

● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学  
教材选译

# 微积分学教程

(第一卷) (第8版)

☐ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著  
☐ 杨弢亮 叶彦谦 译  
☐ 郭思旭 校



高等教育出版社  
Higher Education Press



图字: 01-2005-5740 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и  
интегрального исчисления, том 1

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2003

ISBN 5-9221-0436-5

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT  
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's  
Republic of China

### 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第1卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金  
哥尔茨著; 杨弢亮, 叶彦谦译. —3版. —北京: 高等  
教育出版社. 2006. 1

ISBN 7-04-018303-X

I. 微... II. ①菲...②杨...③叶... III. 微积分  
—高等学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 142129 号

策划编辑 张小萍      责任编辑 赵天夫      封面设计 王凌波  
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印 刷	北京新丰印刷厂		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
		畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787 × 1092 1/16	版 次	1954 年 10 月第 1 版
印 张	33.75		2006 年 1 月第 3 版
字 数	690 000	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
		定 价	45.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18303-00



# 序

---

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,但引进基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.



经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005 年 10 月



# 编者的话

---

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作,曾多次再版,并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富,诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多,在同类教材中尚无出其右者.很多现代著名数学家都提到,正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱,让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年,其内容却并未过时,现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用.不仅如此,尽管出现了新的一批优秀教材,但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起,其读者群就一直不断扩大,现在还包括许多数理特长中学(译注:在俄罗斯,除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学,还有以数学与物理学为重点培养方向的中学,其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容,学生则要经过特别的选拔.)的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分(不含测度论和一般集合论).数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授,也(全部或大部分)包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用,第二卷研究黎曼积分理论与级数理论,第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例,正如前文所说,通常这些内容非常有趣,其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.



另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基



# 目 录

绪论	实数	1
§1.	有理数域	1
	1. 前言 (1) 2. 有理数域的序 (2) 3. 有理数的加法及减法 (2) 4. 有理数的乘法及除法 (4) 5. 阿基米德公理 (5)	
§2.	无理数的导入 · 实数域的序	6
	6. 无理数的定义 (6) 7. 实数域的序 (8) 8. 辅助命题 (9) 9. 用无限小数来表示实数 (10) 10. 实数域的连续性 (12) 11. 数集的界 (12)	
§3.	实数的算术运算	15
	12. 实数的和的定义 (15) 13. 加法的性质 (16) 14. 实数的积的定义 (17) 15. 乘法的性质 (18) 16. 结论 (19) 17. 绝对值 (20)	
§4.	实数的其他性质及应用	21
	18. 根的存在 · 以有理数为指数的幂 (21) 19. 以任意实数为指数的幂 (22) 20. 对数 (24) 21. 线段的度量 (25)	
第一章	极限论	28
§1.	整序变量及其极限	28
	22. 变量、整序变量 (28) 23. 整序变量的极限 (31) 24. 无穷小量 (32) 25. 例题 (33) 26. 关于有极限的整序变量的一些定理 (37) 27. 无穷大量 (38)	
§2.	极限的定理 · 若干容易求得的极限	40
	28. 对等式及不等式取极限 (40) 29. 关于无穷小的引理 (42) 30. 变量的算术运算 (43) 31. 不定式 (44) 32. 极限求法的例题 (46) 33. 斯托尔茨 (O.Stolz) 定理	



及其应用 (50)	
§3. 单调整序变量 . . . . .	53
34. 单调整序变量的极限 (53) 35. 例题 (55) 36. 数 $e$ (60) 37. 数 $e$ 的近似计算方法 (62) 38. 关于区间套的引理 (64)	
§4. 收敛原理 · 部分极限 . . . . .	66
39. 收敛原理 (66) 40. 部分数列及部分极限 (68) 41. 布尔查诺—魏尔斯特拉斯 (B.Bolzano-C.Weierstrass) 引理 (69) 42. 上极限及下极限 (70)	
<b>第二章 一元函数 . . . . .</b>	<b>74</b>
§1. 函数概念 . . . . .	74
43. 变量及其变动区域 (74) 44. 变量间的函数关系, 例题 (75) 45. 函数概念的定义 (76) 46. 函数的解析表示法 (78) 47. 函数的图像 (80) 48. 几类最重要的函数 (81) 49. 反函数的概念 (86) 50. 反三角函数 (87) 51. 函数的叠置. 总结 (91)	
§2. 函数的极限 . . . . .	92
52. 函数的极限的定义 (92) 53. 变成整序变量的情形 (94) 54. 例题 (95) 55. 极限理论的拓广 (103) 56. 例题 (105) 57. 单调函数的极限 (107) 58. 布尔查诺—柯西的一般判定法 (108) 59. 函数的上极限及下极限 (110)	
§3. 无穷小及无穷大的分阶 . . . . .	110
60. 无穷小的比较 (110) 61. 无穷小的尺度 (111) 62. 等价无穷小 (113) 63. 主部的分出 (114) 64. 应用题 (115) 65. 无穷大的分阶 (117)	
§4. 函数的连续性 & 间断 . . . . .	118
66. 函数在一点处的连续性的定义 (118) 67. 连续函数的算术运算 (119) 68. 连续函数的例题 (120) 69. 单侧连续 · 间断的分类 (122) 70. 间断函数的例题 (122) 71. 单调函数的连续性 & 间断 (124) 72. 初等函数的连续性 (125) 73. 连续函数的叠置 (126) 74. 一个函数方程的解 (126) 75. 指数函数、对数函数及幂函数的函数特性 (128) 76. 三角余弦及双曲余弦的函数特性 (130) 77. 函数的连续性在计算极限时的应用 (132) 78. 幂指数式 (135) 79. 例题 (136)	
§5. 连续函数的性质 . . . . .	137
80. 关于函数取零值的定理 (137) 81. 应用于解方程 (139) 82. 介值定理 (140) 83. 反函数的存在 (141) 84. 关于函数的有界性的定理 (143) 85. 函数的最大值及最小值 (143) 86. 一致连续的概念 (145) 87. 康托定理 (147) 88. 博雷尔引理 (148) 89. 基本定理的新证明 (149)	
<b>第三章 导数及微分 . . . . .</b>	<b>152</b>
§1. 导数及其求法 . . . . .	152
90. 求动点速度的问题 (152) 91. 在曲线上作切线的问题 (153) 92. 导数的定义 (155) 93. 求导数的例题 (157) 94. 反函数的导数 (160) 95. 导数公式一览表	



(162) 96. 函数的增量的公式 (162)	97. 求导数的几个简单法则 (164)	98. 复合函数的导数 (166)	99. 例题 (166)	100. 单侧导数 (172)	101. 无穷导数 (173)	102. 特殊情形的例题 (174)
§2. 微分 . . . . .	174	103. 微分的定义 (174)	104. 可微性与导数存在之间的关系 (176)	105. 微分法的基本公式及法则 (177)	106. 微分的形式不变性 (179)	107. 微分是近似公式的来源 (180)
108. 应用微分来估计误差 (183)		§3. 微分学的基本定理 . . . . .	185	109. 费马定理 (185)	110. 达布 (G.Darboux) 定理 (186)	111. 罗尔定理 (186)
112. 拉格朗日公式 (187)	113. 导数的极限 (189)	114. 柯西公式 (190)		§4. 高阶导数及高阶微分 . . . . .	191	115. 高阶导数的定义 (191)
116. 任意阶导数的普遍公式 (193)	117. 莱布尼茨公式 (196)	118. 例题 (198)	119. 高阶微分 (200)	120. 高阶微分的形式不变性的破坏 (201)	121. 参变量微分法 (202)	122. 有限差分 (203)
§5. 泰勒公式 . . . . .	205	123. 多项式的泰勒公式 (205)	124. 任意函数的展开式 · 余项的佩亚诺式 (207)	125. 例题 (210)	126. 余项的其他形式 (214)	127. 近似公式 (216)
§6. 插值法 . . . . .	221	128. 插值法的最简单问题 · 拉格朗日公式 (221)	129. 拉格朗日公式的余项 (222)	130. 有重基点的插值法 · 埃尔米特公式 (223)		
<b>第四章 利用导数研究函数 . . . . .</b>	<b>226</b>	§1. 函数的动态的研究 . . . . .	226	131. 函数为常数的条件 (226)	132. 函数为单调的条件 (228)	133. 不等式的证明 (231)
134. 极大值及极小值 · 必要条件 (234)	135. 充分条件 · 第一法则 (235)	136. 例题 (236)	137. 第二法则 (240)	138. 高阶导数的应用 (242)	139. 最大值及最小值的求法 (244)	140. 应用题 (245)
§2. 凸 (与凹) 函数 . . . . .	249	141. 凸 (与凹) 函数的定义 (249)	142. 关于凸函数的简单命题 (250)	143. 函数凸性的条件 (252)	144. 詹森不等式及其应用 (254)	145. 拐点 (256)
§3. 函数的作图 . . . . .	258	146. 问题的提出 (258)	147. 作图的步骤 · 例题 (258)	148. 无穷间断 · 无穷区间 · 渐近线 (261)	149. 例题 (263)	
§4. 不定式的定值法 . . . . .	266	150. $\frac{0}{0}$ 型不定式 (266)	151. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式 (271)	152. 其他型的不定式 (273)		
§5. 方程的近似解 . . . . .	275	153. 导言 (275)	154. 比例法则 (弦线法) (276)	155. 牛顿法则 (切线法) (279)		



156. 例题及习题 (281) 157. 联合法 (285) 158. 例题及习题 (286)

## 第五章 多元函数 . . . . . 290

### §1. 基本概念 . . . . . 290

159. 变量之间的函数关系 · 例题 (290) 160. 二元函数及其定义域 (291) 161.  $n$  维算术空间 (293) 162.  $n$  维空间内的区域举例 (297) 163. 开域及闭域的一般定义 (299) 164.  $n$  元函数 (301) 165. 多元函数的极限 (302) 166. 变成整序变量的情形 (304) 167. 例题 (306) 168. 累次极限 (308)

### §2. 连续函数 . . . . . 310

169. 多元函数的连续性及其间断 (310) 170. 连续函数的运算 (312) 171. 在域内连续的函数 · 布尔查诺—柯西定理 (312) 172. 布尔查诺—魏尔斯特拉斯引理 (314) 173. 魏尔斯特拉斯定理 (316) 174. 一致连续性 (316) 175. 博雷尔引理 (318) 176. 基本定理的新证明 (319)

### §3. 多元函数的导数及微分 . . . . . 321

177. 偏导数及偏微分 (321) 178. 函数的全增量 (324) 179. 全微分 (326) 180. 二元函数的几何说明 (328) 181. 复合函数的导数 (331) 182. 例题 (332) 183. 有限增量公式 (334) 184. 沿给定方向的导数 (336) 185. (一阶) 微分的形式不变性 (338) 186. 应用全微分于近似算法 (340) 187. 齐次函数 (342) 188. 欧拉公式 (343)

### §4. 高阶导数及高阶微分 . . . . . 344

189. 高阶导数 (344) 190. 关于混合导数的定理 (346) 191. 推广到一般情形 (349) 192. 复合函数的高阶导数 (350) 193. 高阶微分 (351) 194. 复合函数的微分 (354) 195. 泰勒公式 (355)

### §5. 极值 · 最大值及最小值 . . . . . 357

196. 多元函数的极值 · 必要条件 (357) 197. 充分条件 (二元函数的情形) (359) 198. 充分条件 (一般情形) (363) 199. 极值不存在的条件 (366) 200. 函数的最大值及最小值 · 例题 (367) 201. 应用问题 (371)

## 第六章 函数行列式及其应用 . . . . . 380

### §1. 函数行列式的性质 . . . . . 380

202. 函数行列式 (雅可比式) 的定义 (380) 203. 雅可比式的乘法 (381) 204. 函数矩阵 (雅可比矩阵) 的乘法 (383)

### §2. 隐函数 . . . . . 385

205. 一元隐函数的概念 (385) 206. 隐函数的存在 (387) 207. 隐函数的可微性 (389) 208. 多元的隐函数 (391) 209. 隐函数导数的求法 (396) 210. 例题 (399)

### §3. 隐函数理论的一些应用 . . . . . 403

211. 相对极值 (403) 212. 拉格朗日不定乘数法 (406) 213. 相对极值的充分条件



(407) 214. 例题及应用题 (408) 215. 函数的独立性的概念 (412) 216. 雅可比矩阵的秩 (414)	
§4. 换元法 . . . . .	418
217. 一元函数 (418) 218. 例题 (420) 219. 多元函数 · 自变量的变换 (422) 220. 微分的求法 (423) 221. 换元的一般情形 (425) 222. 例题 (427)	
<b>第七章 微分学在几何上的应用 . . . . .</b>	<b>436</b>
§1. 曲线及曲面的解析表示法 . . . . .	436
223. 平面曲线 (直角坐标系) (436) 224. 例题 (438) 225. 机械性产生的曲线 (441) 226. 平面曲线 (极坐标系) · 例题 (444) 227. 空间的曲面和曲线 (448) 228. 参变量表示式 (449) 229. 例题 (451)	
§2. 切线及切面 . . . . .	454
230. 用直角坐标系时平面曲线的切线 (454) 231. 例题 (455) 232. 用极坐标系时的切线 (457) 233. 例题 (458) 234. 空间曲线的切线 · 曲面的切面 (459) 235. 例题 (463) 236. 平面曲线的奇异点 (464) 237. 曲线用参变量表示式的情形 (468)	
§3. 曲线的相切 . . . . .	469
238. 曲线族的包络 (469) 239. 例题 (472) 240. 特征点 (475) 241. 二曲线相切的阶 (477) 242. 曲线之一用隐式表示的情形 (479) 243. 密切曲线 (480) 244. 密切曲线的另一求法 (482)	
§4. 平面曲线的长 . . . . .	482
245. 引理 (482) 246. 曲线的方向 (484) 247. 曲线的长 · 弧长的可加性 (485) 248. 可求长的充分条件 · 弧的微分 (486) 249. 用弧作为参变量 · 切线的正向 (489)	
§5. 平面曲线的曲率 . . . . .	491
250. 曲率的概念 (491) 251. 曲率圆及曲率半径 (494) 252. 例题 (496) 253. 曲率中心的坐标 (499) 254. 渐屈线及渐伸线的定义; 渐屈线的求法 (501) 255. 渐屈线及渐伸线的性质 (503) 256. 渐伸线的求法 (506)	
<b>附录 函数扩充的问题 . . . . .</b>	<b>508</b>
257. 一元函数的情形 (508) 258. 关于二维空间的问题 (509) 259. 辅助命题 (511) 260. 关于扩充的基本定理 (514) 261. 推广到一般情况 (515) 262. 总结 (516)	
<b>索 引 . . . . .</b>	<b>519</b>
<b>校订后记 . . . . .</b>	<b>525</b>



# 绪论 实数

---

## §1. 有理数域

1. 前言 读者对于有理数及其性质,从中学的教材内便很熟悉了.在那时,初等数学的要求,已趋向于必须扩大数的领域.的确,在有理数中即使是正整数(自然数)的根,例如  $\sqrt{2}$ ,也常常并不存在.就是说,并没有这样的有理数  $\frac{p}{q}$  (式中  $p$  及  $q$ ——自然数),其平方能等于 2.

为了证明,试假定其反面:设有分数  $\frac{p}{q}$ ,其平方为  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ . 我们可以假设  $\frac{p}{q}$  是既约分数,即  $p$  和  $q$  是没有公约数的.因  $p^2 = 2q^2$ ,故  $p$  为偶数:  $p = 2r$  ( $r$ ——整数),于是  $q$  为奇数.用  $p$  的式子代入,得:  $q^2 = 2r^2$ ,由此推得  $q$  为偶数.所得的矛盾便证明了我们的命题.

同时,若我们仅停留在有理数的范围内,那么在几何学上便已显然知道,并非一切的线段都能有一个长度.例如考察边长为单位长度的正方形,其对角线就不可能有有理长度  $\frac{p}{q}$ ,因若不然,依毕达哥拉斯定理,这长度的平方应等于 2,而我们已看到这是不可能的.

在本绪论内,我们要做这样一件工作:在有理数域中添上新的数——无理数,以扩大有理数域的范围.同时,我们要证明,对有理数施行算术运算及用等号、不等号结合它们等普通性质,在扩大的领域内仍然是真实的.为了对扩大后的数域验证上述性质,需选出为数最少的基本性质,使其余的一切性质都能作为形式逻辑的结果而从之推出:所要验证的便仅限于这些基本性质了.

因此,我们列举有理数域的下列一些基本性质.同时我们将用一些例子来证明,它们的另一些众所周知的性质是怎样从基本性质推导出来的.我们这里所说的“数”,



总是指的有理数, 用字母  $a, b, \dots$  等来表示它们.

**2. 有理数域的序** 首先让我们约定: 所谓相等的数就是同一数的各种不同形式. 换言之, “相等”(=) 的概念即指 “恒等”. 因此, 我们不再列举相等的数的性质.

有理数域的序得自 “大于”(>) 的概念, 与之有关的是第一组性质.

I 1° 每一对数  $a$  与  $b$  之间必有且仅有下列关系之一

$$a = b, a > b, a < b;$$

I 2° 由  $a > b$  及  $b > c$  推得  $a > c$  (> 的传递性);

I 3° 若  $a > b$ , 则必能求得一数  $c$ , 使

$$a > c, \text{ 且 } c > b^{\text{①}}$$

(稠密性).

“小于”(<) 的概念作为派生的而引入. 说  $a < b$ , 当且仅当  $b > a$  时. 显而易见, 由  $a < b$  及  $b < c$ , 即得  $a < c$  (< 的传递性). 实则, 由假设, 不等式  $a < b$  及  $b < c$ , 相当于不等式  $b > a$  及  $c > b$ ; 由此推得  $c > a$  (I 2°), 或即  $a < c$ .

在对有理数施行算术运算时所牵涉到的 “大于” 这一概念的其他性质, 将在以后随时指出之.

**3. 有理数的加法及减法** 第二组性质是关于加法的, 即关于求两数之和的运算的. 对于每一对数  $a$  及  $b$ , 存在着一个 (唯一的) 数, 被称为  $a$  及  $b$  的和 (记成  $a + b$ ). 这概念具有下列的性质:

II 1°  $a + b = b + a$  (加法的交换性);

II 2°  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (加法的结合性).

零这个数比较特殊, 它具有下列特性:

II 3°  $a + 0 = a$ ;

此外,

II 4° 对每一数  $a$  存在着 (与它对称的) 数  $-a$ , 使  $a + (-a) = 0$ .

在这些性质的基础上, 首先解决加法的逆运算即减法的问题. 通常称使  $c + b = a^{\text{②}}$  的数  $c$  为数  $a$  及  $b$  的差, 假若如此, 便发生这样的数的存在及唯一性的问题.

设  $c = a + (-b)$ . 则得 [II 2°, 1°, 4°, 3°]

$$c + b = [a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a + [b + (-b)] = a + 0 = a,$$

因此, 这  $c$  满足于差的定义.

①在这条件下也说成: 数  $c$  位于数  $a$  与  $b$  之间; 显然, 这样的数有无限个之多.

②依 I 1°, 定义差的这个等式可写成:  $b + c = a$ .



反之, 令  $c'$  为数  $a$  及  $b$  的差, 即有  $c' + b = a$ . 在这等式两边各加  $(-b)$ , 并变换其左边 [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c' + b) + (-b) = c' + [b + (-b)] = c' + 0 = c',$$

结果得  $c' = a + (-b) = c$ .

这样, 就证明了数  $a$  及  $b$  的差的存在及单值性; 把它记成  $a - b$ .

由差的单值性可以推得一系列的推论. 首先, 由 II 3° 推得  $0 = a - a$ , 因而得出结论: 除去数 0 以外, 具有相似于 II 3° 的性质的数不存在. 其次, 由此推得与所给数对称的数的唯一性:  $-a = 0 - a$ .

因为由  $a + (-a) = 0$  可推得  $(-a) + a = 0$  [II 1°], 所以  $a = -(-a)$ , 即数  $a$  及  $-a$  为互相对称的数. 我们再来证明对称数满足下述性质:

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

为此, 只需证明

$$(a + b) + [(-a) + (-b)] = 0,$$

而这由 II 1°, 2°, 4°, 3°, 便可推得.

最后, 再引进联系  $>$  与加号的一个性质.

II 5° 由  $a > b$  推得  $a + c > b + c$ .

它使我们得以在不等式的两边各加上一个等量; 用它又可证明两不等式

$$a > b \quad \text{和} \quad a - b > 0$$

是相当的. 其次, 由  $a > b$  推得  $-a < -b$ . 实则, 由  $a > b$  引致  $a - b > 0$ ; 但  $a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = (-b) - (-a)$ , 因此这不等式可改写成:  $(-b) - (-a) > 0$ , 由此  $-b > -a$  或  $-a < -b$ .

特别是, 由  $a > 0$  推得  $-a < 0$ , 由  $a < 0$  推得  $-a > 0$ . 若  $a \neq 0$ , 则在两个互相对称的数  $a$  及  $-a$  中, 必有一个 (且仅一个) 将大于 0; 它即称为数  $a$  或数  $-a$  的绝对值, 记成

$$|a| = |-a|.$$

零的绝对值就定为零:  $|0| = 0$ .

根据性质 II 5°, 可以逐项地合并不等式: 由  $a > b$  及  $c > d$  推得  $a + c > b + d$ . 实际上, 由  $a > b$  推得  $a + c > b + c$ ; 仿此, 由  $c > d$  推得  $c + b > d + b$ , 或 [II 1°]  $b + c > b + d$ , 然后由 I 2°, 最后即得  $a + c > b + d$ .



4. 有理数的乘法及除法 第三组性质是关于乘法的, 即关于求两数之乘积的运算的. 对于每一对数  $a$  及  $b$  存在着一个 (唯一的) 数, 被称为  $a$  及  $b$  的乘积 (记成  $a \cdot b$  或  $ab$ ). 这概念具有下列性质:

III 1°  $ab = ba$  (乘法的交换性);

III 2°  $(ab)c = a(bc)$  (乘法的结合性).

“1”这个数比较特殊, 它具有下列特性:

III 3°  $a \cdot 1 = a$ ;

此外,

III 4° 对于每一异于 0 的数  $a$ , 必有数  $\frac{1}{a}$  (其倒数), 使  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ .

关于除法的问题, 作为乘法的逆运算, 亦可根据乘法的性质来解决, 正如前面根据加法的性质来解决关于减法的问题一样. 倒数在这里的作用正如对称数在那里的作用一样.

如果一数  $c$  满足关系

$$c \cdot b = a^{\textcircled{1}}$$

(其中  $b$  常预先假定异于 0), 则  $c$  称为  $a$  及  $b$  的商.

令  $c = a \cdot \frac{1}{b}$ , 就可以满足这定义. 因 [III 2°, 1°, 4°, 3°]

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

反之, 若数  $c'$  满足数  $a$  及  $b$  的商的定义, 于是  $c' \cdot b = a$ , 则在这等式两边乘以  $\frac{1}{b}$ , 并变换左边 [III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

就得到  $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$ .

这样, 就证明了数  $a$  及  $b$  (设  $b \neq 0$ ) 的商的存在及单值性; 把它记成  $a : b$  或  $\frac{a}{b}$ .

由商的单值性可知, 除了 1 以外, 再没有什么数能具有类似于 III 3° 的性质. 由此, 如前所述, 推得倒数 (看成 1 及  $a$  的商) 的唯一性; 此外, 容易证明数  $a$  及  $\frac{1}{a}$  是互为倒数.

下列性质与算术的基本运算 —— 加法及乘法双方都有关系:

III 5°  $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$  (乘法关于和的分配性).

由此很易导出关于乘法关于差的分配性:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

<sup>①</sup>依 III 1°, 定义商的这个等式也可写成:  $b \cdot c = a$ .



依差的定义, 这可以直接由下式推出

$$(a - b) \cdot c + b \cdot c = [(a - b) + b] \cdot c = a \cdot c.$$

再应用性质 III 5°, 可证

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

实际上 [II 3°]

$$a + 0 = a, \quad (a + 0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

由此推得  $0 \cdot b = 0$ , 再由 [III 1°] 得  $b \cdot 0 = 0$ .

反之, 若  $a \cdot b = 0$  又  $b \neq 0$ , 则必须  $a = 0$ . 实际上,  $a = \frac{0}{b}$ , 但同时又有  $0 = \frac{0}{b}$  (因  $b \cdot 0 = 0$ ), 因为商是唯一的, 故  $a = 0$ .

最后, 我们指出联系符号  $>$  与乘号的一个性质:

III 6° 由  $a > b$  及  $c > 0$  推得  $a \cdot c > b \cdot c$ .

据此可以用正数乘不等式的两边. 由此可知, 当  $a > 0$  及  $b > 0$  时, 亦必有  $a \cdot b > 0$ .

注意,  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ; 这由下面推得

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

现在不难看出, 若  $a < 0, b > 0$ , 于是  $a = -|a|, b = |b|$ , 则

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0;$$

当  $a > 0, b < 0$  时亦如此, 又若  $a < 0, b < 0$ , 则

$$a \cdot b = (-|a|)(-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] = -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0.$$

这样, 我们已完全重新建立了关于乘法的符号规则, 这些符号规则现在已成为有理数的上述性质的逻辑推论了. 换言之, 如果有理数要满足上述诸性质, 就必定要遵守这些符号规则. 关于乘以 0 的规则, 也可以这样说(如上所述).

在处理了加法和乘法的性质以后, 我们现在能够证明在前面数的基本性质 [I 3°] 中已述及的有理数域的稠密性了. 就是, 可以用它们证明, 例如, 由  $a > b$  推得  $a > \frac{a+b}{2} > b$ .

**5. 阿基米德公理** 我们用下列的简单而重要的论证, 来结束我们的有理数基本性质一览表. 这一性质是不能由上述的诸性质里推得的.

IV 1° 不论  $c > 0$  是怎样的数, 总有大于  $c$  的自然数  $n$  存在着(阿基米德公理). 实际上, 阿基米德曾说明一个几何的命题, 即为众所周知的阿基米德公理:



若在直线上给定任意两线段  $A$  及  $B$ , 则  $A$  重复相加若干次后, 其和总可以大于  $B$ :

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n\text{次}} = A \cdot n > B.$$

若将这论证转而对正数  $a$  及  $b$  来叙述, 它便肯定有这样的自然数  $n$  存在使

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{次}} = a \cdot n > b.$$

若应用已研究过的有理数的性质, 则这不等式相当于  $n > \frac{b}{a}$ ; 把商  $\frac{b}{a}$  记成  $c$ , 我们便得出上面所叙述的 IV 1°.

## §2. 无理数的导入 · 实数域的序

6. 无理数的定义<sup>1)</sup> 有理数集及其在第一节内列举的一切性质, 作为是已给的.

我们仿效戴德金 (R.Dedekind) 来叙述无理数的理论. 有理数域内的分划的概念是这理论的基础. 若将有理数全体所成的集合分拆为两个非空集合 (即至少包含一个数的)  $A, A'$ . 我们把这样的分拆叫做分划, 只要满足条件:

1° 任一有理数, 必在且仅在  $A$  及  $A'$  二集之一<sup>①</sup>中出现;

2° 集  $A$  内的任一数  $a$ , 必小于集  $A'$  内的任一数  $a'$ .

集  $A$  称为分划的下组, 集  $A'$  为上组. 分划记成  $A|A'$ .

由分划的定义推得, 小于下组内的数  $a$  的一切有理数也都属于下组. 仿此, 大于上组内的数  $a'$  的一切有理数亦都属于上组.

例 1 一切满足不等式  $a < 1$  的有理数  $a$ , 定为集  $A$ , 一切满足  $a' \geq 1$  的  $a'$ , 都算入集  $A'$ .

很易验证, 这样, 我们实际上已得出分划了. 数 1 属于  $A'$  组, 且显然成为其中最小的数. 由另一方面看, 在  $A$  组内并无最大数, 因不论我们在  $A$  内取怎样的数  $a$ , 恒能在  $a$  与 1 之间指出有理数  $a_1$  来, 因而它必大于  $a$  并且属于  $A$  组.

例 2 取小于或等于 1 的一切有理数  $a, a \leq 1$ , 归入下组  $A$ ; 取大于 1 的一切有理数  $a', a' > 1$ , 归入上组.

则亦得一分划. 且其中在上组无最小数, 而在下组有最大数 (即 1).

<sup>①</sup>“任一有理数仅在二集之一中出现”这一事实亦可由 2° 推得.

<sup>1)</sup>在分析教程中引入实数的另一种办法是把所有的(无论是有理的, 还是无理的)实数的最简单性质看作公理, 而不加证明地予以承认. 倾向于这种办法的读者在阅读本节时, 可一下子跳到 10 和 11 目. (从此处开始. 用数码加半括号表示编者注; 用数码加圆圈表示作者注.)



**例 3** 取使  $a^2 < 2$  的一切正有理数  $a$ , 数 0 及一切负有理数归入  $A$  组, 使  $a'^2 > 2$  的一切正有理数  $a'$  归入  $A'$  组.

很易证明, 我们亦已得出分划. 此处, 在  $A$  组内既无最大数, 在  $A'$  组内亦无最小数. 我们将证明, 例如, 这论断的第一点 (第二点同样可以证明). 设  $a$  为  $A$  组内的任意正数, 则  $a^2 < 2$ . 再证, 必能得这样的正整数  $n$ , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

于是  $a + \frac{1}{n}$  亦属于  $A$ .

这不等式相当于:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

若  $n$  满足不等式  $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$ , 则上面第二个不等式也自然能满足了. 为此, 只需取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2},$$

而这是恒为可能的 [依阿基米德公理, IV 1°]. 因此, 不论  $a$  为  $A$  组内的怎样的正数, 在这  $A$  组内终能求得大于它的数; 又因为当  $a \leq 0$  时这论证显也成立, 故在  $A$  组内没有任何数能成为最大的.

很易明了, 不可能有这样的分划存在, 在它的下组内有最大数  $a_0$ , 同时在上组内又有最小数  $a'_0$ . 实际上, 假设这样的分划存在着. 则应用有理数域的稠密性 [I 3°], 必能取得一个位于  $a_0$  与  $a'_0$  之间的有理数  $c: a_0 < c < a'_0$ . 数  $c$  不能属于  $A$  组, 因否则,  $a_0$  就不是此组的最大数. 仿此,  $c$  亦不能属于  $A'$  组, 但这是与定义分划的概念的性质 1° 相矛盾的.

这样, 分划仅能有三种类型, 如刚才例 1, 2, 3 所表明的:

- 1) 在下组  $A$  内无最大数, 而在上组  $A'$  内有最小数  $r$ ;
- 2) 在下组  $A$  内有最大数  $r$ , 而在上组  $A'$  内无最小数;
- 3) 在下组内既无最大数, 在上组内亦无最小数.

