

麻省理工学院

A.V.奥本海姆等

信号与系统

SIGNALS & SYSTEMS

ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY

WITH S. HAMID NAWAB

刘树棠 译

“信号和系统”是一门重要的技术基础课，为后续的“数字信号处理”、“现代控制理论”课程打一个基础。

本课程主要介绍：一些基本信号和基本系统的性质，及分析这些信号和系统的基本理论和方法。

这是因为：任何一个复杂的信号都可以看作由一些基本信号组成；同样，一个复杂的系统也可看作是由一些简单的子系统组成。

具体内容：

书中按连续时间信号与系统和离散时间信号与系统来分别进行阐述。

1、连续时间信号与系统：

自变量的变换、卷积积分、傅立叶级数、傅立叶变换、拉普拉斯变换、采样

2、离散时间信号与系统：

自变量的变换、卷积和、傅立叶级数、傅立叶变换、Z变换、重建

从而了解信号与系统的时域特性和频域特性，以及系统的稳定性等判定方法。

打算:(以这本教材为主,附加一些相关的知识)

一、删除

第8章——通信系统(全部)

第9章——拉普拉斯变换

二、参考书:《信号与系统》 于慧敏 主编 化学工业出版社 2002年

三、考核成绩:平时成绩(作业)占10%左右。

四、实验(0.5学分,占10%左右)

1、时间: 后半学期开始

2、工具软件: MATLAB 6.5版

五、联系方式:

1、吴坚 电话: 13186983069 Email: wujian69@zju.edu.cn

2、生仪学院[FTP 10.12.41.6](ftp://10.12.41.6) 80G硬盘内 “吴坚”文件夹

第一章

信号与系统

1.0 引言

一、信号和系统的基本概念

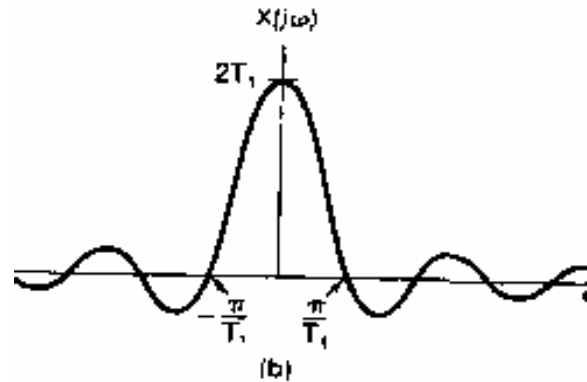
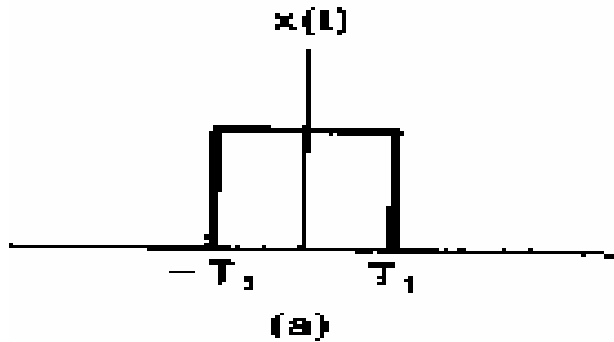
- 1、信号——广义地说，信号是随时间和空间变化的某种物理量，是信息的载体。（声、光、电等信号）。

信号的特性可从两个方面来描述：

时域——自变量为： t

频域——自变量为： ω

- 1)、时间特性——波形、幅度、重复周期及信号变化的快慢等。
2)、频率特性——振幅频谱和相位频谱。即从频域来研究信号的变化情况。



- 2、系统——能够对信号完成某种变换或运算的集合体称为系统。

(系统可大可小)

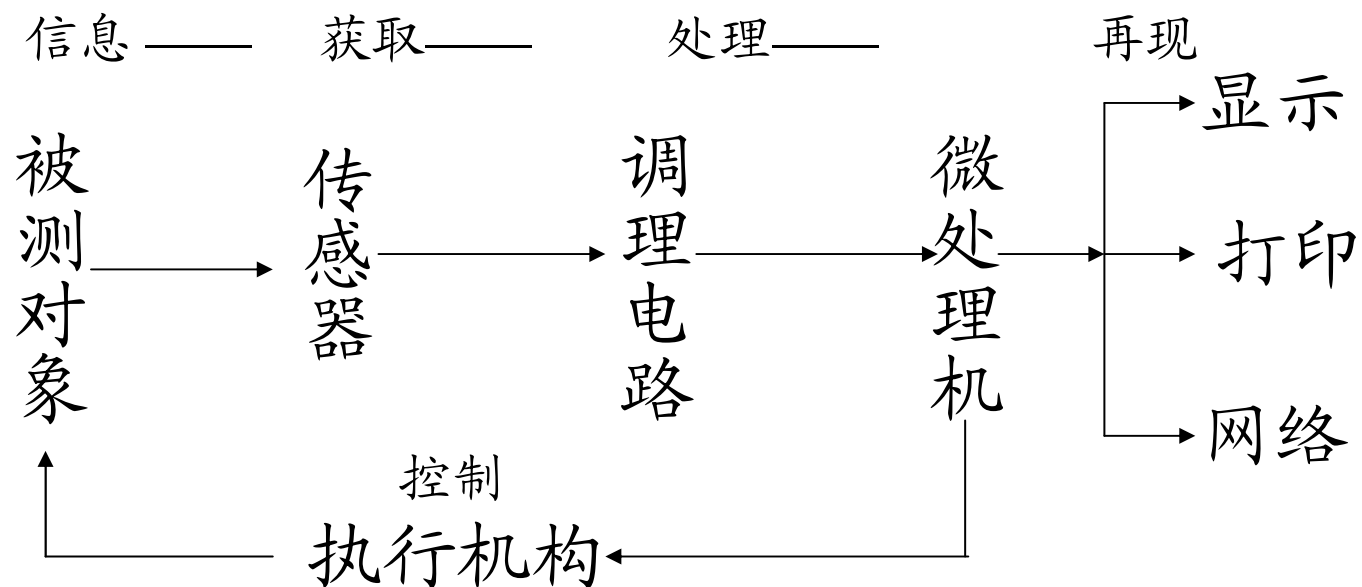


图 1 控制系统

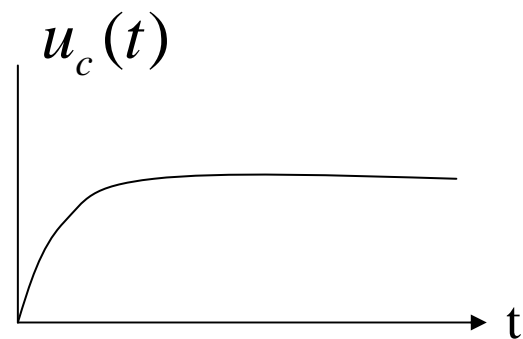
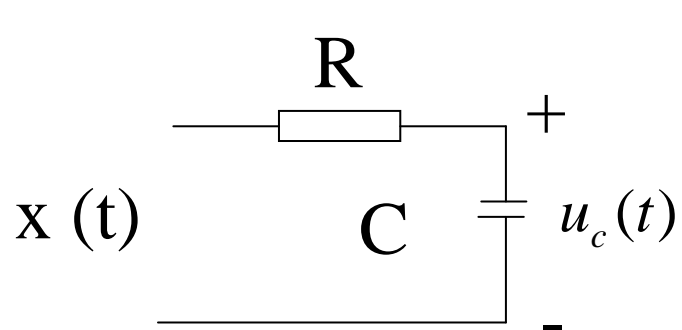


图 2 RC电路

二、信号的分类

信号的分类方法很多。

1、确定性信号与随机信号

按信号与时间的函数关系来分，信号可分为确定性信号与随机信号。

1)、确定性信号——指能够表示为确定的时间函数的信号。

当给定某一时间值时，信号有确定的数值。

例如：正弦信号、指数信号和各种周期信号等。

2)、随机信号——不是时间 t 的确定函数的信号。

它在每一个确定时刻的分布值是不确定的。

例如：电器元件中的热噪声等。

本课程讲述确定性信号。

2、周期信号与非周期信号

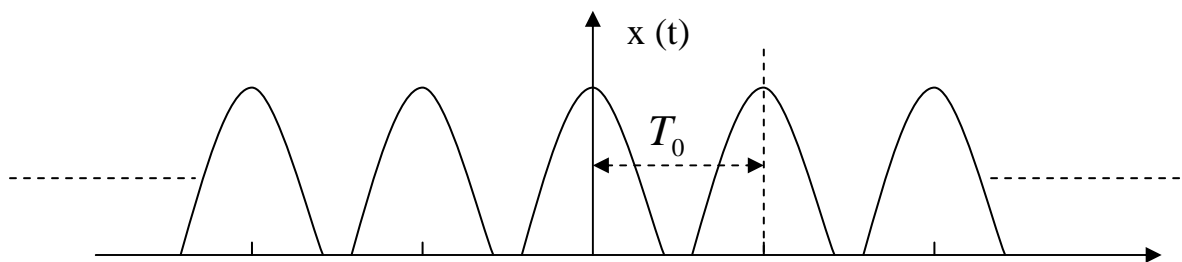
按信号随时间变量 t （或 n ）变化的规律来分，可分为周期信号与非周期信号。

1) 周期信号

●连续周期信号可表示为：

$$x(t) = x(t + mT) \quad , \quad \text{其中: } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

把能使上式成立的最小正值 T ，称为 $x(t)$ 的基波周期 T_0 。

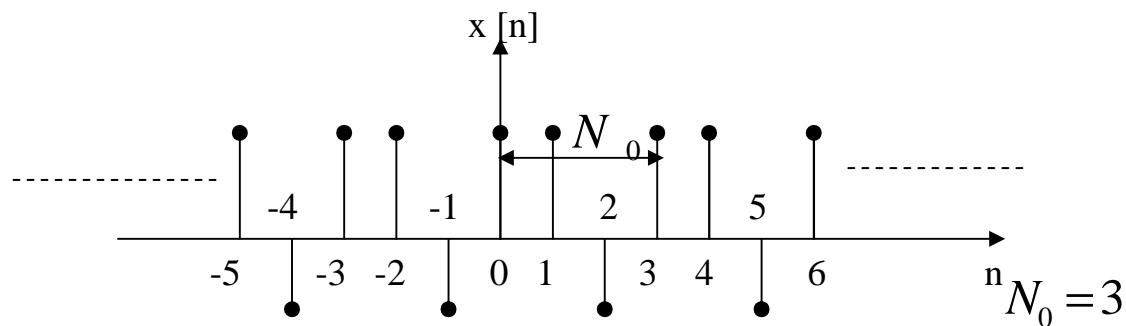


●离散周期信号可表示为：

$$x[n] = x[n + mN] \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

其中： N 为正整数。

把能使上式成立的最小正整数 N ，称为 $x[n]$ 的基波周期 N_0 。



2)、不满足上述关系的信号则称为非周期信号。

3、奇信号与偶信号

按信号是**关于原点对称**或**关于坐标纵轴对称**来分，又可分为奇信号与偶信号

1)、奇信号

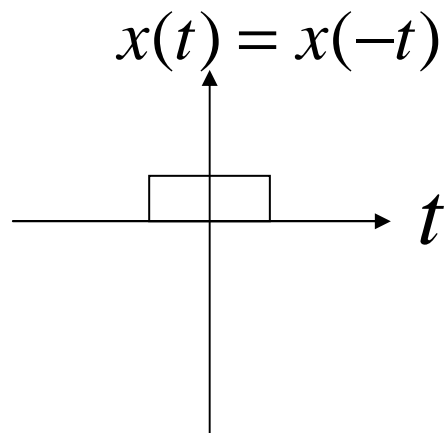
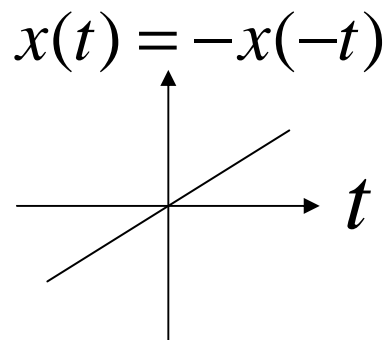
$$x(t) = -x(-t)$$

或 $x[n] = -x[-n]$

2)、偶信号

$$x(t) = x(-t)$$

或 $x[n] = x[-n]$ 。



4、能量信号和功率信号

一个信号的能量和功率是这样定义的：

设信号电压或电流为 $x(t)$ ，则它在电阻为 1Ω 上的瞬时功率为

$$p(t) = |x(t)|^2$$

在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内消耗的总能量为 $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

平均功率为 $P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

当 $T = (t_2 - t_1) \rightarrow \infty$ 时，总能量 E 和平均功率 P 变为

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

1)、能量信号

信号的能量 E 满足： $0 < E_{\infty} < \infty$ ，而 $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = 0$

2)、功率信号

信号的平均功率 P 满足： $0 < P_{\infty} < \infty$ ，而 $E_{\infty} = \infty$

例1: 已知信号为 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, 试问是能量信号还是功率信号。

解: 因为 $x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$ (欧拉公式)

则有 $|e^{j\omega_0 n}| = 1$

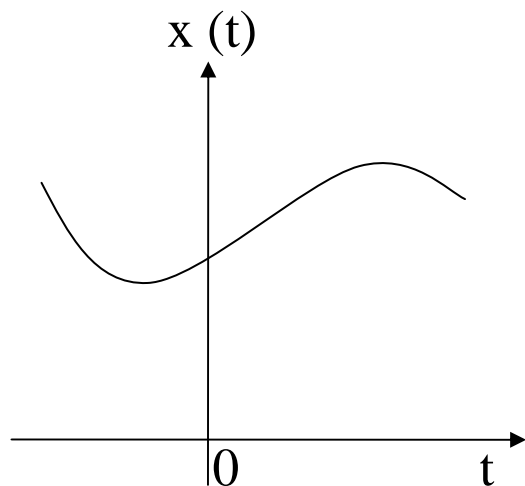
$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \times (2N+1) = 1$$

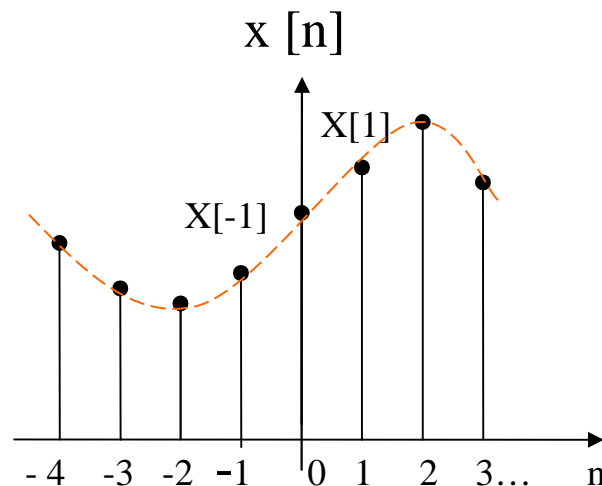
所以是功率信号

5、连续时间信号和离散时间信号——按自变量的取值是否连续来分。

1、连续时间信号——自变量是连续可变的，因此信号在自变量的连续值上都有定义。我们用 t 表示连续时间变量，用圆括号 $(.)$ 把自变量括在里面。例如图一的 $x(t)$ 。



图一 连续时间信号



图二 离散时间信号

2、离散时间信号——自变量仅取在一组离散值上。我们用 n 表示离散时间变量，用方括号 $[.]$ 来表示，例如图二的 $x[n]$ 。

注意：信号 $x[n]$ 总是在 n 的整数值上有定义。

<在本书中是按“连续时间信号和离散时间信号”来分的。>

1.2 自变量的变换 ——在信号与系统分析中是极为有用的。

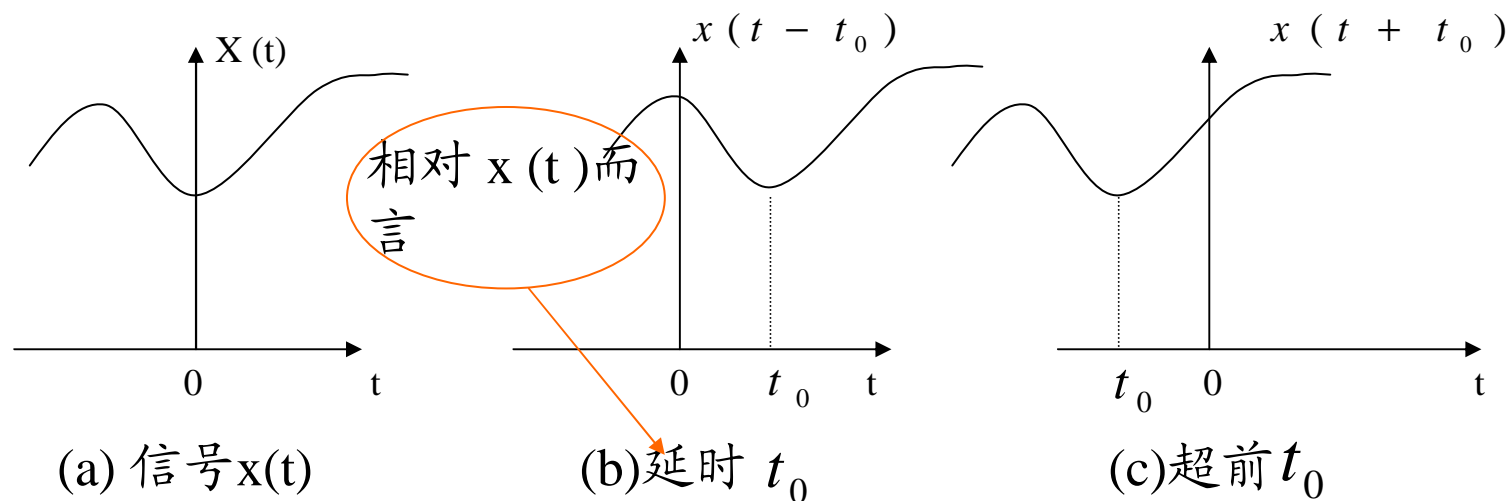
本节讨论的变换只涉及自变量的简单变换（即时间轴的变换）：实现信号的时移、反转、展缩。

