEC=90^{\circ}$$

$$\therefore \angle EFC=45^{\circ}$$

$$\therefore EC=EF \quad (\text{等角对等边})$$

$$\therefore BF=EF=EC$$

**典例6** 已知如图，菱形**ABCD**的对角线**AC**、**BD**交于点**O**，**AC=6**，**BD=8**，求菱形的高。

解：作边**BC**上的高**AE**

$\because AC$ 与**BD**垂直平分

$$AC=6, \quad BD=8$$

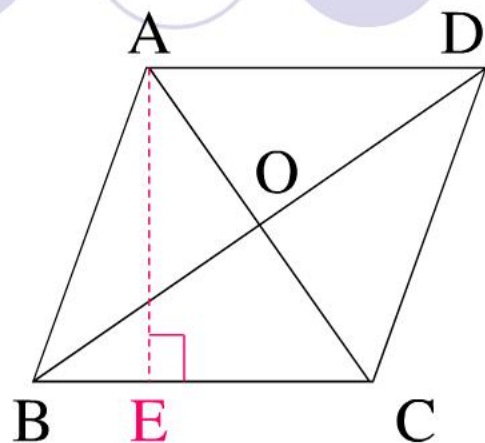
$$\therefore CO=3, \quad BO=4$$

$$\therefore BC=5$$

$$\therefore BC \times AE = \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$\therefore 5 \times AE = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$$\therefore AE=4.8$$



等式左右两边  
都表示这个菱  
形的面积。

**典例7** 如图,E为菱形ABCD边BC上的一点,  
**AB=AE**, AE交BD于F,  **$\angle DAE=2\angle BAE$**   
**(1)求证:  $EB=FA$**  **(2)求 $\angle ABC$ 的度数。**

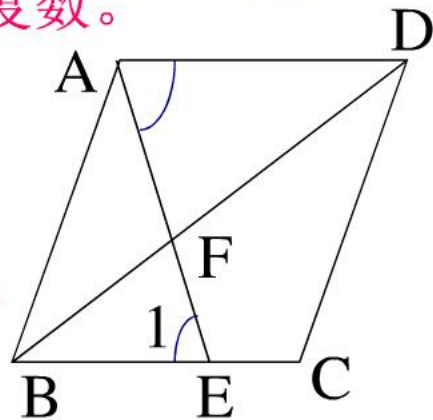
(1)证明  $\because AD \parallel BC, \therefore \angle 1 = \angle BAE$

$\because AE = AB, \therefore \angle 1 = \angle ABC$

$\therefore \angle ABC = \angle DAE = 2\angle BAE$

$\therefore \angle BAE = \angle DBE = \angle ADB$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF \quad \therefore BE = AF$



(2)解: 设 $\angle BAE$ 为 $x$ , 则 $\angle ABE = \angle AEB = 2x$

$$\therefore x + 2x + 2x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 72^\circ$$

**典例8**、在正方形ABCD中，F是CD上的点，E是BC延长线上的点，CE=CF  
求证：BF=DE

证明：∵ 四边形ABCD是正方形

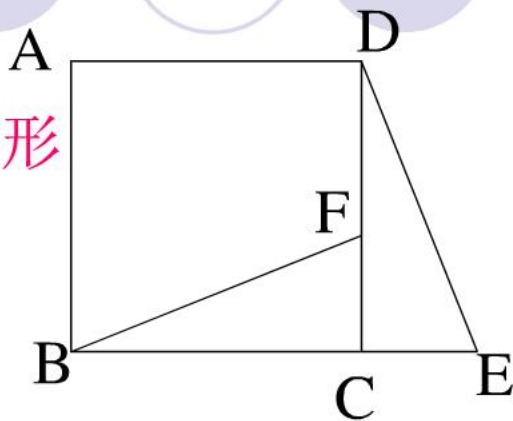
$$\therefore BC=DC$$

$$\angle BCD = \angle DCE$$

$$\text{又} \because CF=CE$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle DCE$$

$$\therefore BF=DE$$



**典例9** 过正方形**ABCD**对角线**BD**上的一点**P**，作  
**PE**  $\perp$  **BC**于**E**， **PF**  $\perp$  **CD**于**F**  
求证： **AP=EF**

证明：连结**AC**、**PC**

$\because$  正边形**ABCD**是正方形

$\therefore$  **BD**垂直且平分**AC**

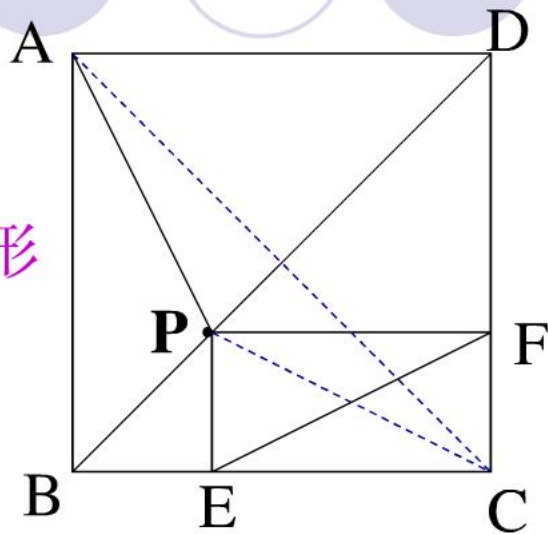
$\therefore$  **PA=PC**

$\because$  **PE**  $\perp$  **BC**， **PF**  $\perp$  **CD**，  $\angle BCD=90^\circ$

$\therefore$  四边形**PECF**是矩形

$\therefore$  **EF=PC**

$\therefore$  **AP=EF**





**典例10**、如图，在正方形**ABCD**中，**M**是**BC**上一点，**N**是**CD**上一点，且 $\triangle MCN$ 的周长等于正方形周长的一半，求 $\angle MAN$ 的度数。

提示：延长**ND**至**F**，使得

**DF=BM**，连结**AF**

证明 $\triangle ANF \cong \triangle ANM$

从而得出： $\angle FAN = \angle NAM$

$\angle FAN + \angle NAM = 90^\circ$

最后得出 $\angle MAN = 45^\circ$