在前两种情形, 我们说, 分划由有理数  $r$  所产生 ( $r$  成为  $A$  与  $A'$  之间的界数), 或说分划定义有理数  $r$ . 在例 1, 2 中,  $1$  便是这样的数. 在第三种情形界数并不存在, 分划并不定义任何有理数. 今引入新的对象——无理数. 让我们约定, 任一 3) 型的分划定义某一无理数  $\alpha$ . 这个数  $\alpha$  便代替缺少的界数, 我们好像把它插入在  $A$  组的一切数  $a$  与  $A'$  组的一切数  $a'$  中间. 在例 3 中, 这新创的数, 很易推想而知, 即是  $\sqrt{2}$ .



我们并不引入无理数的任何同一式样的记法<sup>①</sup>, 我们总是把无理数  $\alpha$  理解为有理数域中确定它的分划  $A|A'$ .

为了一致起见, 同样来理解有理数  $r$  也常是很方便的. 但对于任一有理数  $r$  存在着确定它的两种分划: 在两种情形中, 数  $a < r$  总是属于下组, 数  $a' > r$  总是属于上组, 而数  $r$  本身可以任意包含在下组 (这时  $r$  为下组的最大数), 或包含在上组 ( $r$  为上组的最小数). 为了确定起见, 我们约定: 凡说到确定有理数  $r$  的分划时, 常把这数放在上组内.

有理数及无理数总称为实数. 实数的概念, 为数学分析的基本概念之一.

**7. 实数域的序** 由分划  $A|A'$  及  $B|B'$  所确定的二无理数  $\alpha$  及  $\beta$ , 当且仅当二分划为恒等时, 始认为相等. 实际上只要下组  $A$  及  $B$  互相重合就够了, 因为这时  $A'$  与  $B'$  亦必互相重合. 这定义在数  $\alpha$  及  $\beta$  为有理数时, 仍可保持不变. 换言之, 若二有理数  $\alpha$  与  $\beta$  相等, 则确定它们的分划相重合, 反之, 由分划的重合推得数  $\alpha$  与  $\beta$  相等. 在这里, 自然仍须注意到, 以分划来确定有理数时的上述约定<sup>②</sup>.

现在转而建立关于实数“大于”的概念. 关于有理数这概念早已建立了. 对于有理数  $r$  与无理数  $\alpha$  之间, “大于”的概念实际上在 6 中已建立了: 即, 若  $\alpha$  由分划  $A|A'$  所确定, 我们便算作  $\alpha$  大于  $A$  组中的一切有理数, 同时  $A'$  组中的一切有理数大于  $\alpha$ .

现在设有二无理数  $\alpha$  及  $\beta$ ,  $\alpha$  由分划  $A|A'$ ,  $\beta$  由分划  $B|B'$  所确定. 我们将称有较大下组的那个数为较大数. 更准确些说, 若  $A$  组整个包含着  $B$  组, 并且不与它重合, 则算作  $\alpha > \beta$  (这条件, 显然相当于:  $B'$  组整个包含着  $A'$  组, 并且不与它重合). 很易验证, 当  $\alpha, \beta$  之一是或甚至二者都是有理数时, 这定义仍可保持.

现在证明实数均能满足性质 I 1° 及 I 2°.

I 1° 任一对 (实) 数  $\alpha$  与  $\beta$  之间必有且仅有下列三种关系之一:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \beta > \alpha.$$

若确定  $\alpha$  的分划  $A|A'$  与确定  $\beta$  的分划  $B|B'$  相重合, 则  $\alpha = \beta$ . 若这二分划不相重合, 则或  $A$  整个包含  $B$  (这时  $\alpha > \beta$ ), 或不是这样. 在后一情形,  $B$  组内有元素  $b_0$ , 落在  $A'$  组内. 则对于  $A$  组内的任何元素  $a$ , 必有  $a < b_0$ . 因此  $B$  组整个包含  $A$  组, 且不与它重合. 于是我们有  $\beta > \alpha$ .

I 2° 由  $\alpha > \beta, \beta > \gamma$  推得  $\alpha > \gamma$ .

设数  $\alpha, \beta, \gamma$  (它们中间可能有有理数) 是由分划  $A|A', B|B', C|C'$  来确定的. 若  $\alpha > \beta$ , 则依“大于”的定义,  $A$  组包含  $B$  组, 且并不与它重合. 但因  $\beta > \gamma$ , 故  $B$  组包含  $C$  组, 且不与它重合. 因此,  $A$  组亦包含  $C$  组, 并且不与它重合, 即  $\alpha > \gamma$ .

<sup>①</sup>这里说的是有限的记法, 对于无限的记法, 读者在 9 中会熟习它. 个别给定的无理数我们经常总是用这数所由产生的关系式来记它, 如  $\sqrt{2}, \log 5, \sin 10^\circ$  等.

<sup>②</sup>没有这条件, 例如, 在 6 的例 1 及 2 内所考察的分划, 双方都定义数 1, 但非恒等.



如在 2 中一样, 现在可以建立“小于”的概念: 若  $\beta > \alpha$ , 则我们说  $\alpha < \beta$ .  $<$  号亦与  $>$  号一样具有传递性.

8. 辅助命题 现在我们来建立实数域的稠密性(比较 I 3°); 准确些说, 我们将证明下列论断:

引理 1 对于不论怎样的两个实数  $\alpha$  及  $\beta$ , 其中  $\alpha > \beta$ , 恒有一个位于它们中间的有理数  $r: \alpha > r > \beta$  (因此, 这种有理数有无穷个).

因  $\alpha > \beta$ , 故确定数  $\alpha$  的分划的下组  $A$  整个包含确定  $\beta$  的下组  $B$ , 且不与  $B$  重合. 因此在  $A$  内必有有理数  $r$ , 它不包含在  $B$  内, 于是必属于  $B'$ ; 对于它

$$\alpha > r \geq \beta$$

(只有在  $\beta$  为有理数时始能成立等式). 但因为在  $A$  内无最大数, 故在必要时, 把  $r$  取得大一些就可以取消等式.

附注 我们事实上已证明了比实数域的稠密性还要强的性质: 即在实数  $\alpha$  与  $\beta$  (若  $\alpha > \beta$ ) 之间必定存在着有理数 (不仅是实数). 以后我们就将引用这个更强的稠密性.

由此直接推得

引理 2 设给定两个实数  $\alpha$  和  $\beta$ . 如果任取一个数  $e > 0$ , 数  $\alpha$  及  $\beta$  都能位于同一对有理数  $s$  与  $s'$  之间:

$$s' > \alpha > s, \quad s' > \beta > s,$$

这对数的差小于  $e$ :

$$s' - s < e,$$

则数  $\alpha$  与  $\beta$  必须相等.

证明 我们用反证法来证明. 例如, 设  $\alpha > \beta$ , 依引理 1, 在  $\alpha$  与  $\beta$  间可以插入两个有理数  $r$  及  $r' > r$ :

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

于是对于任何二数  $s$  及  $s'$ , 当  $\alpha$  及  $\beta$  都在它们之间时, 显然成立如下不等式

$$s' > r' > r > s,$$

由此

$$s' - s > r' - r > 0,$$

因此差  $s' - s$  不能小于数  $e = r' - r$ , 违背引理的条件. 这矛盾即证明了引理.



**9. 用无限小数来表示实数** 现在我们考虑这样的表示实数的方法, 即其分数部分 (尾数) 是正的, 而同时, 其整数部分可以为正的、负的或零.

首先假定被考察的实数  $\alpha$  并非整数, 亦非有限十进小数. 现在要来求它的十进小数近似值. 若  $\alpha$  由分划  $A|A'$  所确定, 则首先易见在  $A$  组内必有整数  $M$ , 又在  $A'$  组内亦必有整数  $N > M$ . 在  $M$  上依次加 1, 必能得出这样两个相邻的整数  $C_0$  及  $C_0 + 1$ , 使

$$C_0 < \alpha < C_0 + 1.$$

这里的数  $C_0$  可以为正的、负的或零.

若再用数

$$C_0.1; C_0.2; \cdots; C_0.9,$$

分  $C_0$  与  $C_0 + 1$  间的区间为十等份, 则  $\alpha$  必 (且仅) 落在其中之一部分区间内, 因此我们又求得相差为  $\frac{1}{10}$  的两数:  $C_0.c_1$  及  $C_0.c_1 + \frac{1}{10}$ , 且有

$$C_0.c_1 < \alpha < C_0.c_1 + \frac{1}{10}.$$

继续这样分下去, 在确定数码  $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$  后, 我们就用不等式

$$C_0.c_1c_2 \cdots c_n < \alpha < C_0.c_1c_2 \cdots c_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

定义第  $n$  位数码  $c_n$ .

这样, 在求数  $\alpha$  的十进小数近似值的过程中, 我们求得整数  $C_0$  及数码  $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$  的无限序列. 由此组成的无限小数, 即记号

$$C_0.c_1c_2 \cdots c_n \cdots \quad (2)$$

可以看成是实数  $\alpha$  的一种表示.

在例外的情形, 当  $\alpha$  本身就是整数或有限小数, 亦可以用相似的方法由比 (1) 更普遍的关系式

$$C_0.c_1c_2 \cdots c_n \leq \alpha \leq C_0.c_1c_2 \cdots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (1a)$$

来相继地确定数  $C_0$  及数码  $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ . 事情是这样的, 到某时, 数  $\alpha$  会重合于包含它的区间的一端, 重合于左端或右端都行; 从这时开始, 相应地, 在 (1a) 中左端或右端就将经常不变地成立等式. 按照成立等式的是左端还是右端, 这以后的各数码就将全是 0 或全是 9. 因此, 这时  $\alpha$  就有了双重的表示, 一种是用零循环的, 一种是用 9 循环的. 例如,

$$3.826 = 3.826\,000\cdots = 3.825\,999\cdots,$$

$$-3.826 = \bar{4}.174\,000\cdots = \bar{4}.173\,999\cdots.^{2)}$$

<sup>2)</sup>记法  $x = \bar{4},174\,000$  表示  $x = -4 + 0.174\,000$ .



反之, 今设任给一无限十进小数 (2); 我们要证明总可以找到一实数  $\alpha$ , 刚好是被这小数所表示的. 为此, 我们来考察小数 (2) 的一段:

$$C_n = C_0.c_1c_2\cdots c_n, \quad (3)$$

把它作为所求数的“亏 (不足的) 近似值”, 同样把

$$C'_n = C_0.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (4)$$

作为其“盈 (过剩的) 近似值”. 不难看出, 每一  $C_n$  小于每一  $C'_n$ . 现在我们用如下法来定有理数域的一个分划: 把大于一切  $C_n$  的有理数  $a'$  (例如, 一切数  $C'_n$ ) 放在上组  $A'$  内, 而把一切余下的数 (例如, 数  $C_n$  本身) 放在  $A$  组内. 很易验证, 这就是我们所需要的分划, 它确定了所求的实数  $\alpha$ .

实则, 因  $\alpha$  就是在两组之间的界数, 因此, 当然成立

$$C_n \leq \alpha \leq C'_n,$$

即数  $\alpha$  满足于一切 (1a) 型的不等式. 这就证明了小数 (2) 就是所求实数的表示式.

盈十进近似值 (4) 和亏十进近似值 (3) 的差等于  $\frac{1}{10^n}$ , 随着  $n$  的增大, 这差可小于任何有理数  $e > 0$ . 事实上, 因不超出数  $\frac{1}{e}$  的自然数仅能是有限多个, 故不等式  $10^n \leq \frac{1}{e}$ , 或相当的不等式  $\frac{1}{10^n} \geq e$  仅能对有限个  $n$  的值满足; 对于其余一切  $n$  的值, 将有

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

由这附注, 依引理 2, 可得结论: 任一异于  $\alpha$  的数  $\beta$ , 既不能像  $\alpha$  那样满足一切不等式 (1) 或 (1a), 故其无限十进小数表示式必与  $\alpha$  的表示式不同.

特别是由此推得: 不等于有限小数的数, 其表示式不能以 0 或 9 来循环, 因为任一以 0 或 9 来循环的小数显然表示有限小数.

今后读者就可以将实数想象为无限十进小数. 由中学课本内, 人们知道, 无限循环小数表示有理数, 反之, 任一有理数总可化成循环小数. 这样, 不循环的无限小数, 就用来表示我们新引入的无理数 (这一概念也可作为建立无理数的理论的出发点).

附注 下面我们将常应用有理近似值  $a$  及  $a'$  以接近实数  $\alpha$ , 这时,

$$a < \alpha < a'.$$

其差  $a' - a$  可为任意小. 对于有理数  $\alpha$ , 显然存在着这种数  $a$  及  $a'$ ; 对于无理数  $\alpha$  也可以有这样的  $a$  及  $a'$ , 例如, 当  $n$  充分大时应用十进近似值  $C_n$  及  $C'_n$ .



**10. 实数域的连续性** 今转而考察一切实数所成之域的一个极重要的性质. 这种性质使实数域在本质上异于有理数域. 在考察有理数域的分划时, 我们已看到, 有时有这样的分划存在, 使在有理数域内并无产生此分划的界数. 正是由于有理数域有这种不完备性, 即在它们中间存在着这些空隙, 所以我们才要引入新数——无理数. 今开始考察实数域的分划. 在这种分划之下我们把这数域分拆成两个均非空集  $A$  及  $A'$ , 使能满足:

1° 每一实数必落在集  $A, A'$  中一个且仅一个之内<sup>①</sup>;

2° 集  $A$  的每一数  $\alpha$  小于集  $A'$  的每一数  $\alpha'$ .

现在发生了问题: 对于这样的分划  $A|A'$ , 是否永远能找到——在实数域内——一个产生这分划的界数, 或在这数域内还存在着空隙 (这种空隙可作为再引入新数的理由)?

要指出, 事实上并没有这种空隙:

**基本定理 (戴德金)**<sup>3)</sup> 对于实数域内的任一分划  $A|A'$  必有产生这分划的实数  $\beta$  存在. 这数  $\beta$ , 1) 或是下组  $A$  内的最大数, 2) 或是上组  $A'$  内的最小数.

实数域的这一性质常称为它的**完备性**, 也称为它的**连续性**(或**密接性**).

**证明** 将属于  $A$  的一切有理数集记成  $A$ , 属于  $A'$  的一切有理数集记成  $A'$ . 容易证明, 集  $A$  及  $A'$  形成有理数域内的一个分划.

这分划  $A|A'$  确定出某一实数  $\beta$ . 它应该落在  $A$  组或  $A'$  组之一内. 假定  $\beta$  落在下组  $A$  内, 则情形 1) 便实现了, 就是  $\beta$  成为  $A$  组的最大数. 实际上, 如果不是这样, 便可在这组内找出大于  $\beta$  的另一数  $\alpha_0$  来. 今在  $\alpha_0$  与  $\beta$  之间 (依引理 1) 插入有理数  $r$ :

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

$r$  亦属于  $A$ , 故必属于  $A$  的一部分  $A$ . 我们便得出谬论: 有理数  $r$  属于确定  $\beta$  的分划的下组, 却又大于这数! 这便证明了我们的论断.

我们还可以证明类似的论断, 如果  $\beta$  落在上组  $A'$  内, 则情形 2) 就实现了.

**附注** 同时在  $A$  组内存在最大数, 在  $A'$  组内存在最小数是不可能的; 这可如同对有理数集合的分划一样地来验证 (应用引理 1).

**11. 数集的界** 我们应用基本定理 [10], 在这里建立一些在现代分析中担任重要角色的概念. (在考察实数的算术运算时就已需要它们了.)

<sup>①</sup>参阅第 6 页注 ①.

<sup>3)</sup>如果不加证明地承认实数的基本性质, 而不从有理数的性质引入这些基本性质, 那么本定理同样应看作是公理. 把它称为戴德金公理或完备性公理.



设有实数的任一无限集; 它可用任何方法给出. 这种数集的例子是: 自然数集, 一切真分数集, 在 0 与 1 间的一切实数集, 方程  $\sin x = \frac{1}{2}$  的根的集, 等等.

集内的任一数记成  $x$ , 因此  $x$  所代表的是集内一般的数, 诸数  $x$  所成的集, 便记成  $\mathcal{X} = \{x\}$ <sup>4)</sup>.

若对所考察的集  $\{x\}$ , 有这样的数  $M$  存在, 使一切  $x \leq M$ , 就说, 这集 (被数  $M$ ) 上有界; 这  $M$  就是集  $\{x\}$  的上界. 例如, 真分数集被数 1 或任何大于 1 的数上有界; 自然数序列不上有界.

仿此, 若能求出数  $m$ , 使一切  $x \geq m$ , 就说, 集  $\{x\}$  (被数  $m$ ) 下有界, 且数  $m$  称为集  $\{x\}$  的下界. 例如, 自然数序列被数 1 或任何  $< 1$  的数下有界; 真分数集被 0 或  $< 0$  的数下有界.

上 (下) 有界的集, 可以又下 (上) 有界, 也可以不是下 (上) 有界. 如, 真分数集上有界也下有界, 而自然数序列下有界, 却不上有界.

若数集不上 (下) 有界, 则称 “广义的数”  $+\infty (-\infty)$  为它的上 (下) 界. 关于这些 “广义的数” 或 “无穷的数”, 我们有

$$-\infty < +\infty \quad \text{及} \quad -\infty < \alpha < +\infty,$$

不论  $\alpha$  是怎样的 (“有限的”) 实数.

符号  $+\infty$  和  $-\infty$  读作 “正无穷” 和 “负无穷”.

若数集上有界, 即有有限的上界  $M$ , 则同时可知这种上界必有无数个之多 (例如, 任何  $> M$  的数, 显然亦是上界). 在一切上界内, 最小的上界特别有用, 它称为上确界. 仿此, 若数集下有界, 则一切下界中的最大者, 便称为下确界. 如对于一切真分数集, 0 及 1 就各为下确界及上确界.

成为问题的是: 上 (下) 有界的数集是否永远有上 (下) 确界存在? 实际上, 由于上 (下) 界既是一无限数集, 而在无限数集中并非恒能找出最小者或最大者<sup>①</sup>, 故在所考察的数集的一切上 (下) 界中有这种最小 (大) 数存在还需要加以证明.

**定理** 若集  $\mathcal{X} = \{x\}$  上 (下) 有界, 则它必有上 (下) 确界.

**证明** 在进行关于上界的讨论前, 先考察两种情形:

1° 在集  $\mathcal{X}$  的诸数  $x$  中有一最大数  $\bar{x}$ . 那时, 集内的一切数将满足不等式  $x \leq \bar{x}$ , 即  $\bar{x}$  为  $\mathcal{X}$  的上界. 另一方面,  $\bar{x}$  属于  $\mathcal{X}$ ; 因此, 对于任何的上界  $M$  成立不等式  $\bar{x} \leq M$ . 由此得结论,  $\bar{x}$  是  $\mathcal{X}$  集的上确界.

2° 在集  $\mathcal{X}$  的诸数  $x$  中无最大数. 用下列方法产生实数域内的一个分划. 取集  $\mathcal{X}$  的一切上界  $\alpha'$  归入上组  $A'$  内, 一切余下的实数归入下组  $A$  内. 在这样分拆时,

<sup>①</sup>例如, 在一切真分数的集中, 便没有最小者及最大者.

<sup>4)</sup>当然, 这个记法并不是假定集  $\mathcal{X}$  由一个元素组成.



集  $\mathcal{X}$  的一切数  $x$  将全部落在  $A$  组内, 因依照假定, 其中没有最大数. 这样,  $A$  组及  $A'$  组均非空集. 这种分拆实际上就是一个分划, 因一切实数均已分入两组, 且  $A'$  组内的任一数必大于  $A$  组内的任何数. 依戴德金基本定理 [10], 必有产生分划的实数  $\beta$  存在. 一切数  $x$ , 因属于  $A$  组, 均不能超过这“界数”  $\beta$ , 即  $\beta$  可以用来作为  $x$  的上界, 故  $\beta$  本身属于  $A'$  组, 且成为该组的最小数. 这样,  $\beta$  就成为一切上界中的最小数, 即是所求的集  $\mathcal{X} = \{x\}$  的上确界.

定理的下半部 (关于下确界的存在) 的证法完全与此相同.

若  $M^*$  是数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  的上确界, 则对于一切  $x$  恒有

$$x \leq M^*.$$

今取小于  $M^*$  的任意数  $\alpha$ , 因  $M^*$  是上界中的最小者, 则  $\alpha$  一定不会是集  $\mathcal{X}$  的上界, 即必能在  $\mathcal{X}$  中求出数  $x'$ , 使

$$x' > \alpha.$$

用这两个不等式就能完全表明集  $\mathcal{X}$  的上确界的特征.

仿此, 集  $\mathcal{X}$  的下确界  $m^*$  的特征可以用下面的话来表明: 即对于  $\mathcal{X}$  中的一切  $x$  有

$$x \geq m^*,$$

但对于任一大于  $m^*$  的数  $\beta$ , 必能在  $\mathcal{X}$  中求出数  $x''$ , 使

$$x'' < \beta.$$

数集  $\mathcal{X}$  的上确界是  $M^*$  及下确界是  $m^*$  常用下列符号来记:

$$M^* = \sup \mathcal{X} = \sup\{x\}, \quad m^* = \inf \mathcal{X} = \inf\{x\}$$

(依拉丁文: supremum= 最高的, infimum= 最低的).

请注意一个明显的、以后常会遇到的推论:

若某数集的一切数  $x$  满足不等式  $x \leq M$ , 则必  $\sup\{x\} \leq M$ .

实际上, 数  $M$  显然是数集的上界之一, 因此, 一切上界中的最小者总不能超过它.

仿此, 由不等式  $x \geq m$ , 推得  $\inf\{x\} \geq m$ .

最后我们约定, 若数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  不上有界, 便说, 它的上确界是  $+\infty$ :  $\sup\{x\} = +\infty$ . 仿此, 若数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  不下有界, 则说, 它的下确界是  $-\infty$ :  $\inf\{x\} = -\infty$ .



### §3. 实数的算术运算

**12. 实数的和的定义** 今转而建立实数的运算的概念. 在以后,  $\alpha, \beta, \gamma$  表示实数, 可以是有理数, 也可以是无理数.

设有二实数  $\alpha$  及  $\beta$ . 先考察有理数  $a, a'$  及  $b, b'$ , 它们满足不等式:

$$a < \alpha < a' \quad \text{及} \quad b < \beta < b'. \quad (1)$$

如果实数  $\gamma$  位于一切形如  $a + b$  的和与一切形如  $a' + b'$  的和之间:

$$a + b < \gamma < a' + b' \quad (2)$$

则  $\gamma$  称为数  $\alpha$  及  $\beta$  的和, 记为  $\alpha + \beta$ .

首先须证明, 对于任何一对实数  $\alpha, \beta$  必有这样的数  $\gamma$  存在.

考察一切可能的和  $a + b$  所成的数集. 这数集是上有界的, 例如, 任何形如  $a' + b'$  的和即为其上界. 假定 [11]

$$\gamma = \sup\{a + b\}.$$

则  $a + b \leq \gamma$ , 而同时,  $\gamma \leq a' + b'$ .

因为对于任何一组满足于条件 (1) 的有理数  $a, b, a', b'$ , 不论它们怎样, 我们常常可以把  $a, b$  增大, 也可以把  $a', b'$  减小, 使得条件 (1) 仍能满足, 所以在刚才得到的两个含有等号的关系式  $a + b \leq \gamma$  及  $\gamma \leq a' + b'$  中, 实际上没有一处能成立等式. 这样, 数  $\gamma$  便满足于和的定义.

但又发生了问题, 由不等式 (2) 所确定的和  $\gamma = \alpha + \beta$  是否为单值的? 为了要证实和的唯一性, 依 9 的附注, 选取有理数  $a, b, a', b'$ , 使

$$a' - a < e \quad \text{及} \quad b' - b < e,$$

式中  $e$  为任意小的正有理数. 由此,

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e,$$

即这差亦能使成为任意小<sup>①</sup>. 所以, 依引理 2, 位于形式如  $a + b$  的和与形式如  $a' + b'$  的和之间的数仅存在着一个.

最后注意, 若数  $\alpha$  及  $\beta$  均为有理数, 则显然它们的通常的和  $\gamma = \alpha + \beta$  满足于不等式 (2). 这样, 上述两实数和的一般定义并不与两有理数和的原来定义相矛盾.

<sup>①</sup>若取  $e < \frac{e'}{2}$ , 则数  $2e$  便小于任何小的数  $e' > 0$ .



13. 加法的性质 很易证实, 对于实数下列的性质仍然保持:

$$\text{II } 1^\circ \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$\text{II } 2^\circ \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$\text{II } 3^\circ \quad \alpha + 0 = \alpha.$$

例如, 我们证明最后性质. 若有理数  $a, a', b, b'$  是这样的数, 使

$$a < \alpha < a', \quad b < 0 < b',$$

则显然,

$$a + b < a < \alpha < a' < a' + b'.$$

这样,  $\alpha$  是位于形如  $a + b$  与  $a' + b'$  的数之间的实数, 依定义, 在那两种数间又存在着和  $\alpha + 0$ . 但这样的数仅有一个, 因此  $\alpha + 0 = \alpha$ , 这就是需要证明的.

现在证明性质 II 4°, 对于任一实数  $\alpha$ , 存在着 (对称于它的) 数  $-\alpha$ , 满足条件  $\alpha + (-\alpha) = 0$ .

在这里, 只要就无理数  $\alpha$  的情形来证就够了.

假定, 数  $\alpha$  被分划  $A|A'$  所确定, 我们用下法确定  $-\alpha$ . 我们取一切有理数  $-a'$  归入数  $-\alpha$  的下组  $\bar{A}$ , 此处  $a'$  是  $A'$  组的任何数, 取一切数  $-a$  归入  $-\alpha$  的上组  $\bar{A}'$ , 此处  $a$  是  $A$  组的任何数. 不难看出, 这样构成的分拆实际上就是一个分划, 因此确定出一个实数 (在现在的情形是无理数); 把这数记成  $-\alpha$ .

今证明它满足上述的条件. 应用数  $-\alpha$  的确定法, 看出和  $\alpha + (-\alpha)$  是位于形如  $a - a'$  与  $a' - a$  的数中间的唯一实数, 此处  $a$  及  $a'$  是有理数, 且  $a < \alpha < a'$ . 但, 显然

$$a - a' < 0 < a' - a,$$

于是数 0 也位于方才所述的数之间. 但具有这种性质的数是唯一的, 故有

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

这就是需要证明的.

最后, 证明性质:

$$\text{II } 5^\circ \quad \text{由 } \alpha > \beta \text{ 推得 } \alpha + \gamma > \beta + \gamma.$$

若  $\alpha > \beta$ . 则在它们中间可以插入二有理数  $r_1$  及  $r_2$ :  $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$ . 依 9 中的附注. 必有二有理数  $c$  及  $c'$  存在, 使

$$c < \gamma < c' \quad \text{及} \quad c' - c < r_1 - r_2.$$

由此

$$r_1 + c > r_2 + c',$$



而依和的定义

$$\alpha + \gamma > r_1 + c, \quad r_2 + c' > \beta + \gamma.$$

比较这些不等式, 我们就得出所需的结论.

这样, 就加法来说, 实数域具有一切基本性质 II  $1^\circ \sim 5^\circ$ , 有理数的这些性质在 3 内已早叙述过了. 由此可知, 从这些性质得出的一切形式逻辑上的推论对于实数也都成立. 特别对于实数我们能逐字重述 3 内所叙述的紧跟在第二组性质后面的一切性质, 即能证明数  $\alpha$  及  $\beta$  的差  $\alpha - \beta$  的存在及其单值性, 并能建立数  $\alpha$  的绝对值 (我们保持记法  $|\alpha|$ ) 的概念, 等等.

**14. 实数的积的定义** 现在转向实数的乘法, 先只讲正数的乘法. 设已给二正数  $\alpha$  及  $\beta$ . 我们在此也先考察满足不等式 (1) 的一切可能的有理数, 这些数也假定是正数.

位于一切形如  $ab$  的积与一切形如  $a'b'$  的积之间的实数  $\gamma$

$$ab < \gamma < a'b', \quad (3)$$

称为  $\alpha$  及  $\beta$  的积, 记成  $\alpha\beta$ .

要证明这种数  $\gamma$  的存在, 我们取一切可能的积  $ab$  所成的集, 这集被任何形如  $a'b'$  的积上有界. 若假定

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

则当然有  $ab \leq \gamma$ , 但同时又有  $\gamma \leq a'b'$ .

因为我们常可将数  $a, b$  增大, 或是将  $a', b'$  减小, 使得 (3) 仍能满足 (如在和的情形一样), 因此在  $ab \leq \gamma$  及  $\gamma \leq a'b'$  中实际上不能成立等式, 故数  $\gamma$  满足积的定义.

由下面的论断可推得积的唯一性. 依在 9 内的附注, 选取有理数  $a, a'$ , 及  $b, b'$ , 使

$$a' - a < e \quad \text{及} \quad b' - b < e,$$

式中的  $e$  是任意小的正有理数. 这时数  $a$  及  $b$  算作是正数, 而数  $a'$  及  $b'$  各不超过某些预先固定的数  $a'_0$  及  $b'_0$ . 则差

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0) \cdot e,$$

即也能为任意小<sup>①</sup>, 依引理 2, 这便足以证实仅有一数  $\gamma$  可以满足不等式 (3).

若正数  $\alpha$  及  $\beta$  都是有理数, 则它们通常的积  $\gamma = \alpha\beta$  显然满足不等式 (3), 即与二实数积的一般定义并无矛盾.

最后, 为定义任意 (不一定是正的) 一对实数的积, 我们先作如下约定.

<sup>①</sup>注意, 若取  $e < \frac{e'}{a'_0 + b'_0}$ , 则  $(a'_0 + b'_0)e$  便可小于任意小的数  $e' > 0$ .



首先约定, 不论  $\alpha$  是怎样的实数, 常有

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

若二乘数都异于 0, 则根据通常的“符号规则”置:

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \text{当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 同号时,}$$

$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \quad \text{当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 异号时.}$$

(我们已经知道正数  $|\alpha|$  及  $|\beta|$  的积指的是什么.)

假若我们希望实数运算能具有有理数运算的一切基本性质, 那么这些约定有如我们在 4 内见到过的, 对于我们在某些意义上是必需的.

**15. 乘法的性质** 如同在有理数的情形一样, 对于任何实数仍保持以下性质:

$$\text{III } 1^\circ \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha;$$

$$\text{III } 2^\circ \quad (\alpha \cdot \beta)\gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$$

$$\text{III } 3^\circ \quad \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

证明第二式作为例子, 先从三数  $\alpha, \beta, \gamma$  都是正数的情形开始. 设  $a, a', b, b', c, c'$  是任意的有理数, 满足不等式

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b', \quad 0 < c < \gamma < c'.$$

则依二实数的积的定义, 有

$$ab < \alpha\beta < a'b' \quad \text{及} \quad bc < \beta\gamma < b'c'.$$

再应用这一定义, 又得

$$(ab)c < (\alpha\beta)\gamma < (a'b')c' \quad \text{及} \quad a(bc) < \alpha(\beta\gamma) < a'(b'c').$$

因所证的性质 III 2° 对于有理数是已知的, 故实数  $(\alpha\beta)\gamma$  及  $\alpha(\beta\gamma)$  都位于同样的界限:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{与} \quad (a'b')c' = a'(b'c') \text{ 之间.}$$

但很易证明, 因乘数  $a$  与  $a'$ ,  $b$  与  $b'$ ,  $c$  与  $c'$  间都很接近, 因而得出积的差  $a'b'c' - abc$  可为任意小 (在这时, 可以应用与 14 内有关二乘数之积的相似的论证). 由此, 依引理 2, 可知数  $(\alpha\beta)\gamma$  与  $\alpha(\beta\gamma)$  相等.