一、时移（信号的平移）——即信号的波形沿x轴左右平行移动，但波的形状不变。

1、设连续信号 $x(t)$ 的波形如图(a)所示, 今将 $x(t)$ 沿 t 轴平移 t_0 , 即得到平移信号 $x(t-t_0)$, t_0 为实常数。

当 $t_0 > 0$ 时, 信号沿 t 轴正方向移动 t_0 （右移）, 如图三(b)所示。

当 $t_0 < 0$ 时, 信号沿 t 轴负方向移动 t_0 （左移）, 如图三(c)所示。

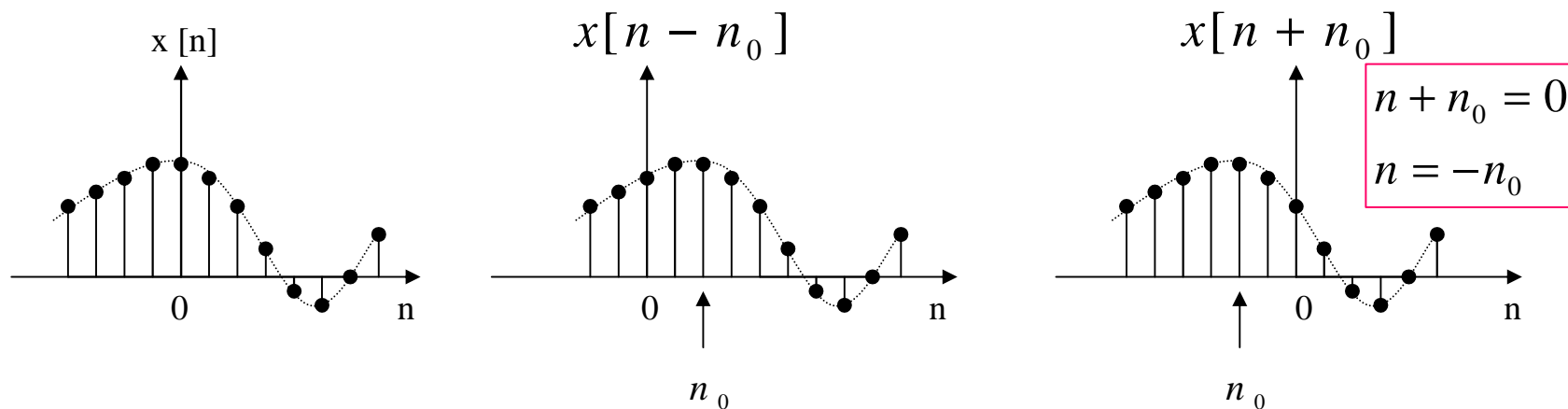


图三 连续信号的平移

2、对离散信号 $x[n]$ ，（设 n_0 为**正整数**）

则 $x[n - n_0]$ 是将 $x[n]$ 沿 n 轴正方向平移 n_0 个序号，如图四(b)所示。

$x[n + n_0]$ 是将 $x[n]$ 沿 n 轴负方向平移 n_0 个序号，如图四(c)所示。



(a) 信号 $x[n]$

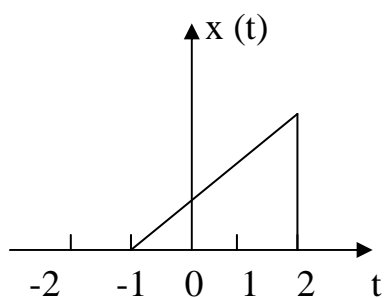
(b) 延时 n_0

(c) 超前 n_0

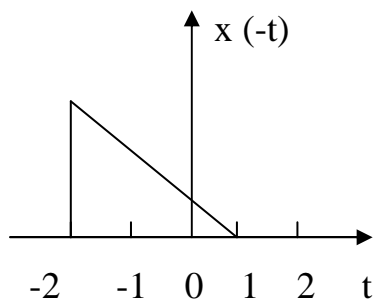
图四 离散信号的平移

二、时间反转（信号的反褶）——就是将信号的波形以纵轴为轴翻转 180° 。

（即自变量由原来的 $t \rightarrow -t$,由原来的 $n \rightarrow -n$ ）

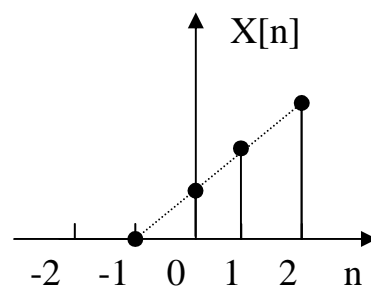


(a)

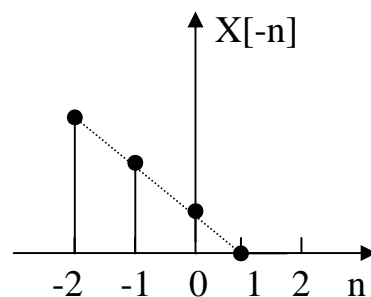


(b)

图五 连续信号的反转



(a)



(b)

图六 离散信号的反转

三、尺度变换（信号的展缩）——将信号在时间轴上线性展宽或压缩，但纵轴上的值不变。

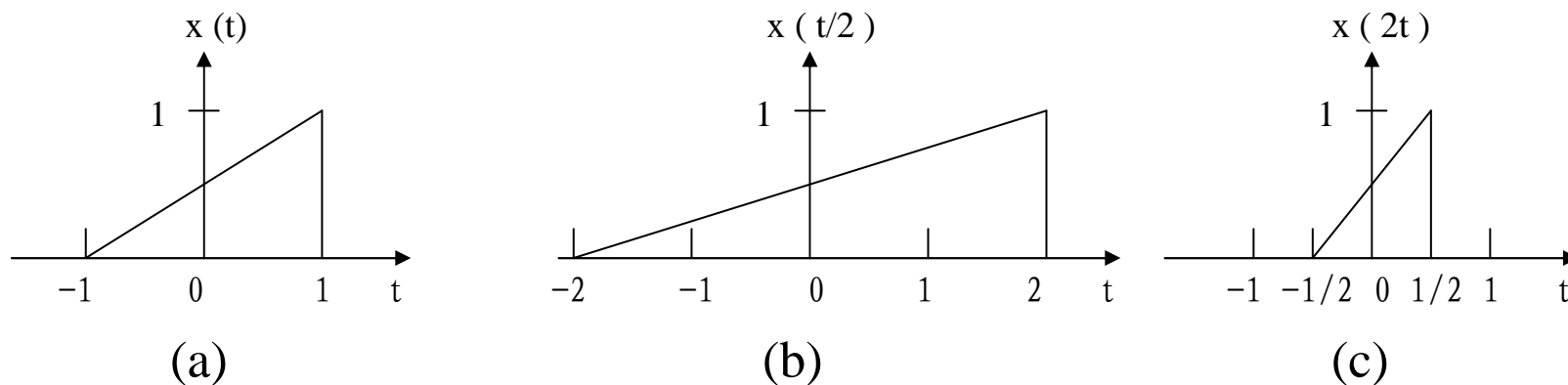
设连续信号 $x(t)$ 的波形如图七（a）所示，若用 at 置换 $x(t)$ 中的 t ，所得的信号 $x(at)$ 即为信号 $x(t)$ 的尺度变换信号（设 a 为正的实常数）。

1、若 $0 < a < 1$ ，则 $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间轴上线性展宽 a 倍。（使变化减慢）

例如：若取 $a=1/2$ ，则得 $x(t/2)$ 。此时原函数 $x(t)$ 中 $t=1$ 时的值，等于在 $x(t/2)$ 中 $t=2$ 的值，即 $x(2*1/2)=x(1)$ 。如图(b)所示；

2、若 $a > 1$ ，则 $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间轴上线性压缩 a 倍。（使变化加速）

例如：若取 $a=2$ ，则得 $x(2t)$ 。此时原函数 $x(t)$ 中 $t=1$ 时的值，等于在 $x(2t)$ 中 $t=1/2$ 的值，即 $x(2*1/2)=x(1)$ 。如图(c)所示；



图七 信号的尺度变换

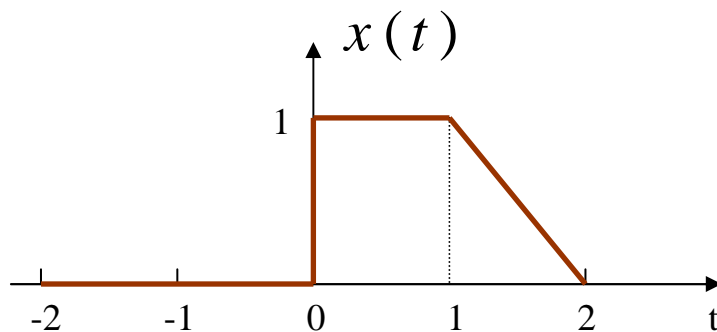
当已知 $x(t)$ ，求 $x(at+b)$ 的波形时，一般可先根据 b 的值将 $x(t)$ 平移，得 $x(t+b)$ ；然后再根据 a 的值对 $x(t+b)$ 进行尺度变换和/或时间反转。

但由于 $x(at+b)$ 可写成 $x[a(t+b/a)]$ 形式。所以也可先根据 a 值进行尺度变换（压缩因子为 $1/a$ ），然后再平移 b/a 。

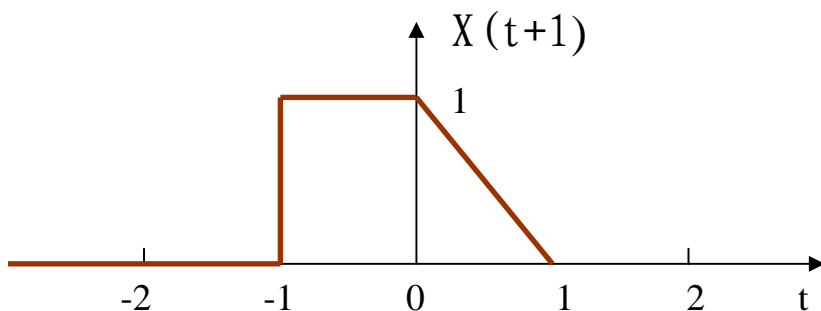
例1.1 已知信号 $x(t)$ 如图所示，画出 $x(t+1)$ 、 $x(-t+1)$ 、 $x(3t/2)$ 、 $x(3t/2+1)$ 的波形。

P 8

解：1）、 $x(t+1)$ 就是 $x(t)$ 沿 t 轴左移1。



(a) 信号 $x(t)$

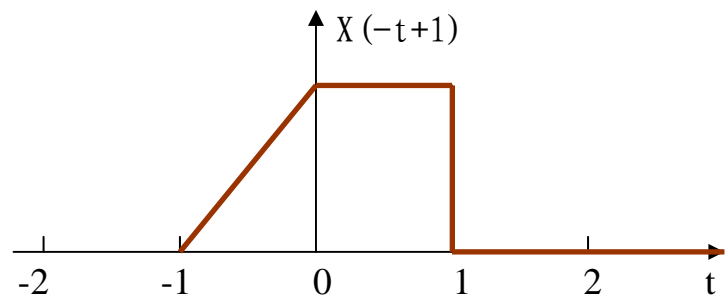
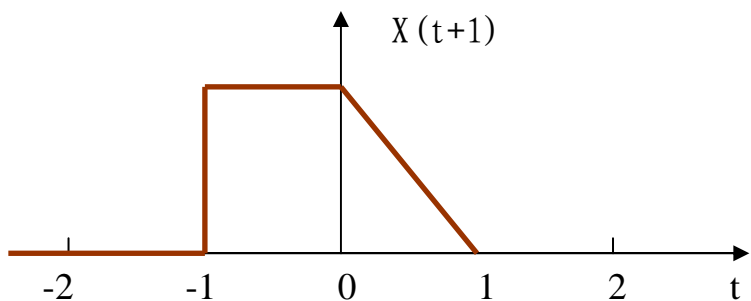
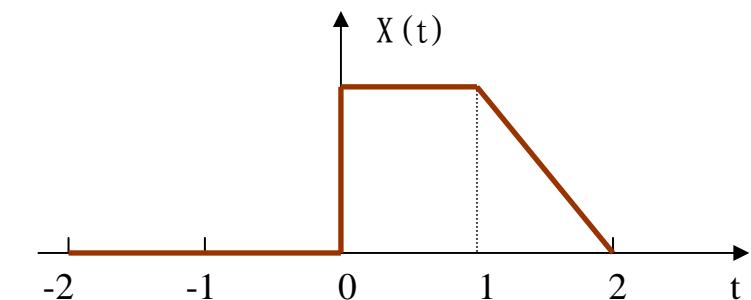


(b) $x(t)$ 左移1后

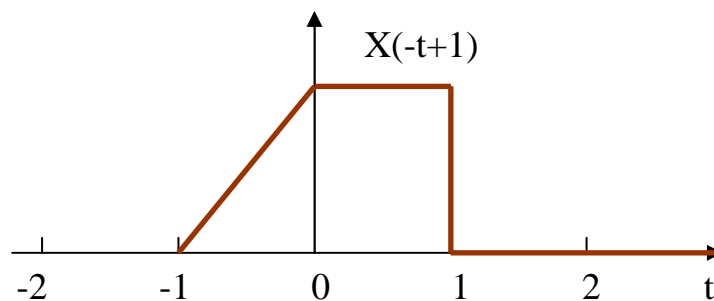
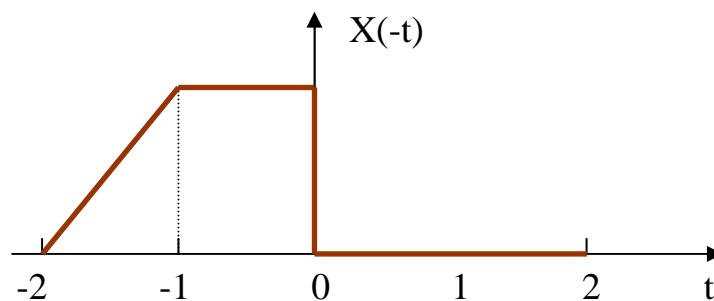
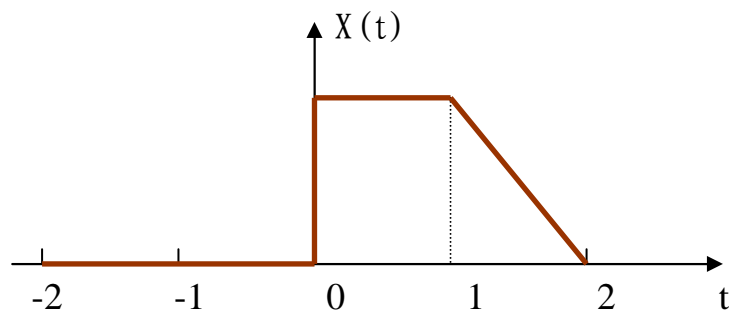
2)、画 $x(-t+1)$ 的波形有两条路径:

a、 $x(t)$ ——左时移1得 $x(t+1)$ ——再反转得 $x(-t+1)$;

b、 $x(t)$ ——先反转得 $x(-t)$ ——再右时移1得 $x[-(t-1)]=x(-t+1)$.

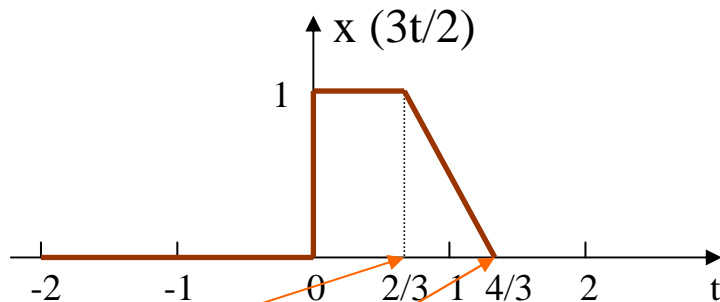
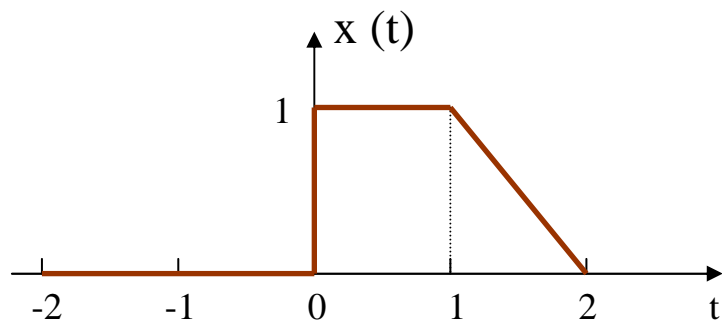


路径 a



路径 b

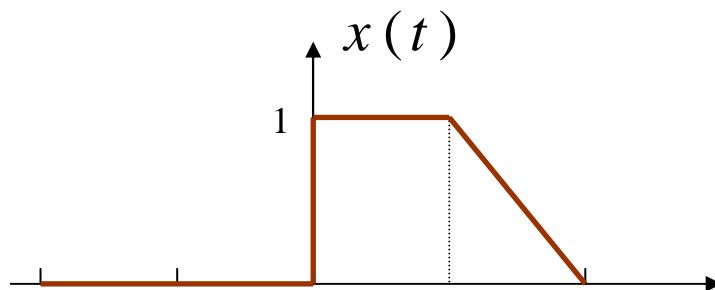
3)、画 $x(3t/2)$ 的波形。因为 $3/2 > 1$, 所以信号 $x(3t/2)$ 的波形可通过对 $x(t)$ 作 $2/3$ 线性压缩而得到。



$x(3/2 * 2/3) = x(1)$ 即 $x(3t/2)$ 中 $t = 2/3$ 时所对应的值与 $x(t)$ 中 $t = 1$ 时的值相等。

$x(3/2 * 4/3) = x(2)$ 即 $x(3t/2)$ 中 $t = 4/3$ 时所对应的值与 $x(t)$ 中 $t = 2$ 时的值相等。

已知信号 $x(t)$ 如图所示

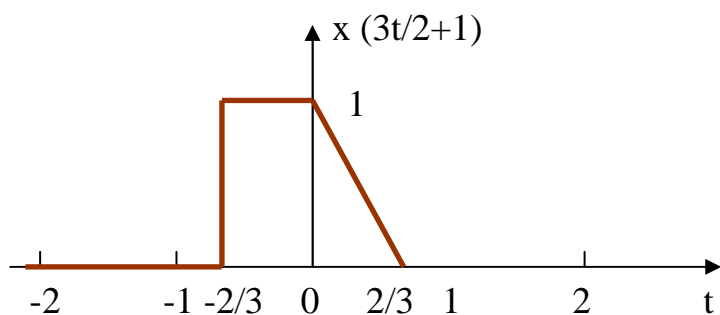
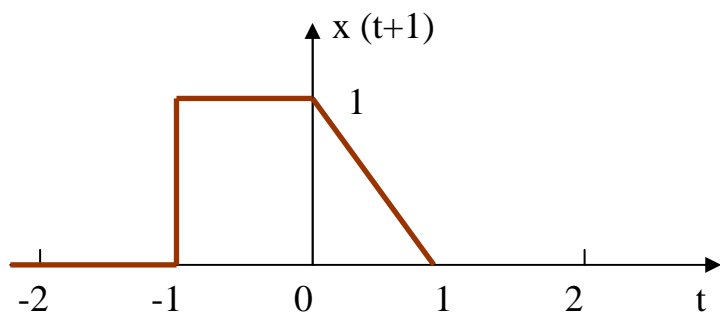
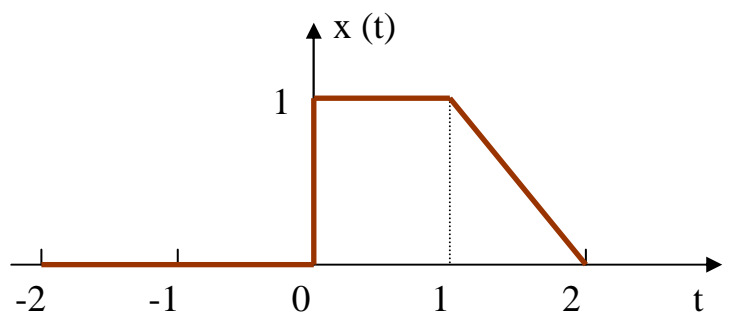


画出 $x(3t/2+1)$ 的波形。

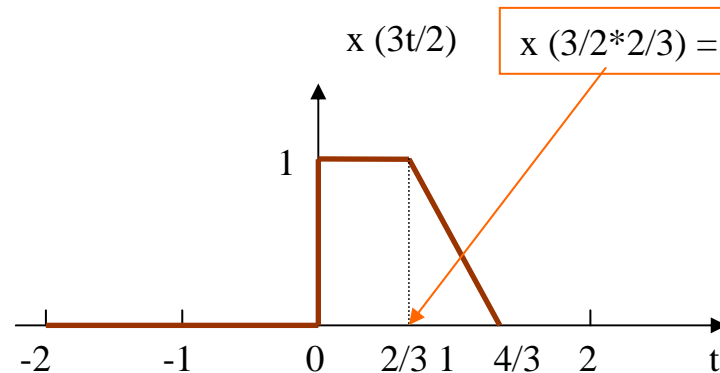
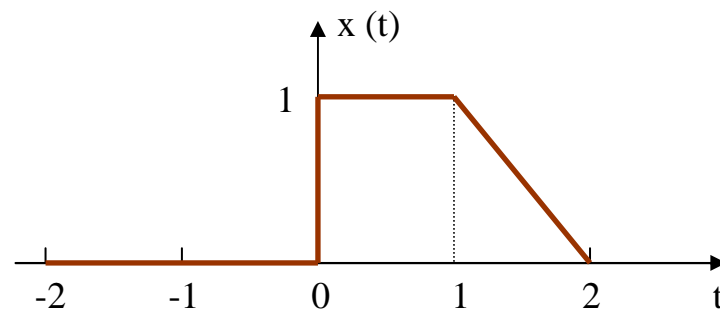
4)、画 $x(3t/2+1)$ 的波形。因为 $x(3t/2+1)=x[3/2(t+2/3)]$,所以有两条路径。

a)、 $x(t)$ ——先左时移1得 $x(t+1)$ ——再压缩2/3得 $x(3t/2+1)$ 。见P9例1.3

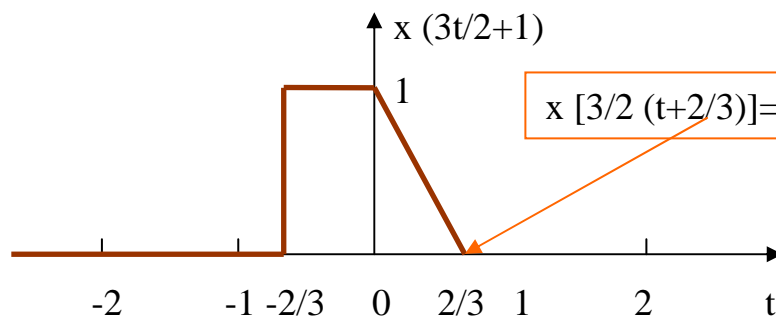
b)、 $x(t)$ ——先压缩2/3得 $x(3t/2)$ ——再左时移2/3得 $x(3t/2+1)$ 。



路径(a)



$$x(3/2 \cdot 2/3) = x(1)$$



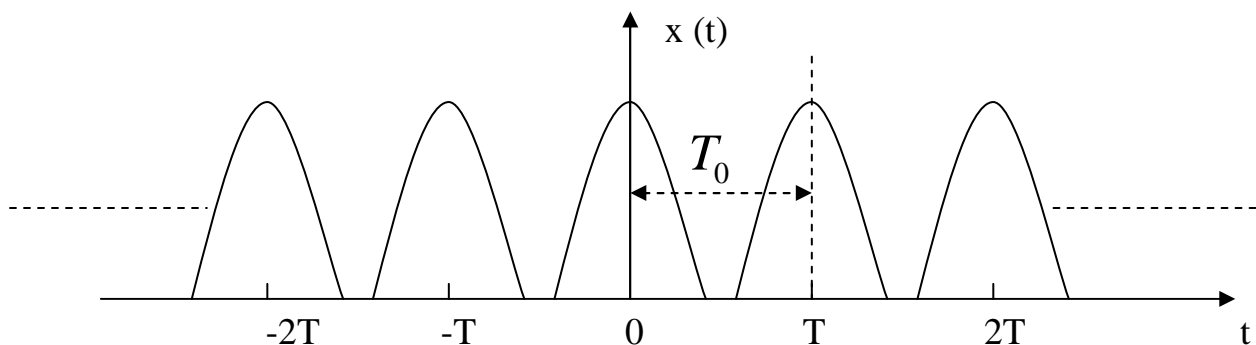
$$x[3/2(t+2/3)] = x(3t/2+1)$$

路径(b)

1.2.2 周期信号

1、连续时间周期信号—— $\begin{cases} 1. & t \text{ 的定义域为 } (-\infty \sim +\infty); \\ 2. & \text{各周期内信号波形完全一样.} \end{cases}$

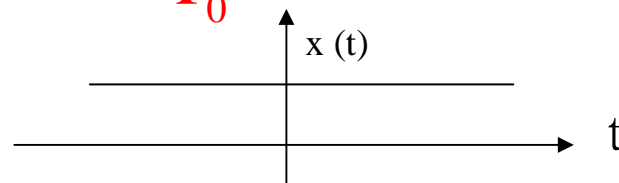
$$\text{即 } x(t) = x(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.11)$$



图九 连续时间周期信号

由图可见：如果 $x(t)$ 是周期信号(周期为 T)，那么对全部 t 和任意整数 m 来说就有 $x(t+mT)=x(t)$ ，即 $x(t)$ 对于周期 $2T$ 、 $3T$ 、 $4T$ 、.....等等都是周期的。使(1.11)式成立的最小正值 T 称为 $x(t)$ 的基波周期 T_0 。当 $x(t)$ 为一常数时，基波周期无定义。

不满足上述条件的信号为非周期信号。



例1.4: 确定以下信号是否为周期信号?

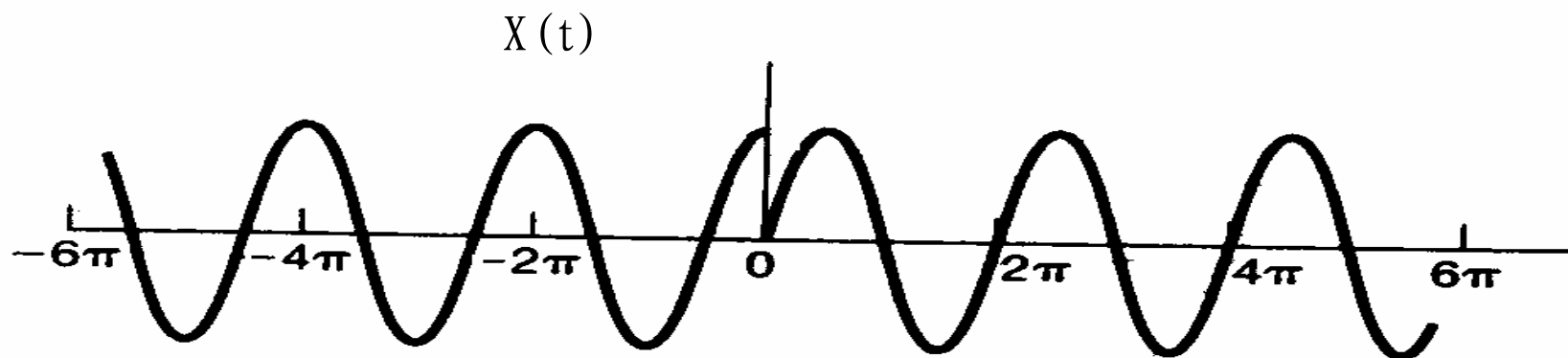
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{如果 } t < 0 \\ \sin(t) & \text{如果 } t \geq 0 \end{cases}$$

解:

因为 $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$

$$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

可见每个函数都以 2π 重复, 但 $x(t)$ 在原点有一个不连续点, 且这个不连续点并不在其它地方重现, 所以该信号不是周期的。



例2: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

$$x(t) = \cos 2t + \sin 3t$$

解: 若是周期信号, 则应满足

$$x_1(t) = x_1(t + m_1 T_1)$$

$$m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_2(t) = x_2(t + m_2 T_2)$$

$$m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

而对信号 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 只有当 $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$ 时, $x(t)$ 才是周期的。即要求

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\cos \omega t$$

为不可约的整数时(有理数?), $x(t)$ 才为周期信号。

本题中 $x_1(t) = \cos 2t$ 即: $\omega_1 = 2 = 2\pi / T_1$ $T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2\pi / 2 = \pi$

$$x_2(t) = \sin 3t \quad \omega_2 = 3 = 2\pi / T_2 \quad T_2 = 2\pi / \omega_2 = 2\pi / 3$$

得: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2\pi/3} = \frac{3}{2}$

$$T = 2T_1 = 3T_2 = 2\pi$$

结论: $x(t)$ 信号是周期的, 周期为 2π 。

例3: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

1、 $x(t) = e^{j(\pi t + 1)}$

2、 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2\pi / \pi = 2$$

$$T_2 = 2\pi / \omega_2 = 2\pi / \pi = 2$$

$$T_1 / T_2 = 2 / 2 = 1$$

$$T = T_1 = T_2 = 2$$

解: 1) $\because x(t) = e^{j(\pi t + 1)} = \cos(\pi t + 1) + j \sin(\pi t + 1)$

可见 $\omega = \pi$, 所以 $T = 2\pi / \omega = 2\pi / \pi = 2$ ——是周期信号

2) 若是周期的, 则有 $x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t+T-3n)^2}$

设 $T = 3k$, 则 $x(t + 3k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-[t-3(n-k)]^2}$

改变求和的范围得 $x(t + 3k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3m)^2} = x(t)$

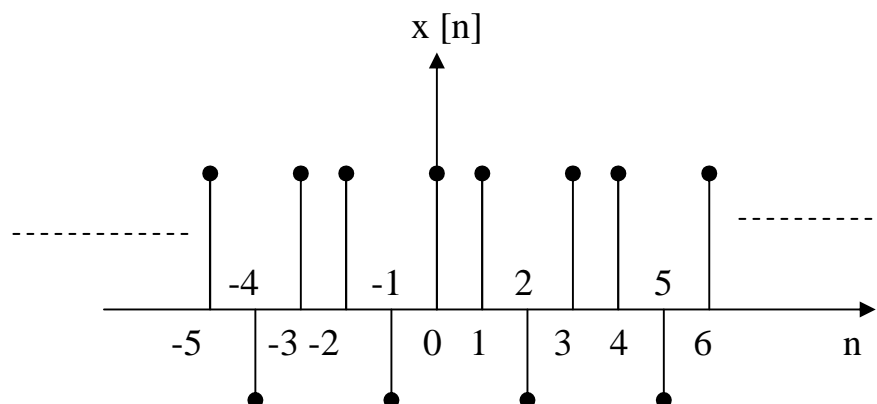
所以, 它是基波周期为 $T_0 = 3$

2、离散时间周期信号

如果一个离散时间信号 $x[n]$ 时移一个 N 后，其值不变，即对全部 n 值有

$$x[n] = x[n+mN] \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

若(1.12)式成立，那么 $x[n]$ 对于周期 $2N$ 、 $3N$ 、 $4N$ 、.....也都是周期的。其中使(1.12)式成立的最小正值 N 就是它的基波周期 N_0 。下图示出一个基波周期 $N_0=3$ 的离散时间周期信号的例子。



图十 离散时间周期信号

例1: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

1、 $x[n] = \cos(8\pi n / 7 + 2)$

2、 $x[n] = e^{j(n/8+\pi)}$

3、 $x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\}$

解: 1) $\because x[n+N] = \cos[8\pi(n+N)/7 + 2] = \cos(8\pi n / 7 + 2 + 8\pi N / 7)$

若 $\frac{8\pi}{7}N = 2\pi m$ 则 $x[n]$ 为周期信号, 即 $\frac{N}{m} = \frac{2\pi}{8\pi/7} = \frac{7}{4}$

所以 $N = \frac{2\pi \times 7}{8\pi} m = \frac{7}{4}m$

不可约的整数

得 $m=4$ $N=7$ ——是周期信号

2) $\because x[n+N] = e^{j[(n+N)/8+\pi]} = e^{j(n/8+\pi)} e^{jN/8}$

若 $N/8 = 2\pi m$, 则 $e^{jN/8} = e^{j2\pi m} = 1$, $x[n]$ 为周期信号。

得 $N = 16\pi m$, $\frac{N}{m} = 16\pi$ ——不是有理数, 所以是非周期的。

$$\begin{aligned}
 3) \quad \because x[n+3k] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ \delta[n+3k-3m] - \delta[n+3k-1-3m] \} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ \delta[n-3(m-k)] - \delta[n-1-3(m-k)] \}
 \end{aligned}$$

$$\text{改变求和范围得} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ \delta[n-3m] - \delta[n-1-3m] \} = x[n]$$

所以，是周期信号； $T=3$

1.2.3 偶信号与奇信号

1、如果一个信号 $x(t)$ 或 $x[n]$,以纵坐标为轴反转后不变,则为偶信号。可写为:

对连续信号有 $x(-t)=x(t)$

对离散信号有 $x[-n]=x[n]$

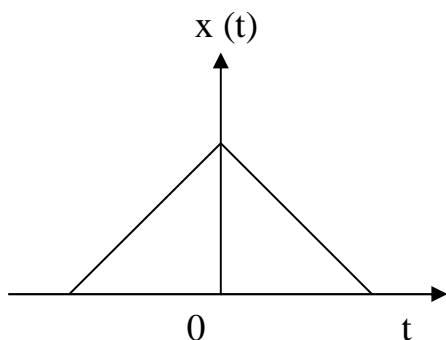
2、如果一个信号 $x(t)$ 或 $x[n]$,以纵坐标为轴反转后有

$$x(-t) = -x(t)$$

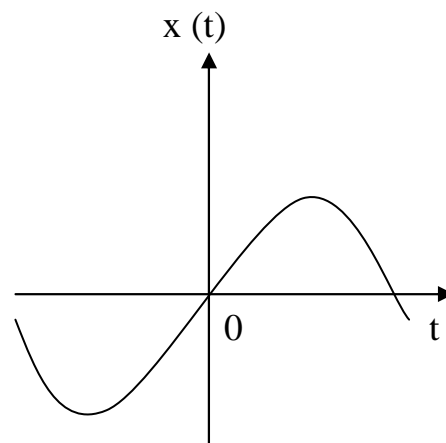
$$x[-n] = -x[n]$$

则为奇信号。一个奇信号在 $t=0$ 或 $n=0$ 时其值必须为0。

下图 (a) 为偶信号; (b) 为奇信号。



(a) 偶连续时间信号



(b) 奇连续时间信号

任何信号均可分解为奇、偶信号之和, 即

$$x(t) = o_d\{x(t)\} + \varepsilon_u\{x(t)\} = x_o(t) + x_e(t)$$

$$\text{其中: } x_o(t) = o_d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad \text{——奇部是奇信号 (1式)}$$

$$x_e(t) = \varepsilon_u\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad \text{——偶部是偶信号 (2式)}$$

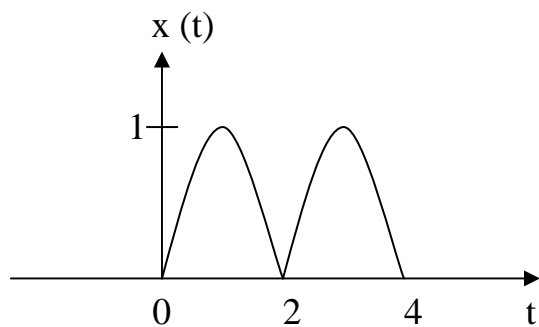
证明如下:

$$\begin{aligned} \text{因 } x(t) &= 1/2[x(t) + x(t) + x(-t) - x(-t)] \\ &= 1/2[x(t) + x(-t)] + 1/2[x(t) - x(-t)] \\ &= \varepsilon_u\{x(t)\} + o_d\{x(t)\} \end{aligned}$$

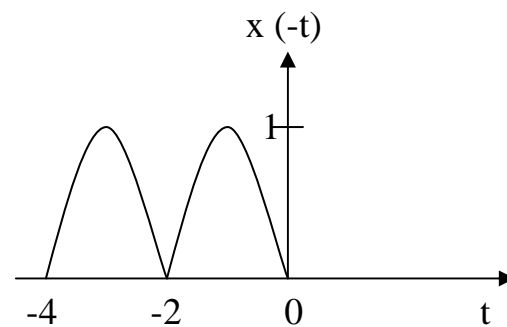
例 1、已知信号如图 (A) 所示, 试画出奇部和偶部的波形。

解: 画的方法:

- 1、首先画出 $x(-t)$ 的波形, 如图 (b) 所示;
- 2、再根据式 1、2, 用图解法进行波形合成, 即可画出奇部和偶部的波形。

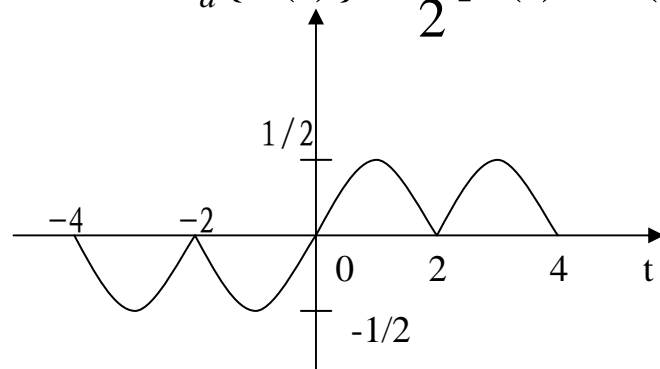


(a)



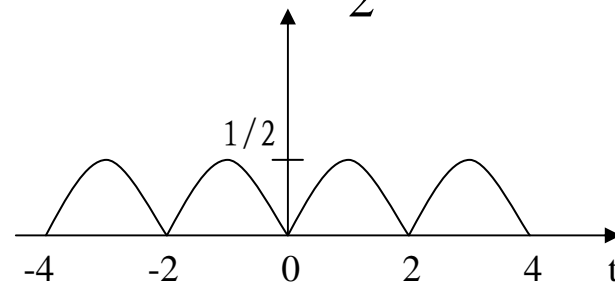
(b)

$$o_d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$



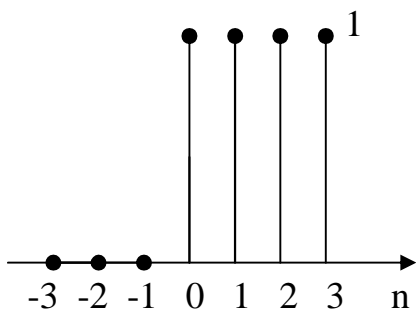
(c)

$$\epsilon_u\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

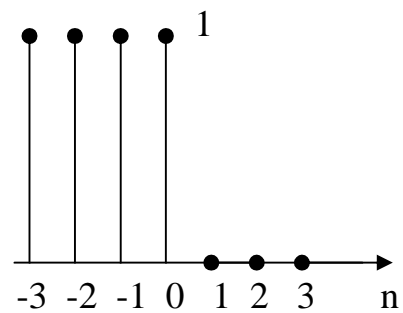


(d)

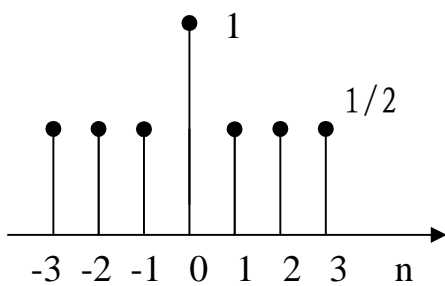
图12 连续信号 $x(t)$ 的奇偶分解



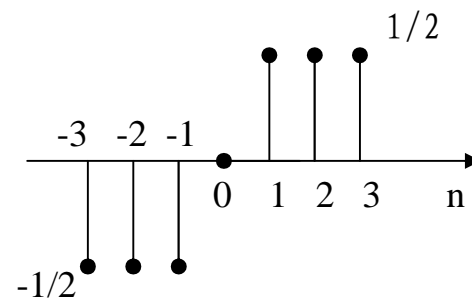
(a) $x[n]$



(b) $x[-n]$



(c) $\mathcal{E}_u\{x[n]\} = x_e[n]$



(d) $\mathcal{O}_d\{x[n]\} = x_o[n]$

图13 离散信号的奇偶分解

例2、 P47中1.34题——是奇、偶信号的几个性质：

1) 证明：若 $x[n]$ 是奇信号，则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$

解：因为 $x[n]$ 是奇信号，则

$$x[-n] = -x[n], \quad x[0] = 0$$

所以
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \{x[n] + x[-n]\} = 0$$

2) $x[n]$ 为一任意信号，证明 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$

解：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x_e[n] + x_o[n]\}^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] x_o[n]$$