当  $\alpha, \beta, \gamma$  不全为正数时, 只需注意到“符号规则”, 便可立刻得出结果. 又若数  $\alpha, \beta, \gamma$  中至少有一数等于 0, 则两个积都化为 0.

现在讲性质:

III 4° 对于任一异于零的实数  $\alpha$ , 必有 (倒) 数  $\frac{1}{\alpha}$  存在, 满足条件:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$



这里只要证无理数  $\alpha$  的情形便够了. 先设  $\alpha > 0$ .

若  $\alpha$  由分划  $A|A'$  所确定, 则我们可用下法构成对于数  $\frac{1}{\alpha}$  的分划. 我们把一切负的有理数, 零, 以及一切形如  $\frac{1}{a'}$  的数归入下组  $\tilde{A}$ , 此处  $a'$  是  $A'$  组的任何数; 把一切形如  $\frac{1}{a}$  的数放在上组  $\tilde{A}'$  内, 此处  $a$  是  $A$  组内的任何正数. 容易说明, 这样, 实际上我们已得出一个分划, 它确定出一正的实数 (在现在的情形是无理数); 这数记成  $\frac{1}{\alpha}$ .

让我们证明, 它满足所需要的条件. 由上面所述倒数的构作法以及乘积的定义可知, 数  $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$  是唯一的实数, 位于形如  $\frac{a}{a'}$  与  $\frac{a'}{a}$  的二数之间, 此处  $a$  及  $a'$  是满足不等式  $a < \alpha < a'$  的正有理数. 但数 1 也位于上述两类数之间:

$$\frac{a}{a'} < 1 < \frac{a'}{a},$$

故它是所求的积.

若  $\alpha < 0$ , 则假定

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|};$$

于是依“符号规则”

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1.$$

当我们证明了实数域也具有关于乘法的一切基本性质 III 1° ~ 4° 以后, 显然可知, 这数域也保持着在 4 内所述的一切性质, 即关于数  $\alpha$  及  $\beta$  的商  $\frac{\alpha}{\beta}$  (在  $\beta \neq 0$  时) 的存在及唯一性等.

分配性:

$$\text{III } 5^\circ \quad (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

对于任何实数亦成立. 在正数的情形 (如证明 III 2° 那样) 这很易证明. 所有其他的情形可以用等式两边均变号的方法, 或由一边移项到另一边的方法化为这个特别情形. 但是数  $\alpha, \beta, \gamma, (\alpha + \beta)$  中之一等于零的情形并不在内; 对于这种情形, 等式的成立是非常明显的.

最后, 还有性质:

$$\text{III } 6^\circ \quad \text{由 } \alpha > \beta \text{ 及 } \gamma > 0 \text{ 推得 } \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma.$$

其核验并无困难. 不等式  $\alpha > \beta$  相当于  $\alpha - \beta > 0$ ; 依“符号规则”有  $(\alpha - \beta) \cdot \gamma > 0$ . 但乘法也有关于差的分配性, 故知  $\alpha \cdot \gamma - \beta \gamma > 0$ , 而由此即得  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ .

**16. 结论** 最后, 还要讲一讲阿基米德公理:

IV 1° 对不论怎样的实数  $\gamma$ , 必有大于  $\gamma$  的自然数  $n$  存在.

这公理的核验是很容易的: 因在确定数  $\gamma$  的分划  $C|C'$  的上组内必能找到大于它的有理数  $c'$ , 而这公理对于有理数  $c'$  是成立的.



现在可以说我们已经证明了下述事实：在实数域中，初等代数学上关于四则运算及等式与不等式运算的规则，仍旧完全维持不变。

**17. 绝对值** 因以后的需要，特再附加一些关于绝对值的附注。

首先证明不等式： $|\alpha| < \beta$  (此处当然有  $\beta > 0$ ) 相当于二重不等式： $-\beta < \alpha < \beta$ 。

实际上，由  $|\alpha| < \beta$  推得  $\alpha < \beta$  及  $-\alpha < \beta$  (即  $\alpha > -\beta$ ) 同时成立。反之，若已给定  $\alpha < \beta$  及  $\alpha > -\beta$ ，则必同时有： $\alpha < \beta$  及  $-\alpha < \beta$ ；但在  $\alpha$  及  $-\alpha$  中有一为  $|\alpha|$ ，故  $|\alpha| < \beta$ 。

仿此，不等式：

$$|\alpha| \leq \beta \quad \text{与} \quad -\beta \leq \alpha \leq \beta$$

显然是相当的。

再证明有用的不等式：

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

逐项地相加两个显明的不等式：

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \quad \text{及} \quad -|\beta| \leq \beta \leq |\beta|,$$

得

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|,$$

由此，依据上述的附注，即得所求的不等式。

用数学归纳法可以把它推广到任意个加数的情形：

$$|\alpha + \beta + \cdots + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + \cdots + |\gamma|.$$

若在已证明的不等式内，把  $\beta$  换成  $-\beta$ ，则得

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

因  $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$ ，故  $|\alpha| \leq |\alpha + \beta| + |\beta|$ ，或

$$|\alpha + \beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

同样

$$|\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

因为同时

$$|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha - \beta|$$

所以显然

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$$

所有这些不等式在极限论内都是很有用的。



## §4. 实数的其他性质及应用

**18. 根的存在 · 以有理数为指数的幂** 由实数乘法 (及除法) 的定义, 也如通常一样, 可直接导出以正 (及负) 整数为指数的幂的定义. 在转向一般的有理指数幂以前, 先叙述一下关于根的存在问题.

我们还记得, 在有理数域内, 即使是极简单的根指数也并不存在, 这事实已被作为扩充有理数域的根据之一, 现在再来考查一下, 这种缺陷在扩充后的数域中 (但不进行更进一步的扩充) 得到如何程度的补救.

设  $\alpha$  是任一实数,  $n$  是自然数.

众所周知, 实数  $\xi$  称为数  $\alpha$  的  $n$  次根, 若

$$\xi^n = \alpha.$$

我们限定  $\alpha$  是正数, 并将求得满足于这关系式的正数  $\xi$ , 就是所谓根的算术值. 我们将证明这种  $\xi$  永远存在, 且仅有一个.

关于  $\xi$  的唯一性这一点, 可立刻推得, 因为对应于不同的正数, 有着不同的幂: 即若  $0 < \xi < \xi'$ , 则  $\xi^n < \xi'^n$ .

若有这样的有理数  $r$  存在, 它的  $n$  次幂等于  $\alpha$ , 则它就是所求的数  $\xi$ . 因此, 以后我们只需讨论这种有理数并不存在的情形就成.

今在一切有理数域内用下列方法构成一个分划  $X|X'$ . 取一切负有理数及零, 并取合于  $x^n < \alpha$  的正有理数  $x$ , 归入  $X$  组. 取合于  $x'^n > \alpha$  的一切正有理数  $x'$  归入  $X'$  组.

很易看出这两组都非空集, 且  $X$  内还包含着正数. 例如, 若取自然数  $m$ , 使合于  $\frac{1}{m} < \alpha < m$ , 则当然成立  $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$ , 于是可知数  $\frac{1}{m}$  属于  $X$ , 数  $m$  属于  $X'$ .

关于分划的其他条件显然也都满足.

今设  $\xi$  是由分划  $X|X'$  所确定的数; 我们将证明  $\xi^n = \alpha$ , 即  $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$ .

把  $\xi^n$  看成是  $n$  个等于  $\xi$  的乘数的连乘积, 根据正实数乘积的定义 [14] 可知, 若  $x$  及  $x'$  是正有理数, 合于

$$0 < x < \xi < x',$$

则

$$x^n < \xi^n < x'^n,$$

又因显然  $x$  属于  $X$  组,  $x'$  属于  $X'$  组, 所以依照这些组的定义, 同时又有

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

但差  $x' - x$  可小于任意数  $\epsilon > 0$  (9, 附注), 并且无妨把  $x'$  当作小于某一预先指定的数  $x'_0$ . 在这种情形, 则差

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \cdots + x^{n-1}) < \epsilon \cdot nx_0^{n-1},$$



即亦可成为任意小<sup>①</sup>. 由此, 依引理 2, 推得数  $\xi^n$  与  $\alpha$  相等.

在证明了根的存在以后, 可由通常的途径建立有任意有理指数  $r$  的幂的概念, 并可核验初等代数教本内所讲的通常规则对于这种幂都成立. 如:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r} \text{ 等.}$$

再着重指出, 在  $\alpha > 1$  时, 幂  $\alpha^r$  随着有理指数  $r$  的增大而增大.

**19. 以任意实数为指数的幂** 现在再定义任意 (正的) 实数  $\alpha$  的  $\beta$  次幂, 其中  $\beta$  亦为任意实数. 先引进数  $\alpha$  的幂

$$\alpha^b \text{ 及 } \alpha^{b'},$$

其中指数  $b$  及  $b'$  为有理数, 且满足不等式

$$b < \beta < b'.$$

位于所有的  $\alpha^b$  与  $\alpha^{b'}$  之间的实数  $\gamma$ :

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'} \quad (1)$$

称为数  $\alpha > 1$ <sup>②</sup> 的  $\beta$  次幂 (记成  $\alpha^\beta$ ).

很易说明, 这种数永远存在着. 事实上, 集  $\{\alpha^b\}$  上有界, 例如, 任一  $\alpha^{b'}$  为其界. 因此, 若取 [11]

$$\gamma = \sup\{\alpha^b\}.$$

对于这一数将有

$$\alpha^b \leq \gamma \leq \alpha^{b'}$$

事实上, 在这里等号并不需要, 因为我们常可增大  $b'$  或减小  $b$ , 使不等式  $b < \beta < b'$  仍能满足的缘故. 这样, 数  $\gamma$  的确能满足条件 (1) 了.

今转而证明由这些条件所确定的数的唯一性.

为此, 首先要指出引理 2[8] 在数  $s, s'$  及  $e$  非有理数时仍成立; 其证明相同.

①注意, 若取  $e < \frac{e'}{nx_0^{n-1}}$ , 则数  $enx_0^{n-1}$  就可小于任意数  $e' > 0$ .

②我们可以只限于这种情形来讨论, 在  $\alpha < 1$  时, 则设

$$\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}.$$



其次, 建立一个很简单且常用的不等式, 人们有时称它为伯努利 (Jac. Bernoulli) 不等式: 如果  $n$  是大于 1 的自然数, 又  $\gamma > 1$ , 则

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \quad (2)$$

实际上, 设  $\gamma = 1 + \lambda$ , 此处  $\lambda > 0$ , 依牛顿二项公式有

$$(1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots$$

因未写上的各项均为正数, 故

$$(1 + \lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

这就相当于不等式 (2).

今设  $\gamma = \alpha^{\frac{1}{n}}$  ( $\alpha > 1$ ), 则得不等式

$$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}, \quad (3)$$

这就是我们现在就要用到的不等式.

对于任意预先指定的自然数  $n$ , 我们可这样选取数  $b$  及  $b'$ , 使差  $b' - b$  小于  $\frac{1}{n}$ ; 则依不等式 (3),

$$\alpha^{b'} - \alpha^b = \alpha^b(\alpha^{b'-b} - 1) < \alpha^b(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha^b \frac{\alpha - 1}{n}.$$

因  $b$  小于任意的 (而且系固定了的)  $b'_0$ , 故若选取

$$n > \frac{\alpha^{b'_0}(\alpha - 1)}{\varepsilon},$$

式中  $\varepsilon$  是任意小正数, 便可使

$$\alpha^{b'} - \alpha^b < \varepsilon,$$

在这种情形, 依上述引理 2 的推广, 在限界  $\alpha^b$  与  $\alpha^{b'}$  间不能包含两个相异的数  $\gamma$ , 这就证明了  $\gamma$  的唯一性.

若  $\beta$  是有理数, 则以上所给的定义符合于  $\alpha^\beta$  的通常的定义.

很易验证, 有任意实指数的幂满足一切通常的指数法则. 例如, 证明指数相加的法则:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

设  $b, b', c, c'$  是任意的有理数, 满足

$$b < \beta < b', \quad c < \gamma < c';$$



则依和的定义 [12], 有

$$b + c < \beta + \gamma < b' + c'.$$

而依幂的定义, 有

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'}, \quad \alpha^c < \alpha^\gamma < \alpha^{c'}, \quad \text{及} \quad \alpha^{b+c} < \alpha^{\beta+\gamma} < \alpha^{b'+c'}.$$

把首两个二重不等式逐项相乘 (对于有理指数, 所要证的法则是已知的), 则得

$$\alpha^{b+c} < \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma < \alpha^{b'+c'},$$

这样, 二数  $\alpha^{\beta+\gamma}$  及  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$  是位于限界  $\alpha^{b+c}$  与  $\alpha^{b'+c'}$  之间, 而且容易证明, 这两个界是可以任意接近的. 由此 (依引理 2 的推广), 推得这二数是相等的.

再证明, 在  $\alpha > 1$  时, 幂  $\alpha^\beta$  随着实指数  $\beta$  的增大而增大. 若  $\beta < \bar{\beta}$ , 则在它们中间插入有理数  $r: \beta < r < \bar{\beta}$ , 依实指数幂的定义, 就有

$$\alpha^\beta < \alpha^r \quad \text{及} \quad \alpha^r < \alpha^{\bar{\beta}},$$

由此

$$\alpha^\beta < \alpha^{\bar{\beta}}.$$

**20. 对数** 应用以任意实数为指数的幂的已给定义, 现在便很易确定以异于 1 的正数  $\alpha$  (例如我们当作  $\alpha > 1$ ) 为底的任意正实数  $\gamma$  的对数的存在.

若有这样的有理数  $r$  存在, 使

$$\alpha^r = \gamma,$$

即  $r$  便是所求的对数. 现在我们假定, 这样的有理数并不存在.

于是, 可以在一切有理数域内, 依下列规则作分划  $B|B'$ . 取合于  $\alpha^b < \gamma$  的有理数  $b$  归入  $B$  组, 取合于  $\alpha^{b'} > \gamma$  的有理数  $b'$  归入  $B'$  组.

我们证明,  $B$  组及  $B'$  组均非空集. 依不等式 (2), 有

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

并且只需取

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1}$$

便能使  $\alpha^n > \gamma$ ; 这样的自然数  $n$  必属于  $B'$  组. 同时又因

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)},$$

故只需取

$$n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)},$$



便能使  $\alpha^{-n} < \gamma$ , 于是  $B$  内有数  $-n$ .

对于分划的其他要求这里也都满足.

所构成的分划  $B|B'$  确定一个实数  $\beta$ ,  $\beta$  就成为两组数间的“界数”. 依幂的定义, 有

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

因此  $\alpha^\beta$  是满足一切这类不等式的唯一的数. 但对于数  $\gamma$  (依分划的构成) 有

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}.$$

故

$$\alpha^\beta = \gamma \quad \text{而} \quad \beta = \log_\alpha \gamma;$$

对数的存在就证明了.

**21. 线段的度量** 若停留于有理数域之内, 便不能提供一切线段以长度, 而这也是引入无理数的一个重要的动机. 现在我们将指出, 在已被拓广的数域中可以解决线段的度量的问题.

首先, 叙述这一问题:<sup>①</sup>

今要求对于任一直线段  $A$  以一个正实数  $l(A)$  和它对应, 即称为**线段  $A$  的长**, 使得

- 1) 某一预先指定的线段  $E$  (长的单位) 有长为 1:  $l(E) = 1$ ;
- 2) 相等的线段有同一的长;
- 3) 在线段相加时, 和的长常等于各相加线段之长的和:

$$l(A + B) = l(A) + l(B)$$

(可加性).

在这些条件的限制之下, 问题的解答是唯一的.

由 2) 及 3) 推得, 单位线段的  $q$  等分中的一部分应有长  $\frac{1}{q}$ ; 若这一分又重复地加  $p$  次, 则依 3), 所得线段应有长  $\frac{p}{q}$ . 这样, 若线段  $A$  与单位长是可通约的, 又线段  $A$  及  $E$  各为公共度量的  $p$  及  $q$  倍, 则必须

$$l(A) = \frac{p}{q}.$$

易见这数并不依赖于所取的公共度量, 又易见若依这规则以有理长赋予与单位长可通约的线段, 则对于这些线段, 度量的问题就完全解决了.

若线段  $A$  大于线段  $B$ , 设  $A = B + C$ , 此处  $C$  亦为某一线段, 则依 3) 应有

$$l(A) = l(B) + l(C),$$

<sup>①</sup>在这里我们应用中学几何方面的知识, 不叙述与它有关的公理.



由  $l(C) > 0$  得  $l(A) > l(B)$ . 故不等的线段应有不等的长, 而且较长的线段有较大的长度.

因任一正有理数  $\frac{p}{q}$  必为某一与单位长  $E$  可通约的线段的长, 很清楚, 无一与单位长不可通约的线段能有有理的长度.

令  $\Sigma$  是一与  $E$  不可通约的线段. 我们可找到无数多的与  $E$  可通约的线段  $S$  及  $S'$ ,  $S$  小于  $\Sigma$  而  $S'$  大于  $\Sigma$ ①. 若把它们的长度记成  $s$  及  $s'$ :  $l(S) = s, l(S') = s'$ , 则所求之长  $l(\Sigma)$  应满足不等式

$$s < l(\Sigma) < s' \text{②}.$$

若把一切有理数分配到  $S$  及  $S'$  二组, 把数  $s$  (以及一切负数及 0) 归入下组  $S$ , 把数  $s'$  归入上组  $S'$ , 则得有理数域中的分划. 因为显然在下组内没有最大数, 在上组内没有最小数, 故这分划确定一无理数  $\sigma$ , 它是满足诸不等式  $s < \sigma < s'$  的唯一实数. 显然, 长度  $l(\Sigma)$  必须等于此数.

今假定一切线段, 不论与  $E$  可通约或不可通约, 都依照上述规则记下其长度. 条件 1), 2) 显然满足. 考察二线段  $P, \Sigma$ , 长度为

$$\rho = l(P), \quad \sigma = l(\Sigma),$$

及其和, 线段  $T = P + \Sigma$ , 其长度记成  $\tau = l(T)$ . 取任意正有理数  $r, r', s, s'$ , 使

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

作线段  $R, R', S, S'$ , 各为有上述数字作为长度的线段. 线段  $R + S$  (长为  $r + s$ ) 将比  $T$  短, 而线段  $R' + S'$  (长为  $r' + s'$ ) 将比  $T$  长. 因此

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

但由 [12], 位于形如  $r + s$ ③与  $r' + s'$  的数之间的实数是唯一的, 因此  $\tau = \rho + \sigma$ , 这就证明了条件 3).

依数学归纳法, “可加性” 可以推广至任意有限个加数的情形.

若在轴 (有向直线) 上 (图 1) 选取原点  $O$  及单位长  $OE$ , 则

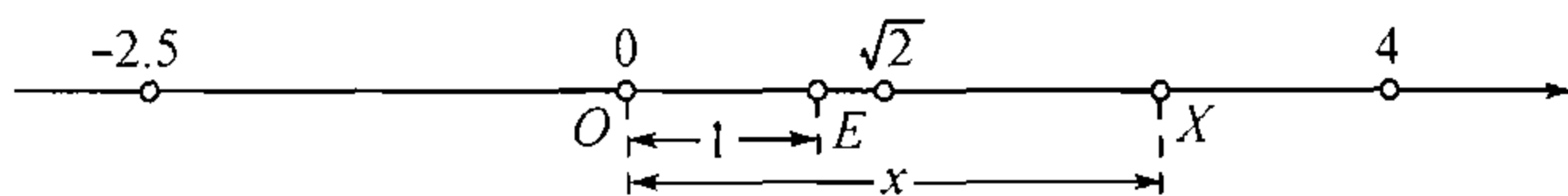


图 1

①由几何学上的阿基米德公理出发易于证明, 该公理我们在 5 内已讨论过了.

②自然, 与  $E$  可通约的线段  $\Sigma$  的长, 亦同样满足这不等式.

③ $r$  及  $s$  是正数的限制当然并不重要.



这直线上的任一点  $X$  必对应于某一实数  $x$ , 称为它的横标, 若  $X$  位于自  $O$  起的正向上,  $x$  即等于线段  $OX$  的长, 而在相反的情形等于这长的负数.

自然要问其逆是否亦真: 任一实数  $x$  在这时必对应于直线上某一点吗? 这问题在几何学上的回答是肯定的. 即依靠直线的连续性的公理, 它赋予作为点的集合的直线以类似于实数域的连续性的性质 [10].

这样, 在一切实数与有向直线 (轴) 上的点之间就可以成立一一对应的关系. 实数可以表示为轴上的点, 这轴因此便称为数轴. 类似的表示法我们以后将经常地应用着.



# 第一章 极限论

## §1. 整序变量及其极限

**22. 变量、整序变量** 在物理学及其他自然科学内读者曾经遇到各种不同的量: 时间, 长度, 体积, 重量等. 任一种量, 按照不同的情况, 有时具有不同的值, 有时仅取一值. 在第一种情形我们称它为**变量**, 在第二种情形称它为**常量**.

但在数学上我们不顾所考察的量的物理意义, 仅关心于表示这量的**数字**; 量的物理意义仅当数学被应用时, 始再获得重要性. 这样, 对于我们来说, 变量仅为赋予数值的符号 (例如, 字母  $x$ ) 而已<sup>5)</sup>.

若变量所能取值的集合  $\mathcal{X} = \{x\}$  已经指定, 则这变量就当作是已给定了. 常量可以当作变量的特殊情形来看待, 它相当于  $\mathcal{X} = \{x\}$  只有一个元素的情形<sup>6)</sup>.

在建立变量  $x$  的极限概念时, 仅知道这变量所取值的数集  $\mathcal{X}$  还是不够的; 必须再知道, 它所取的到底是些怎样的数值 (在它们中间, 可能有重复的), 以及它取这些值的次序. 关于**有序变量**及其极限的问题的一般讨论, 这里暂时搁下不提, 放在下一

<sup>5)</sup>对整个数学分析来说, (在历史上) 原来的、十分一般的变量概念与其说是纯数学性质的, 不如说是自然科学性质的. 给这个概念一个完全形式的定义, 实际上不可能.

有两种更为特殊的变量在今后的叙述中将起到关键的作用, 它们是严格定义的, 一种称为 (自) 变量, 另一种称为整序变量 (或称为整序型变量). 所说这两类变量的严格定义靠如下方式实现: 对它们要补充描述其指定过程, 即确切地指出认为变量或整序变量已经给定的条件. 特别是下面的一段正文乃是变量的定义.

<sup>6)</sup>这样一来, 首先是给定 (自) 变量, 等价于给定某个数集; 其次, 说法 “ $x$ ——变量” 事实上等价于 “ $x$ ——数集类元 (或任意元)” 我们指出, 上面所说的不适用于 “整序型的变量” (对于它, 给定的手续另行说明). 在本质上, 刚才所说的一类变量 (即自变量), 仅在第二章开头才会遇到并且用到.



卷的末尾<sup>①</sup> (那时, 读者将已累积着对于这一方面的充分的经验). 在本章内我们且讲述一种最简单同时也是最重要的特殊类型的变量.

今从建立数列的概念开始. 设有自然数的序列:

$$1, 2, \dots, n, \dots, n', \dots \quad (1)$$

在序列内数字依由小而大的顺序排列着, 较大的数  $n'$  在较小的数  $n$  的后面 (或较小的数  $n$  在较大的数  $n'$  的前面). 若在序列 (1) 内, 按照任何规律, 将每一自然数  $n$  换成实数  $x_n$ , 则得数列:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, x_{n'}, \dots \quad (2)$$

其项或元素  $x_n$  有一切自然数作为序号, 并依序号增大的次序排列着. 当  $n' > n$  时,  $x_{n'}$  就在  $x_n$  的后面 ( $x_n$  在  $x_{n'}$  的前面), 不管  $x_{n'}$  本身的数值大于、小于或等于  $x_n$ <sup>②</sup>.

取值成序列 (2) 的变量  $x$ , 我们——依照梅雷 (Ch. Méray)——称之为**整序变量**. 我们在这里就限于考察这种类型的变量<sup>7)</sup>.

在中学的数学教程内读者遇到过的变量即是整序型的变量. 例如, 大家所熟悉的序列

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d, \dots \quad (\text{算术序列})$$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & n \end{matrix}$

或

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad (\text{几何序列});$$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & n \end{matrix}$

每一序列中的变项就是整序变量.

在定义圆周的长度时, 通常考察圆内接正多边形的可变周长, 由六边形起, 将边数依次增加一倍; 这样, 这整序变量所取的数值便成一序列:

$$P_6 = 6R, \quad P_{12} = 12R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$P_{24} = 24R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad P_{48}, \dots$$

$\begin{matrix} & & & & 3 & & 4 \end{matrix}$

<sup>①</sup>参阅第二卷的附录:《极限的一般观点》.

<sup>②</sup>仿此, 可以定义直线上点的序列或自然界任何其他物体的序列的概念.

<sup>7)</sup>虽然从直观上看, 序列与**整序变量**两个概念有某些不同, 但在本质上两者是等价的. 实际上, 为了确定序列  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  和为了给定依次具有值  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  的变量  $x$ , 我们做的是同样的事——指出某个规则, 使每一个自然数  $n$  对应着完全确定的实数  $x_n$  (这个取决于我们意愿的数, 我们可称之为序列的第  $n$  项或整序变量的第  $n$  个值). 序列与整序变量这两个概念的等价性反映在表示上: 对于二者, 形如  $x_n$  的符号是标准的表示. 读者今后可以毫无顾虑地把**序列**与**整序变量**两个概念看成等同的, 而认为这两个术语是可以互换的同义词 (确定整序变量总是等同于确定序列所遍历的值). 我们要指出, 更为普遍的术语“序列”现已远比术语“整序变量”更为通行, 后者几乎不再使用.



再说到  $\sqrt{2}$  的十进小数近似值 (所说的是亏近似值), 使准确度继续增大, 它们便成一序列:

$$1.\underset{1}{4}, 1.\underset{2}{41}, 1.\underset{3}{414}, 1.\underset{4}{4142}, \dots$$

这也是一个整序变量.

取值成序列 (2) 的变量  $x$  常记成  $x_n$ , 就是以序列中的变项 (或普通项), 来记这个变量.

有时, 整序变量  $x$  直接由  $x_n$  的表达式所给定. 如在算术序列及几何序列时各为  $x_n = a + (n-1)d$  及  $x_n = aq^{n-1}$ . 利用这表达式便可以依已给序号立即算出整序变量的对应数值, 而不必知道在这以前它取过一些什么数值.

对于内接正多边形的周长, 要写出一般的表达式, 仅在引用数  $\pi$  后始为可能; 内接正  $m$  边形的周长  $p_m$ , 一般地表示为公式

$$p_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m}.$$

有时, 序列 (2) 的普通项  $x_n$  的表达式可能无法知道. 然若我们能掌握某种规则, 只要知道整序变量的任一序号时, 便能按照这规则算出其对应的数值, 则序列 (2) 以及由它所决定的整序变量都算作是已给定了. 因此, 既然我们已知道根的近似算法, 我们就可以算作  $\sqrt{2}$  的一切十进位近似值所成的序列是已经给定了, 虽然这序列的普通项的表达式不得而知.

若整序变量 —— 在上述的意义下 —— 已给定, 则不仅它所取值的集合已整个地确定, 并且它取这些值的次序亦确定; 对应于每一序号, 整序变量必有一个数值, 又在两数值中, 序号较大的当作是在后面的.

再着重指出, 整序变量的各个数值不一定要互不相同. 例如, 由下列公式之一所给定的整序变量:

$$x_n = 1; \quad x_n = (-1)^{n+1}; \quad x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n},$$

其对应的数列各为:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \dots \\ 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & -\frac{1}{6}, & \dots \\ 0, & 1, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{3}, & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

在第一种情形, 整序变量根本是一个常量, 它所取值的集合只有一个元素 1. 在第二种情形, 这集由整序变量所交错地取着的两个值 1 及  $-1$  所组成. 最后, 在第三种情形, 变量的值是无限集, 但这并不影响变量每隔一次取一个等于 0 的数值这一回事; 在第三项的数值 0, 我们当作不仅是在第二项的数值 1 以后, 且亦在第一项的数值 0 以后.



**23. 整序变量的极限** 读者从中学的教程内应该已熟悉这概念了. 这里是它的严格的定义:

若对于每一正数  $\varepsilon$ , 不论它怎样小, 恒有序号  $N$ , 使在  $n > N$  时, 一切  $x_n$  的值满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad (3)$$

则常数  $a$  称为整序变量  $x = x_n$  的极限.

$a$  是整序变量的极限这一事实, 记成:

$$\lim x_n = a \quad \text{或} \quad \lim x = a$$

( $\lim$  是拉丁文 *limes* 的简写, 即指“极限”). 我们也说, 变量趋于  $a$ , 并写成

$$x_n \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow a.$$

有时称数  $a$  为序列(2)的极限, 并说, 这序列收敛于  $a$ .

上述定义可以简短地叙述成:

数  $a$  是整序变量  $x = x_n$  的极限, 若  $x$  的数值  $x_n$  从某项开始都与  $a$  相差任意小.

含任意  $\varepsilon$  的不等式 (3) 就是  $x_n$  可以与  $a$  “相差任意小” 这一句话的准确记法, 而序号  $N$  恰好就指示着上述定义中“从某项开始” 那个“某项” 的位置.

最重要的是要认识到, 序号  $N$  一般地说来, 并不是一经指定后就永远不变的: 它是由我们所选的数  $\varepsilon$  来决定的. 为着要重视这件事, 我们有时不写  $N$  而写成  $N_\varepsilon$ . 当数  $\varepsilon$  减小时, 与它对应的序数  $N = N_\varepsilon$ , 一般地说来, 将会增大: 要使整序变量  $x_n$  的值与  $a$  的接近程度愈大, 则我们在序列 (2) 内所要考察的数值便必须愈远.

整序变量  $x_n$  的一切数值都等于常量  $a$  的这情形是例外: 显然, 这时  $a = \lim x_n$ , 但这时对于任何  $\varepsilon > 0$ , 不等式 (3) 能同时对于  $x_n$  的一切值都成立<sup>①</sup>.

我们已从 17 中知道, 不等式 (3) 相当于下列不等式

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

或

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \quad (4)$$

以后我们经常要用到这些不等式.