这项为奇函数
所以等于0

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

1.3、指数信号与正弦信号

1.3.1 连续时间复指数信号与正弦信号

一、连续时间复指数信号

$$x(t) = ce^{at}$$

其中： c 和 a 一般为复数，即 $a = \sigma + j\omega_0$ 。

1、实指数信号—— c 和 a 均为实数，即 $\omega=0, a=\sigma$ ，这时 $x(t)$ 称为实指数信号。

1)、若 a 为正实数（即 $\sigma > 0$ ），则 $x(t)$ 随 t 指数增长。

2)、若 a 为负实数（即 $\sigma < 0$ ），则 $x(t)$ 随 t 的指数增加而指数衰减。

3)、若 $a=0$ （即 $\sigma=0$ ），则 $x(t)$ 为一常数。

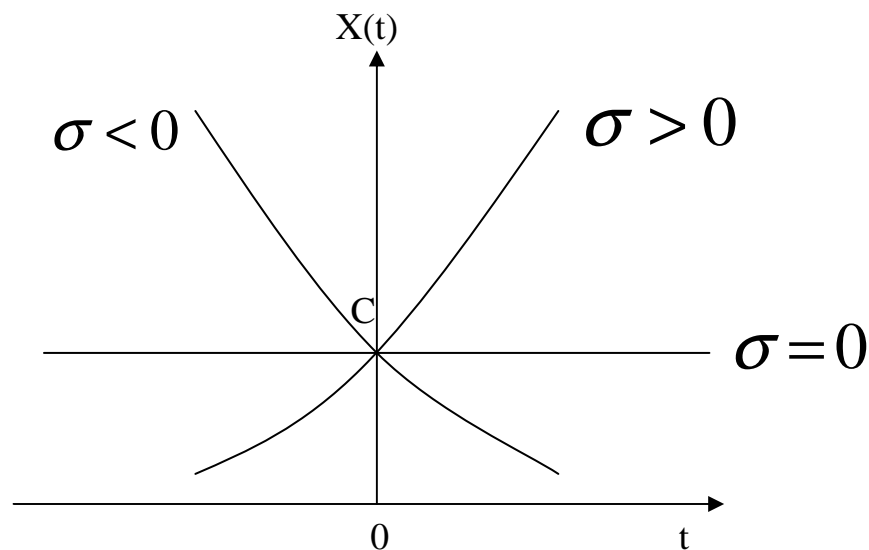


图 14

2、周期复指数信号——当 $c=1$, $a = j\omega_0$, 为纯虚数时, 即 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, 这时 $x(t)$ 为周期复指数信号。

证明: 由周期信号定义可知, 周期信号必须为: $x(t) = x(t+T)$, 即

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

可见, 要求使 $e^{j\omega_0 T} = 1$, $x(t)$ 就是周期信号。

1) 若 $\omega_0 = 0$, $x(t)=1$, 这时对任何 T 值都是周期的——但无意义;

2) 若 $\omega_0 \neq 0$, 则必须使 $\omega_0 T = 2n\pi$, 因为 (据欧拉公式) 有:

$$e^{j\omega_0 T} = \cos \omega_0 T + j \sin \omega_0 T = \cos 2n\pi + j \sin 2n\pi = 1$$

使上式成立的最小正 T 值, 称基波周期 T_0 : $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$, ω_0 为基波频率。

可见, $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{-j\omega_0 t}$ 都具有同一基波周期的周期信号。

同样, 正弦信号也能用复指数信号来表示

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \quad , \quad \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

因此:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

[因为

$$A e^{j(\omega_0 t + \phi)} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + jA \sin(\omega_0 t + \phi)$$

↑
实部

↑
虚部

以后我们会看到, **周期复指数信号是构成复杂信号的基本单元**。因此在信号或系统的分析中是十分有用的。

3、成谐波关系的复指数信号——即周期复指数信号的集合。该集合内的全部信号都是周期的, 且有一个公共周期 T_0 。

因为复指数信号 $e^{j\omega t}$ 要成为具有周期为 T_0 的周期信号的必要条件是: $e^{j\omega T_0} = 1$

这意味着 $\omega T_0 = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (1.34)

由此, 若定义 $\omega_0 = 2\pi / T_0$, 则有 $\omega = 2\pi k / T_0 = \omega_0 k$

从而得出: 为满足(1.34)式, ω 必须是 ω_0 的整数倍。这就是说: **一个成谐波关系的复指数信号的集合就是一组其基波频率是某一正频率 ω_0 的整数倍的复指数信号**, 即

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1) 当 $k=0$, $\varphi_k(t)$ 是一个常数;

2) 当 $k \neq 0$, $\varphi_k(t)$ 是周期的, 其基波频率为 $|k| \omega_0$, 基波周期为

$$T_k = \frac{2\pi}{|k| \omega_0} = \frac{2\pi}{|k| 2\pi / T_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

4、一般复指数信号——即当 c 、 a 均为复数时。

$$x(t) = c e^{at}$$

当 C 用极坐标表示, a 用直角坐标表示时, 有

$$c = |c| e^{j\theta}$$

$$a = r + j\omega_0$$

$$c e^{at} = |c| e^{j\theta} e^{(r + j\omega_0)t} = |c| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

利用欧拉公式可进一步展开为

$$c e^{at} = |c| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |c| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

由此可见, 若 $r=0$ 则复指数信号其实部和虚部都是正弦型的。

若 $r>0$, 则其实部和虚部是一个振幅为指数增长的 (见图 (a))。

若 $r<0$, 则为振幅成指数衰减的正弦信号 (见图 (b))。

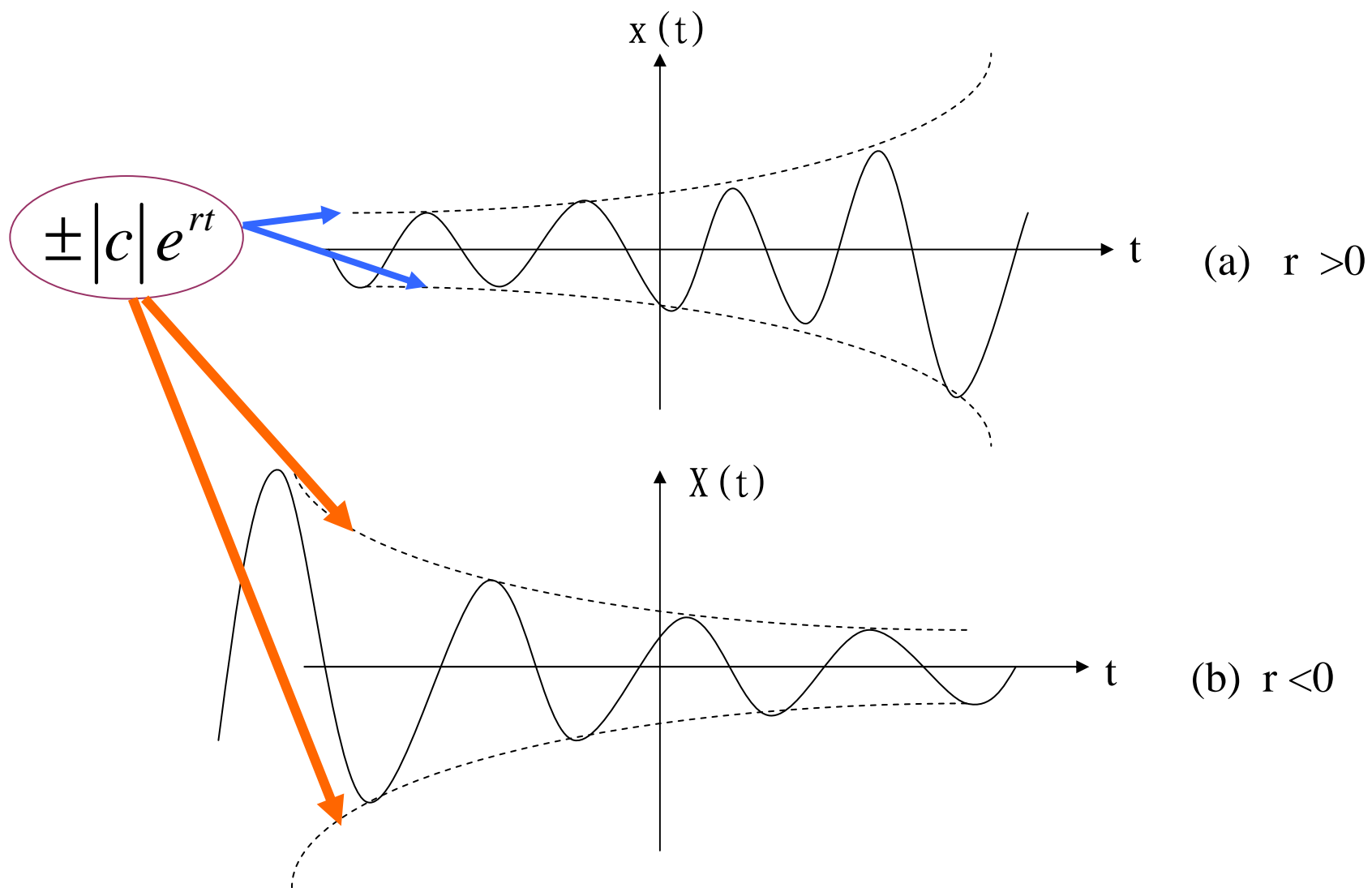


图 15

1.3.2 离散时间复指数信号与正弦信号

离散时间复指数信号定义为：
$$x[n] = Ca^n \quad (1.44),$$

其中：**C和a均为复数。**

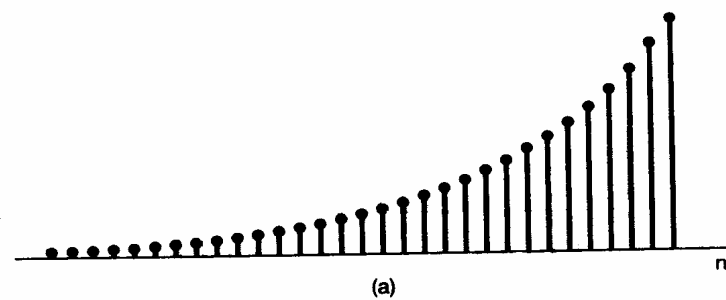
若令 $a = e^{\beta}$ ，则可写成另一种表示形式

$$x[n] = Ce^{\beta n} \quad (1.45)$$

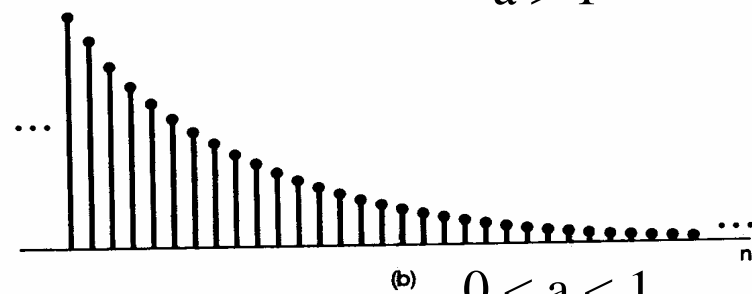
虽然(1.45)式类似于连续时间的复指数信号的表示形式，但式(1.44)更方便、更实用。

1、实指数信号——**C和a都是实数。**

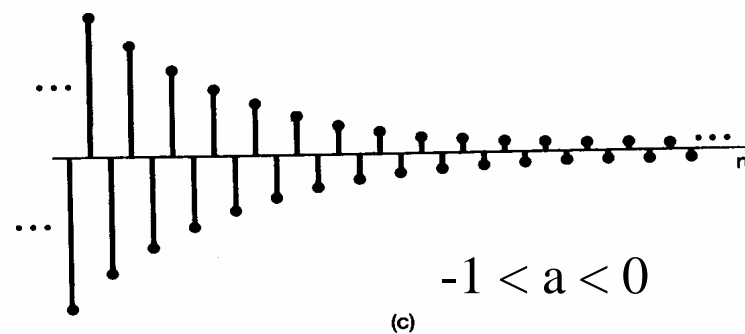
- 1)、若 $|a| > 1$ ，则信号随n指数增长；（见图1.24(a)、(d)）
- 2)、若 $0 < |a| < 1$ ，则信号随n指数衰减；（见图1.24(b)、(c)）
- 3)、若 a 为正，则 Ca^n 的全部值都具有相同符号；（见图1.24(a)、(b)）
- 4)、当 a 为负时，则 $x[n]$ 值的符号交替变化；（见图1.24(c)、(d)）
- 5)、当 $a=1$ 时， $x[n]$ 为一常数；（见图(e)）
- 6)、当 $a=-1$ 时， $x[n]$ 的值在+C和-C之间交替变化。（见图(f)）



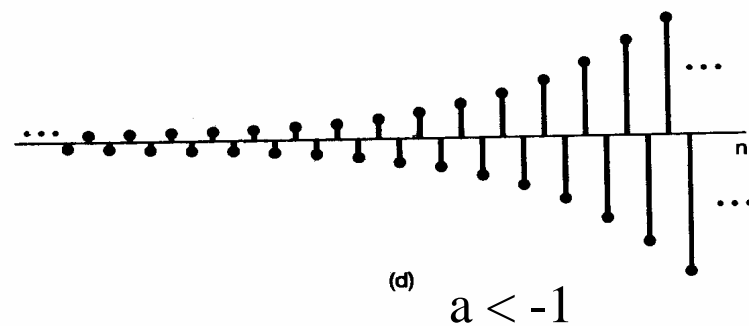
$$a > 1$$



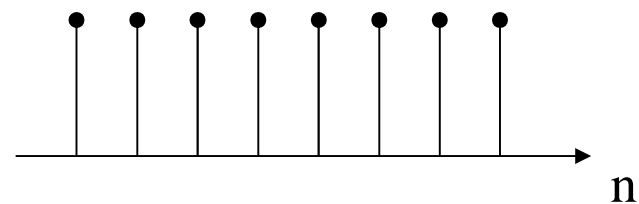
$$0 < a < 1$$



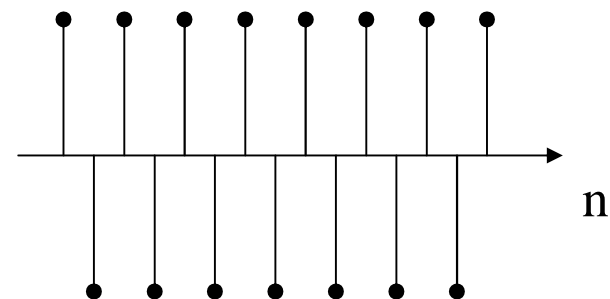
$$-1 < a < 0$$



$$a < -1$$



$$a = 1$$



$$a = -1$$

图16 实指数信号

$$x[n] = Ca^n$$

2、正弦信号

C=1

若令式 $x[n] = Ca^n = Ce^{\beta n}$ 中的 β 为纯虚数 $j\omega_0$ ，就可得到

另一个重要的复指数序列 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ (1.46)

再利用欧拉公式，可将复指数和正弦序列联系起来，即

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

因为 $e^{j\omega_0 n}$ 的模 $|e^{j\omega_0 n}| = 1$ ，所以式(1.46)中信号的每个样本在信号能量中的

贡献都是1。因此在 $-\infty < n < \infty$ 内的总能量为无穷大；而在每单位时刻点上

的平均功率等于1。

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \times (2N+1) = 1$$

离散时间情况下的正弦信号一般表示式为：

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

3、一般复指数信号——**C和a均为复数**

将C和a均以极坐标形式给出，即 $C = |C|e^{j\theta}$ ， $a = |a|e^{j\omega_0}$

则有 $x[n] = Ca^n = |C||a|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$

$$= |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

1)、当 $|a|=1$ 时， $x[n]$ 为

$$x[n] = |C| \cos(\omega_0 n + \theta) + j |C| \sin(\omega_0 n + \theta)$$

可见，此时复指数序列的**实部和虚部都是正弦序列**；

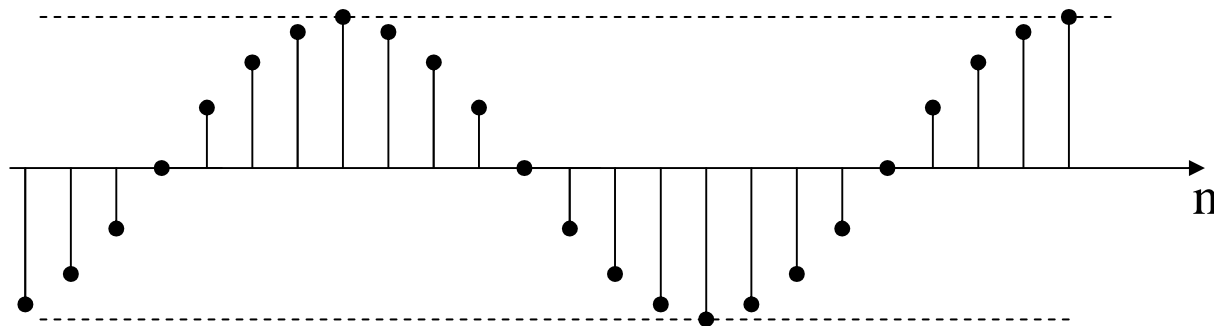
2)、当 $|a| < 1$ 时， $x[n]$ 的实部和虚部为正弦序列乘以一个**按指数衰减的序列**。

$$\text{即： } x[n] = |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

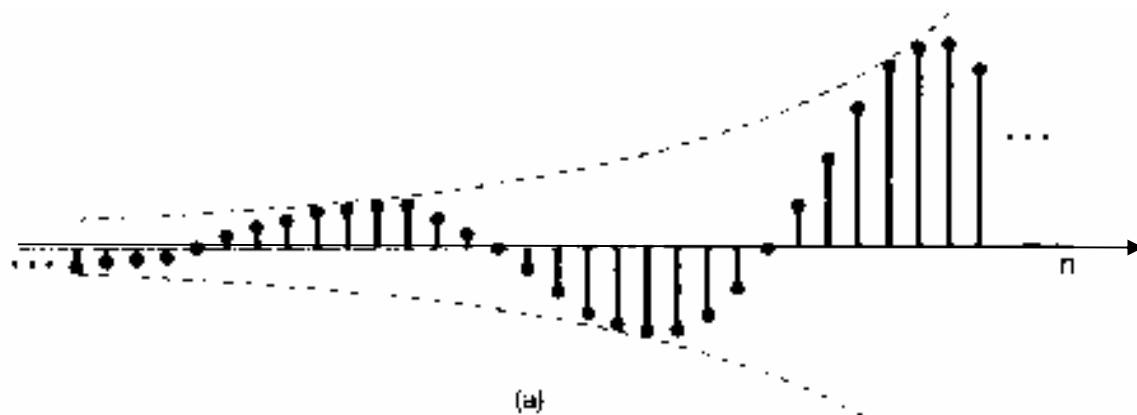
3)、当 $|a| > 1$ 时， $x[n]$ 的实部和虚部为正弦序列乘以一个**按指数增长的序列**。

$$x[n] = |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

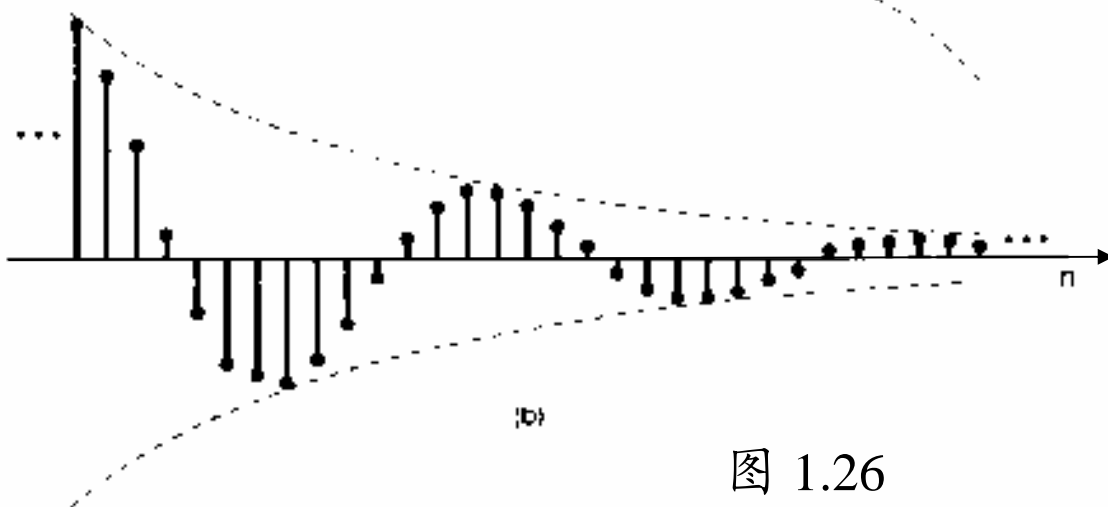
图1.26示出了这些信号的例子。



(a) $|a| = 1$



(b) $|a| > 1$



(c) $|a| < 1$

图 1.26

第一次#

- 1、信号和系统的定义
- 2、信号的分类
- 3、自变量的变换 ——掌握 时移、反转、展缩
- 4、周期信号 ——判别 及确定信号的周期 （注意定义域）
- 5、偶信号与奇信号 ——用奇、偶信号来表示任意一个信号。
- 6、指数信号与正弦信号

连续时间复指数信号与正弦信号 $x(t) = ce^{at}$

离散时间复指数信号与正弦信号 $x[n] = Ca^n = Ce^{\beta n}$

要求：了解不同的C、a值对函数的影响

能求基波频率或基波周期

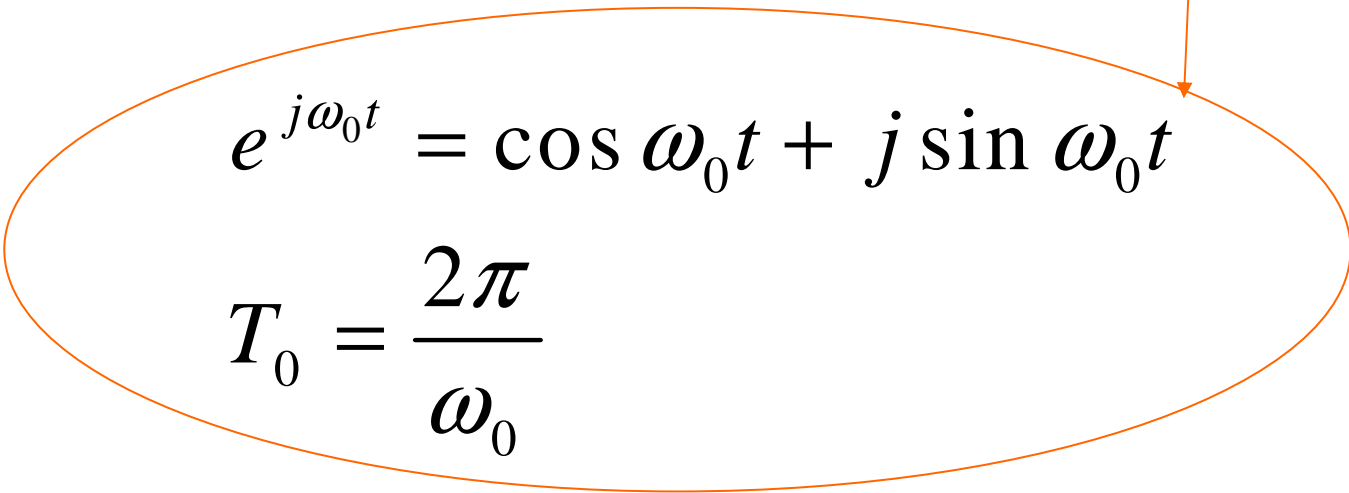
1.3.3 离散时间复指数序列的周期性质

连续时间信号与离散时间信号之间有许多相似点，但也存在一些重要的差别：

1、连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 具有以下两个性质：

1)、 ω_0 愈大，信号振荡的速率就愈高；

2)、 $e^{j\omega_0 t}$ 对任何 ω_0 值都是周期的。


$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

2、离散时间复指数信号 $e^{j\omega_0 n}$

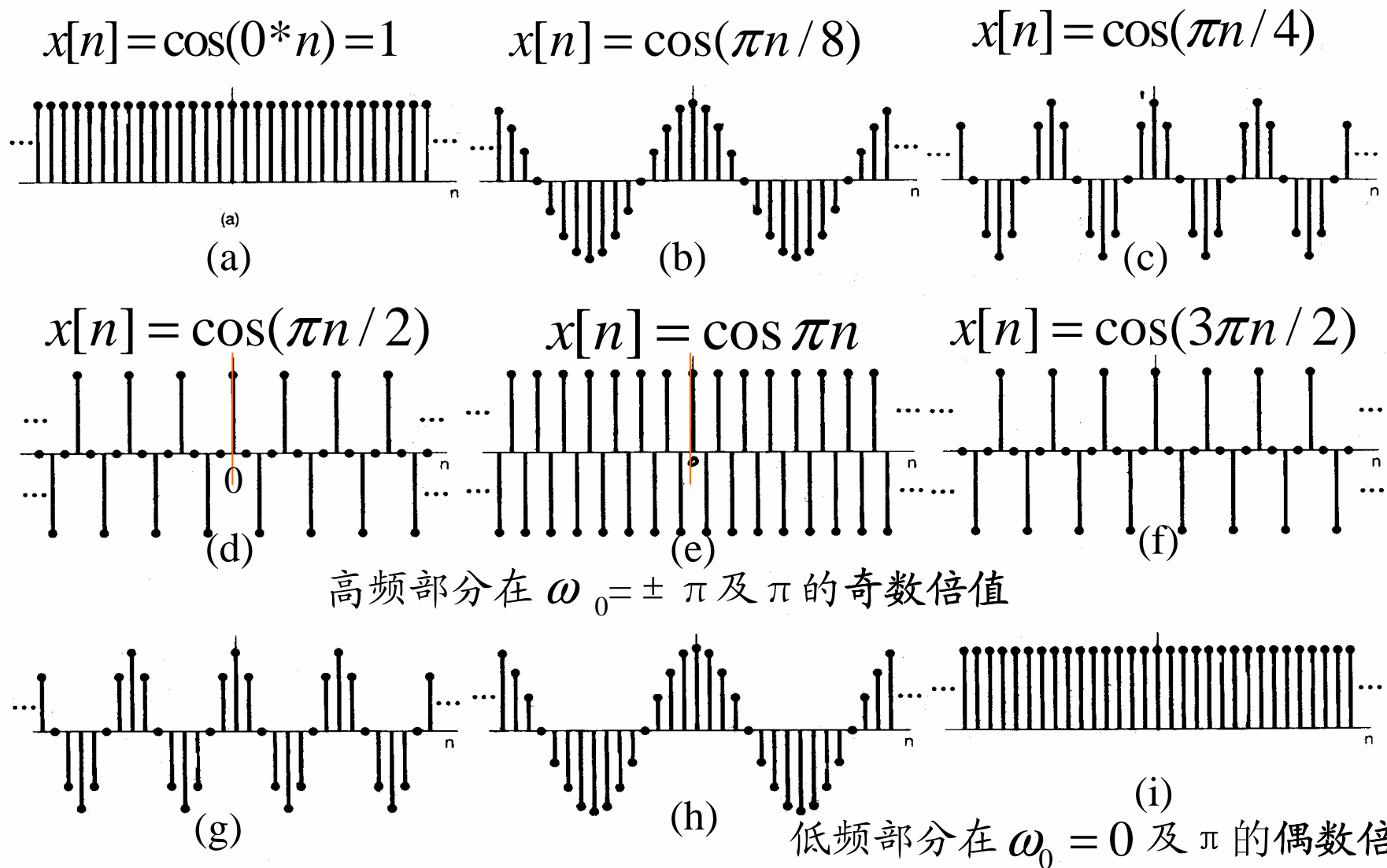
1)、当频率变为 $\omega_0 + 2\pi$ 时

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

即离散时间复指数信号在 $\omega_0 + 2\pi$ 时的值与频率为 ω_0 时的值是完全一样的。所以,在考虑这种离散时间复指数信号时,仅仅需要在某个 2π 间隔内选择 ω_0 就行了。

(大多数情况下取 $0 \leq \omega_0 < 2\pi$, 或 $-\pi \leq \omega_0 < \pi$)

即: $e^{j\omega_0 n}$ 不具有随 ω_0 的增加而增加振荡速率的特性。事实上,随着 ω_0 从0开始增加,其振荡速率愈来愈快,直到 $\omega_0 = \pi$ 为止。若继续增加 ω_0 , 其振荡速率下降直到 $\omega_0 = 2\pi$ 为止,这时又得到与 $\omega_0 = 0$ 时相同的结果。(见图1.27).



$x[n] = \cos(7\pi n / 4)$ $x[n] = \cos(15\pi n / 8)$ $x[n] = \cos(2\pi n)$

图 1.27

由图可见离散时间复指数信号的低频部分是在 $\omega_0 = 0$ 及 π 的偶数倍值附近。而高频部分是在 $\omega_0 = \pm \pi$ 及 π 的奇数倍值附近。

注意：在 $\omega_0 = \pi$ 及 π 的奇数倍值处有

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

以致于信号在每一点上都改变符号，产生剧烈振荡。

2)、离散时间复指数信号的周期性问题

若信号 $e^{j\omega_0 n}$ 是周期的，就必须有

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

这就要求 $e^{j\omega_0 N} = 1$

为此 $\omega_0 N$ 必须是 2π 的整数倍，即

$$\omega_0 N = 2\pi m, \text{ 或 } \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \text{ 或 } \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}, \quad N = m \frac{2\pi}{\omega_0}$$

若 $\omega_0 / 2\pi$ 为有理数，则是周期的；否则就不是周期的。

例如下图 (a) 和 (b) 的信号是周期的，而图 (c) 的信号不是周期的。

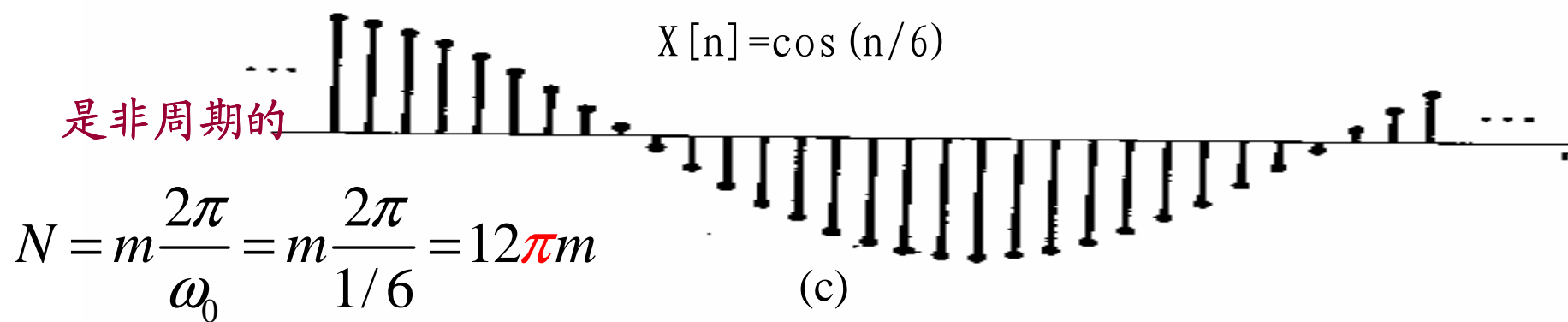
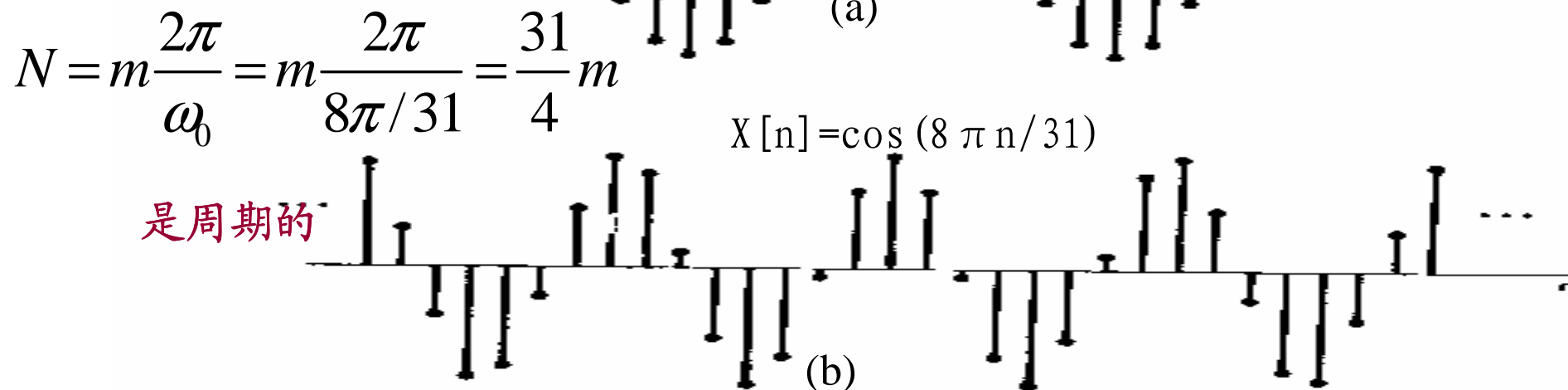
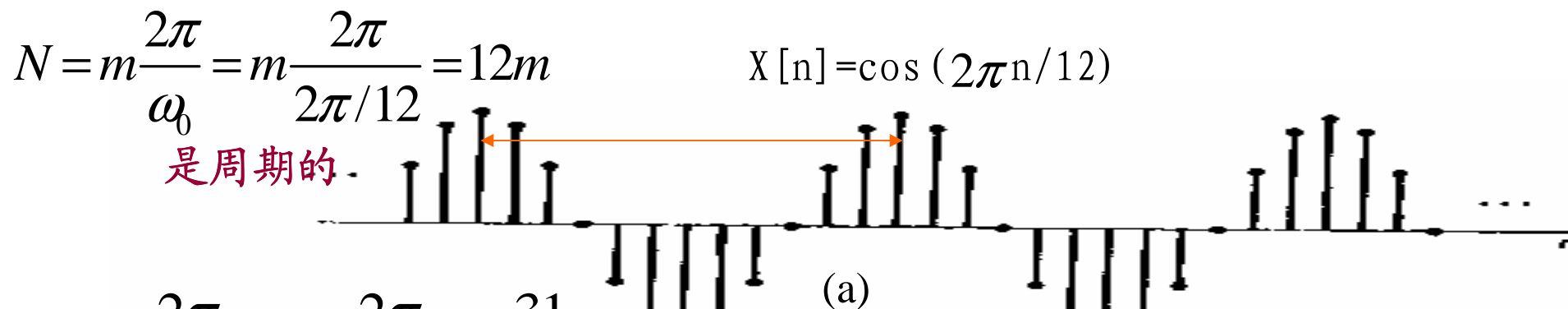


图1.25 离散时间振弦信号

连续信号是周期的!

根据上述讨论，**可求得**离散时间复指数信号的**基波**周期为

$$N = m(2\pi / \omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0 / m} \quad (1.58)$$

这种表示方法显然与连续时间信号中的表示不同。

表1.1列出了 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的一些不同点。

表1.1 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同，信号也不同	频率相差 2π 的整数，信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0 / 2\pi = m / N$ 为有理数 时才是周期的。这里 N和m均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率为 $(\omega_0 / m) = 2\pi / N$
基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0, T = 2\pi / \omega_0$	基波周期: $\omega_0 = 0$,无定义 $\omega_0 \neq 0, N = m(2\pi / \omega_0)$

例: 求如下信号的基波周期 $x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$

(例1.6)

解: $x_1[n] = e^{j(2\pi/3)n}$, $\omega_1 = 2\pi/3$, $N_1 = m \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3m$

$x_2[n] = e^{j(3\pi/4)n}$, $\omega_2 = 3\pi/4$, $N_2 = m \frac{2\pi}{3\pi/4} = \frac{8}{3}m$

是有理数——是周期的

可见:

$x_1[n]$ 的基波周期为3, $x_2[n]$ 的基波周期8。其最小公倍数为24, 即 $x[n]$ 的基波周期为 $N_0 = 24$ 。

3、成谐波关系的信号

1)、在连续时间情况下, 这些成谐波关系的信号为:

$$\phi_k(t) = e^{jk(2\pi/T)t},$$

当 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时都各不相同;

2)、在离散时间情况下, 这些成谐波关系的信号为:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

当是第 $k+N$ 个谐波 时，即

$$\begin{aligned}\phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jk(2\pi/N)n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = \phi_k[n]\end{aligned}$$

这意味着，由 $\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$ 给出的一组信号中，

仅有 N 个互不相同的周期复指数信号。例如：

$$\phi_0[n]=1, \quad \phi_1[n]=e^{j2\pi n/N}, \quad \phi_2[n]=e^{j4\pi n/N}, \dots, \quad \phi_{N-1}[n]=e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

而任何其它的 $\phi_k[n]$ 都与上列中的某一个相同。例如，

$$\phi_N[n] = \phi_0[n] \quad \text{和} \quad \phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n]$$

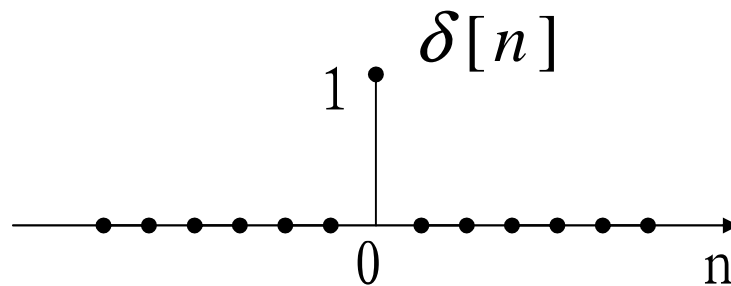
1.4 单位冲激、单位阶跃函数

1.4.1 离散时间单位脉冲和单位阶跃序列

1、单位脉冲(也称单位样本)

- 定义为:

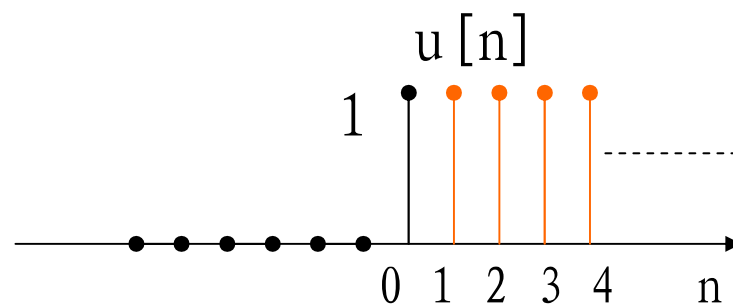
$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$



2、单位阶跃

- 定义为:

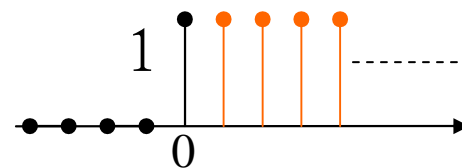
$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



3、离散时间单位脉冲和单位阶跃之间的关系

1)、离散时间单位脉冲是离散时间单位阶跃的一次差分，即

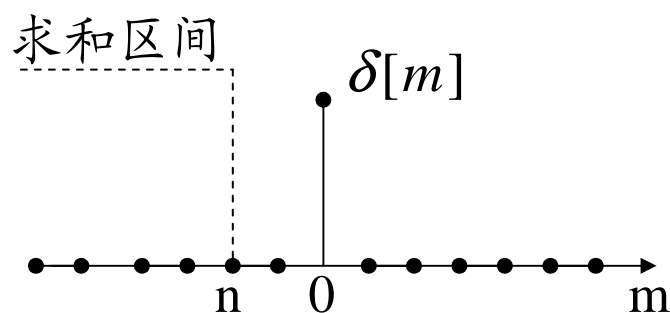
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



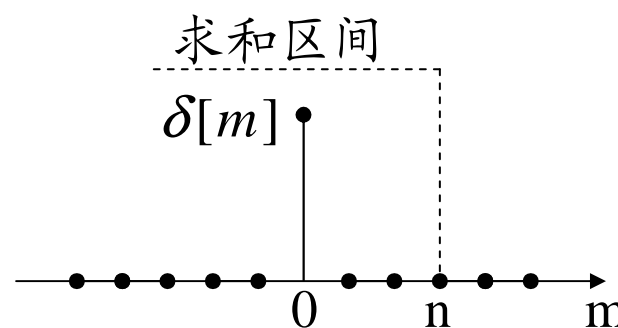
2)、离散时间单位阶跃是离散时间单位脉冲的求和函数，即

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (1.66)$$

因为单位样本仅在 $n=0$ 时有值,其余均为0。所以当对 $n<0$ 求和,值为0; 当对 $n \geq 0$ 求和, 值为1。



(a) $n < 0$



(b) $n \geq 0$

图1.3 求和 $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$

若将求和变量从 m 改为 $k = n - m$ 后, 离散时间单位阶跃也可用单位样本表示成:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n-k] \quad \text{或} \quad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (1.67)$$

这时, $\delta[n-k]$ 在 $k = n$ 时有值, 所以当 $n < 0$ 时, 式 (1.67) 求和值为 0 ; 而当 $n \geq 0$ 时, 求和值为 1.