若把我们的整序变量  $x_n$  的值及数  $a, a \pm \varepsilon$  表示为数轴上的点 [21](图 2), 则得整序变量的极限的显明的几何解释. 以  $a$  点为中心的线段不论取得怎样小 (其长为  $2\varepsilon$ ), 一切点  $x_n$ , 从某点起, 必全部落在这线段之内 (这样, 在线段之外一定只有有限个点了). 表示极根的点  $a$  就是表示整序变量的数值的点的凝聚中心.

<sup>①</sup>对于从某项起开始都等于  $a$  的整序变量  $x_n$ , 有与此类似的情况.



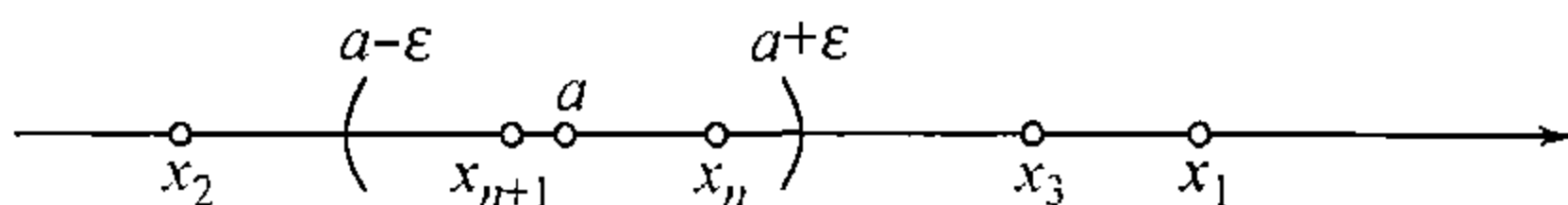


图 2

**24. 无穷小量** 当整序变量趋向于零时:  $x_n \rightarrow 0$ , 这情形特别值得注意.

极限为零的整序变量  $x_n$  称为**无穷小量**, 或简称**无穷小**.

若在整序变量的极限的定义 [23] 内使  $a = 0$ , 则不等式 (3) 成为

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon).$$

这样, 上面的无穷小的定义可以不用术语“极限”而更详细地叙述成:

若整序变量  $x_n$  的绝对值, 自某项起, 成为而且永远保持小于预先指定的任意小数  $\varepsilon > 0$ , 则它称为无穷小.

由于历史性所形成的术语“无穷小”量是不十分恰当的, 希望不要引起读者的误解, 这量的任何个别数值, 只要它不是零, 就不能当作是“很小的”量. 事实上, 无穷小是这样一个变量<sup>①</sup>, 它仅在自己变化过程中, 可以变为小于任意选取的数  $\varepsilon$ .

回到一般情形, 设整序变量  $x_n$  以  $a$  为极限, 则此变量与其极限的差

$$\alpha_n = x_n - a$$

显然将为无穷小: 因依 (3),

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon).$$

反之, 若  $\alpha_n$  是无穷小, 则  $x_n \rightarrow a$ . 这使我们导出下列命题:

整序变量  $x_n$  以常数  $a$  为极限的必要而且充分的条件是: 它们的差  $\alpha_n = x_n - a$  是无穷小.

因此, 可以给予“极限”的概念以另一定义 (和旧定义完全相当):

若常数  $a$  与整序变量  $x_n$  的差是无穷小量, 则  $a$  称为整序变量  $x_n$  的极限.

自然而然地, 若以这定义为极限论的出发点, 则对于无穷小必须应用上述的第二定义. 否则便得循环推理: 极限由无穷小确定, 而无穷小又由极限确定!

因此, 若整序变量  $x_n \rightarrow a$ , 则可以表示为

$$x_n = a + \alpha_n,$$

式中  $\alpha_n$  为无穷小. 反之, 若整序变量满足这表示式, 则它有极限  $a$ . 在实用时常用这式子以建立变量的极限.

<sup>①</sup>除去当它恒等于零的那种平凡情形以外.



## 25. 例题 1) 考察整序变量

$$x_n = \frac{1}{n}, x_n = -\frac{1}{n}, x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

与它们对应的数列为

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \cdots \\ -1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \cdots \\ 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \cdots \end{array}$$

三个变量都是无穷小, 即有极限 0. 事实上, 要使

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

仅需  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  便能成立. 这样, 便可取, 例如, 包含在  $\frac{1}{\varepsilon}$  内的最大的整数, 即  $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\textcircled{1}}$ , 作为  $N_\varepsilon$ .

注意到, 第一个变量常大于其极限 0; 第二个常小于它; 第三个则交迭地忽大于忽小于它.

2) 若设

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n},$$

则变量依次取下列数列中的数值

$$1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \cdots$$

在这情形同样有  $x_n \rightarrow 0$ , 因

$$|x_n| \leq \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

当  $n > \frac{3}{\varepsilon}$ , 故  $N_\varepsilon$  可以取为  $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$ .

我们在此地碰到稀奇的特性: 变量交迭地忽而接近于其极限 0, 忽而离去它.

3) 今设

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

这整序变量我们已在 22 末遇到它过. 在这里, 亦同样地有  $x_n \rightarrow 0$ , 因

$$|x_n| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

仅需  $N > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$ .

注意到, 对于  $n$  的一切奇数值变量都等于它的极限.

这些简单的例子是很有趣的, 由于它们表现出包含在上述整序变量的极限定义中的各种各样的可能性. 变量的值是否均在极限值的一方; 变量是否每一步都向其极限接近; 最后, 变量是否能达到其极限, 即是否具有等于极限的数值; 这些都不关紧要. 重要的仅是定义中所说的: 变量在最后, 即项数充分远时的数值, 与极限值之差要是任意小.

<sup>①</sup>一般地, 用  $E(p)$  表示不超过  $p$  的最大整数, 或简称数  $p$  的整数部分;  $E$  是法文 Entier 的起首字母, 表示“整”.



4) 取整序变量的更复杂的例:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4};$$

我们要证明它的极限是  $\frac{1}{3}$ .

为此目的, 考察差

$$x_n - \frac{1}{3} = \frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)},$$

估计其绝对值, 当  $n > 2$  时, 有:

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n},$$

因此, 若  $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , 这表达式便小于  $\varepsilon$ . 这就证明了  $x_n \rightarrow \frac{1}{3}$ .

5) 整序变量由公式

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} (a > 1)$$

所确定. 要证  $x_n \rightarrow 1$ .

若应用 19 内的不等式 (3), 则可以写成:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a - 1}{n} < \varepsilon, \text{ 仅需 } n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a - 1}{\varepsilon}\right).$$

但亦可用另外方法证明. 不等式

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon,$$

相当于

$$\frac{1}{n} < \log_a(1 + \varepsilon) \text{ 或 } n > \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)},$$

这样, 在  $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}\right)$  时, 它就成立了.

由于所选的推论方法不同, 我们便得出不同的  $N_\varepsilon$  的表达式. 例如, 在  $a = 10, \varepsilon = 0.01$  时, 依第一种方法得  $N_{0.01} = \frac{9}{0.01} = 900$ , 而依第二种方法得  $N_{0.01} = E\left(\frac{1}{0.00432 \dots}\right) = 231$ . 依第二种方法我们得出  $N_{0.01}$  的一切可能的数值中的最小者, 因为  $10^{\frac{1}{231}} = 1.010017 \dots$  与 1 的差已大于  $\varepsilon = 0.01$ . 在一般情形也是如此, 因为, 很容易看出, 当  $n \leq \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}$  时必有  $a^{\frac{1}{n}} - 1 \geq \varepsilon$ .

注意: 如果只是要证明极限存在, 则在这种场合我们总不关心于  $N_\varepsilon$  的最小可能的数值. 只需保证不等式 (3) 能成立就好了, 至于从哪一项开始, 位置远些的抑近些的, 可以不必去管它.

6) 整序变量

$$a_n = q^n, \text{ 式中 } |q| < 1$$

是无穷小的一个重要的例题. 要证明  $a_n \rightarrow 0$ , 试考察不等式

$$|a_n| = |q|^n < \varepsilon,$$



它相当于

$$n \cdot \lg |q| < \lg \varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}. \textcircled{1}$$

这样, 若假定 (设  $\varepsilon < 1$ )

$$N_\varepsilon = E \left( \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right),$$

则在  $n > N_\varepsilon$  时, 上述不等式一定成立.

仿此, 很易证明整序变量

$$\beta_n = A \cdot q^n$$

亦是无穷小, 其中  $|q| < 1$ , 而  $A$  是常数.

7) 再考察无穷递减几何序列

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots (|q| < 1)$$

并提出关于其和的定义问题.

大家知道所谓无穷序列各项的和, 自然应该是, 当  $n$  无限增大时, 其首  $n$  项的和  $s_n$  所趋向的极限. 但

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n,$$

因此这整序变量  $s_n$  与常数  $\frac{a}{1 - q}$  之差为  $a_n = -\frac{a}{1 - q}q^n$ , 我们刚才已看到它是无穷小量. 因此, 依极限的第二定义, 所求序列各项的和为

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1 - q}.$$

因此, 这个数就是几何序列的无穷多项的和, 把它写成为:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1 - q}.$$

8) 设已给二数  $a$  及  $b$ . 假定  $x_0 = a, x_1 = b$ , 而整序变量  $x_n$  以后的数值则由等式

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} (n \geq 2)$$

来决定.

这些  $x_n$  实际上都已给定, 因为, 这里令  $n = 2, 3, 4, \dots$ , 就可以依序地求出它的一切数值至任何项.

若从上述等式的两边各减去  $x_{n-1}$ , 则得

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) (n = 2, 3, \dots).$$

这样, 序列

$$x_1 - x_0 = b - a, x_2 - x_1, \dots, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - x_{n-1}$$

<sup>①</sup>这里 (和以后)  $\lg x$  都理解为  $\log_{10} x$ . 由于  $|q| < 1$ , 故  $\lg |q| < 0$ ; 因此, 在用这数除不等式的两边时, 不等号应换成相反的方向.



中, 任一个差 (由第二个开始) 都可以由前面一个差乘以  $-\frac{1}{2}$  而得到. 就是说, 我们有乘以  $-\frac{1}{2}$  为公比的几何数列. 因为它的  $n$  项和是  $x_n - a$ , 所以利用我们已知的 (参看 7) 几何序列和的公式, 立即得出

$$\lim(x_n - a) = \frac{b - a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}(b - a).$$

由此不难得出

$$\lim x_n = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{a - 2b}{3}.$$

9) 与几何序列相似, 可以考查任意数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

并且把它们依次相加, 作成“部分和”

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

如果当  $n$  无限增大时,  $A_n$  趋于 (有限或无穷) 极限  $A$ , 则数  $A$  就叫做所取一切数  $a_n$  的和, 并且写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A.$$

等式左边记号叫做**无穷级数**, 数  $A$  叫做它的和. 具有有限和的级数, 我们说它是**收敛的**.

例如, 设已知级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

这里

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \dots$$

因此, 在这个情形

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

显然  $A_n \rightarrow 1$ , 因此, 所说的级数收敛, 并且和为 1.

如果级数没有有限和, 这时我们就说这个级数**发散**: 例如,

$$1 + 1 + \dots + 1 + 1 \dots$$

就是这样的级数.



**26. 关于有极限的整序变量的一些定理** 设整序变量有极限  $a$ . 对于任一  $p < a$  (或  $q > a$ ) 很易选取数  $\varepsilon > 0$ , 使

$$a - \varepsilon > p \quad (\text{或 } a + \varepsilon < q);$$

为此目的, 只需取  $\varepsilon$  小于差  $a - p$  (或  $q - a$ ) 就是. 但依极限的定义 [23], 恒能求出这样的序号  $N$ , 使当  $n > N$  时不等式 [参阅 (4)]

$$x_n > a - \varepsilon \quad (x_n < a + \varepsilon)$$

能满足. 因此, 自然也成立不等式

$$x_n > p \quad (\text{或 } x_n < q).$$

1° 若整序变量  $x_n$  趋于极限  $a$ , 又  $a > p$  ( $a < q$ ), 则一切变量的数值, 从某项开始, 亦将  $> p$  ( $< q$ ).

这一简单的命题包含一系列有用的推论.

2° 若整序变量  $x_n$  趋于极限  $a > 0$  ( $< 0$ ), 则变量本身从某项开始亦必有  $x_n > 0$  ( $< 0$ ).

要证明此论点, 只需在上述命题中取  $p = 0$  ( $q = 0$ ) 就行了.

要准确的结果是:

3° 若整序变量  $x_n$  趋于异于零的极限  $a$ , 则必有充分远的  $x_n$  的值, 其绝对值得超过某正数  $r$ :

$$|x_n| > r > 0 \quad (n > N).$$

实际上, 当  $a > 0$  ( $< 0$ ) 时, 可以取

$$0 < p < a \quad (a < q < 0),$$

并假定  $r = p$  ( $r = |q|$ ).

4° 另一方面, 若整序变量  $x_n$  有极限  $a$ , 则  $x_n$  必定是有界的, 意即, 它的一切值在绝对值上不超过某一有限的界:

$$|x_n| \leq M \quad (M = \text{常数}; n = 1, 2, \dots).$$

取数  $M' > |a|$ , 即  $-M' < a < M'$ , 并假定  $p = -M'$ ,  $q = M'$ . 求出这样的序号  $N$ . 使当  $n > N$  时, 有

$$-M' < x_n < M' \quad \text{或} \quad |x_n| < M'.$$

这不等式当  $n = N + 1, N + 2, \dots$  时, 自然能满足, 因此它只可能对于整序变量的前  $N$  项 (或它们之中的某几项) 不满足.



因此, 若假定  $M$  等于数

$$|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M'$$

中的最大者, 则一切  $x_n$  的值都将满足  $|x_n| \leq M$ , 此即需证者.

附注 I.  $x_n$  为有界变量的定义也可以用不等式

$$k \leq x_n \leq g \quad (n = 1, 2, \dots)$$

来表示, 式中  $k$  及  $g$  为二有限的数. 实际上, 由这些不等式, 若令  $M$  等于  $|k|$  及  $|g|$  中的最大数, 则得  $|x_n| \leq M$ ; 反之, 若先有最后的不等式, 则可以把它写成  $-M \leq x_n \leq M$ , 这样  $-M$  就可当作是  $k$ ,  $M$  就可当作是  $g$ .

II. 命题 4° 不能逆述. 并非一切有界的整序变量都有极限. 例如, 若设  $x_n = (-1)^{n+1}$ , 则这个整序变量当然是有界的:  $|x_n| \leq 1$ , 但它却并无极限, 总是在  $+1$  和  $-1$  间振动着.

最后, 根据命题 1°, 证明极限的唯一性.

5° 整序变量  $x_n$  不能同时趋于两个相异的极限.

事实上, 假定其逆: 设同时有  $x_n \rightarrow a$  和  $x_n \rightarrow b$ , 又  $a < b$ . 取出  $a$  与  $b$  间的任一数  $r$ ,

$$a < r < b.$$

因  $x_n \rightarrow a$  及  $a < r$ , 必能求得序号  $N'$ , 使当  $n > N'$  时不等式  $x_n < r$  能满足. 由另一方面, 因  $x_n \rightarrow b$  及  $b > r$ , 必能求得序号  $N''$ , 使当  $n > N''$  时成立  $x_n > r$ . 若取大于  $N'$  及  $N''$  的序数  $n$ , 则变量  $x_n$  的对应值将同时既  $< r$  又  $> r$ , 这是不可能的.

这矛盾便证明了我们的命题.

**27. 无穷大量** 无穷大量(或简称无穷大), 在某种意义上是与无穷小量相反的.

若整序变量  $x_n$ , 由某项开始, 其绝对值变成且保持着大于预先指定的任意大数  $E > 0$ ,

$$|x_n| > E \quad (\text{当 } n > N_E \text{ 时}),$$

$x_n$  便称为无穷大.

如同在无穷小的情形一样, 这里亦需着重指出, 无穷大量的任一个别数值都不能当作“大量”看待. 我们这里所讨论的是这样的变量, 它仅在本身改变的过程中可以大于任意选取的数  $E$ .

无穷大的例, 如整序变量

$$x_n = n; \quad x_n = -n; \quad x_n = (-1)^{n+1}n,$$



它们都依次在整数的序列中取值, 但第一种带正号, 第二种带负号, 第三种带交迭的符号.

再举一个无穷大量的例子:

$$x^n = Q^n, \quad \text{当 } |Q| > 1 \text{ 时.}$$

事实上, 不论有怎样的  $E > 0$ , 不等式

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

总能满足, 仅需

$$n \cdot \lg |Q| > \lg E \quad \text{或} \quad n > \frac{\lg E}{\lg |Q|} \textcircled{1}.$$

因此可以取数

$$E \left( \frac{\lg E}{\lg |Q|} \right)$$

当作  $N_E$ .

若整序变量  $x_n$  成为无穷大, 并且 (至少在充分大的  $n$  时) 保持着一定的符号 (+ 或 -), 这时, 按照符号的正或负, 我们说  $x_n$  有极限  $+\infty$  或  $-\infty$ , 并写成:

$$\lim x_n = +\infty, x \rightarrow +\infty \quad \text{或} \quad \lim x_n = -\infty, x_n \rightarrow -\infty.$$

在这些情形时, 可以分别用不等式

$$x_n > E \quad \text{或} \quad x_n < -E$$

来代替不等式  $|x_n| > E$ , 以作为每种特殊无穷大量的定义式. 由此已可推得必有  $x_n > 0$  或  $x_n < 0$ .

在一般情形无穷大量表示关系:  $|x_n| \rightarrow +\infty$ .

在前面所举的无穷大量的例中, 显然, 整序变量  $x_n = n$  趋向  $+\infty$ ,  $x_n = -n$  趋向  $-\infty$ . 至于第三个:  $x_n = (-1)^{n+1}n$ , 对于它我们既不能说它趋向  $+\infty$ , 也不能说它趋向  $-\infty$ .

最后, 关于整序变量  $x_n = Q^n$ , 当  $Q > 1$  时, 可以说它趋向  $+\infty$ , 而当  $Q < -1$  时, 仅能说极限不存在.

关于“广义的数” $\pm\infty$ , 我们在 10 内已讨论过它; 必须记住, 它们的应用, 在意义上完全是有条件的, 对这些“数”进行算术运算时要特别小心. 常常简单写  $\infty$  来代替  $+\infty$ .

引入无穷极限并不破坏在前一段 (参阅 5°) 内所建立的极限的唯一性的定理; 实际上, 有如在 (4°) 已指出过的, 有一有限极限  $a$  的整序变量必为有界, 因此, 无论如何不能同时又趋向无穷极限.

最后, 讲一讲无穷大量与无穷小量间的简单关系:

若整序变量  $x_n$  是无穷大, 则它的倒数  $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$  将成无穷小.

<sup>①</sup>因  $|Q| > 1$ , 故  $\lg |Q| > 0$ .



取任意数  $\varepsilon > 0$ . 因  $x_n \rightarrow \infty$ , 故对于数  $E = \frac{1}{\varepsilon}$  可以求得序号  $N$ , 使

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ 仅需 } n > N.$$

于是对于这种  $n$ , 显然将有

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

这就证明了我们的命题.

仿此, 可以证明逆命题:

若整序变量  $\alpha_n$  (不等于零) 是无穷小, 则其倒数  $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$  将成无穷大.

## §2. 极限的定理 · 若干容易求得的极限

**28. 对等式及不等式取极限** 当我们用等号或不等号联结二整序变量  $x_n$  及  $y_n$  时, 我们所指的总是它们的对应数值, 即具有同一序号的数值.

1° 若二整序变量  $x_n, y_n$  在它们的一切变化过程中总是相等:  $x_n = y_n$ , 并且各趋于有限极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则这些极限必相等:  $a = b$ .

这可由极限的唯一性 [26, 5°] 直接推得.

这定理通常写成对等式取极限的形式: 由  $x_n = y_n$  得出:

$$\lim x_n = \lim y_n.$$

2° 若二整序变量  $x_n, y_n$  常满足不等式  $x_n \geq y_n$ , 并且各趋于有限极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则必  $a \geq b$ .

假定是相反的情形: 设  $a < b$ . 像在 26, 5° 中一样, 任取在  $a$  与  $b$  间的一数  $r, a < r < b$ . 那么, 一方面, 可以求得序号  $N'$ , 使当  $x > N'$  时成立  $x_n < r$ , 但另一方面, 又可求得序号  $N''$ , 使当  $n > N''$  时成立  $y_n > r$ . 若  $N$  大于  $N'$  和  $N''$ , 则当  $n > N$  时将同时成立不等式

$$x_n < r, \quad y_n > r, \quad \text{由此 } x_n < y_n,$$

这是违反假定的. 定理便得证明.

这定理使我们得以对不等式 (连同着等号的) 取极限: 由  $x_n \geq y_n$  得结论:

$$\lim x_n \geq \lim y_n.$$



当然, 各处的  $\geq$  号都可以换成  $\leq$  号.

请读者注意, 由严格的不等式  $x_n > y_n$ , 一般说来, 不能推得严格的不等式  $\lim x_n > \lim y_n$ , 而仅能推得:  $\lim x_n \geq \lim y_n$ . 例如对于一切的  $n$ , 有  $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ , 但却有

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \left( -\frac{1}{n} \right) = 0.$$

在确定整序变量的极限的存在及其数值时, 下面的定理常是很有用的:

3° 若整序变量  $x_n, y_n, z_n$  恒满足不等式

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

并且  $x_n$  及  $z_n$  趋向同一极限  $a$ :

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

则  $y_n$  亦必以  $a$  为极限:

$$\lim y_n = a.$$

指定任意的  $\varepsilon > 0$ . 对于这  $\varepsilon$ , 首先可以求得序号  $N'$ , 使当  $n > N'$  时

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

其次, 又可求得序号  $N''$ , 使当  $n > N''$  时

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

设  $N$  大于  $N'$  及  $N''$ ; 则当  $n > N$  时, 上述两不等式都能满足, 故

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

结果当  $n > N$  时

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \text{或} \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

这样, 实际上就是  $\lim y_n = a$ .

由这定理, 特别, 可以推得: 若对于一切  $n$

$$a \leq y_n \leq z_n,$$

且已知  $z_n \rightarrow a$ , 则亦必有  $y_n \rightarrow a$ . 要直接证明这事实也是很容易的.

定理 1°, 2° 及 3° 很易推广至无穷极限的情形 (其中定理 3° 仅适用于带有确定符号的无穷极限).



**29. 关于无穷小的引理** 在以后的定理中我们将要同时考察两个 (或更多个) 整序变量, 并在它们之间施行算术运算. 这时如上所述, 我们所指的也就是在这些整序变量的对应数值间施行算术运算的意思. 例如, 谈及二整序变量  $x_n$  及  $y_n$  的和时, 若  $x_n$  及  $y_n$  各依次在数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

及

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$$

中取值, 那么整序变量  $x_n + y_n$  便依次在数列

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots$$

中取值.

在证明关于变量的算术运算的定理时, 下面两个关于无穷小的引理, 将担任着重要的角色.

**引理 1** 任何有限个无穷小的和亦是无穷小量.

我们只证明对于二无穷小  $\alpha_n$  及  $\beta_n$  的情形 (一般的情形仿此讨论).

给定任意的  $\varepsilon > 0$ . 根据无穷小的定义, 由  $\varepsilon$  可以决定无穷小  $\alpha_n$  的序号  $N'$ , 使当  $n > N'$  时有

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同样地对于  $\beta_n$  可以求出  $N''$ , 使当  $n > N''$  时有

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若取自然数  $N$  大于  $N'$  及  $N''$ , 则当  $n > N$  时, 两不等式同时成立, 这样, 便有

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此,  $\alpha_n + \beta_n$  也是无穷小.

**引理 2** 有界变量  $x_n$  与无穷小  $\alpha_n$  的乘积仍是无穷小.

设对于一切  $n$  有

$$|x_n| \leq M.$$

若给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 则依  $\frac{\varepsilon}{M}$ , 对于无穷小  $\alpha_n$  可以求出  $N$ , 使当  $n > N$  时有

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

对于这种  $n$ , 显然有

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

由此推得,  $x_n \cdot \alpha_n$  为无穷小.



**30. 变量的算术运算** 下面这些定理所以重要, 在于在很多情形时, 用了它们可以不必把一切与极限有关的问题都追溯到“极限”的定义, 然后依指定的  $\varepsilon$  找出对应的  $N$ , 等等. 用了这些定理, 极限的计算将大为简化.

1° 若整序变量  $x_n$  及  $y_n$  趋于有限极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则它们的和 (差) 仍趋于有限极限, 并且

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

由定理的条件, 推得

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n \quad (1)$$

式中  $\alpha_n$  及  $\beta_n$  为无穷小. 故

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

这里的  $\alpha_n \pm \beta_n$  依引理 1 为无穷小; 因此, 应用极限的第二定义, 可以证实整序变量  $x_n \pm y_n$  有极限等于  $a \pm b$ , 此即要证明的.

这定理及其证法, 可以推广到任意有限个有极限的整序变量相加的情形.

2° 若整序变量  $x_n$  及  $y_n$  趋于有限极限

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则它们的积仍趋于有限极限, 并且

$$\lim x_n y_n = ab.$$

仍由等式 (1) 出发, 这次便有

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n).$$

依引理 1 及 2, 在括号内的式子为无穷小量. 由此便推得, 整序变量  $x_n y_n$  确趋于极限  $ab$ .

这定理可以推广到任意有限个有极限的整序变量相乘的情形 (例如, 用数学归纳法).

3° 若整序变量  $x_n$  及  $y_n$  趋于有限极限

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

并且  $b$  异于 0, 则它们的比仍趋于有限极限, 并且

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$



由于  $b \neq 0$ , 根据 26 的命题 3°, 由某项开始, 不仅  $y_n \neq 0$ , 且有

$$|y_n| > r > 0,$$

式中  $r$  是常数. 对于使上面的不等式成立的那些  $n$ , 比  $\frac{x_n}{y_n}$  显然是有意义的.

依旧由等式 (1) 出发, 得

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

依引理 1 及 2, 在括号内的式子为无穷小量. 根据开始时的叙述, 而其乘数将是有界变量:

$$\left| \frac{1}{by_n} \right| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

因此, 依引理 2, 等式右边的积将是无穷小. 但它表示整序变量  $\frac{x_n}{y_n}$  及数  $\frac{a}{b}$  的差, 故  $\frac{x_n}{y_n}$  的极限是  $\frac{a}{b}$ . 此即所要证的.

**31. 不定式** 在前一段内我们曾考察式子

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}, \quad (2)$$

并在整序变量  $x_n$  及  $y_n$  都趋于有限极限的假定下 (在相除的情形,  $y_n$  的极限应不等于零), 我们已确定了各式子的极限.

今再详述余下的尚未考察的情形, 当  $x_n$  及  $y_n$  (其中之一或两者) 的极限是无穷大时, 或 (若论及除法) 当分母的极限为零时. 由这两种情形, 这里只讲四种重要而且有用的奇异性.

1° 我们首先来看商  $\frac{x_n}{y_n}$ , 设两个变量  $x_n$  及  $y_n$  同时趋于零. 这里我们首先遇到完全特殊的情况: 虽然已知  $x_n$  及  $y_n$  的极限, 但关于它们的比的极限 —— 在不知道这些整序变量的本身时 —— 我们不能作出任何一般的论断. 这极限, 依赖两变量各自改变的规律, 可以有各种不同的数值, 或根本不存在. 下列的简单的例子可以解释这点.

设  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$ , 则两整序变量各自趋于零, 它们的比  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$  也趋于零; 反之, 设  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n^2}$ , 虽然它们依旧各自趋于零, 但这次它们的比  $\frac{x_n}{y_n} = n$  趋于  $\infty$ ! 再取任一异于零的数  $a$ , 并作出两个无穷小  $x_n = \frac{a}{n}$  及  $y_n = \frac{1}{n}$  便知它们的比有极限为  $a$  (因恒等于  $a$ ).

最后, 若  $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$  (两者各有极限为零), 则比  $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$  显出根本没有极限.



这样,单是知道整序变量  $x_n$  及  $y_n$  的极限,在目前的情形下我们就无法判断它们的比的性态:必须知道整序变量本身,即它们改变的规律,并直接研究比  $\frac{x_n}{y_n}$ . 为了要表达当  $x_n \rightarrow 0$  及  $y_n \rightarrow 0$  的情形时的奇异性,就说,表达式  $\frac{x_n}{y_n}$  是  $\frac{0}{0}$  型的不定式.

2° 在同时  $x_n \rightarrow \pm\infty$  及  $y_n \rightarrow \pm\infty$  的情形,亦有类似的情况. 若不知道整序变量本身,关于它们的比的性态便不能作出一般的论断. 这一事实可以用完全类似于 1° 内引用的那些例题来表明:

$$\begin{aligned} x_n = n &\rightarrow \infty, \quad y_n = n^2 \rightarrow \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0; \\ x_n = n^2 &\rightarrow \infty, \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \rightarrow \infty; \\ x_n = an &\rightarrow \pm\infty (a \neq 0), \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \rightarrow a; \\ x_n = [2 + (-1)^{n+1}]n &\rightarrow \infty, \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

根本没有极限.

在这种情形,就说,表达式  $\frac{x_n}{y_n}$  是  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式.

转而考察积  $x_n y_n$ .

3° 若  $x_n$  趋于零,同时  $y_n$  趋于  $\pm\infty$ ,则研究积  $x_n y_n$  的性态时,我们又遇到像 1° 及 2° 内所遇到的那种奇异性. 关于这点可以由下面的例题证实它:

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{n^2} &\rightarrow 0, \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0; \\ x_n = \frac{1}{n} &\rightarrow 0, \quad y_n = n^2 \rightarrow \infty, \quad x_n y_n = n \rightarrow \infty; \\ x_n = \frac{a}{n} &\rightarrow 0 (a \neq 0), \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad x_n y_n = a \rightarrow a; \\ x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} &\rightarrow 0, \quad y_n = n \rightarrow \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

根本没有极限.

在这种情形,即当  $x_n \rightarrow 0$  及  $y_n \rightarrow \infty$  时,就说,表达式  $x_n y_n$  是  $0 \cdot \infty$  型的不定式.

最后,考察代数和  $x_n + y_n$ .

4° 这里讲当  $x_n$  及  $y_n$  趋于异号的无穷大时的奇异情形:就是若不知道整序变量  $x_n$  及  $y_n$  本身,则不可能确定  $x_n + y_n$  的极限. 在这里所表示的各种不同的可能



性可用下面的例题表明它:

$$x_n = 2n \rightarrow +\infty, \quad y_n = -n \rightarrow -\infty, \quad x_n + y_n = n \rightarrow +\infty;$$

$$x_n = n \rightarrow +\infty, \quad y_n = -2n \rightarrow -\infty, \quad x_n + y_n = -n \rightarrow -\infty;$$

$$x_n = n + a \rightarrow +\infty, \quad y_n = -n \rightarrow -\infty, \quad x_n + y_n = a \rightarrow a;$$

$$x_n = n + (-1)^{n+1} \rightarrow +\infty, \quad y_n = -n \rightarrow -\infty, \quad x_n + y_n = (-1)^{n+1}$$

根本没有极限.