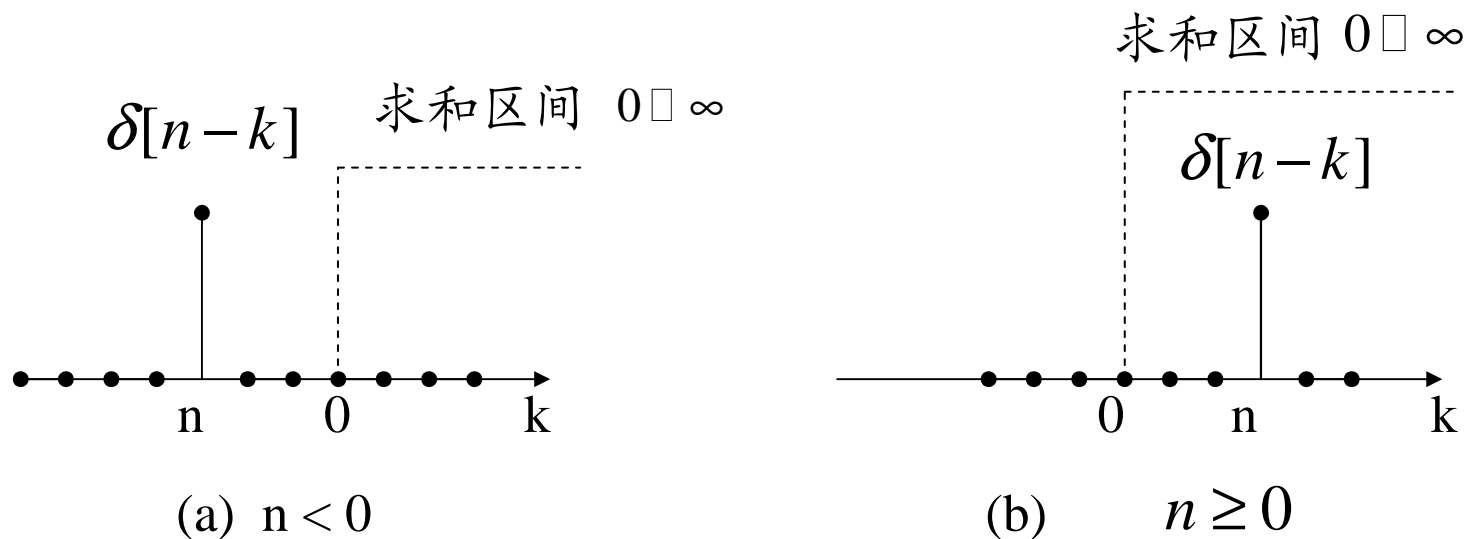


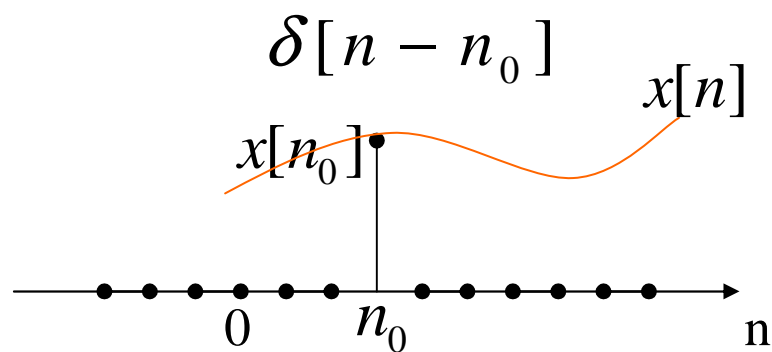
图 1.31

注：单位脉冲序列可以用于对一个信号在 $n = 0$ 时的值采样，即

$$x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$$

更一般的情况是，考虑发生在 $n=n_0$ 处的值的采样，即

$$x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]$$



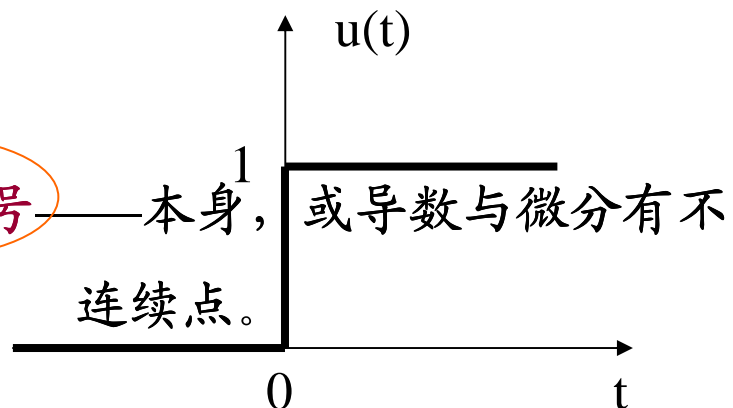
1.4.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数（注意：有补充内容）

1、连续时间单位阶跃函数

• 定义

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

亦称奇异信号



注意：单位阶跃在 $t=0$ 处是不连续的。

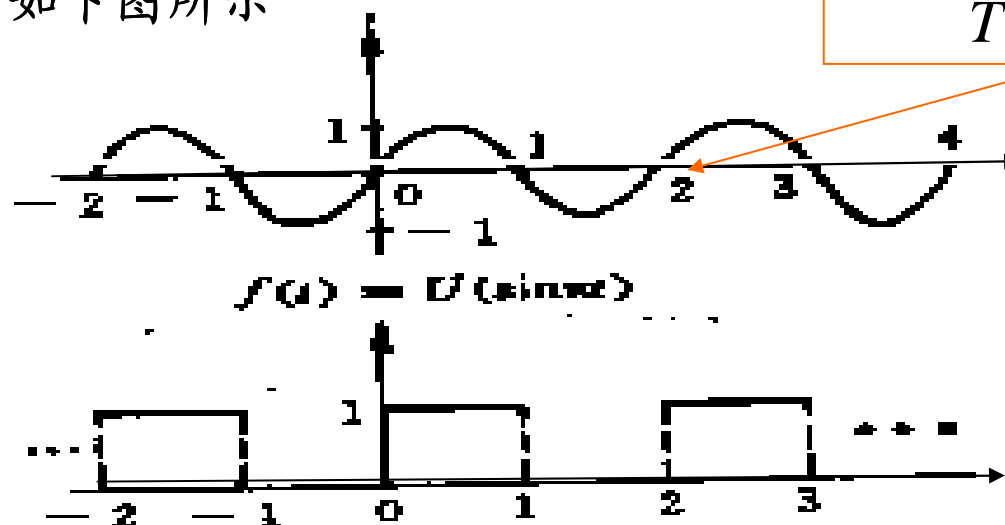
例：画出 $x(t) = u(\sin \pi t)$ 的波形。

解：

$$\because x(t) = u(\sin \pi t) = \begin{cases} 1 & \sin \pi t > 0 \\ 0 & \sin \pi t < 0 \end{cases}$$

故得 $x(t)$ 的波形如下图所示

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi, T = 2$$



2、单位冲激函数

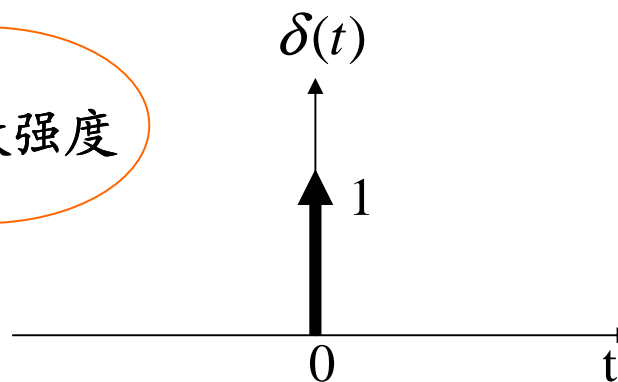
定义 $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

称冲激强度

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta} dt = 1$$

推广:

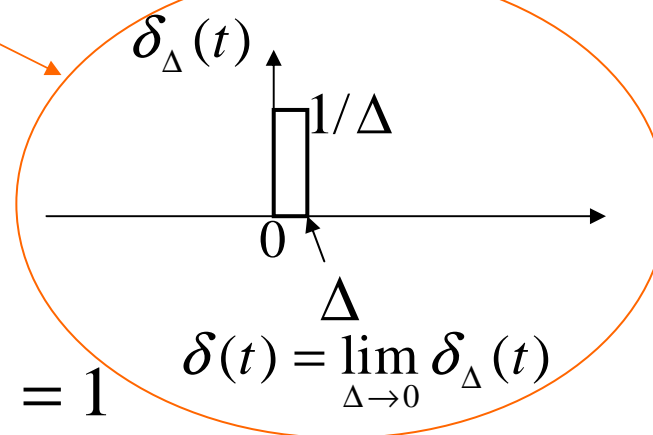


连续时间单位冲激

1)、设 t_0 为正实常数, 则有

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) dt = 1$



2)、若冲激函数图形下的面积为A, 则有

$$A\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且 $\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t - t_0) dt = A \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) dt = A$

性质:

1)、设 $x(t)$ 为任意有界函数, 且在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 时刻连续, 其函数值分别为 $x(0)$ 与 $x(t_0)$, 则有

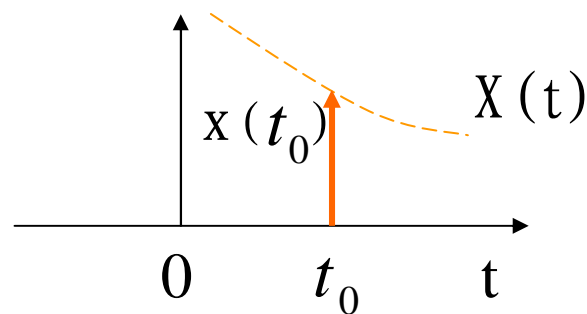
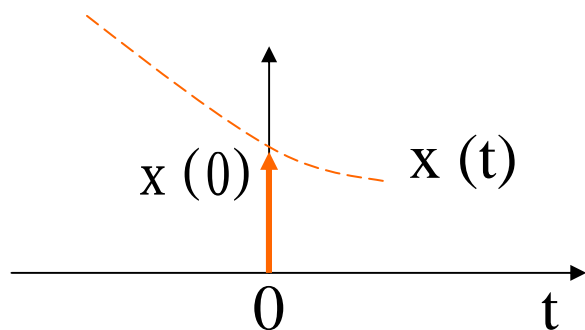
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

且
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

2)、抽样性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



3)、为偶函数, 即有 $\delta(-t) = \delta(t)$

$$-t = t'$$

证明: 给上式等号两边同乘以 $x(t)$ 并进行积分, 即

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')x(-t')d(-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')x(-t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')x(0)dt' = x(0) \end{aligned}$$

$$\text{右式} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(0)dt = x(0)$$

$$\text{故得} \quad \delta(-t) = \delta(t)$$

$$\text{同理可得} \quad \delta(t-t_0) = \delta[-(t-t_0)]$$

$$4)、 \quad \delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \quad (a \text{ 为大于零的实常数})$$

证明:

$$\text{设 } t' = at, \text{ 则 } t = \frac{1}{a}t', \quad dt = \frac{1}{a}dt' \quad ; \text{故有}$$

$$\text{左式} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') dt' = \frac{1}{a}$$

$$\text{右式} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{a}$$

$$\text{故得} \quad \delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$$

推广

$$1) 、 \quad \delta(at - t_0) = \delta[a(t - \frac{t_0}{a})] = \frac{1}{a} \delta(t - \frac{t_0}{a})$$

$$2) 、 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt = \frac{1}{a} x(0)$$

$$3) 、 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at - t_0) dt = \frac{1}{a} x(\frac{t_0}{a})$$

3、连续时间单位冲激函数与单位阶跃之间的关系

1)、连续时间单位阶跃是单位冲激的积分函数

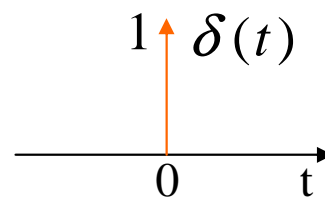
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

注意定义域

证明:

- 当 $t < 0$ 时, 有 $\delta(t) = 0$, 故有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t 0 \times d\tau = 0$$

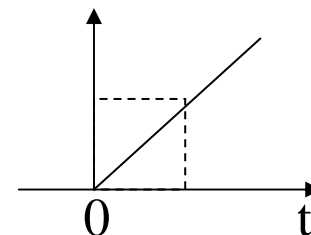


- 当 $t > 0$ 时, 有 $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 0 \times d\tau + \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau + \int_{0^+}^t 0 \times d\tau = 0 + 1 + 0 = 1$

故得

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = u(t)$$

如果对 $\delta(t)$ 二次积分, 可得



$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\lambda) d\lambda d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = tu(t)$$

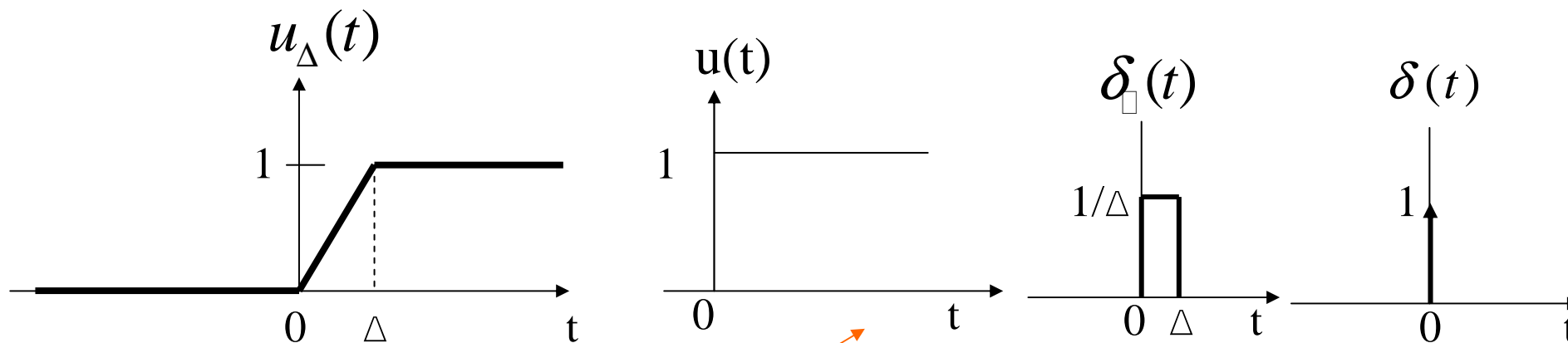
为斜坡函数

证毕#

2)、连续时间单位冲激可看作连续时间单位阶跃的一次微分, 即

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

严格地说, 由于 $u(t)$ 在 $t=0$ 时是**不连续**的, 因此是不可微的。然而可把 $u(t)$ 解释成**斜平信号** $u_{\Delta}(t)$ 的一种近似。因为 $u_{\Delta}(t)$ **是一个连续信号**, 所以可求导。



所以, $u(t)$ 是 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $u_{\Delta}(t)$ 的极限。即

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

(a)

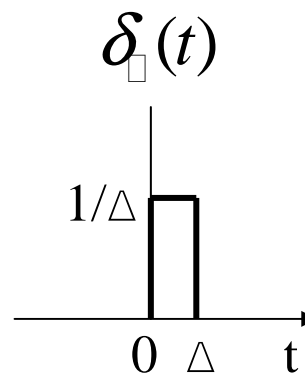
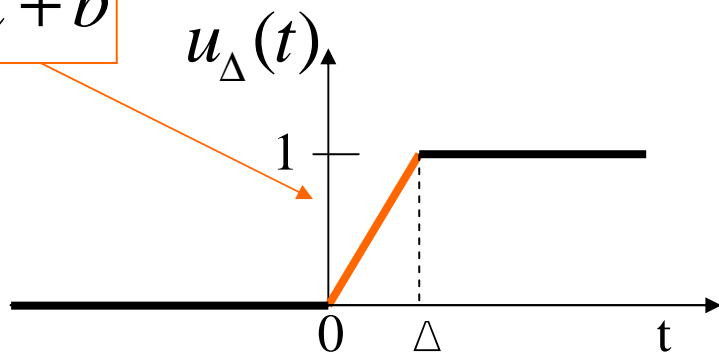
(b)

$u_{\Delta}(t)$ 的导数 连续时间单位冲激

说明: $u_{\Delta}(t) = \frac{t}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + u(t - \Delta)$

$$\begin{aligned}\delta_{\Delta}(t) &= \frac{d}{dt}u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + \frac{t}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t - \Delta)] + \delta(t - \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + \frac{0}{\Delta}\delta(t) - \frac{\Delta}{\Delta}\delta(t - \Delta) + \delta(t - \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)]\end{aligned}$$

$y = ax + b$



得 $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$

冲激强度为 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (\Delta - 0) = 1$

证毕

注意定义域. 例如:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

1.4.3 其它信号(注意: 这是补充内容)

1、符号函数

亦属奇异信号

定义:

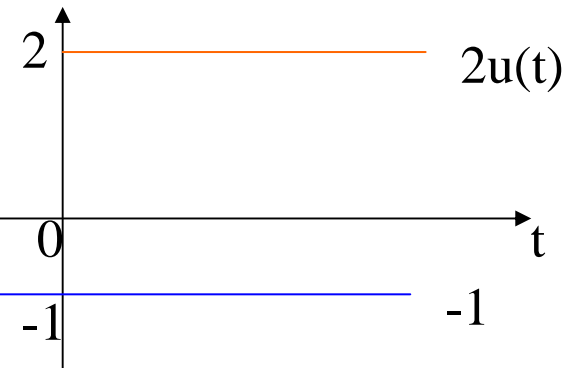
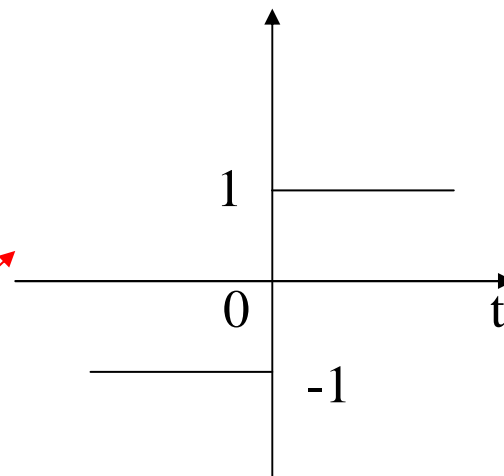
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases}$$

可用 $u(t)$ 表示为

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

$\text{sgn}(t)$

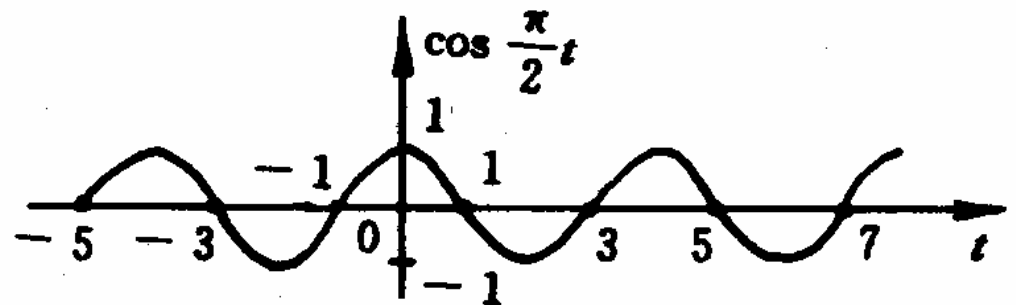


例：试画出函数 $f(t) = \text{sgn}(\cos \frac{\pi}{2}t)$ 的波形。

$$\text{解： } f(t) = \text{sgn}(\cos \frac{\pi}{2}t) = \begin{cases} 1 & , \cos \pi t / 2 > 0 \\ -1 & , \cos \pi t / 2 < 0 \end{cases}$$

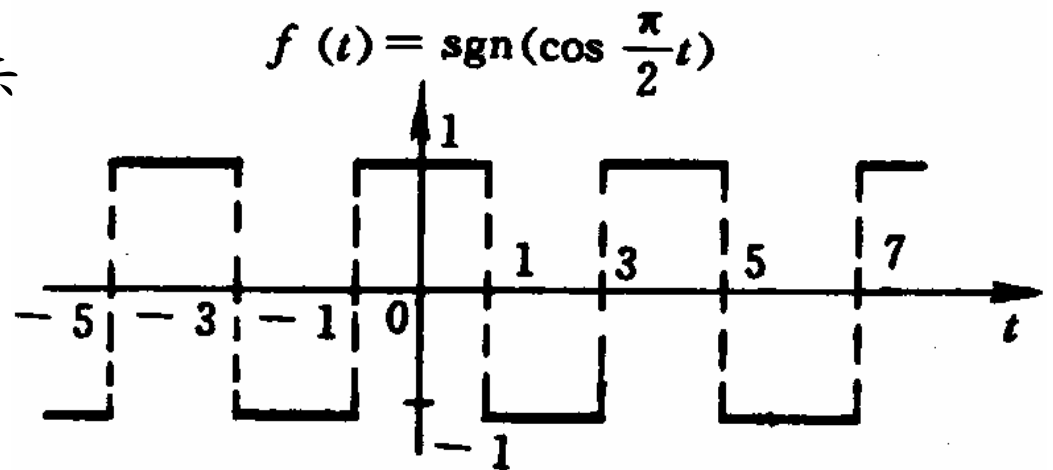
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$$

$\therefore \cos \pi t / 2$ 如图(a)所示



(a)

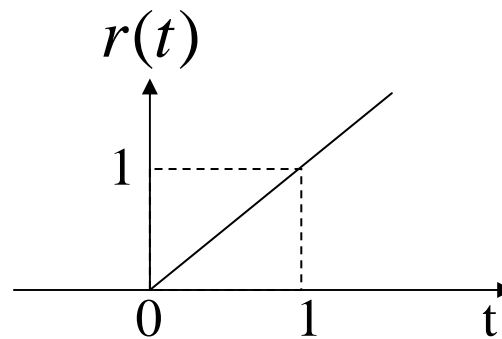
由此可得 $f(t)$ 的波形如图(b)所示



(b)

2、单位斜坡函数

定义: $r(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$



单位斜坡信号与 $u(t)$ 、 $\delta(t)$ 有如下关系:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad \frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau d\tau, \quad \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

单位斜坡信号 $r(t)$ 的一次积分是抛物线, 即

$$\int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2 u(t)$$

3、抽样函数

定义: $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$

其波形如图所示。由图可见

1、它是一个偶函数;

2、当 $t = \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm n\pi$

时, 函数值等于零。

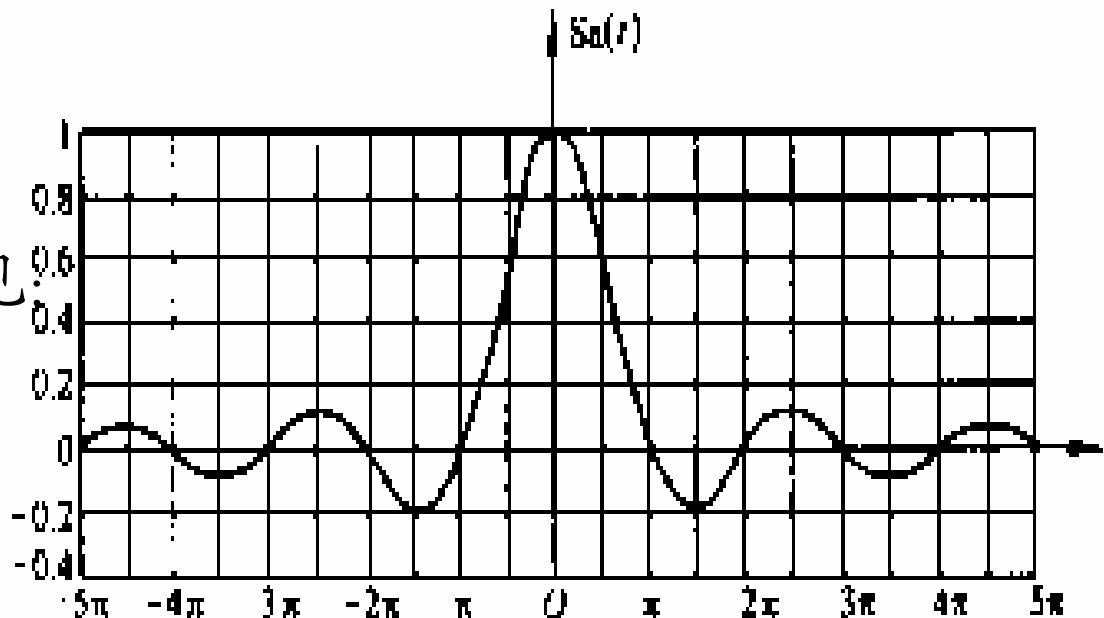


图 $Sa(t)$ 波形

3、振幅沿 t 正、负两方向逐渐衰减。

$Sa(t)$ 函数还具有以下性质: $\int_0^{\infty} Sa(t) dt = \frac{\pi}{2}$

(包络函数是?)

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi$$

抽样函数的另一种表示是 $\text{sinc}(t)$ 函数。表示式为: $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

1.4.4、信号的运算（注意：这是补充内容）

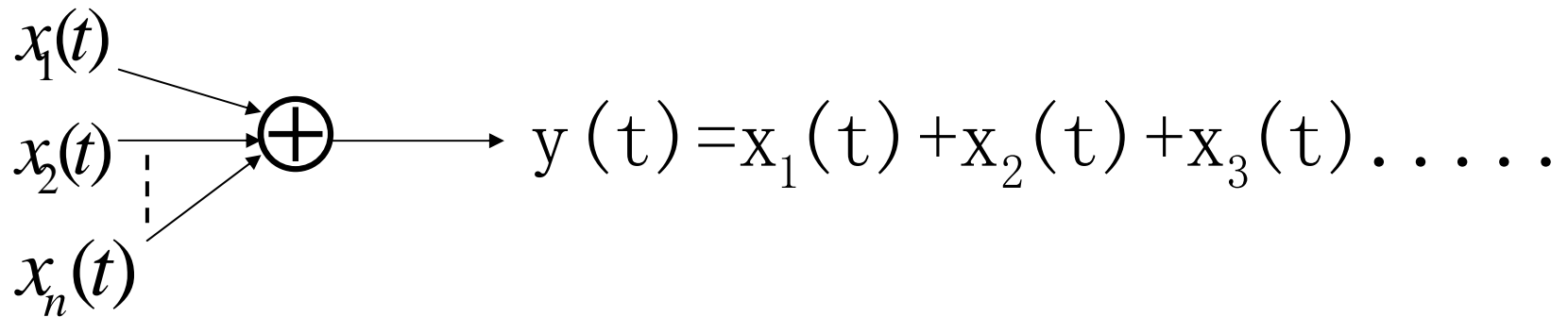
在实际工程应用时,常需分析信号的组成,而将其分解成基本的时间信号;同时也需要将某些信号变换成便于应用的形式,或构成其它形式的信号。这就需要对信号进行处理或运算。这里主要讨论一些基本运算。

1、信号相加

将n个信号 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$ 相加, 得相加信号 $y(t)$, 即

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots$$

信号相加用加法器实现, 如下图所示

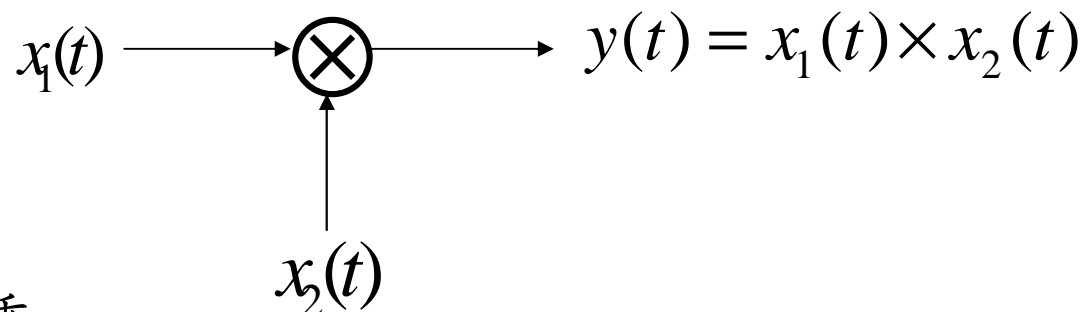


2、信号相乘

将两个信号 $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 相乘，得相乘信号 $y(t)$ 。即

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t)$$

相乘运算用乘法器实现，如下图所示

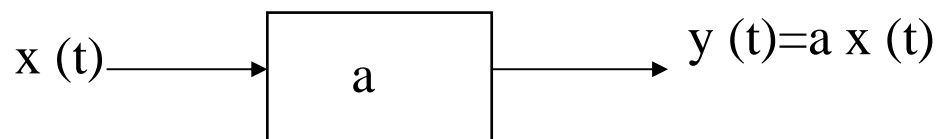


3、数乘

将信号乘以实常数 a ，称为对信号 $x(t)$ 进行数乘运算，即

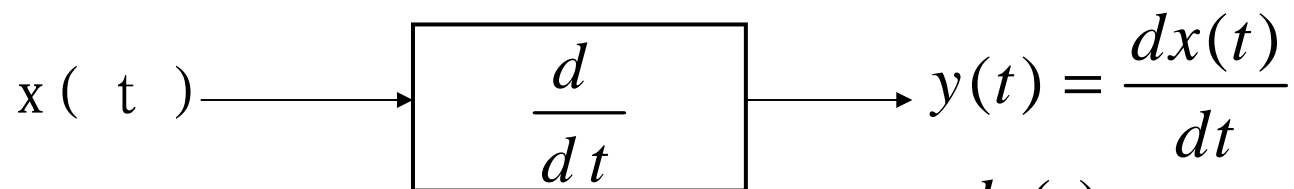
$$y(t) = a x(t)$$

信号的数乘运算用数乘器实现，如下图所示



4、信号的微分运算

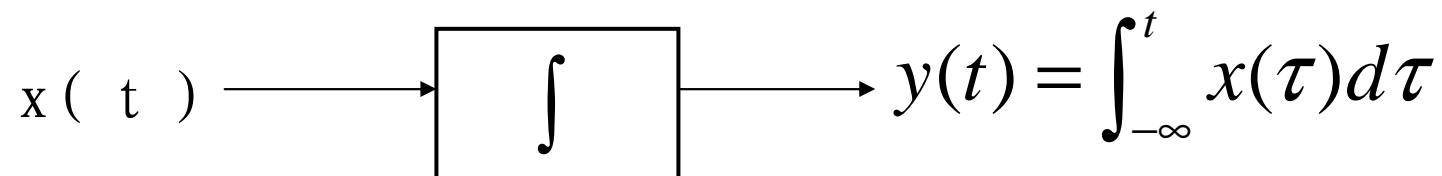
信号的微分运算用微分器实现，即



注意：当 $x(t)$ 中含有间断点时，则 $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ 中在间断点上将有冲激函数存在，其冲激强度为间断点处函数 $x(t)$ 跳变的幅度值。

5、信号的积分运算

信号的积分运算用积分器实现，即



例1：已知 $x(t)$ 为半波正弦信号，

1)、求 $x''(t)$ ，并画出其波形。

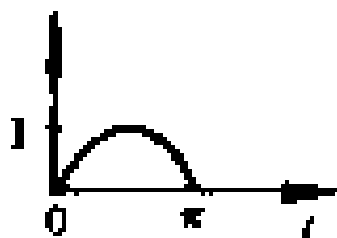
2)、求 $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

解: 1)、

$$\therefore x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)]$$

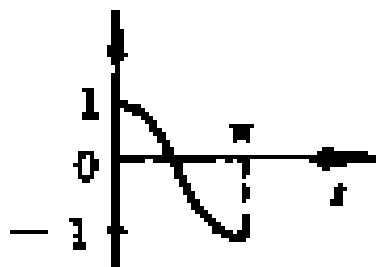
故 $x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi)] + \sin t [\delta(t) - \delta(t - \pi)] = \cos t [u(t) - u(t - \pi)]$

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\sin t [u(t) - u(t - \pi)] + \cos t [\delta(t) - \delta(t - \pi)] \\ &= -\sin t [u(t) - u(t - \pi)] + \delta(t) + \delta(t - \pi) \end{aligned}$$



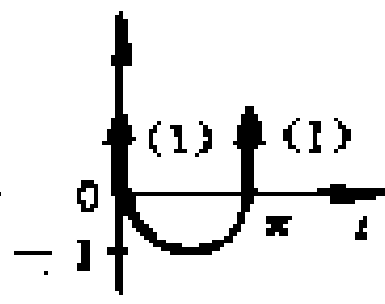
(a)

$x(t)$



(b)

$x'(t)$



(c)

$x''(t)$

2)、当 $t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 故

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = 0$$

当 $0 < t < \pi$ 时, $x(t) = \sin t$, 故

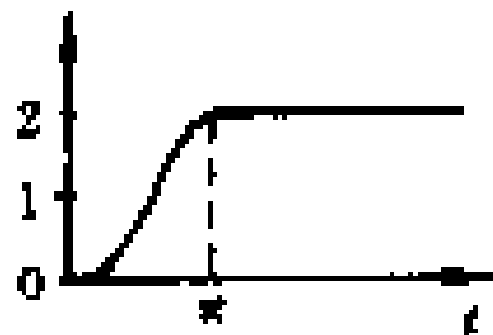
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^0 x(t) d\tau + \int_0^t x(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^t \sin \tau d\tau \\ &= 0 + [-\cos \tau]_0^t = 1 - \cos t\end{aligned}$$

当 $t > \pi$ 时, $x(t) = 0$, 故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t x(t) dt &= \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^{\pi} \sin \tau d\tau + \int_{\pi}^t 0 d\tau \\ &= 0 + [-\cos \tau]_0^{\pi} + 0 = 2\end{aligned}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos t & 0 < t < \pi \\ 2 & t \geq \pi \end{cases}$$

其波形如 (d) 所示。

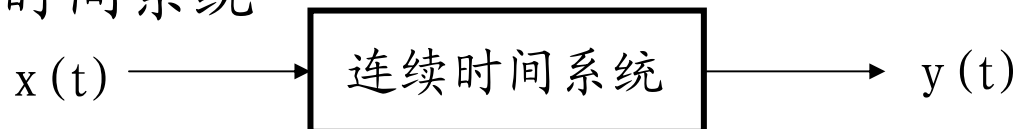


(d)

1.5 连续时间和离散时间系统

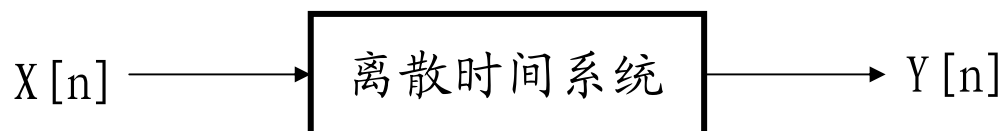
系统——能够对信号完成某种变换或运算的集合体称为系统。

1、连续时间系统



可用符号表示为 $x(t) \longrightarrow y(t)$

2、离散时间系统



可用符号表示为 $x[n] \longrightarrow y[n]$

P29页

1、RC电路 (1.82)

2、汽车 (1.85)

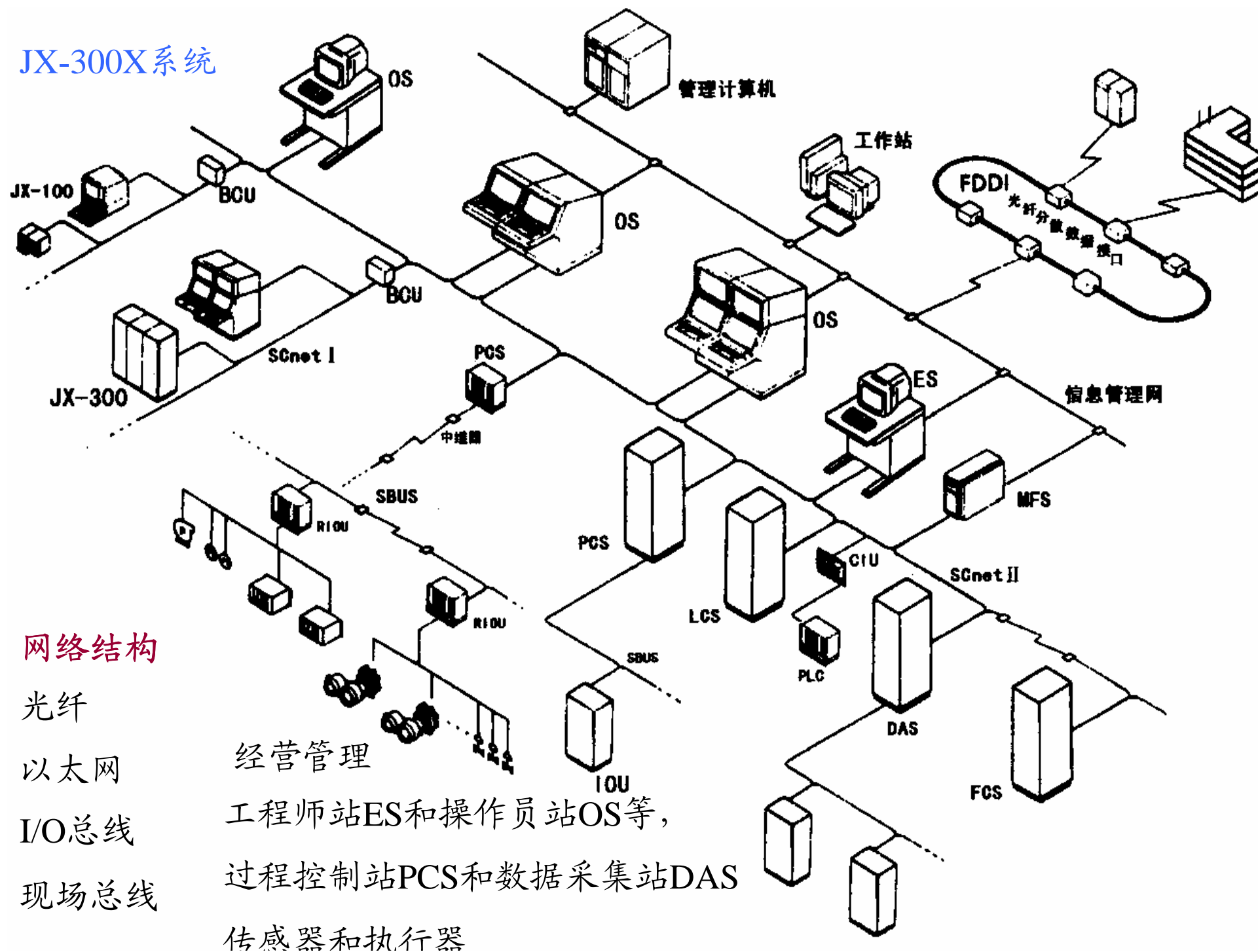
3、银行户头 (1.87)