因此, 当  $x_n \rightarrow +\infty$  及  $y_n \rightarrow -\infty$  时, 即说, 式  $x_n + y_n$  表示  $\infty - \infty$  型的不定式.

这样, 当提出了依整序变量  $x_n$  及  $y_n$  的极限去确定由它们所组成的算术式 (2) 的极限这个问题以后, 我们发现了不可能解答的四种情形: 即型为

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty^{①}$$

的不定式. 在这些情形, 必须注意整序变量  $x_n$  及  $y_n$  的改变规律, 直接去研究我们所关心的式子. 类似的研究称为不定式的定值法. 以后它并不永远像上面所举的例题那样简单. 下面我们要举几个这种类型的比较有趣的例题.

**32. 极限求法的例题** 1) 设  $p(n)$  是整数  $n$  的常系数多项式:

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k,$$

今试求这多项式的极限. 若这多项式的一切系数全是正 (负) 的, 则显然  $p(n)$  的极限是  $+\infty(-\infty)$ . 但在系数为异号的情形, 某些项趋向  $+\infty$ , 另一些项趋向  $-\infty$ , 就遇到  $\infty - \infty$  型的不定式.

要确定这一不定式, 可以把  $p(n)$  写成

$$p(n) = n^k \left( a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k} \right).$$

因为在括号内的一切加数, 从第二项起, 当  $n$  增大时为无穷小, 所以括号内的式子有极限为  $a_0$ ; 但第一个乘数趋向  $+\infty$ . 在这个情形整个式子趋于  $+\infty$  或  $-\infty$ , 视  $a_0$  的符号而定.

将已给式子变形以消除其“不定性”(如我们这里所用的) 是不定式定值法中常用的方法.

2) 若  $q(n)$  也是多项式:

$$q(n) = b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l,$$

则商  $\frac{p(n)}{q(n)}$  在  $n$  增大时是  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式.

在这里也就将每一个多项式变形, 如同在 1) 内做过的那样, 则得:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_l}{n^l}}.$$

上式右边第二个乘数有一有限极限  $\frac{a_0}{b_0}$ . 若两个多项式的幂次相等:  $k = l$ , 则比  $\frac{p(n)}{q(n)}$  ② 的极限

①当然, 这些记号是不带有任何数的意义的. 其中每一个不过是四种例外类型之一的简短约定记号.

②据此, 在 25 的例 4 内, 可得极限为  $\frac{1}{3}$ .



为  $\frac{a_0}{b_0}$ . 在  $k > l$  时, 第一个乘数趋向  $+\infty$ , 故所考察的比亦趋向  $\pm\infty$  (其符号视  $\frac{a_0}{b_0}$  的符号而定). 最后, 在  $k < l$  时, 第一个乘数趋向零, 于是整个式子跟着它趋向零.

3) 求三角锥体  $SABC$  的体积  $V$  (图 3).

分锥体的高  $H$  成  $n$  等分, 过各分点作平行于底面的平面. 所得的截面为相似于底的三角形. 在这些三角形上各作一系列的内含与外包的三角柱体; 由第一组组成体积  $V_n$ , 由第二组组成体积  $V'_n$ , 并且显然

$$V_n < V < V'_n.$$

但差  $V'_n - V_n$  并非别的, 就是最下面的那个外包三角柱体, 其底为  $Q = \triangle ABC$ , 高为  $\frac{H}{n}$ : 因此, 在  $n$  增大时, 差

$$V'_n - V_n = \frac{QH}{n} \rightarrow 0,$$

从而差  $V - V_n$  及  $V'_n - V$  也趋于零, 即

$$V = \lim V_n = \lim V'_n.$$

今试求  $V'_n$  的表达式. 在这里我们所考察的是由一组外包三角柱体所组成的立体; 依锥体截面的性质, 它们的底依次等于

$$\frac{1}{n^2}Q, \frac{2^2}{n^2}Q, \dots, \frac{i^2}{n^2}Q, \dots, \frac{n^2}{n^2}Q = Q,$$

同时所有的高都等于  $\frac{H}{n}$ . 因此,

$$V'_n = \frac{Q}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{H}{n} = \frac{QH}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{QH}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \textcircled{1},$$

而

$$V = \lim V'_n = \frac{QH}{3}.$$

4) 求由抛物线  $y = ax^2 (a > 0)$  上的一部分  $OM$ ,  $x$  轴上的线段  $OP$  及线段  $PM$  所围成的图形  $OPM$  的面积  $Q$  (图 4).

分线段  $OP$  成  $n$  等分, 并在各部分上作一系列的内含及外凸的矩形. 这些内含或外凸矩形的全体各自组成阶状平面域, 其面积为  $Q_n$  及  $Q'_n$ , 二者之差即最大外凸矩形之面积  $\frac{x}{n} \cdot y$ . 由此, 如同 3) 内一般,  $Q'_n - Q_n \rightarrow 0$ , 又因

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

显然

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

因各个矩形的高是抛物线上的点的纵标, 其对应之横标依次为

$$\frac{1}{n}x, \frac{2}{n}x, \dots, \frac{i}{n}x, \dots, \frac{n}{n}x = x,$$

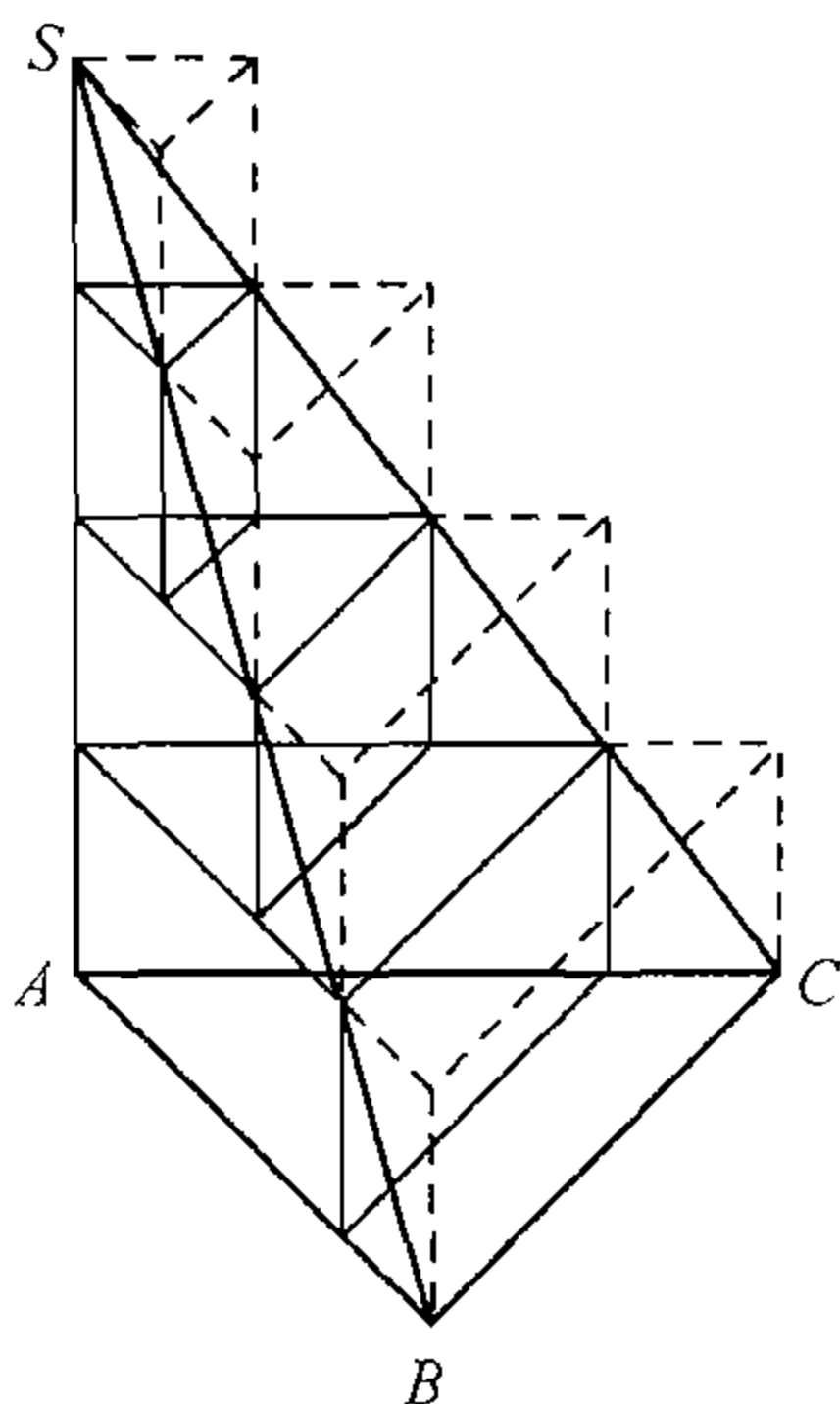


图 3

①在这里我们利用前  $n$  个自然数平方和的已知公式.



根据曲线的方程, 这些高各等于

$$a \cdot \frac{1}{n^2} x^2, a \cdot \frac{2^2}{n^2} x^2, \dots, a \cdot \frac{i^2}{n^2} x^2, \dots, ax^2.$$

故得  $Q'_n$  的表示式

$$\begin{aligned} Q'_n &= \frac{ax^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{x}{n} \\ &= \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}. \end{aligned}$$

由此,

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{x \cdot ax^2}{3} = \frac{xy}{3}.$$

根据上例, 很易得出抛物线弓形  $M'OM$  的面积等于  $\frac{4}{3}xy$ , 即为外接矩形  $M'P'PM$  的  $\frac{2}{3}$  (这结果阿基米德早就知道了)<sup>①</sup>.

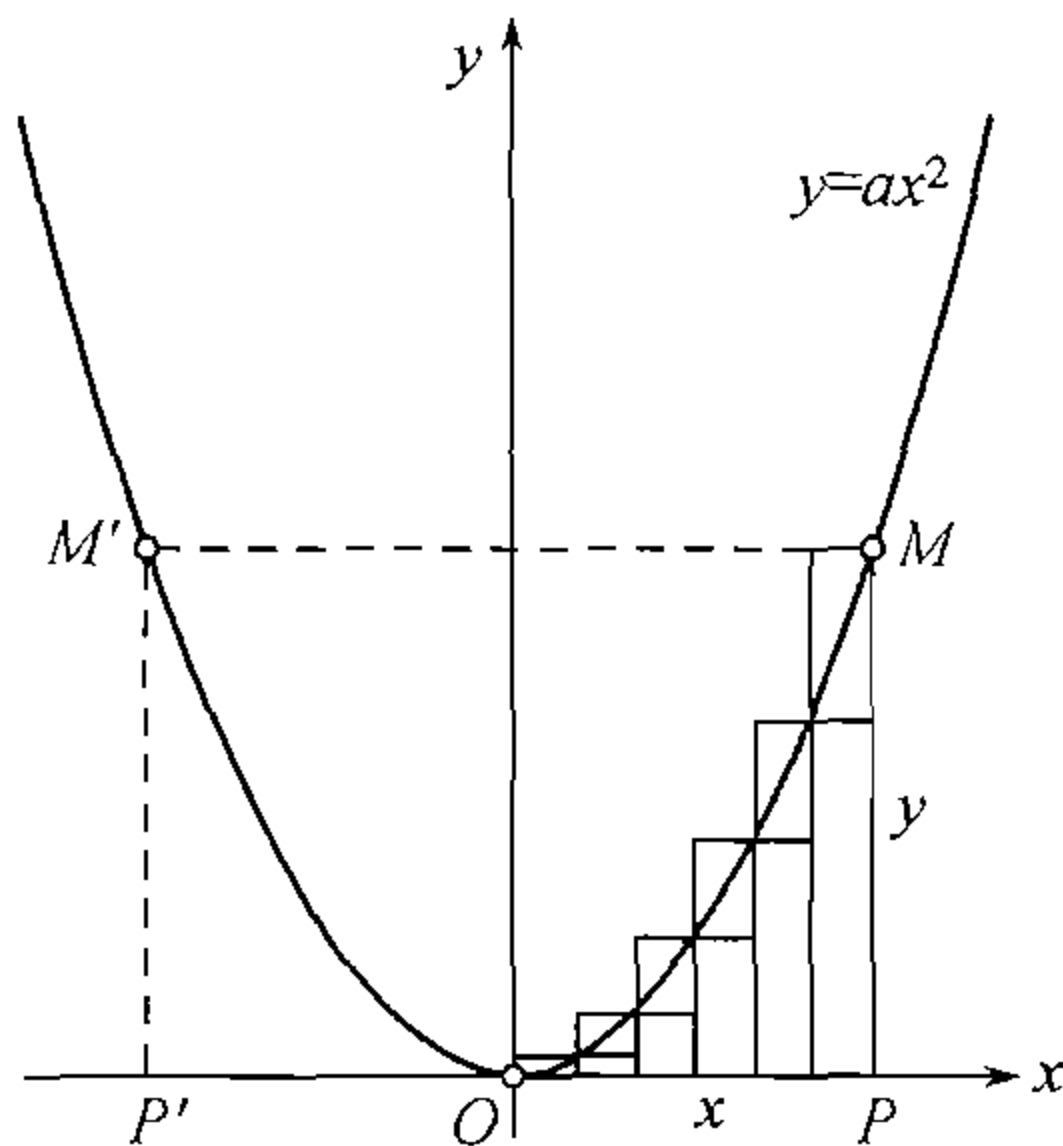


图 4

5) 证明, 在  $0 < k < 1$  时,

$$\lim [(n+1)^k - n^k] = 0.$$

在这里我们有  $\infty - \infty$  型的不定式. 将它变形, 把  $n^k$  从括号内取出:

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^k - n^k &= n^k \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right] \\ &< n^k \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \frac{1}{n^{1-k}}. \end{aligned}$$

因  $\frac{1}{n^{1-k}} \rightarrow 0$ , 所以  $(n+1)^k - n^k \rightarrow 0$ , 此即所要证的.

6) 求整序变量

$$x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

的极限.  $x_n$  (根据上例) 是  $\infty \cdot 0$  型的不定式.

用根式  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$  乘及除上式的右边, 则所给式变形成  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式:

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

最后, 以  $\sqrt{n}$  除分子及分母:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

显然,

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n};$$

因  $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ , 故  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$ . 最后得出

$$\lim x_n = \frac{1}{2}.$$

<sup>①</sup>曲线形面积的一般定义, 要在第十章 (第二卷) 才给定; 这里所应用的面积算法在那里亦将一般化以适用于别的曲线形上.



7) 求出下列整序变量的极限:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}, \quad y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

及

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

整序变量  $x_n$  及  $y_n$  是  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式 (因两者中的根式都  $> n$ , 故它们必趋向  $\infty$ ). 将它们变形, 用  $n$  除分子及分母:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

因在两式分母中的根式都有极限为 1 (参阅上例), 故  $x_n \rightarrow 1, y_n \rightarrow 1$ .

$z_n$  的表示式有着特有的形式: 这个和的每一项都依赖于  $n$ , 且其项数也随着  $n$  而增大<sup>①</sup>. 因每一项都小于首项而大于末项, 故

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \text{即} \quad x_n < z_n < y_n.$$

但已证整序变量  $x_n$  及  $y_n$  趋于公共极限 1; 因此, 依 28 的定理 3°,  $z_n$  亦必趋于这一极限.

8) 设给定  $m$  个正数  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , 其中之最大者记成  $A$ , 证明

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = A.$$

这一结论可由很明显的不等式

$$A \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq A \cdot \sqrt[n]{m}$$

推得 [参阅 25, 5)].

9) 我们在 27 内看到过, 当  $a > 1$  时, 幂  $a^n \rightarrow +\infty$  (在  $n$  增大时). 今研究比

$$\frac{a^n}{n^k}$$

的性态 (当  $k > 0$  时), 它是  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式.

先证一辅助不等式 (参阅在 19 内的伯努利不等式). 设令  $a = 1 + \lambda$ , 因此  $\lambda > 0$ , 依牛顿二项公式得:

$$a^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

因在  $n > 2$  时, 显然  $n-1 > \frac{n}{2}$ , 故最后得出

$$\left\{ a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2 \right\} \quad (3)$$

在  $k = 1$  时, 立即得出

$$\frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4} n,$$

<sup>①</sup>在 4) 及 5) 中的  $V'_n$  及  $Q'_n$  的表示式也有这种特性.



因此,

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

因这结果对于任何  $a > 1$  均成立, 故若  $k > 1$ , 便可写成 (至少在充分大的  $n$  时)

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[ \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n} \right]^k > \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n},$$

由此

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty (a > 1).$$

这样, 当  $k \geq 1$  时已证明了我们的结果, 而这结果当  $k < 1$  时显然也成立.

10) 不等式 (3) 亦可以用来证明

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

在 (3) 内假定  $a = \sqrt[n]{n}$ , 便得出

$$n > \frac{n^2}{4} (\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

由此

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

便导出所需的结果.

11) 我们现在可以建立另一有趣的极限.

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0 (a > 1).$$

(在这里我们又得  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式, 因为, 容易证明  $\log_a n \rightarrow +\infty$ ).

实际上, 若取任意数  $\varepsilon > 0$ , 则根据  $a^\varepsilon > 1$ , 当  $n$  充分大时将有 [26, 1°]

$$\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon.$$

以  $a$  为底取对数, 便得

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

由此便推得上述命题.

**33. 斯托尔茨 (O.Stolz) 定理及其应用** 为着要确定  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式  $\frac{x_n}{y_n}$  的极限, 下列斯托尔茨的定理经常是有用处的<sup>①</sup>.

设整序变量  $y_n \rightarrow +\infty$ , 并且 —— 至少是从某一项开始 —— 在  $n$  增大时  $y_n$  亦增大:  $y_{n+1} > y_n$ . 则

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

只需等式右边的极限已知为存在 (有限或  $\pm\infty$ ).

首先假定这极限等于有限数  $l$ :

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l.$$

<sup>①</sup>特别, 当  $y_n = n$  时, 这定理早已被柯西 (A.L.Cauchy) 所证明了.



则依任何已给的  $\varepsilon > 0$ , 必能求得序号  $N$ , 使当  $n > N$  时有

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

或

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

意即, 不论取怎样的  $n > N$ , 一切分数

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

都包含在这些限界之内. 因为  $n$  增大时  $y_n$  随着增大, 它们的分母都是正数, 所以在那些限界之内亦包含着分数

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N},$$

它的分子即为上述各分式的一切分子的和, 分母即为一切分母的和. 因此, 在  $n > N$  时,

$$\left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由恒等式 (它很容易直接验算出来):

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right),$$

可得

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_N - ly_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right|.$$

右边的第二项, 我们已看到, 在  $n > N$  时  $< \frac{\varepsilon}{2}$ ; 由于  $y_n \rightarrow +\infty$ , 所以第一项, 在  $n > N'$  时, 也将  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . 若在这时所取的  $N' > N$ , 则在  $n > N'$  时, 显然有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon,$$

这就证明了我们的命题.

无穷极限的情形可以化为上面已研究过的情形. 例如, 设

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty.$$

由此, 首先推得 (在充分大的  $n$  时),

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1},$$

因此, 随着  $y_n \rightarrow +\infty$  而  $x_n \rightarrow +\infty$ , 并且整序变量  $x_n$  随着序号  $n$  的增大而无限增大. 在这种情形, 可以把已证明的定理应用于  $\frac{y_n}{x_n}$ ;

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0.$$



(因为在这里极限已是有限的.)由此推得

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty,$$

此即所要证的.

再转而考察下列例题.

12) 我们在 9) 内已看到, 在  $a > 1$  时

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

借助于斯托尔茨定理立即能得出这一结果:

$$\lim \frac{a^n}{n} = \lim (a^n - a^{n-1}) = \lim a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty.$$

关于例 11) 亦有同样的情形.

13) 应用斯托尔茨定理可以证明下列有趣的 (柯西) 命题.

若整序变量  $a_n$  有 (有限或无穷) 极限, 则整序变量

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(整序变量  $a_n$  的首  $n$  个值的“算术平均值”) 亦有同一极限.

实际上, 在斯托尔茨定理内令

$$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad y_n = n,$$

便有

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n.$$

例如, 若我们知道 [10) ]  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ , 则必有

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 1.$$

14) 今考察整序变量

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

( $k$  为自然数), 它是  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式.

在斯托尔茨定理内令

$$x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, \quad y_n = n^{k+1},$$

便有

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}.$$

但

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)n^k + \cdots$$

如此, 便有

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)n^k + \cdots$$



从而 [参阅 2)]

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(k+1)n^k + \dots} = \frac{1}{k+1}.$$

15) 最后, 我们来求整序变量

$$u_n = n \left( z_n - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}$$

的极限, 它在第一种形式表示  $\infty \cdot 0$  型的不定式, 而在第二种,  $\infty - \infty$  型. 由分数的减法, 又得出  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式:

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}.$$

令  $x_n$  等于这分数的分子, 而  $y_n$  等于分母, 再应用同一定理, 则得

$$\lim u_n = \lim \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]}.$$

但

$$(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}] = \frac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \dots$$

而

$$n^k - (n-1)^k = kn^{k-1} + \dots$$

如此, [参阅 2)], 最后即得

$$\lim u_n = \lim \frac{\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \dots}{(k+1)kn^{k-1} + \dots} = \frac{1}{2}.$$

### §3. 单调整序变量

**34. 单调整序变量的极限** 到现在为止, 在所有关于变量的极限存在的定理中, 都具有下面的特点: 就是假设某些变量的极限存在, 而证明另一些与前者有关的变量的极限也存在. 至于当所给的变量与别的变量无关时如何判定它有有限极限的问题, 迄今尚未提出. 这问题的一般形式的解答, 留待第四节 39 ~ 42 再讲. 我们在这里且考察一种简单而重要的特殊类型的变量, 这一类变量的极限问题是很容易解决的.

若对于整序变量  $x_n$  有

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

就是说, 若  $n' > n$ , 必有  $x_{n'} > x_n$ , 这时我们把  $x_n$  称为是增大的. 若

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$



就是说, 若  $n' > n$ , 必有  $x_{n'} \geq x_n$ , 这时就把  $x_n$  称为**不减小的**. 若对于增的这一术语, 赋予更广泛的意义, 则在上述的后一种情形亦可以称为增的变量.

仿此, 可建立**减小的**——狭义的或广义的——变量的概念: 变量  $x_n$  称为是减小的, 若

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

或

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

如此由  $n' > n$ , 推得 (看情形而论)  $x'_{n'} < x_n$  或仅  $x'_{n'} \leq x_n$ .

一切这种类型的, 向单一方向改变的变量总称为**单调变量**. 至于其中个别的整序变量, 通常就说它是“单调增大”或“单调减小”.

关于单调整序变量成立下列——具有基本重要性的——定理.

**定理** 设已给单调增大的整序变量  $x_n$ . 若它上有界:

$$x_n \leq M (M = \text{常量}; n = 1, 2, \cdots),$$

则必有一有限的极限, 否则, 它趋向  $+\infty$ .

完全同样地, 单调减小的整序变量  $x_n$  恒有极限. 若它下有界:

$$x_n \geq m (m = \text{常量}, n = 1, 2, \cdots),$$

则它的极限是有限的, 否则它的极限为  $-\infty$ .

**证明** 且限制在整序变量  $x_n$  增大的情形, 可能是广义的(整序变量减小的情形可仿此详细证明).

先假定这变量上有界. 则依 11 的定理, 对于其数值的集  $\{x_n\}$  必有 (有限的) 上确界存在:

$$a = \sup\{x_n\};$$

我们将指出, 这数  $a$  刚好就是整序变量  $x_n$  的极限.

实际上, 回忆一下 11 内的上确界的特性. 第一, 对于一切  $n$  值将有

$$x_n \leq a.$$

第二, 不论取怎样的数  $\varepsilon > 0$ , 恒能求出序号  $N$ , 使

$$x_N > a - \varepsilon.$$

由于我们的整序变量的单调性 (在这里, 我们首先用着它), 在  $n > N$  时将有  $x_n \geq x_N$ , 从而  $x_n > a - \varepsilon$ , 因此对于这种  $n$  就成立不等式:

$$0 \leq a - x_n < \varepsilon \quad \text{或} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$



由此, 必有  $\lim x_n = a$ .

今设整序变量  $x_n$  不上有界. 则不论数  $E > 0$  怎样大, 我们的变量总有一值大于  $E$ ; 设这数值是  $x_N : x_N > E$ . 根据整序变量  $x_n$  的单调性, 在  $n > N$  时常成立

$$x_n > E,$$

而这即表示  $\lim x_n = +\infty$ .

很易明了, 对于那种变量, 它仅从某一项起才变成单调的, 一切结论仍能适用 (因为弃去起首的任何有限个数值, 对于变量的极限并无影响).

转而考察应用上述定理的例题.

### 35. 例题 1) 考察整序变量

$$x_n = \frac{c^n}{n!} \quad (\text{当作 } c > 0),$$

式中  $n! = 1, 2, \dots, n$ . (它在  $c > 1$  时是  $\infty$  型的不定式.)

因

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

故仅需  $n > c - 1$  时, 变量就成为减小的; 同时它下有界, 例如,  $x_n$  都大于 0. 因此, 整序变量  $x_n$ ——依定理——有一有限极限, 把它记成  $a$ .

为了求出它, 可使上述等式趋于极限; 因  $x_{n+1}$  与  $x_n$  取值于同一数列 (除第一项外), 亦必有同一极限  $a$ , 故得出

$$a = a \cdot 0,$$

由此,  $a = 0$ , 最后,

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) 仍设  $c > 0$ , 令定义整序变量  $x_n$  为:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \dots$$

一般地

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ 个根式}}$$

这样, 依公式, 由  $x_n$  可得出  $x_{n+1}$

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

很明显, 整序变量  $x_n$  单调地增大, 同时它上有界, 例如, 都小于数  $\sqrt{c} + 1$ . 实际上,  $x_1 = \sqrt{c}$  小于这数, 今若假定某一个  $x_n < \sqrt{c} + 1$ , 则对其后一数值亦得

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

这样, 根据数学归纳法就证明了我们的论点是正确的.



依基本定理, 整序变量  $x_n$  有某一有限极限  $a$ . 要确定它可在等式

$$x_{n+1}^2 = c + x_n$$

中取极限; 这样, 我们得出  $a$  满足于二次方程

$$a^2 = c + a.$$

这方程有异号的两个根; 但我们所要的极限  $a$  不可能是负数, 因此, 必等于其正根

$$a = \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}.$$

3) 取任何  $x_0, 0 < x_0 < 1$ , 我们用递推关系式

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$$

确定整序变量  $x_n$ , 设  $0 < x_n < 1$  (这条件对于  $n=0$  也满足), 我们确定了

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

事实上, 因为  $2 - x_n > 1$ , 所以  $x_{n+1} > x_n$ ; 但  $x_n(2 - x_n) = 1 - (1 - x_n)^2$ , 由此  $x_{n+1} < 1$ . 因此我们已归纳地证明了, 整序变量  $x_n$  是单调增大的, 而且保持小于 1; 所以它有有限极限  $a \neq 0$ . 对递推关系式取极限, 得出  $a = 1$ . 因此  $\lim x_n = 1$ .

请读者自己进行讨论如果取  $x_0$  在区间  $(0, 1)$  外的情形.

**附注** 设  $c$  是任何正数, 并设  $x_n = cy_n$ . 上述递推关系式变成为:

$$y_{n+1} = y_n(2 - cy_n).$$

取第一个值  $y_0$  满足条件:  $0 < y_0 < \frac{1}{c}$ , 我们得出  $y_n$  是单调增大的, 将趋于  $\frac{1}{c}$ . 计算机就是按这个方法来计算  $c$  的倒数.

4) 设给定二正数  $a$  及  $b(a > b)$ . 作出其等差中项及等比中项:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

大家知道, 等差中项大于等比中项<sup>①</sup>; 同时它们又都位于原来两数的中间:

$$a > a_1 > b_1 > b.$$

对于数  $a_1$  及  $b_1$ , 再作出它们的二种中项:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

<sup>①</sup>这可立刻由如下不等式推得:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} > 0 \text{ (在 } a \neq b \text{ 时)}.$$



并且有

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1$$

等等. 若数  $a_n$  及  $b_n$  已确定, 则数  $a_{n+1}$  及  $b_{n+1}$  依公式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

确定, 并且, 如上所述, 有

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

这样就得出二整序变量  $a_n$  及  $b_n$ , 其中第一个显然是减小的, 而第二个显然是增大的 (逐渐互相接近). 同时

$$a > a_n > b_n > b.$$

即二整序变量都是有界的, 故二者都趋于有限极限:

$$\alpha = \lim a_n \quad \text{及} \quad \beta = \lim b_n.$$

若在等式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

中取极限, 则得

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{由此} \quad \alpha = \beta.$$

这样, 二序列 —— 等差中项  $a_n$  的序列及等比中项  $b_n$  的序列 —— 都趋向于公共极限  $\mu = \mu(a, b)$ ; 依高斯的称呼, 称它为原数  $a$  及  $b$  的等差—等比中项. 要通过二数  $a, b$  来表达  $\mu(a, b)$ , 在现阶段中对于我们是不能办到的, 它需要用到所谓椭圆积分[参阅 303(第二卷)].

5) 仍由二正数  $a$  及  $b(a > b)$  出发, 这次是等差中项及调和中项<sup>①</sup>所组成的数列:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, & b_1 &= \frac{2ab}{a+b}, \\ a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2}, & b_2 &= \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} &= \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

由我们已知的不等式  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$  (在  $a \neq b$  时) 可得出:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab, \text{ 最后, } \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b},$$

<sup>①</sup>若数  $c$  的倒数  $\frac{1}{c}$  是正数  $a$  及  $b$  的倒数  $\frac{1}{a}$  及  $\frac{1}{b}$  的等差中项:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad \text{由此} \quad c = \frac{2ab}{a+b},$$

则  $c$  称为  $a$  及  $b$  的调和中项.



故等差中项大于调和中项, 但二种中项仍都位于原来二数之间. 应用于  $a_n$  及  $b_n$ , 使得

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

完全类似于前一例题内所做过的那样, 可以证明  $a_n$  及  $b_n$  都趋于公共极限  $c$ , 这  $c$  可以称为数  $a$  及  $b$  的等差-调和中项.

然而, 在这里的  $c$  有一个通过  $a$  及  $b$  的简单表示式. 我们看出,  $a_1 b_1 = ab$ ; 因为, 类似地, 又有  $a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n$ , 故可得结论: 对于一切  $n$  值,

$$a_n b_n = ab.$$

由此式取极限, 则得

$$c = \sqrt{ab},$$

即两数的等差-调和中项就是它们的等比中项.

6) 最后, 研究一个较复杂的例题.

由某一实数  $c$  出发, 假定  $x_1 = \frac{c}{2}$ , 而以后的整序变量  $x_n$  的值则由公式

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2} \quad (1)$$

归纳地确定它. 今由关于  $c$  的两个不同的假设出发来研究这整序变量的极限的问题.

注意到, 若预先知道有一有限极限

$$a = \lim x_n \quad (2)$$

存在, 便可不费力地求出它, 仅需在等式 (1) 中取极限, 便得出

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \quad \text{或} \quad a^2 - 2a + c = 0.$$

由这二次方程求得

$$a = 1 - \sqrt{1-c}. \quad (3)$$

由此立刻看出, 在  $c > 1$  时整序变量显然不能有一有限极限.

a) 先假定  $0 < c \leq 1$ . 则显见  $x_n > 0$ . 由 (1) 式逐项地减去相似的等式

$$x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

便得

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_{n-1}^2}{2}.$$

显然,  $x_2 > x_1 = \frac{c}{2}$ ; 而由上述等式推得, 仅需  $x_n > x_{n-1}$ , 便必定有  $x_{n+1} > x_n$ . 这样, 依数学归纳法, 可以确定整序变量  $x_n$  为单调增大.

类似地, 可证明这整序变量是有 (上) 界的:

$$x_n < 1.$$



这不等式在  $n = 1$  时显然成立; 又根据 (1) 式, 若它在任何  $n$  值时成立, 则在  $n + 1$  时亦成立. 因此知道, (2) 式的极限确实存在, 且可由 (3) 式来表示, 因这极限不能大于 1, 根号前必然是负号.

b) 今设  $-3 \leq c < 0$ . 显然, 对于一切  $n$  有

$$x_n \geq \frac{c}{2}.$$

我们将指出, 在这情形时  $x_n < 0$ . 这在  $n = 1$  时为真; 若设这一事实对某一  $n$  值时为真, 则

$$|x_n| \leq \frac{|c|}{2}, \quad x_n^2 \leq \frac{|c|^2}{4} < |c| \left( \text{因 } \frac{|c|}{4} < 1 \right).$$

故  $x_{n+1}$  将与  $\frac{c}{2}$  的符号相同, 故必为负数, 此即需证者.

整序变量  $x_n$  现在不再是单调的了. 于是, 若在 (1) 式内先设  $n = 2k$  及  $2k - 2$ , 然后设  $n = 2k + 1$  及  $2k - 1$ , 并在两个情形内逐项相减, 则得

$$\left. \begin{aligned} x_{2k+1} - x_{2k-1} &= \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2}, \\ x_{2k+2} - x_{2k} &= \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由此, 可以归纳地得出结论: 恒有

$$x_{2k+1} > x_{2k-1} \quad \text{及} \quad x_{2k+2} < x_{2k}.$$

事实上,  $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$ ; 故  $|x_3| < |x_1|$ ,  $x_3^2 < x_1^2$ . 又依公式 (4) 的第二式 (在  $k = 1$  时) 将有  $x_4 < x_2$ . 因此  $|x_4| > |x_2|$ ,  $x_4^2 > x_2^2$ . 又依公式 (4) 的第一式 (在  $k = 2$  时) 得  $x_5 > x_3$ , 等等.

这样, 在所考察的情形, 分别地取出的整序变量  $x_{2k-1}$  及  $x_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 将成为单调的; 又因它们都位于有限限界  $\frac{c}{2}$  及 0 之间, 则必两者都有有限极限

$$a' = \lim x_{2k-1}, \quad a'' = \lim x_{2k}.$$

剩下来还要证明  $a' = a''$ . 为这目的, 使 (1) 式内的序号  $n$ , 先经由偶数各值, 然后经由奇数各值趋于无穷. 我们得出两个极限关系式:

$$a' = \frac{c}{2} + \frac{a''^2}{2}, \quad a'' = \frac{c}{2} + \frac{a'^2}{2}. \quad (5)$$

相减, 消去  $c$ , 得

$$(a' - a'')(a' + a'' + 2) = 0.$$

因我们即将断定, 若  $c > -3$ , 则第二因式不能为零, 故必须  $a' = a''$ . 在相反的情形, 以  $a'' = -a' - 2$  代入关系式 (5) 的第二式内, 我们将得出  $a'$  的二次方程

$$a'^2 + 2a' + (4 + c) = 0,$$

它在  $c > -3$  时是不能有实根的.

最后, 若  $c = -3$ , 则第一括号与第二括号同时等于 0, 因为在这种情形  $a' = -1$ ,  $a'' = -1$ .

因此, 在一切情形  $a' = a''$ . 用  $a$  表示这些极限的公共数值, 显然, 在  $a$  的表达式 (3) 中根号前将仍为负号, 因为负的整序变量  $x_n$  的极限决不会是正数的.



总结前述的各例题, 我们作出下列附注: 已证明的这个定理乃是典型的“存在定理”: 这定理只确定了极限存在的事实, 但它并未给出任何计算极限的方法. 虽然如此, 它仍具有非常的重要性. 因为一方面, 在理论问题中常常仅需知道极限的存在就够了. 另一方面, 在很多情形预先证明了极限存在的可能是很重要的, 它会帮助我们找出实际计算这极限值的途径. 如在例 1), 2), 3), 5), 6) 中, 就是先知道极限存在的事实, 然后才允许在某些等式内用极限步骤来确定极限的确实数值.

就这一点来说, 特别应该接受例 6) (b) 的教训. 注意, 在  $c < -3$  时 (3) 式仍有意义, 但这并不表示着它仍然是整序变量  $x_n$  的极限; 相反地, 这时  $x_n$  的极限并不存在: 例如, 容易知道, 在  $c = -4$  时, 整序变量依数列

$$-2, 0, -2, 0, -2, 0, \dots$$

而递变, 故无极限.

在例 4) 中我们并无表达极限的式子, 但因为知道它的存在, 并且它常位于整序变量  $a_n$  与  $b_n$  之间, 而  $a_n$  及  $b_n$  又从两边趋向它为极限, 故能很容易地算出它的准确到任何程度的近似值来.

在下一小节内我们将再看到应用单调整序变量定理的另一重要例题.

**36. 数 e** 我们在这里将应用极限步骤来定义一个新的数. 这新的数迄今为止我们尚未遇到过.

试考察整序变量

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

并设法应用 34 的定理来确定它的极限.

因为在指数  $n$  增大时幂的底数正在减小, 所以整序变量的“单调性”不是直接看得出来的. 为着证明  $x_n$  的单调性, 可根据二项定理展开上式:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \cdots (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

若改上式左边的  $x_n$  为  $x_{n+1}$ , 即使  $n$  增大 1, 则在该式右边首先须在最后加上第  $(n+2)$  项 (正的), 又前面写着的  $n+1$  项中每一项也都增大了些, 因为在任一括号内  $1 - \frac{s}{n}$  型的因式都已换成较大的因式  $1 - \frac{s}{n+1}$ .

由此必有

$$x_{n+1} > x_n,$$

即  $x_n$  是增大的整序变量.



今将证明, 它又是上有界的. 在 (6) 式中略去一切括号内的因式会使它增大了些. 因此

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

更进一步, (由第 2 个分数起) 将分母中的每一因子都换成 2, 使所得的式子又增大了些, 因此

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

但是由第二项  $\frac{1}{2}$  起各项的总和  $< 1$ , 因此  $y_n < 3$ , 从而  $x_n < 3$ .

由此, 依 34 的定理, 整序变量  $x_n$  必有一有限极限. 依照欧拉 (L.Euler) 的记法, 用字母  $e$  表示这极限. 这数

$$e = \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

不论对于分析学本身, 或是它的应用, 都有极端的重要性. 它的首 15 位十进小数, 就是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \cdots$$

在下一目内, 我们将指出计算数  $e$  的近似值的简便方法, 同时顺便证明数  $e$  是无理数.

数  $e$  的某些性质 (我们在以后 [54, (13)] 再证明) 使得选它作为对数系统的底时有特殊的便利. 以  $e$  为底的对数称为**自然对数**, 用不标出底的记号  $\ln$  来表示它; 在理论的研究中, 总是用着自然对数<sup>①</sup>.

以十为底的常用对数与自然对数的关系借公式

$$\lg x = \ln x \cdot M$$

来表示, 式中  $M$  为换底的模且等于

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0.434\ 294 \cdots$$

这个公式也很容易求得, 只需在恒等式

$$x = e^{\ln x}$$

的两边各取以 10 为底的对数便是.

<sup>①</sup>这对数有时误称为纳皮尔对数, 取名于对数的发明者——苏格兰数学家纳皮尔 (J.Napier, 16~17 世纪). 纳皮尔本人并不曾有过对数系统的底的概念 (因为他系独创一格, 在另外的原理上建立它们), 但他的对数相当于底数接近  $\frac{1}{e}$  的对数. 与他同时代的比尔吉 (J.Bürigi) 则创底数接近  $e$  的对数.



**37. 数  $e$  的近似算法** 回到等式 (6), 若固定  $k$ , 并设  $n > k$ , 弃去最后的一部分, 即在第  $k+1$  项以后的一切项, 则得不等式

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

让  $n$  增大至无穷取极限, 因所有括号的极限均为 1, 故得:

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

这不等式对于任何自然数  $k$  都成立. 因此,

$$x_n < y_n \leq e,$$

由此, 明显地 [根据 28, 定理 3], 又有

$$\lim y_n = e.$$

顺便注意到,  $y_n$  是无穷级数 [25, 9)]

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

的前  $n+1$  项的部分和, 因而刚才所说的极限关系式表明  $e$  是它的和, 也可以说  $e$  展开成为这个级数, 因而可写

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

在计算数  $e$  的近似值时, 用整序变量  $y_n$  比用  $x_n$  更为便利. 再估计  $y_n$  向  $e$  接近的程度. 为此目的, 先考察  $y_n$  与在  $y_n$  后面的任何数值  $y_{n+m}$  ( $m = 1, 2, \cdots$ ) 之间的差. 得

$$\begin{aligned} y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\}. \end{aligned}$$

若在括号  $\{ \}$  内把各分母中的因子都换成  $n+2$ , 则得不等式

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right\}.$$

若把括号内换成无穷级数的和, 则不等式只有加强, 故

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$



今使  $n$  固定不变, 并使  $m$  趋于无穷, 则整序变量  $y_{n+m}$ (标着序号  $m$  的) 依次取数列

$$y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+m}, \cdots$$

中的各值, 显然将收敛于  $e$ . 因此, 在取极限时得

$$e - y_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

或最后, 得

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n} \textcircled{1}.$$

若用  $\theta$  表示差  $e - y_n$  与数  $\frac{1}{n!n}$  的比值 (显然, 它位于 0 与 1 之间), 则又可以写成

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n}.$$

将式中的  $y_n$  用它的展开式代入, 我们便得出重要的公式:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \tag{7}$$

它是计算  $e$  的出发点. 弃去最后的一项“余项”, 并把其余的各项都换上十进位小数的近似值, 我们就得出  $e$  的近似值.

今将用公式 (7) 计算  $e$ , 使准确至  $\frac{1}{10^n}$ . 首先须确定怎样选取  $n$ (它可由我们任意取定), 才能实现这一准确度.

逐次计算阶乘的倒数 (参阅附表), 我们看到, 在  $n = 10$  时, 公式 (7) 的“余项”已是

$$\frac{\theta}{n!n} = \frac{\theta}{10!10} < 0.000\,000\,03,$$

所以弃去它时, 我们造成的误差远远地小于所规定的限度. 我们就停止在这  $n$  值上. 把其余的各项都化成十进位小数, 在第八位小数上四舍五入地凑成整数 (达到后备的准确度), 则最大误差在绝对值上小于第八位小数的半个单位, 即小于  $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$ . 我们把计算的结果汇集成一表. 与近似值并列着的记号 (+ 或 -) 表示着校正数的符号, 要回复到准确的数值必须要把校正数加上才行.

因此, 我们刚才所看到的, 在弃去余项时校正数小于  $\frac{3}{10^8}$ . 再检查在四舍五入地凑成整数时的校正数 (连同它们的记号) 以后, 很易判定, 对于数  $e$  的近似值的总校正数必在

$$-\frac{3}{10^8} \quad \text{及} \quad +\frac{5}{10^8}$$

	2.000 000 00
$\frac{1}{2!}$	=0.500 000 00
$\frac{1}{3!}$	=0.166 666 67-
$\frac{1}{4!}$	=0.041 666 67-
$\frac{1}{5!}$	=0.008 333 33+
$\frac{1}{6!}$	=0.001 388 89-
$\frac{1}{7!}$	=0.000 198 41+
$\frac{1}{8!}$	=0.000 024 80+
$\frac{1}{9!}$	=0.000 002 76-
$\frac{1}{10!}$	=0.000 000 28-
	2.718 281 81

$\textcircled{1}$  因  $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$  (这是很易验算的).



之间. 由此数  $e$  本身必位于小数

$$2.718\ 281\ 78 \quad \text{及} \quad 2.718\ 281\ 86$$

之间, 故可置

$$e = 2.718\ 281\ 8 \pm 0.000\ 000\ 1.$$

顺便注意到, 公式 (7) 亦可以用来证明数  $e$  为无理数.

由反面推论, 试假定  $e$  等于有理数  $\frac{m}{n}$ , 则若对于这个  $n$  写出公式 (7), 便有

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad (0 < \theta < 1).$$

在这等式的两边都乘以  $n!$ , 约去除末项以外的一切分母, 我们将得出左边是整数, 而右边是整数带着分数  $\frac{\theta}{n}$ , 但这是不可能的. 这矛盾便证明了我们的命题.

**38. 关于区间套的引理** 在简述单调整序变量的这一节的末尾, 尚需叙述“面对面”地互相接近的二个单调整序变量.

设给定单调增大的整序变量  $x_n$  及单调减小的整序变量  $y_n$ , 且恒有若其差  $y_n - x_n$  趋向于 0, 则二整序变量必有公共的有限极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n. \text{ } ^{8)}$$

事实上. 在一切  $n$  值时  $y_n \leq y_1$ , 于是依 (8) 式, 又必有  $x_n < y_1 (n = 1, 2, \cdots)$ . 增大的变量  $x_n$  既然上有界, 因此它必有一有限极限

$$c = \lim x_n.$$

类似地, 对于减小的变量  $y_n$  将有

$$y_n > x_n \geq x_1,$$

因而它也趋于有限极限

$$c' = \lim y_n.$$

但依 30 的定理 1°, 两极限的差

$$c' - c = \lim (y_n - x_n)$$

依给定条件是等于 0, 因而  $c' = c$ ; 此即所要证的.

已证明的论点可以赋予另一形式, 使成为常用的形式.

<sup>8)</sup>在等式 (8) 中以  $\leq$  代替  $<$  不会破坏命题的正确性.



满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切数 (或常说成“点”)  $x$  所成的集合称为区间  $[a, b]$  (式中  $a < b$ ). 数 (“点”)  $a$  及  $b$  各称为区间的左端点及区间的右端点, 其差  $b - a$  称为区间的长. 不难看出, 在数轴上与区间对应的是 (具有相同长度的) 线段.

若区间  $[a', b']$  的一切点都属于区间  $[a, b]$ , 或同一说法, 若

$$a \leq a' < b' \leq b,$$

则约定说, 区间  $[a', b']$  包含在区间  $[a, b]$  内, 或套在它里面. 其几何意义是很明白的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

后一个总是包含在前一个内, 并且在  $n$  增大时这些区间的长趋向 0:

$$\lim(b_n - a_n) = 0.$$

则区间的端点  $a_n$  及  $b_n$  (从不同的两边) 趋于公共的极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n,$$

它是一切区间的唯一的公共点.

这只是前面已证明的定理的另一种写法而已, 依条件

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n,$$

因而第  $n$  个区间的左端点  $a_n$  及右端点  $b_n$  就分别担任着单调整序变量  $x_n$  及  $y_n$  的角色.

因为  $a_n$  增大而趋于  $c$ ,  $b_n$  减小而趋于  $c$ , 故

$$a_n \leq c \leq b_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

即点  $c$  实际上属于一切这些区间. 同时, 异于  $c$  的另一点  $c'$  就不会有这样的性质, 因为, 否则我们便要有

$$b_n - a_n \geq |c' - c| > 0,$$

而第  $n$  个区间的长就不能趋于 0.

以后我们要时常引用这一命题, 它就称为“关于区间套的引理”.



## §4. 收敛原理 · 部分极限

39. 收敛原理 设给定整序变量  $x_n$ , 依数列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x'_n, \dots \quad (1)$$

而递变. 最后, 我们要研究关于这一整序变量是否有有限极限存在的一般判定法的问题. 为着这一目的, 极限定义本身是不能使用的, 因为在定义内已经用到这个极限, 而它的存在与否却还是我们所要讨论的问题. 我们所需要的, 是在判定法内仅需应用我们已经有的东西, 也就是整序变量  $x_n$  的数值所成的数列 (1).

所提出的问题由下列著名的定理而得解决. 这定理属于捷克数学家布尔查诺 (B.Bolzano) 及法国数学家柯西, 它常称为收敛原理.

**定理** 整序变量  $x_n$  有有限极限的必要且充分的条件是: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$  总存在着序号  $N$ , 使当  $n > N$  及  $n' > N$  时, 便能成立不等式

$$|x_n - x'_n| < \varepsilon. \quad (2)$$

有如读者所看到的, 在这里, 事情就是这样, 要使变量的诸数值依它们的序号增大的程度互相无限地接近着<sup>9)</sup>. 且看证明.

**必要性** 设整序变量  $x_n$  有确定的有限极限  $a$ . 依 [23] 极限的定义, 就是对于不论怎样的数  $\varepsilon > 0$ , 根据数  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 必能求出序号  $N$ , 使当  $n > N$  时, 不等式

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

恒能成立.

今任意取出二序号  $n > N$  及  $n' > N$ , 则必同时成立

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad |a - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由此

$$|x_n - x'_n| = |(x_n - a) + (a - x'_n)| \leq |x_n - a| + |a - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样, 条件的必要性已证明. 证明它的充分性要难得多.

**充分性** 设定理的条件已经满足, 需要证明整序变量  $x_n$  有确定的有限极限存在.

为这目的, 在全体实数域中依下列法则产生一个分划. 对于实数  $\alpha$ , 若  $x_n$  从某一序号开始能满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

<sup>9)</sup>使得定理条件成立的序列  $x_n$  通常称为自己收敛的 (术语“基本序列”和“柯西序列”同样通行).



则取这种实数  $\alpha$  归入下组  $A$ . 取其余的 (即不落在  $A$  内的) 一切实数  $\alpha'$  归入上组  $A'$ .

首先, 利用定理的条件说明这些组均非空集. 指定任意数  $\varepsilon > 0$ , 取出 (在前述的意义下) 对应于它的序号  $N$ . 若  $n > N$  及  $n' > N$ , 则 (2) 式成立, 由此

$$x'_n - \varepsilon < x_n < x'_n + \varepsilon. \quad (3)$$

现在我们看到, 每一数  $x'_n - \varepsilon$  (其中  $n' > N$ ) 都属于  $A$  组, 因为在  $n$  充分大时 (就是,  $n > N$ )  $x_n$  总能超过它. 另一方面, 因为 (对于同样这些  $n$ )  $x_n$  显得比  $x'_n + \varepsilon$  ( $n' > N$ ) 型的任何一数为小, 就没有哪一个  $x'_n + \varepsilon$  可以放入  $A$  内去, 因此, 必属于  $A'$  组.

由确定  $A$  及  $A'$  的法则很明显地可以看出, 每一实数必定而且仅只落在二组之一内. 同时还有, 每一 ( $A$  内的) 数  $\alpha$  必小于每一 ( $A'$  内的) 数  $\alpha'$ ; 事实上, 在  $\alpha > \alpha'$  时, 整序变量  $x_n$ , 从某一项起, 便要违反数  $\alpha'$  的定义而超过数  $\alpha'$  了. 这样, 上述实数域的分组确实产生一个分划.

根据 [10] 戴德金的基本定理, 有实数  $a$ <sup>①</sup> 存在, 它是两组数中间的界数:

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

但我们注意到, 在任何  $n' > N$  时,  $x'_n - \varepsilon$  是某一个  $\alpha$ , 而  $x'_n + \varepsilon$  是某一个  $\alpha'$ . 因此, 对于任何  $n' > N$ , 特别有

$$x'_n - \varepsilon \leq a \leq x'_n + \varepsilon \quad \text{或} \quad |a - x'_n| = |x'_n - a| \leq \varepsilon.$$

根据 [23] 极限的定义, 这即指

$$a = \lim x_n.$$

定理已证明<sup>10)</sup>.

这一判定法的应用, 我们在以后的叙述中将不止一次地要遇到.

①在所指的定理中, 它是用  $\beta$  表示的.

10) 不利用分割的概念也可以证明定理中所给收敛条件的充分性.

用等式  $a_n = \inf_{k \geq n} x_k, b_n = \sup_{k \geq n} x_k$  分别定义数  $a_n, b_n$  ( $a_n, b_n$  是有限的或无穷——暂时没多大关系). 那么, 当  $k \geq n$  时  $a_n \leq x_k \leq b_n$ ; 此外对任意的  $n$  有  $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}$ . 根据定理条件, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在这样的数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得对所有的  $n, n' > N$  有  $x_n - x_{n'} \leq \varepsilon$ . 任意固定  $n' > N$ , 那么不等式  $x_n < x_{n'} + \varepsilon$  表明序列上有界, 数  $b_n$  对所有  $n$  有限, 且当  $n > N$  时  $b_n \leq x_{n'} + \varepsilon$ . 现在固定  $n > N$ , 因为当  $n' > N$  时  $x_{n'} \geq b_n - \varepsilon$ , 我们已可断言当  $n' > N$  时  $a_{n'} \geq b_n - \varepsilon$ . 令  $n' = n$ , 便得到: 当  $n > N$  时  $0 < b_n - a_n \leq \varepsilon$ , 从而  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . 根据 38 目第一个断言, 序列  $a_n$  与  $b_n$  收敛于某个共同的极限  $c$ , 因为  $a_n \leq x_n \leq b_n$ , 序列  $x_n$  同样收敛于  $c$ , 布尔查诺-柯西定理证毕.



40. 部分数列及部分极限 今同时考察数列 (1) 及由它里面所选出的任一部分数列(或子数列)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (4)$$

式中  $\{n_k\}$  是某一自然数的递增数列:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots \quad (5)$$

在这里, 依次取所有自然数为值的序号已不是由  $n$ , 而是由  $k$  担任; 而  $n_k$  则已成为一个取自然数为值的整序变量, 且显然地, 在  $k$  增大时它趋向于  $\infty$ .

若数列 (1) 有确定的极限  $a$ (有限或无穷), 则部分数列 (4) 亦必有相同的极限.

为了示例, 试考察  $a$  为有限的情形. 设对于指定的  $\varepsilon > 0$  能求出  $N$ , 使当  $n > N$  时已成立不等式:

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

因  $n_k \rightarrow \infty$ , 故必有  $K$  存在, 使当  $k > K$  时有  $n_k > N$ . 于是对于那些  $k$  的值将成立不等式

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

这就证明了我们的命题.

(顺便注意到, 在作出这论断时, 我们并没用不等式 (5), 即并未应用到整序变量  $n_k$  的单调性. 因此, 不论整序变量  $n_k$  依怎样的规律趋向  $+\infty$ , 我们的命题仍为有效.)

若整序变量  $x_n$ , 或即数列 (1), 并无确定的极限, 则对于它的任何一个部分数列 (4) 或对应于它的整序变量  $x_{n'} = x_{n_k}$  来说, 极限仍可能存在. 这种极限称为整序变量  $x_n$  或数列 (1) 的部分极限.

例如, 设  $x_n = (-1)^{n+1}$ , 这整序变量无极限. 但若限制  $n$  仅依奇数或偶数而递变, 则部分数列

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \dots, \quad x_{2k-1} = 1, \dots$$

及

$$x_2 = -1, \quad x_4 = -1, \dots, \quad x_{2k} = -1, \dots$$

将各有极限为 1 或  $-1$ . 这两数就是  $x_n$  的部分极限. 类似地, 整序变量  $x_n = (-1)^{n+1}n$  有部分极限  $+\infty$  及  $-\infty$ , 而  $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$  有部分极限  $+\infty$  及 0.

整序变量的部分极限可以是一无穷集, 举一个这种例子也很容易; 下面是其一例. 依下列法则定义整序变量  $x_n$ : 若序号  $n$  写成十进位制为:  $\alpha\beta\cdots\gamma$  ( $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  是数码), 则令

$$x_n = 0.\alpha\beta\cdots\gamma.$$

例如,  $x_{13} = 0.13$ ,  $x_{4035} = 0.4035$  等等. 在这时, 每一个 0.1 与 1 之间的有限十进小数在这整序变量的数列中出现无穷多次, 例如, 0.217 在第 217 项出现, 又在第 2170 项, 第 21700 项, 等等出现.



由此立刻推得, 在 0.1 与 1 之间的每一个有限十进小数将成为这整序变量的部分极限. 但若在这限界内取任何另一实数  $\alpha$ , 则只需将它表示为无穷十进小数 [9]:

$$\alpha = 0.c_1c_2\cdots c_k\cdots (c_1 \geq 1),$$

就立刻可知部分数列

$$x_{c_1} = 0.c_1, x_{c_1c_2} = 0.c_1c_2, \cdots, x_{c_1c_2\cdots c_k} = 0.c_1c_2\cdots c_k, \cdots$$

的极限刚好就是  $\alpha$ , 这样, 在所考察的情形, 数列的部分极限充满着全区间  $[0.1, 1]$ .

整序变量  $x_n$  是否恒有部分极限存在? 在数集  $\{x_n\}$  非为有界时, 这问题很易肯定地回答. 例如, 设它不上有界, 则对于每一个自然数  $k$ , 必能在数列 (1) 内求得大于  $k$  的项  $x_{n_k}$ :

$$x_{n_k} > k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

(并且很易办到, 使得序号  $n_k$  随  $k$  而增大). 部分数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

显然地将有极限  $+\infty$ ; 它就是原数列的部分极限.

在有界整序变量的情形, 亦可以给予肯定的回答. 但这需要更细致的讨论, 我们在下一段内再谈.

**41. 布尔查诺—魏尔斯特拉斯 (B.Bolzano-C.Weierstrass) 引理** 由任何有界数列 (1) 内恒能选出收敛于有限极限的部分数列 (4).

(这种写法不致除去在所给数列内有相等的数的可能性, 应用起来有便利之处.)

**证明** 设一切数  $x_n$  都位于界限  $a$  与  $b$  之间. 将区间  $[a, b]$  分为两半, 则必有一半包含着所给数列的无穷多个元素, 因为, 若不是这样, 则在全区间  $[a, b]$  内所包含着的元素将是有限个数, 但这是不可能的. 因此设包含着无穷多个  $x_n$  的那一半是  $[a_1, b_1]$  (若两个半区间都是如此, 则任取其中之一).

类似地, 在区间  $[a_1, b_1]$  内分出它的一半  $[a_2, b_2]$ , 使得在它里面包含无穷多个  $x_n$ . 继续这种步骤至于无穷, 在第  $k$  次分出的区间  $[a_k, b_k]$  内照样包含着无穷多个的  $x_n$ .

这样构成的区间 (由第二个开始), 每一个都包含在前一个之内, 等于它的一半. 此外, 第  $k$  个区间的长等于

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

它随着  $k$  的增大而趋向零. 把 [38] 关于区间套的引理应用到这里来, 便得结论:  $a_k$  及  $b_k$  趋向一公共极限  $c$ .

现在部分数列  $\{x_{n_k}\}$  可由下列方法归纳地产生出来. 在所给数列的元素  $x_n$  内任取包含在  $[a_1, b_1]$  中的一个 (例如, 第一个) 当作  $x_{n_1}$ . 在  $x_{n_1}$  后面的元素  $x_n$  内任



取包含在  $[a_2, b_2]$  中的一个 (例如, 第一个) 当作  $x_{n_2}$ , 等等. 一般地说, 在以前分出的  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$  后面的元素  $x_n$  内任取包含在  $[a_k, b_k]$  中的一个 (例如, 第一个), 当作  $x_{n_k}$ . 这种产生数列方法是完全可能的: 因为每一区间  $[a_k, b_k]$  内包含着无穷多个  $x_n$ , 即包含着序号可为任意大的元素  $x_n$ .

再则, 因为

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \text{ 又 } \lim a_k = \lim b_k = c,$$

故依 28 的定理 3° 必有  $\lim x_{n_k} = c$ . 此即所要证的.

在证明这引理时, 用了逐次等分所考察的区间的方法, 称为布尔查诺方法. 这在其他场合对我们也是经常有用的.

布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理使许多困难定理的证明大为简化, 就好像它本身已吸收了论证中的基本困难点似的. 我们用它再来证明收敛原理作为一例; 我们来考虑其中条件的充分性, 它在 39 内曾费了我们很多气力.

因此, 设条件已满足, 且依指定的  $\varepsilon > 0$  已求出序号  $N$ , 在  $n > N$  及  $n' > N$  时成立不等式 (2) 或 (3). 若在这时固定  $n'$ , 则很清楚地, 由 (3) 式, 整序变量  $x_n$  在一切情形下将成为有界的: 因为在  $n > N$  时它的值全部位于  $x_{n'} - \varepsilon$  与  $x_{n'} + \varepsilon$  之间, 且不难把这些限界的距离拉长, 使它又包括首  $N$  个值:  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

于是, 依刚才所证明的定理, 可以分出收敛于有限极限  $c$  的部分数列  $\{x_{n_k}\}$ :

$$\lim x_{n_k} = c.$$

现在证明, 整序变量  $x_n$  也趋向这一极限. 我们可以选取充分大的  $k$ , 使

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon,$$

又同时使  $n_k > N$ . 因此, 可在 (2) 内取  $n' = n_k$ :

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

联合这两不等式, 最后即得

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (n > N),$$

这就证明了我们的命题①.

**42. 上极限及下极限** 这样, 任何整序变量  $x_n$ , 不论它是有界的或无界的, 都有部分极限存在. 现在我们将指出, 在这些部分极限内必能求出最大的及最小的. 它们即称为整序变量  $x_n$  的上极限与下极限, 并各记成

$$\overline{\lim} x_n \quad \text{及} \quad \underline{\lim} x_n.$$

①数  $2\varepsilon$ , 有如  $\varepsilon$ , 亦可“任意小”. 假若愿意的话, 可以在开始时不取  $\varepsilon$  而取  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 则在这里我们便得出  $\varepsilon$ . 以后如遇相似的情形, 便留待读者自己去体会.



**定理** 整序变量  $x_n$  恒有上极限及下极限存在. 这两限相等是整序变量有极限 (普通意义下) 存在的必要且充分的条件<sup>①</sup>.

**证明** 从考察上极限的问题开始. 我们已在上面 [40] 看到, 若  $x_n$  不上有界, 则可以从数列 (1) 内分出部分数列  $\{x_{n_k}\}$ , 使

$$\lim x_{n_k} = +\infty.$$

这样, 在这种情形,  $+\infty$  便是整序变量的部分极限之一, 显然, 它是一切可能的极限中之最大者, 因此,

$$\overline{\lim} x_n = +\infty$$

今再假定整序变量  $x_n$  上有界:

$$x_n \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

考察  $x_n$  在  $n > k$  时的上确界:

$$M_k = \sup_{n > k} \{x_n\} = \sup \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \leq M.$$

在  $k$  增大时  $M_k$  的值只能减小, 因此, 依 [34] 单调整序变量的定理, 无论如何极限 (在  $k$  无限增大时)

$$\lim M_k$$

必存在, 是有限的或等于  $-\infty$ .