4、数字仿真 (1.89)

1.5.1 简单系统

- 1、很多不同应用场合的系统都具有非常类似的数学描述形式（书中举了几个例子说明了这一点）。
- 2、一个复杂的系统可以分解成一些基本系统（例如，DCS系统）

JX-300X系统



1.5.2 系统的互联

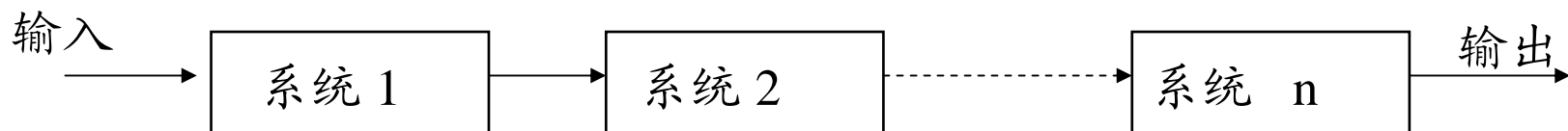
一个复杂的系统，可看作是几个子系统互联构成。

系统的互联通常有以下几种基本形式：

1、串联（或级联）

几个子系统首尾相接，前一个系统的输出便是后一个系统的输入。如下图所示。

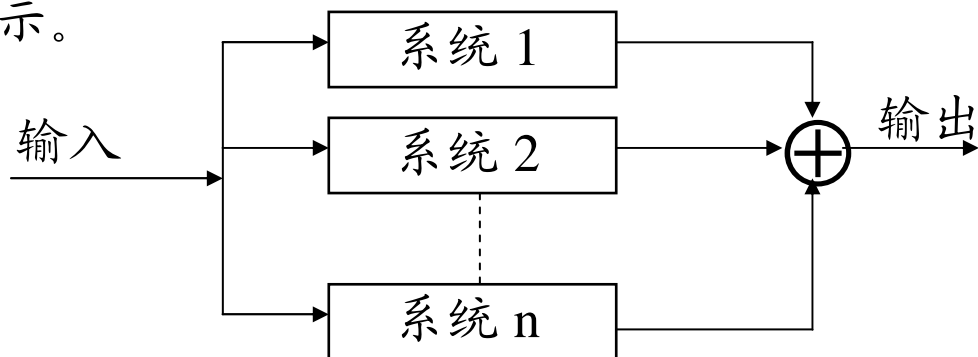
(例如：多级放大 $A=A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$)



级联

2、并联

系统 1 和系统 2 有相同的输入，并联后的输出是系统 1 和系统 2 的输出之和。如下图所示。

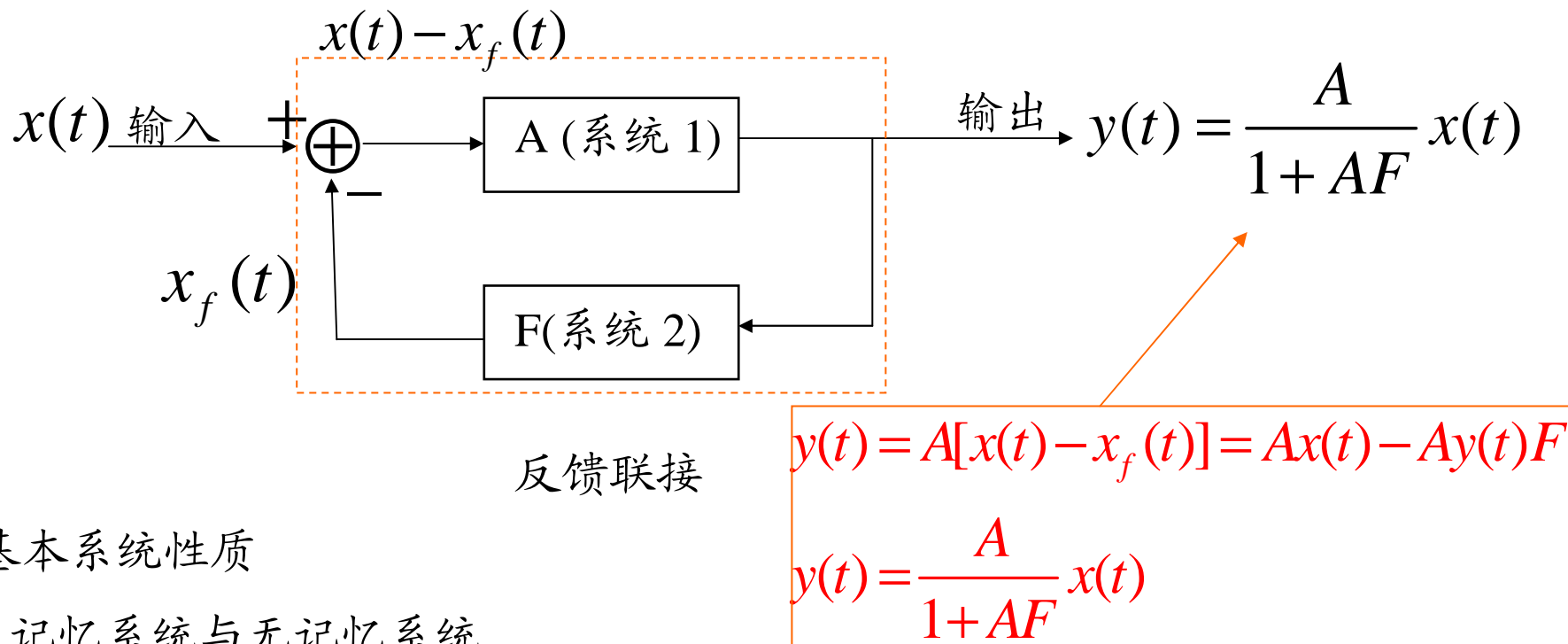


(例如：PID)

并联

3、反馈联接

系统 1 的输出是系统 2 的输入，而系统 2 的输出又反馈回来与外加的输入信号一起组成系统 1 的真正输入。如下图所示



1.6 基本系统性质

1.6.1 记忆系统与无记忆系统

1、无记忆系统——如果系统的输出仅仅决定于该时刻的输入，则这个系统就称为无记忆系统。

例如: $y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$ —— 无记忆系统

一种特别简单的无记忆系统是恒等系统。即

$$y(t) = x(t)$$

或

$$y[n] = x[n]$$

2、记忆系统——系统的输出不仅与当前的输入有关，而且还与以前的输入有关，这样的系统称为记忆系统。

例如1：累加器(或相加器)是一个记忆系统。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

例如2：延迟单元也是一个记忆系统

$$y[n] = x[n-1] \quad \text{—— 因为输出值还取决于以前的输入 } x[n-1]。$$

例如3：积分系统也是一个记忆系统

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

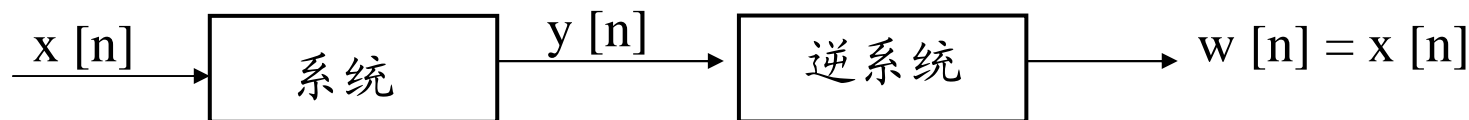
1.6.2 可逆性与可逆系统

1、一个系统如果在不同的输入下，有不同的输出，则称该系统为可逆系统。它满足一一对应关系。

如果一个系统分别对两个或两个以上不同的输入，能产生相同的输出，则这个系统是**不可逆系统**。

例如： $y(t) = x^2(t)$ 就是一个不可逆系统

2、如果一个系统是**可逆的**，那么就有一个逆系统存在，当该逆系统与原系统级联后，就会产生一个输出 $w[n]$ 等于第一个系统的输入 $x[n]$ ，如下图所示



一般的可逆系统

例1：设可逆系统的输出为 $y(t) = 2x(t)$ ，则该可逆系统的逆系统是

$$w(t) = 1/2 y(t) = x(t)$$

例2： $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ 是可逆系统(该系统任意两个相邻的输出之差

就是最后的输入值)，故其逆系统为 $w[n] = y[n] - y[n-1] = x[n]$

1.6.3 因果性

1. **因果系统**——如果一个系统在**任何时刻的输出**只决定于**现在以及过去的输入**。而与系统以后的输入无关，则该系统为因果系统（它满足先因后果）。因为系统的输出无法预测未来的输入值，所以这样的系统**也称为不可预测的系统**。

例如

- 1) $y(t) = 2x(t)$ 就具有因果关系。——所有无记忆系统都是因果的。
- 2) $y[n] = x[n] - x[n+1]$ 和 $y(t) = x(t+1)$ **是非因果的**（因为它们的输出还与将来的输入有关）。

2、系统的判别

- 1)、检验一个系统的因果性，重要的是要仔细看一下系统的输入-输出关系。
- 2)、要把**输入信号的影响**仔细地与系统中**其它函数的影响区分开来**。

例1：已知系统为 $y[n] = x[-n]$ ，试判别因果性。

解：设 $n = -4$ ，则 $y[-4] = x[4]$ ，所以在这一时刻的输出与将来的输入有关。

故为非因果系统。

不能用 $n = 4$

例2: 已知系统为 $y(t) = x(t) \cos(t + 1)$

解: 在这个系统中, 任何时刻 t 的输出 $y(t)$ 等于在同一时刻的输入 $x(t)$ 乘以一个随时间变化的数 $\cos(t+1)$ 。——所以该系统是因果的。

1.6.4 稳定性

系统稳定性定义—— 一个系统, 若其输入是有界的 (即输入的幅度不是无限增长的), 则系统的输出也是有界的, 则称系统是稳定的;

如系统对有界输入产生的响应是无界的, 则称不稳定系统。

例1: 若输入到累加器是单位阶跃 $u[n]$, 则输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n]$$

即 $y[0] = 1, y[1] = 2, y[3] = 3 \dots$, $y[n]$ 无限增长。——为不稳定系统。

例2: $y(t) = x(t-1)$ ——是一个稳定系统 (因为输出只是输入的延时, 形状不变)

说明: 稳定性的另一种定义是建立在系统函数及其收敛域的特性上 (第二章中论述)。

例1.13 检验以下系统的稳定性 $S_1 : y(t) = tx(t)$

$$S_2 : y(t) = e^{x(t)}$$

判别系统稳定性的实用方法是:

1、如果怀疑某一系统是不稳定的,那么找一个特别的有界输入 (例如一个常数或阶跃输入等这类有界输入) 看是否会导致一个无界的输出。

对 S_1 系统, 可用 $x(t)=1$ 代入, 这时得 $y(t)=t$, 可见 S_1 系统是不稳定的。
(因为不管取什么样的常数为界, $|y(t)|$ 在某个 t 时总会超过这个界)。

对 S_2 系统, 我们找不到一个有界的输入而产生无界的输出。所以这时就得

2、按在所有有界输入下都产生有界输出的办法来确认它。令 B 为一任意正数, 并令 $x(t)$ 是被 B 所界定的某任意信号,

$$\text{即 } |x(t)| < B \text{ 或 } -B < x(t) < B$$

则有 $e^{-B} < |y(t)| < e^B$ —— 即 S_2 的任何输入是被任一正数 B 所界定。所以系统是稳定的。

1.6.5 时不变性

1、系统的时不变性——指系统的行为特性不随时间而变。

这就是说，如果输入信号有一个时移，则在输出信号中将产生同样的时移。即

如果 $x[n] \rightarrow y[n]$ 则 $x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$

或 $x(t) \rightarrow y(t)$ 则 $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

2、时不变性系统的判定方法

1)、令 $x_1(t)$ 是系统的任一输入，此时其输出为 $y_1(t)$ ；改变输入为

$x_2(t) = x_1(t - t_0)$ ，分析相应的输出 $y_2(t)$ 是否为 $y_1(t - t_0)$

如是，则系统为时不变系统；如不是，则系统为时变系统。

例1：设 $y(t) = \sin[x(t)]$ ，判定它是否是时不变系统。

解：因为 $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sin[x_1(t)]$ (1.115)

从输入角度考虑 \rightarrow 现有 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ (1.116)

则 $y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)]$ (1.117)

据 (1.115) 有 $y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] = y_2(t)$ (1.118)

从时移角度考虑 \rightarrow 即是时不变系统。

2)、当怀疑一个系统是时变的时候,通常采用的办法是找一个反例(即根据直观认识,找一个输入信号让时不变系统是时变的)。

例: 已知 $y[n] = n x[n]$, 试判别系统的时不变性。

解: 设 $x_1[n] = \delta[n]$, 则 $y_1[n] = 0$ ($\because n\delta[n] = 0$)

然而当 $x_2[n] = \delta[n - 1]$ 时, 输出为

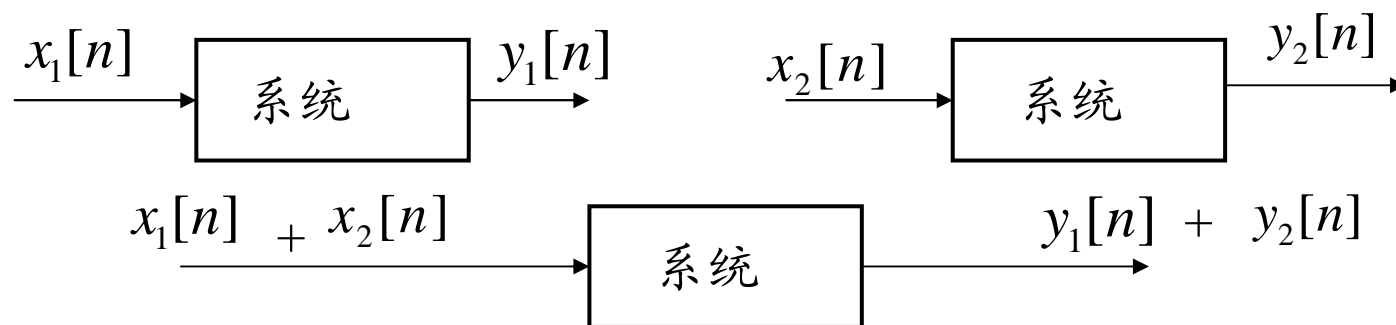
$$y_2[n] = n \delta[n - 1] = \delta[n - 1]$$

因此,当 $x_2[n]$ 是 $x_1[n]$ 的时移时, $y_2[n]$ 并不是 $y_1[n]$ 的时移,即该系统为时变系统。

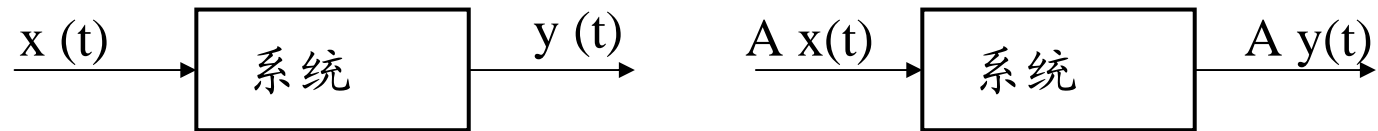
1.6.6 线性

线性系统有两个重要性质: 即叠加性和齐次性。

1、叠加性——如果某一个输入是由几个信号的加权和组成的话, 那么输出就是系统对这组信号中每一个的响应的加权和。即



2、齐次性——如果某一个输入加权后输入系统，则系统的输出就是原输出的加权。



其中， A 为任意复常数

3、线性系统——同时满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统。即

连续时间：若 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
则 $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

离散时间：若 $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$ $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$
则 $ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

在检验一个系统的线性时，要牢记：系统必须同时满足可加性和齐次性，而信号和任何比例常数都可以是复数。

例1.17 考虑一个系统 S , 其输入 $x(t)$ 和 输出 $y(t)$ 的关系为: $y(t) = tx(t)$

试判断 S 是否为线性系统。

解:

1、先考虑如下两个任意输入

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

2、令 $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ 其中 a 、 b 为任意常数,

则

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= tx_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

结论: S 是线性的。

例：设系统为 $y[n] = \Re e \{ x[n] \}$ ，试判断线性性。

解：令 $x_1[n] = r[n] + js[n]$ ，是一个任意复输入，响应的输出应为

$$y_1[n] = r[n]$$

现把 $x_1[n]$ 乘以一个复数 $a=j$ ，也即考虑输入为

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned}$$

对应的输出为 $y_2[n] = \Re e \{ x_2[n] \} = -s[n]$

即 $y_2[n] \neq jr[n]$

即，该系统不满足齐次性，所以不是线性的。

例1.20

考虑系统为 $y[n] = 2x[n] + 3$,试判断该系统是否线性。

解：有多种方法可用来证明它不是线性的。

1、设 $x_1[n] = 2$, $x_2[n] = 3$

则 $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9$$

然而，对 $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 = 13$

它不等于 $y_1[n] + y_2[n] = 16$ 所以不是线性的。

2、另一种证明方法如下：

若 $x[n] = 0$,则 $y[n] = 3$ ——它不满足“零输入/零输出”的性质。所以不是线性的。

再仔细分析该系统，可发现它是一个增量线性系统：



因为这个系统的输出可看作有两部分组成：

1、一为线性系统的输出，即 $x[n] \rightarrow 2x[n]$

2、为系统的零输入响应，即 $y_0[n] = 3$

即：系统的总输出由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加组成。其响应对输入中的变化是线性的。换句话说：对增量系统而言，对任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数。即

$$\begin{aligned} y_1[n] - y_2[n] &= 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} \\ &= 2\{x_1[n] - x_2[n]\} \end{aligned}$$

1.7 小结

本章讨论了有关连续时间与离散时间信号与系统的一些基本概念。

要求掌握：

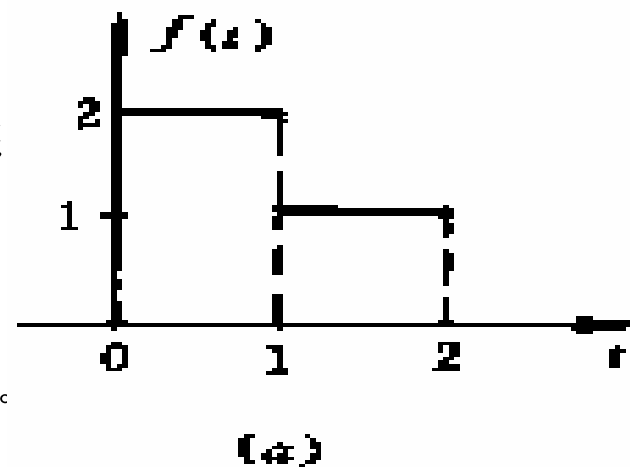
- 1、自变量的变换
- 2、基本信号的性质
- 3、信号的运算
- 4、基本系统的性质及判别

作业:

1、已知信号 $x(t)$ 的波形如图(a)所示,

1) 求积分 $\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau$, 并画出波形

2) 求微分 $\frac{d}{dt}[f(6-2t)]$, 并画出波形。



2、习题1.9 (d)

3、习题1.10

4、习题1.27 (b)(c)(d)

课堂教学结束，谢谢！