当这极限是  $-\infty$  时, 情形同样是那么简单. 对于任何  $E > 0$  必能求出序号  $k = N$ , 使

$$M_N < -E;$$

但在  $n > N$  时, 显然,  $x_n \leq M_N$ , 因此, 对于这种  $n$  更有

$$x_n < -E.$$

而这就表示有极限 (普通意义下)

$$\lim x_n = -\infty$$

存在, 这极限将同时是上极限和下极限<sup>②</sup>.

尚待考察最重要的情形, 即有一有限极限

$$\lim M_k = M^*$$

存在的情形. 我们将指出, 这数  $M^*$  将是整序变量  $x_n$  的上极限.

为此目的, 我们将先确立数  $M^*$  的二特性.

若任意取数  $\varepsilon > 0$ , 则必能求出  $k = N'$ , 使  $M_{N'} < M^* + \varepsilon$ ; 因为, 在  $n > N'$  时,  $x_n \leq M_{N'}$ , 所以更有  $x_n < M^* + \varepsilon$ . 因此,

**$M^*$  的特性 I:** 对于不论怎样的  $\varepsilon > 0$ , 必有序号  $N'$  存在, 使对一切  $n > N'$  有

$$x_n < M^* + \varepsilon.$$

<sup>①</sup>这定理的证明并没有利用布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理, 实际上这定理包括该引理.

<sup>②</sup>当整序变量的普通极限存在时, 一切部分极限都和它重合 [40].



另一方面, 对于任意的  $\varepsilon > 0$  及任何的  $k$  必有

$$M_k \geq M^* > M^* - \varepsilon.$$

但依上确界的性质 [11], 在序号  $n = k+1, k+2, \dots$  的  $x_n$  各值中间必能求出  $x_{n'}$ , 使  $x_{n'} > M^* - \varepsilon$ . 把任意取的  $k$  换成  $N$ , 便得

$M^*$  的特性 II: 对于不论怎样的  $\varepsilon > 0$  及序号  $N$ , 必能求出  $x_{n'}$ , 其序号  $n' > N$ , 满足

$$x_{n'} > M^* - \varepsilon.$$

必须强调这两种性质的差别. 在第一种情形, 一切  $x_n$  的值, 由某一项开始, 毫无例外地满足着不等式. 在第二种情形, 仅是若干个别的  $x_n$  满足不等式, 但在这些个别的值中间却有序号为任意大的  $x_n$ .

首先, 根据这些特性, 证明数  $M^*$  是整序变量  $x_n$  的部分极限. 为此, 需要分出收敛于  $M^*$  的部分数列  $\{x_{n_i}\}$ .

作一正数的数列  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ . 设  $n_1 = 1$ , 假定序号

$$n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_{i-1}$$

已选出, 现在说明怎样选取  $n_i$ . 依特性 I, 在  $\varepsilon = \varepsilon_i$  时必能求出对应的序号  $N' = N_i$ , 使对一切  $n > N_i$  有  $x_n < M^* + \varepsilon_i$ . 今再看特性 II, 仍旧假定  $\varepsilon = \varepsilon_i$  并取序号  $n_{i-1}$  及  $N_i$  中的最大者作为  $N$ ; 对于这样的  $\varepsilon$  及  $N$ , 由特性 II 所得到的序号  $n'$  就取作  $n_i$ . 那么, 一方面,

$$x_{n_i} > M^* - \varepsilon_i,$$

而另一方面, 因  $n_i > N_i$ , 同时必有

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon_i.$$

除此以外, 还需注意  $n_i > n_{i-1}$ .

对于用这种方法 —— 归纳地 —— 构成的数列中的元素  $x_{n_i}$  必有

$$|x_{n_i} - M^*| < \varepsilon_i (i = 2, 3, \dots),$$

实际上就是  $x_{n_i} \rightarrow M^*$ .

最后, 将证明没有一个部分极限能超过  $M^*$ . 事实上, 设对于某一部分数列  $\{x_{n_i}\}$  有  $x_{n_i} \rightarrow a$ , 则  $a$  就是部分极限之一. 依特性 I, 当  $n_i$  充分大时 (已大于  $N'$ ), 必有

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon.$$

在这不等式中取极限, 则得  $a \leq M^* + \varepsilon$ , 又因  $\varepsilon$  是任意小, 最后, 即得

$$a \leq M^*.$$

这样,  $M^*$  实际上就成为一切部分极限中之最大的, 即

$$M^* = \overline{\lim} x_n.$$



类似地可证下极限的存在. 不需再重复一切论证, 只注意下列二种情况.

若下极限是  $+\infty$ , 则在普通意义下, 有极限

$$\lim x_n = +\infty$$

存在.

又若下极限是有限数  $M_*$ ,

$$M_* = \underline{\lim} x_n,$$

则它具有类似于上述的  $M^*$  的特性.

$M_*$  的特性 I: 对于不论怎样的  $\varepsilon > 0$ , 必有序号  $N''$  存在, 使当  $n > N''$  时有

$$x_n > M_* - \varepsilon.$$

$M_*$  的特性 II: 对于不论怎样的  $\varepsilon > 0$  及序号  $N$ , 必能求出  $x_{n''}$ , 其序号  $n'' > N$ , 满足

$$x_{n''} < M_* + \varepsilon.$$

现在来证明定理的后半部. 若在普通意义下说有极限

$$\lim x_n$$

(有限或无穷) 存在, 则一切可能的部分极限都与它重合 [40], 前述条件的必要性便得证明.

今假定

$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n.$$

若它们的公共数值是  $+\infty$  或  $-\infty$ , 则有如我们已看到的, 整序变量在普通意义下有极限存在, 且就是那一值.

最后, 设二极限都是有限的:

$$M^* = M_* = a.$$

则比较  $M^*$  及  $M_*$  的特性 I, 依预先指定的  $\varepsilon > 0$  可求出序号  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{即} \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

这就说明,  $a$  是整序变量  $x_n$  在普通意义下的极限. 定理证明完毕.

注意, 用这定理, 布尔查诺 — 柯西条件的充分性 [39] 就能很简单地被证明了. 就是说 (若仍用原来的记法), 由不等式

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon \quad (n \text{ 及 } n' > N)$$

立刻可以看出, 整序变量  $x_n$  的上极限及下极限是有限的, 而且相差不大于  $2\varepsilon$ , 由于  $\varepsilon$  可任意小, 因此必须重合. 由此, 立刻推得有一有限极限 (在普通意义下) 存在.



# 第二章 一元函数

## §1. 函数概念

**43. 变量及其变动区域** 在 22 内, 早已给定关于**变量**的一般概念. 数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  给出变量  $x$  可能取的那些数值 (在所考察的问题内).  $\mathcal{X}$  内的每一个数值,  $x$  都有机会能取到, 这数集  $\mathcal{X}$  就称为变量  $x$  的**变动区域**. 一般地说, 任一数集总可以当作变量的变动区域<sup>11)</sup>.

我们早已讲过, 数的几何解释就是 (数) 轴上的点. 变量  $x$  的变动区域  $\mathcal{X}$  在这轴上就表示为某一点集. 因此, 变量的数值常称为点.

我们经常会遇到变量  $n$ , 它以全体自然数集  $\mathcal{N}$  为其变动区域. 整序变量  $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$  的变动区域是数 0 以及全部形如  $\frac{1}{m} (m = 1, 2, \dots)$  的分数所成的数集<sup>12)</sup>. 常量的变动区域则只含一个数.

但是在分析上通常研究的是所谓**连续地或密接地**变动着的变量: 它们的原型就是各种物理量——如时间, 动点所经过的路程, 等等. 数的**区间**就是类似于此的变量的变动区域. 最常用的是**有限区间**, 它用两个实数  $a$  及  $b (a < b)$ ——它的端点——为界限, 有些端点可以包含在区间内, 也可以不包含在内. 因此, 我们先来区别

闭区间  $[a, b] : a \leq x \leq b$  (包含两端点);

半开区间  $\begin{cases} (a, b] : a < x \leq b \\ [a, b) : a \leq x < b \end{cases}$  (仅包含一端点);

<sup>11)</sup>当然, 本目正文对整序变量型的变量不适用 [参看 22 目的脚注 5) 与 6)].  
<sup>12)</sup>如果把整序变量的变动区域看作是函数变动区域的特殊情形 [参看 45 目及那里的脚注 14)], 对整序变量的变动区域可以有另一种理解. 请注意, “整序变量的变动区域”的概念在今后实际上并不使用.



**开区间**  $(a, b) : a < x < b$  (不包含任一端点).

在每一种情形都称数  $b - a$  为区间的长.

很易了解, 数轴上的线段就是数字区间的几何表示. 并且 —— 按照区间的类型 —— 线段有时有端点, 有时没有.

有时还得考察**无穷区间**, 这区间, 用“广义的数”  $-\infty, +\infty$  作为它的一端或两端. 它们的记法, 与有限区间相类似. 例如:  $(-\infty, +\infty)$  是全体实数集;  $(a, +\infty)$  表示满足不等式  $x > a$  的数  $x$  所成的集; 区间  $(-\infty, b]$  由不等式  $x \leq b$  所决定. 无穷区间的几何表示, 是两端无限伸展的直线或仅一端趋于无限的射线.

**44. 变量间的函数关系, 例题** 数学分析内主要研究的事物, 并非一个变量独自的变动, 而是两个或几个变量在同时变动时相互之间的**关系**. 在这里我们只限于研究两个变量的最简单的情形.

在科学及生活的各种领域内 —— 在数学本身. 在物理学、工程学中 —— 读者已不止一次地遇到这种同时变动的变量. 它们不能同时取一对任意的数值 (由各自的变动区域内取出的): 相反的, 当其中之一 (**自变量**) 已给定具体的数值时, 则另一变量 (**因变量** 或 **函数**) 的数值也就确定了. 先举几个例题.

1) 圆的面积  $Q$  是它的半径  $R$  的函数; 它的数值可以根据给定的半径数值用已知公式:

$$Q = \pi R^2$$

计算出来.

2) 在重量颇大的质点自由降落 —— 不计其阻力 —— 的情形, 由运动开始时算起的时间  $t$  (秒) 与在这时间内经过的路程  $s$  (米) 依靠方程

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

联结着, 式中  $g = 9.81$  米/秒<sup>2</sup> 是重力加速度. 由此也确定着对应于所取时间  $t$  的路程  $s$  的数值: 路程  $s$  就成为经过的时间  $t$  的函数.

3) 考察一定质量的 (理想) 气体, 这气体贮藏在气缸的活塞下面. 假定温度保持不变, 这气体的体积  $V$  (立升) 及压力  $p$  (大气压力) 就服从波义耳—马瑞特定律:  $pV = c = \text{常数}$ . 若任意改变  $V$ , 则  $p$  当作  $V$  的函数, 就可根据公式

$$p = \frac{c}{V}$$

单值地被确定.

4) 最后, 再建立空气的压力  $p$  (大气压力) 与高出海面的位置  $h$  (米) 的关系. 在物理学上导出气压公式

$$p = p_0 e^{-kh},$$



式中  $p_0$  是在海平面上的压力,  $k$  是某一常数. 根据这一公式,  $p$  就可当作  $h$  的函数, 仅需给定  $h$  的数值,  $p$  的数值就确定了.

又需注意到, 在两个被考察的数字内选取自变量, 有时是任意的, 有时则由考虑问题的简单方便而定. 在大多数的场合它被进行研究的的目的性所指导着.

例如, 若在最后的例题内, 压力  $p$  与高度  $h$  的关系是用来使飞机师能借观察压力而判断已达到的高度, 则变量所担任的角色自然需要更换, 气压公式就表示为

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}$$

的形式.

**45. 函数概念的定义** 现在, 像通常一样, 抽去所考察的数量的物理意义, 我们来确定函数概念——数学分析的基本概念之一——的准确而普遍的定义.

设给定两变量  $x$  及  $y$ , 其变动区域为  $\mathcal{X}$  及  $\mathcal{Y}$ . 假定根据问题的条件, 变量  $x$  可以不受任何限制地取区域  $\mathcal{X}$  内的任意数值. 那么, 如果依某一法则或规律, 对于  $\mathcal{X}$  中的每一  $x$  值总有一个确定的数值  $y$  (在  $\mathcal{Y}$  内) 和它对应, 则变量  $y$  就称为变量  $x$  (在它的变动区域  $\mathcal{X}$  内) 的函数.

自变量  $x$  亦称为函数的**变元**.

在这定义内存在着两个要素: 第一, 指出变元  $x$  的变动区域  $\mathcal{X}$  (它称为函数的**定义域**), 第二, 确定  $x$  与  $y$  的数值之间的对应法则或规律 (函数  $y$  的变动区域  $\mathcal{Y}$  通常并不指出, 因为对应的规律本身就已经确定函数值的集合了.)<sup>13)</sup>

函数概念的定义也可以建立在更普遍的观点上, 就是假设对应于  $\mathcal{X}$  内的  $x$  的每一数值,  $y$  的数值不止一个, 而是几个 (甚至是无穷多个). 在这种场合函数称为**多值的**, 以区别于前面所定义的**单值函数**. 然而, 在分析教程内, 站在实变数的观点上, 大都避免讨论多值函数, 以后说到函数, 若没有特别的声明, 我们就理解为单值函数.

要指出  $y$  是  $x$  的函数这事实: 就写成

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x) \text{ 等等}^{\textcircled{1}}.$$

字母  $f, \varphi, F, \dots$  就表示那种法则, 根据它就可以由给定的  $x$  值得出对应的  $y$  值. 因此, 若同时考察同一变元  $x$  的几个不同的函数, 各具不同的对应规律, 那么它们就不能用同一字母来表示.

<sup>①</sup>这记法读成: “ $y$  等于  $fx$ ”, “ $y$  等于  $\varphi x$ ” 等等.

<sup>13)</sup>我们还要指出与前述函数定义等价的一个通行的函数定义. 对集  $\mathcal{X}$  的每一个元素, 有且仅有集  $\mathcal{Y}$  中的一个元素和它对应的任何一个规则, 称为在集  $\mathcal{X}$  上定义在集  $\mathcal{Y}$  内取值的函数. 这与正文中所述定义的区别仅仅是术语上的. 后一定义在现今更为通行. [关于术语“变动区域”与函数的“值的集合”参看下一个脚注 14).]



虽然只有字母“ $f$ ”(小写及大写)是原来与“函数”这字有关的,但函数关系自然也可以改用旁的字母来记;有时,甚至就重复用着字母  $y$ , 记成  $y = y(x)^{14)}$ .

在有些场合把变元写成函数的附标的形状,例如,  $y_x$ . 我们所熟悉的整序变量  $x_n$  的记法就是这种类型,它是(我们现在可以说)自变量  $n$  的函数,  $n$  是依自然数列  $N = \{n\}$  而递变的. 类似地  $N_\varepsilon$  的记法(在整序变量的极限定义内,[23])表示序号  $N$  依赖着  $\varepsilon$ , 等等.

若在考察函数  $y = f(x)$  时我们希望指出,对应于某一  $x$  的特别数值  $x_0$  的函数的特别数值,就使用记号  $f(x_0)$ , 例如, 若

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(t) = \frac{10}{t}, \quad h(u) = \sqrt{1-u^2}, \dots$$

则  $f(1)$  表示  $f(x)$  在  $x=1$  时的函数值,即化简后的数  $\frac{1}{2}$ , 仿此,  $g(5) = 2$ ,  $h\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$  等等.

今转而讨论变量的数值之间的对应法则或规律,它是函数关系这概念的要素. 这法则可以有各种各样的表现方式,如果对它不加丝毫限制的话.

最简单也最自然的是把这法则表示为解析式或公式的形状,它指示出,对  $x$  的数值及一些常数必须进行哪些演算,才可以得出  $y$  的对应数值. 这种函数的解析表示法是数学分析中最重要的方法(我们在下一目内还要讨论它). 读者最好在中学的数学教程内去熟习它. 最后,我们在 44 的例题内应用的也是解析方法.

然而,假如以为这是表示函数的唯一方法,那是错误的. 就在数学内也有不少场合是不用公式来定义函数的. 例如,有这样的函数  $E(x)$  ——“数  $x$  的整数部分”<sup>①</sup>. 很易了解

$$E(1) = 1, \quad E(2.5) = 2, \quad E(\sqrt{13}) = 3, \quad E(-\pi) = -4 \text{ 等等,}$$

可是表示  $E(x)$  的公式却并不曾有.

同样还有很多的“算术函数”,即变元是自然数而函数值也是自然数的函数,例如,“数  $n$  的阶乘”:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

以及表示  $n$  的除数个数的函数  $\tau(n)$ , 或表示在  $1, 2, \dots, n$  内所有与  $n$  互素的数字个数的函数  $\varphi(n)$ . 不管给定这些函数的法则有什么独特的性质,我们还是可以由此算

<sup>①</sup>参看 25,1) 的脚注.

<sup>14)</sup>通常为了表示函数,除了记法  $y = f(x)$  之外,还使用记号  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , 其中  $\mathcal{X}$  是所考虑函数的定义域,而  $\mathcal{Y}$  是函数的变动区域;例如,记号  $x: N \rightarrow \mathcal{R}$  表示  $x$  是整序变量. 应当把函数  $f$  的变动区域  $\mathcal{Y}$  与函数的值的集合区分开来. 后者是  $\mathcal{Y}$  中实际上与自变量某个值  $x$  对应的那个数  $y$  [具有  $y = f(x)$  的形式]. 例如,  $f$  是恒等于常数零的一个函数,那么它的值的集合由唯一的零组成(即是一个单元素集),其变动区域则可以随心所欲地认为是任意一个含有零的集合.



出确定的函数值. 好像用公式算出来的一样. 例如

$$\tau(10) = 4, \quad \tau(12) = 6, \quad \tau(16) = 5, \dots$$

$$\varphi(10) = 4, \quad \varphi(12) = 4, \quad \varphi(16) = 8, \dots$$

在自然科学及工程学内, 变量之间的关系经常由实验或观察而得. 例如, 使水受任意选定的压力  $p$  (大气压力), 则由实验可以确定与它对应着的沸点的温度  $\theta(^{\circ}\text{C})$ :  $\theta$  是  $p$  的函数. 然而这一函数关系, 并非由任何公式来表示, 而只是由实验所得的数据的简单对应来表示. 用列表法给定函数的实例在任何工程手册上都很容易找到.

最后, 再要讲到, 在某种场合 —— 用自动记录器 —— 物理量之间的函数关系直接用图像表示着. 例如, 用指示器画成的“指示图表”给出正在工作着的蒸汽机的汽缸内的汽压  $p$  与体积  $V$  之间的关系; 由气压指示器所获得的“气压图”表示大气压力在一昼夜内的变化过程, 等等.

关于确定函数关系的列表法或图示法, 我们不再详细讲它, 因为在数学分析内并不是必须应用它们的.

**46. 函数的解析表示法** 函数的解析式或公式的表示法在数学分析内担任着极端重要的角色, 我们将作出一系列的附注来说明它们.

1° 首先, 在这些公式内可以进行怎样的演算? 第一步, 在这里自然可以有初等代数及三角学内研究过的一切演算: 算术运算, 乘幂 (开方), 取对数, 由角度求三角函数值及其反运算 [参阅下面 48~51]. 但是, 须着重指出, 由于我们在分析知识上的发展, 还需要再加入其他的演算, 而首要的就是极限步骤, 读者在第一章内已熟悉它了.

这样, 术语“解析式”或“公式”的完全的内容只能逐步地去揭露它了.

2° 其次, 须注意借解析式或公式所表示的函数的定义域.

每一个包含变元  $x$  的解析式具有所谓自然的适用区域: 就是使这解析式子有意义的一切  $x$  所成的集合. 我们说解析式子有意义, 即是指它有着完全确定的有限实数值的意思. 用最简单的例题说明这事.

例如, 表达式  $\frac{1}{1+x^2}$  的定义域是全体实数集. 表达式  $\sqrt{1-x^2}$  的定义域则为闭区间  $[-1, 1]$ . 在这界限以外它的数值就不再是实数了. 相反的, 对于表达式  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  就必须取开区间  $(-1, 1)$  作为自然适用区域, 因为在两端点上它的分母等于 0. 有时函数值保持有意义的区域由隔开的区间所组成;  $\sqrt{x^2-1}$  的定义域是区间  $(-\infty, -1]$  及  $[1, +\infty)$ .  $\frac{1}{x^2-1}$  的定义域是区间  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  及  $(1, +\infty)$ , 等等<sup>①</sup>.

今考察无穷几何序列的和

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \lim(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

<sup>①</sup> 自然, 对  $x$  的任何数值都没有意义的那种函数, 我们是并不感兴趣的.



作为最后一个例题. 若  $|x| < 1$ , 则我们知道 [25,7)], 有极限存在且其数值是  $\frac{1}{1-x}$ . 在  $|x| > 1$  时, 或者有极限等于  $+\infty$ , 或者根本没有极限. 因此, 所引入的解析式的自然适用区域是开区间  $(-1, 1)$ .

在下面的叙述内我们将需考察更复杂更普遍的解析式, 并且我们将不止一次地研究由这类表达式在它保持有意义的全部区域内所确定的函数的性质, 即研究解析工具的本身.

然而, 我们认为必须预先引起读者去注意另一种可能的情况. 设在任何具体问题内, 变量  $x$  由于事情的本质被限制在其变动区域  $\mathcal{X}$  内, 而此问题引导我们去考察一个具有解析表达式的函数  $f(x)$ . 虽然这个表达式可能在区域  $\mathcal{X}$  以外也有意义. 但欲越出界限来研究我们的具体问题却是全然不可能的. 在这里, 解析式便只担任着附属的辅助角色了.

例如, 如果研究质点从地面上高  $h$  处的自由降落, 我们用公式

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

[44,2)], 则考察  $t$  的负值, 或  $t$  的大于  $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  的数值将是荒谬可笑的. 因为, 很易看出, 在  $t = T$  时质点已落到地上了, 虽然表达式  $\frac{gt^2}{2}$  本身对于全部  $t$  的实数值都有意义.

3° 可能遇到这种情形, 即对于变元的一切数值函数并非由同一公式所确定, 而是对于变元的某一部分数值用某一公式, 对于另一部分数值用另一公式, 例如, 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内用下面的三个公式来定义的函数就是一个例子:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & \text{若 } |x| > 1 (\text{即若 } x > 1 \text{ 或 } x < -1), \\ f(x) &= -1, & \text{若 } |x| < 1 (\text{即若 } -1 < x < 1), \end{aligned}$$

最后,  $f(x) = 0$ , 若  $x = \pm 1$ .

再讲到狄利克雷(P.G.Lejeune-Dirichlet)函数. 它是这样定义的:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1, & \text{若 } x \text{ 是有理数,} \\ \chi(x) &= 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数.} \end{aligned}$$

最后, 考察克罗内克 (L.Kronecker) 函数, 称它为 “ $x$  的符号” 并记成  $\operatorname{sgn} x$ <sup>①</sup>:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} x &= 1, & \text{若 } x > 0; \\ \operatorname{sgn} x &= -1, & \text{若 } x < 0; \\ \operatorname{sgn} 0 &= 0. \end{aligned}$$

并且, 不必以为对于全部  $x$  的数值用一个公式给定的函数与用几个公式来定义的函数之间有着原则上的差别. 通常, 用几个公式给定的函数也可以改用一个公式给定它 (当然, 需用比较复杂的表达式).

<sup>①</sup>根据拉丁文 signum= 符号.



例如, 若运用求极限的演算, 则上面引入的第一个函数  $f(x)$  就可以改用一个公式来给定它 (适用于全部  $x$ ):

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

事实上, 在  $|x| > 1$  时幂  $x^{2n} \rightarrow +\infty$ , 而它的倒数趋于 0 [27], 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1.$$

在  $|x| < 1$  时幂  $x^{2n} \rightarrow 0$  [25, 6)], 在这情形

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -1.$$

最后, 在  $x = \pm 1$  时, 显然,  $x^{2n} = 1$ , 由此

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 0,$$

在取极限时亦得 0. 一切这些都完全符合于原来的定义.

**47. 函数的图像** 虽然在数学分析内并不用图像给出函数, 但却经常要依靠图像来说明函数的性质. 图像的直观而且明了的特性使它成为研究函数性质不可缺少的辅助工具.

设在某一区间  $\mathcal{X}$  内给定函数  $y = f(x)$ . 想象在平面上有两根互相垂直的坐标轴—— $x$  轴及  $y$  轴. 考察对应的一对  $x$  及  $y$  的数值, 此处的  $x$  取自区间  $\mathcal{X}$ , 而  $y = f(x)$ ; 有横标  $x$  及纵标  $y$  的点  $M(x, y)$  就是这一对数值在平面上的图形. 当变量  $x$  在区间  $\mathcal{X}$  内变动时, 这点画出某一曲线  $AB$  (图 5), 它就是这函数的几何图形, 并称它为图像. 在这些条件下方程  $y = f(x)$  本身称为曲线  $AB$  的方程.

例如, 在图 6 及图 7 内画着函数

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad (|x| \leq 1) \quad \text{及} \quad y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad (|x| \geq 1)$$

的图像, 读者将能认出它们是圆及等轴双曲线. 其他许多函数的图示法的例子读者将在最近的几目内遇到它们.

图像通常总是逐点地画出的.

在区间  $\mathcal{X}$  内取出一系列互相接近的  $x$  的数值, 依公式  $y = f(x)$  算出各对应的  $y$  的数值:

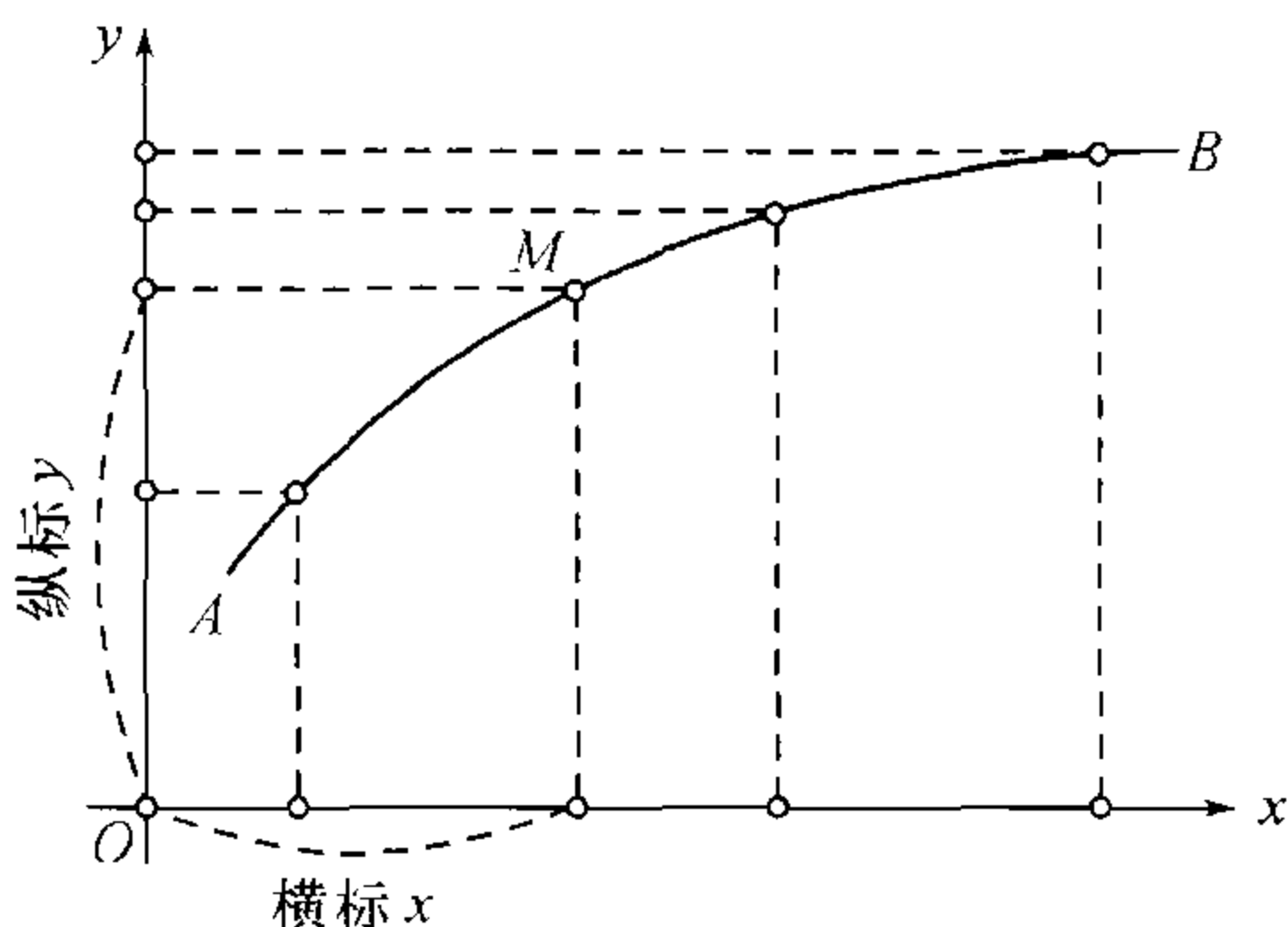


图 5



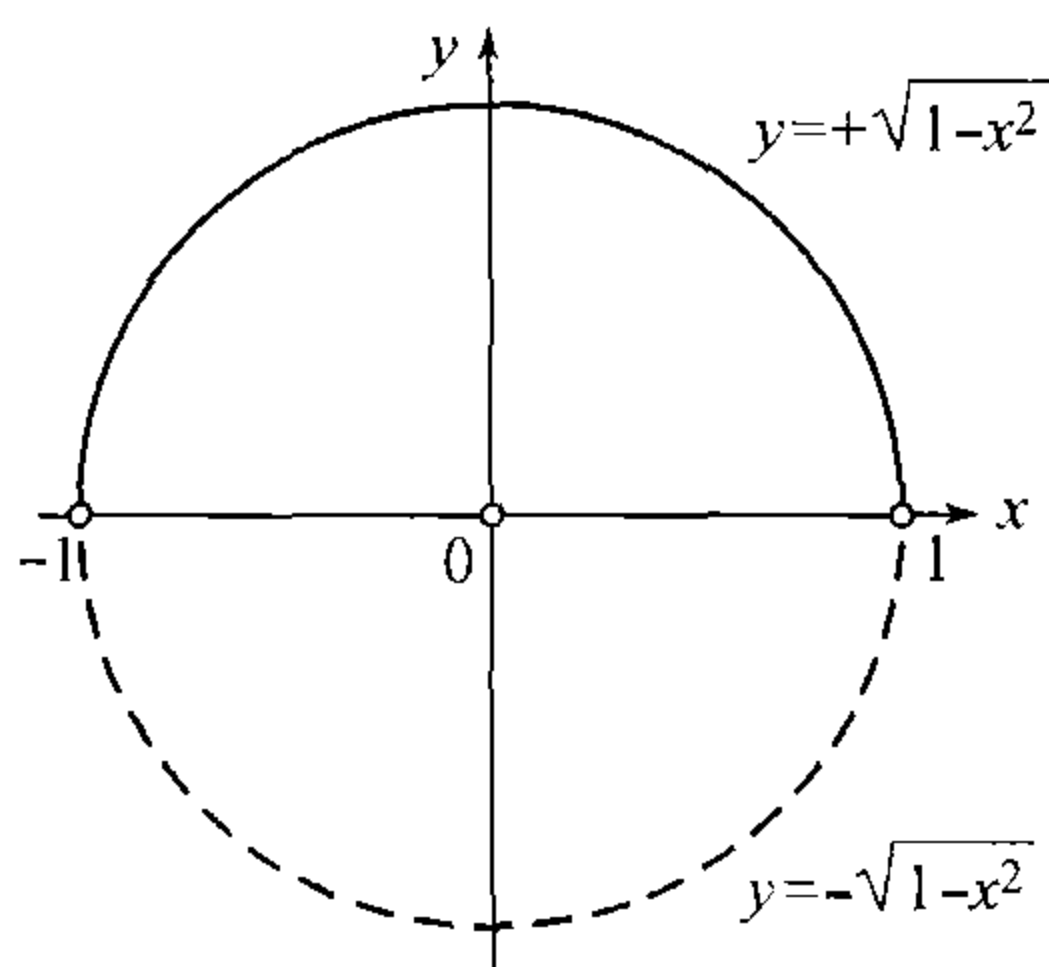


图 6

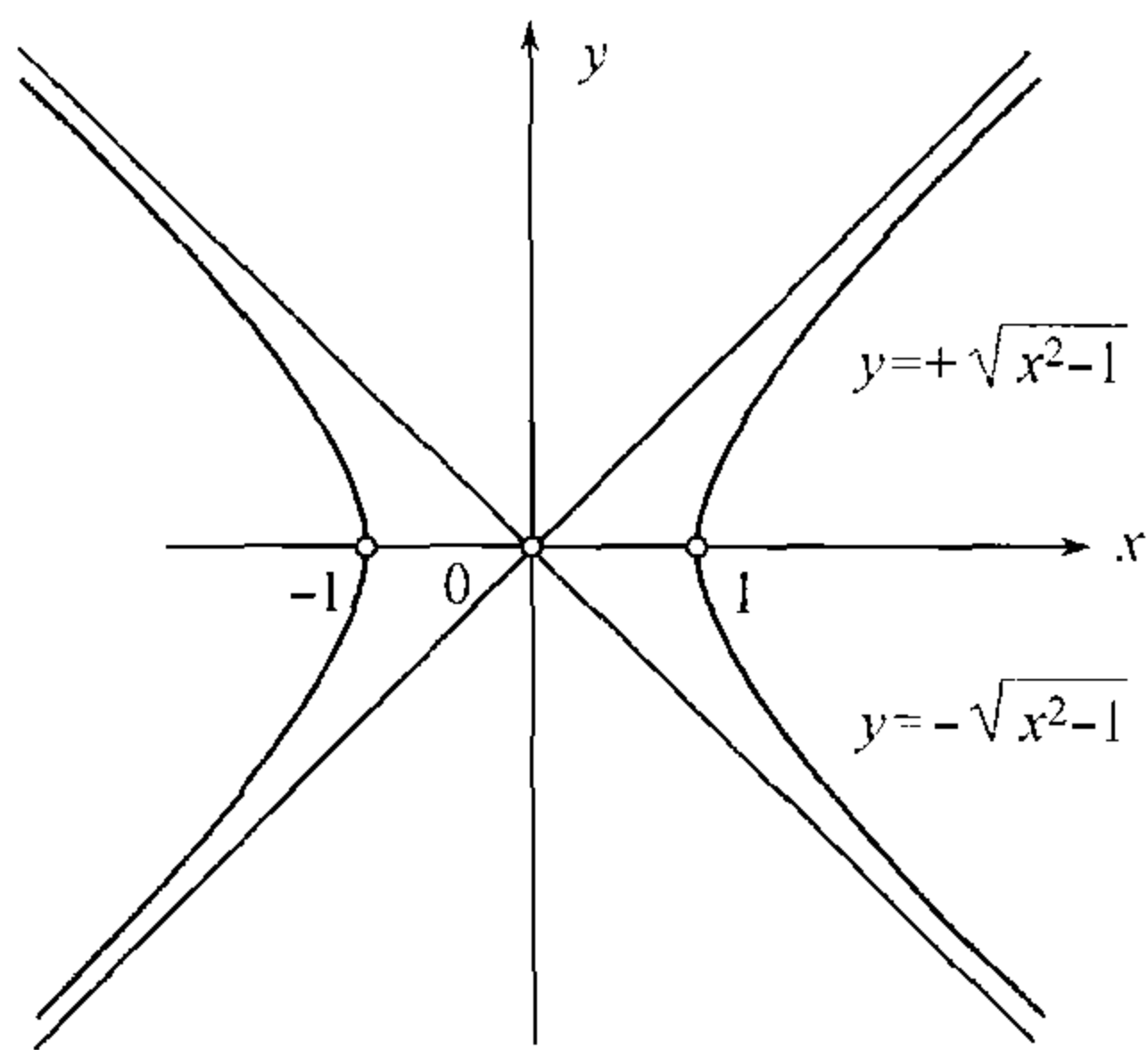


图 7

$x =$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$
$y =$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\cdots$	$y_n$

并把点

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

画在图上. 通过这些点用手或用曲线板作出曲线, 它 (当然, 只是近似的) 就是所求的图像. 若图像画得愈滑溜及所取的点愈稠密, 则画出的曲线愈能准确地代表这图像.

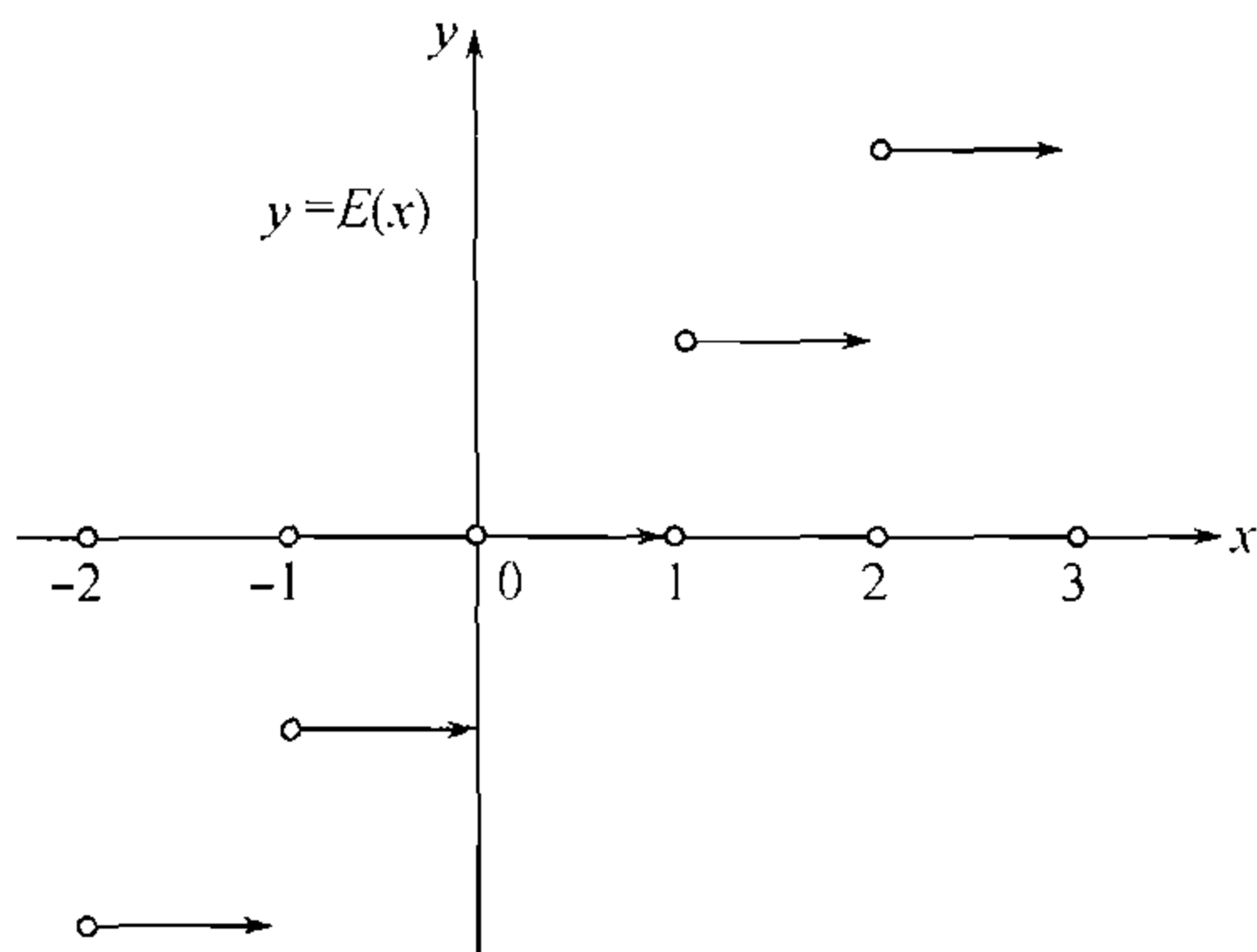


图 8

必须注意, 虽然函数常可借几何图形来“表示”它自己, 但是这图形并不一定就是通常直观意义下的曲线.

例如, 作出函数  $y = E(x)$  的图像. 因为在区间  $\cdots, [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2), [2, 3), \cdots$  内函数保持着常数  $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ , 所以图像将由一系列分离的缺少右端点的平行线段所组成 (图 8)<sup>①</sup>.

狄利克雷函数  $\chi(x)$  的图像由  $x$  轴上横标是无理数的点集及直线  $y = 1$  上横标是有理数的点集所组成, 可是它却不能画出来.

#### 48. 几类最重要的函数 在这里将列举几类函数, 通常称之为初等函数.

##### 1° 有理整函数及分式函数.

表示为  $x$  的多项式的函数

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots \text{是常数}),$$

<sup>①</sup>我们用许多箭头来表示这一事实, 箭头的尖端指出不属于图像的诸点.



称为有理整函数.

两个这样的多项式之比:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

称为有理分式函数. 它对于  $x$  的一切数值除了使分母为零者以外都是有意义的.

例如, 在图 9 内给出函数  $y = ax^2$  在系数  $a$  取各种不同数值时的图像 (抛物线), 在图 10 内同样地给出函数  $y = \frac{a}{x}$  在  $a$  取各种不同数值时的图像 (等轴双曲线).

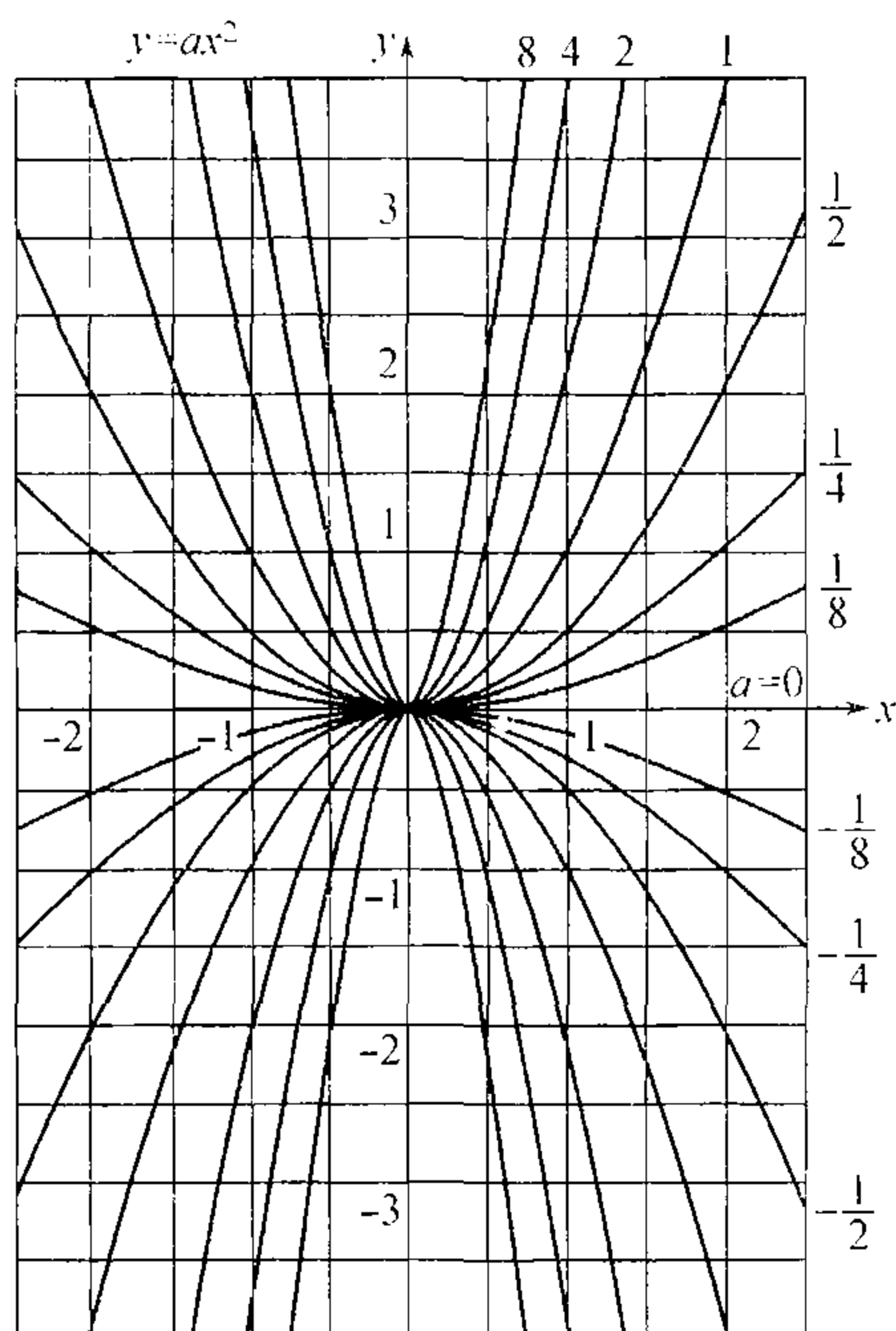


图 9

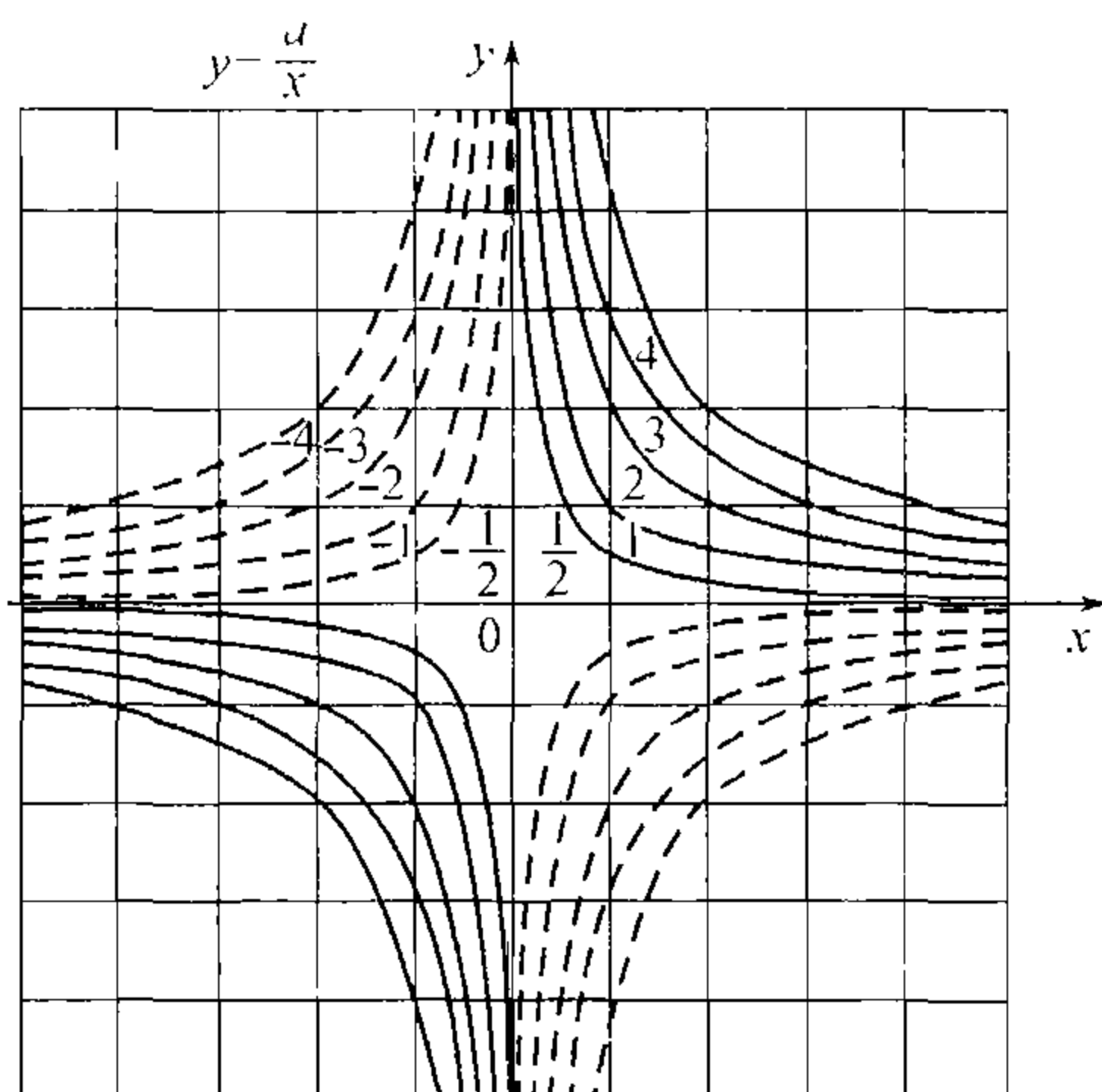


图 10

## 2° 幂函数 形如

$$y = x^\mu$$

的函数称为幂函数, 式中  $\mu$  是任何实常数. 当  $\mu$  是整数时便得有理函数. 当  $\mu$  是分数时便得根数. 例如, 设  $m$  是自然数. 则

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x};$$

若  $m$  是奇数, 则这函数对于  $x$  的一切数值都是有意义的, 当  $m$  是偶数时 (在这种场合, 我们只考虑根数的算术值) 只对于  $x$  的非负值才有意义. 最后, 若  $\mu$  是无理数, 我们就须预设  $x > 0$  (仅在  $\mu > 0$  时准许  $x = 0$ ).

在图 11 及图 12 内给出幂函数在  $\mu$  取各种不同数值时的图像.



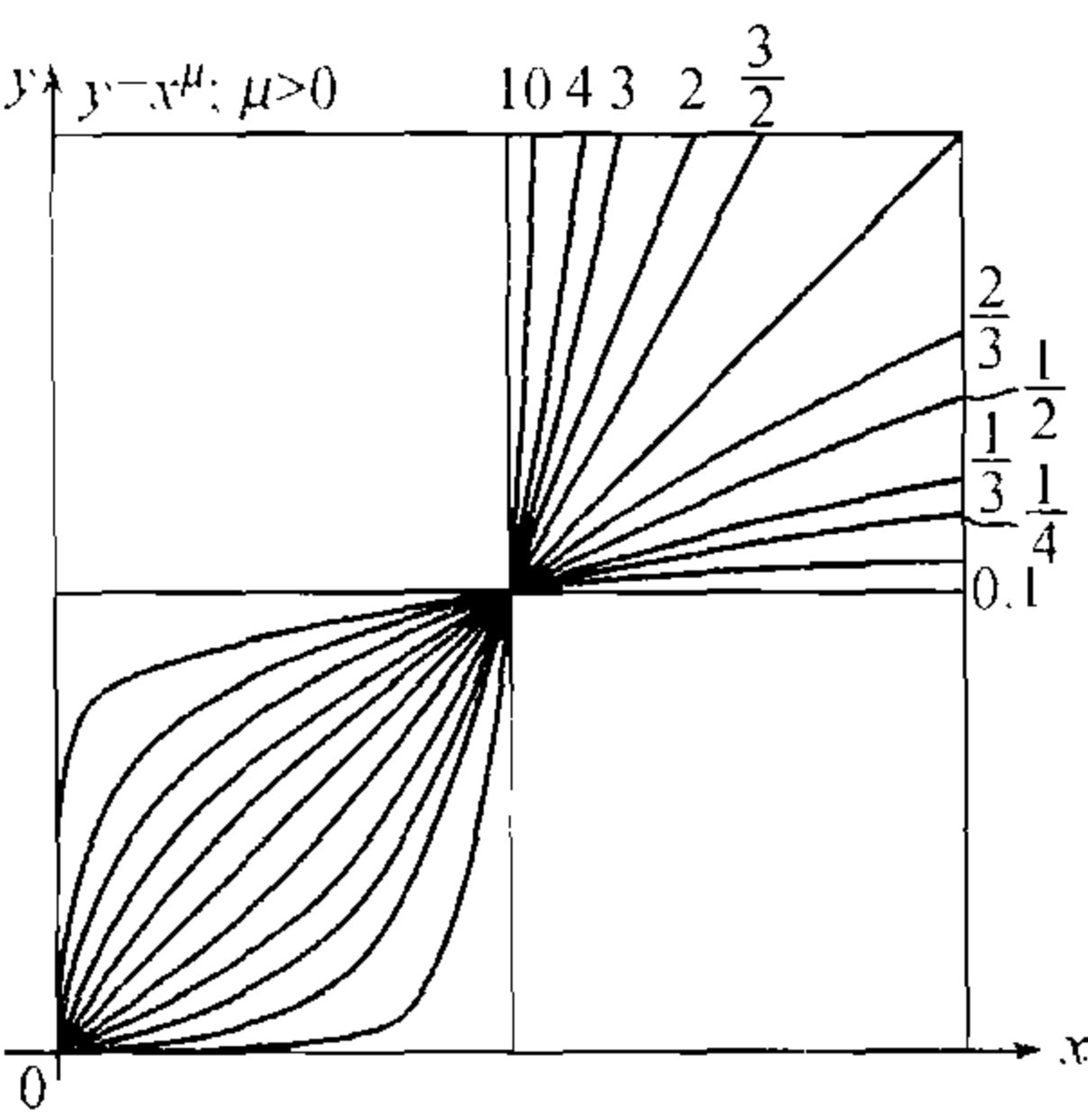


图 11

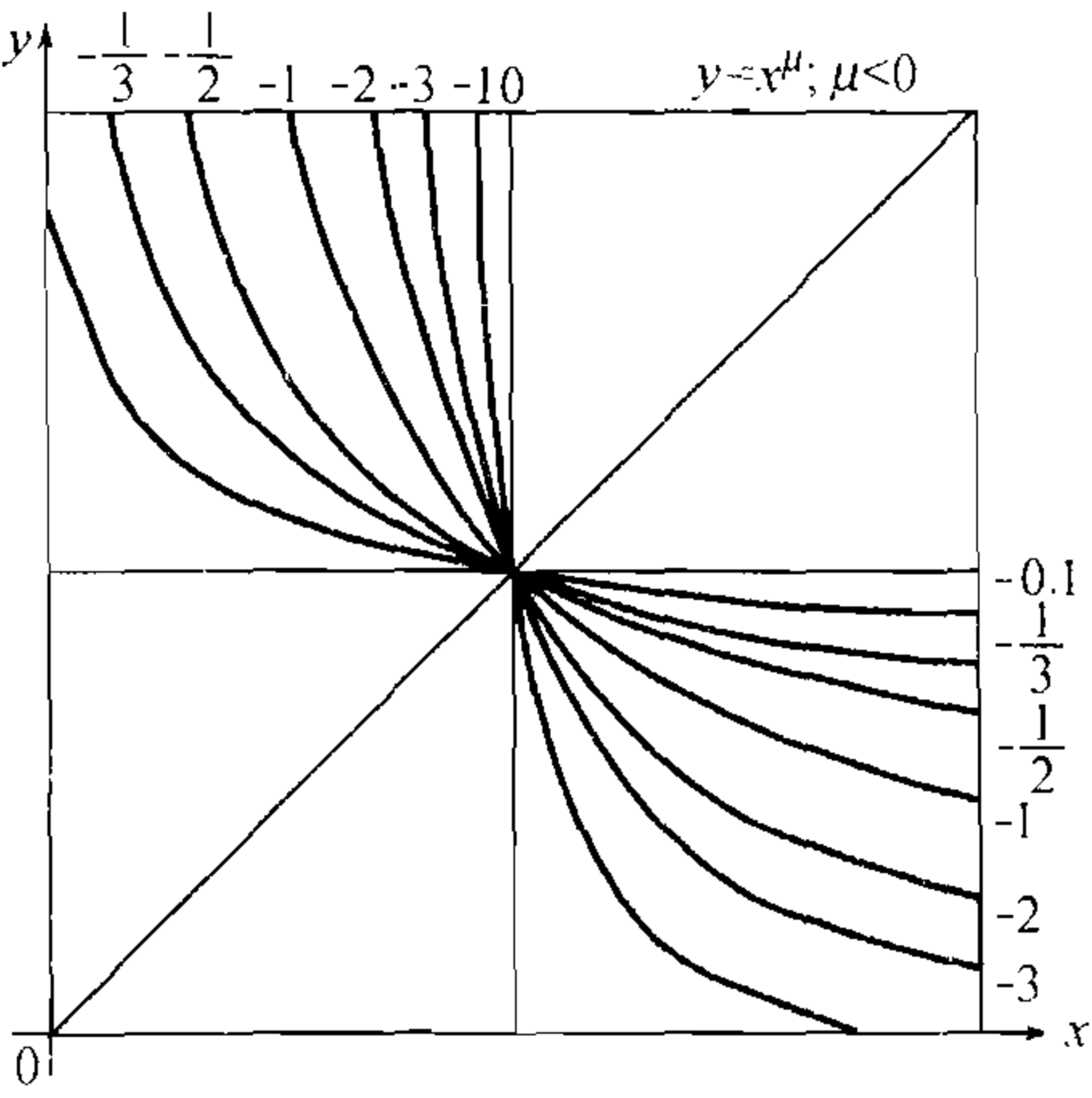


图 12

3° 指数函数, 即形如

$$y = a^x$$

的函数, 式中  $a$  是正数 (异于 1);  $x$  可取任何实数值.

在图 13 内给出指数函数在  $a$  取各种不同数值时的图像.

4° 对数函数, 即形如

$$y = \log_a x$$

的函数, 如前, 式中  $a$  是正数 (异于 1),  $x$  只能取正的数值.

在图 14 内给出这函数在  $a$  取各种不同数值时的图像.

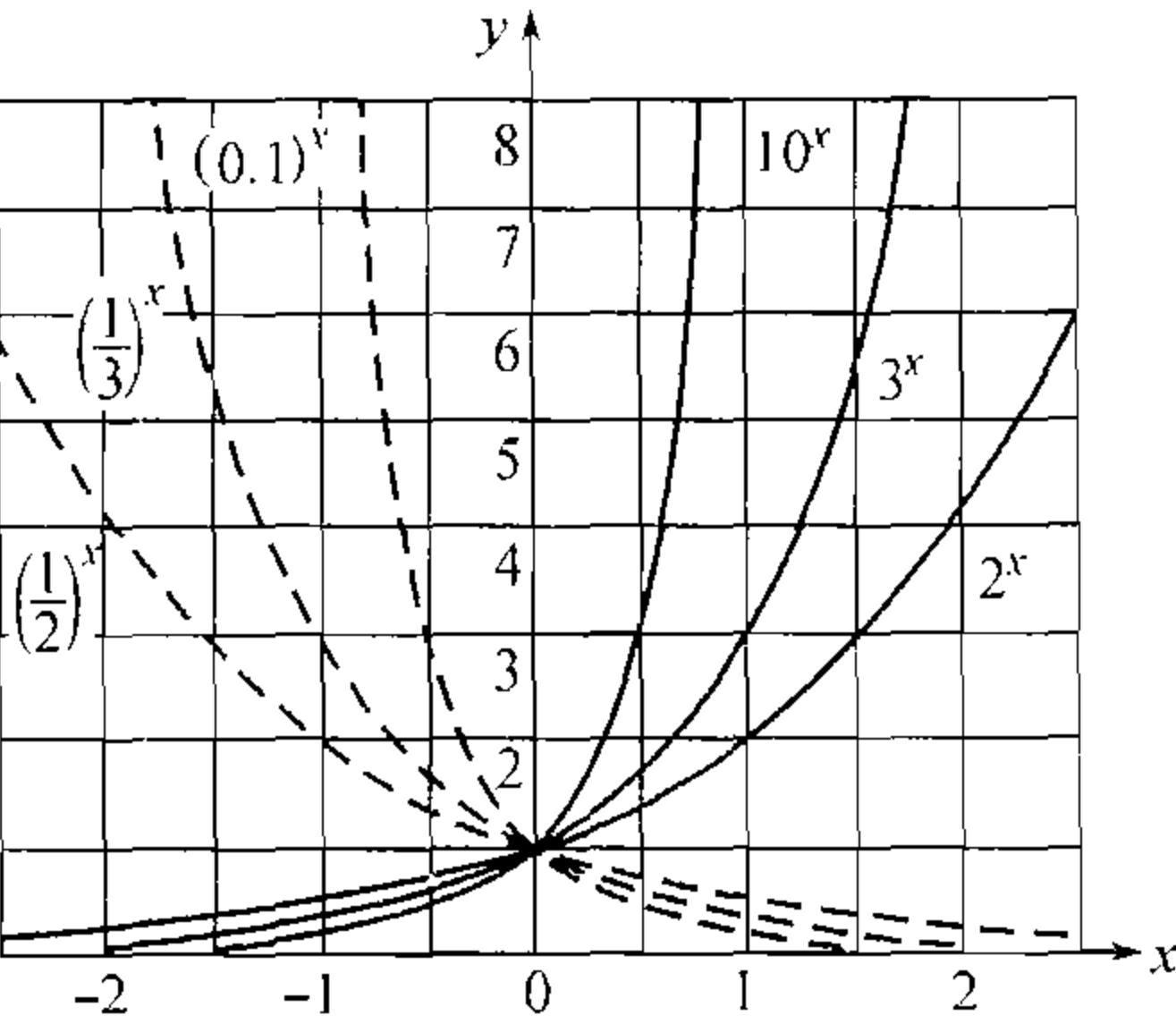


图 13

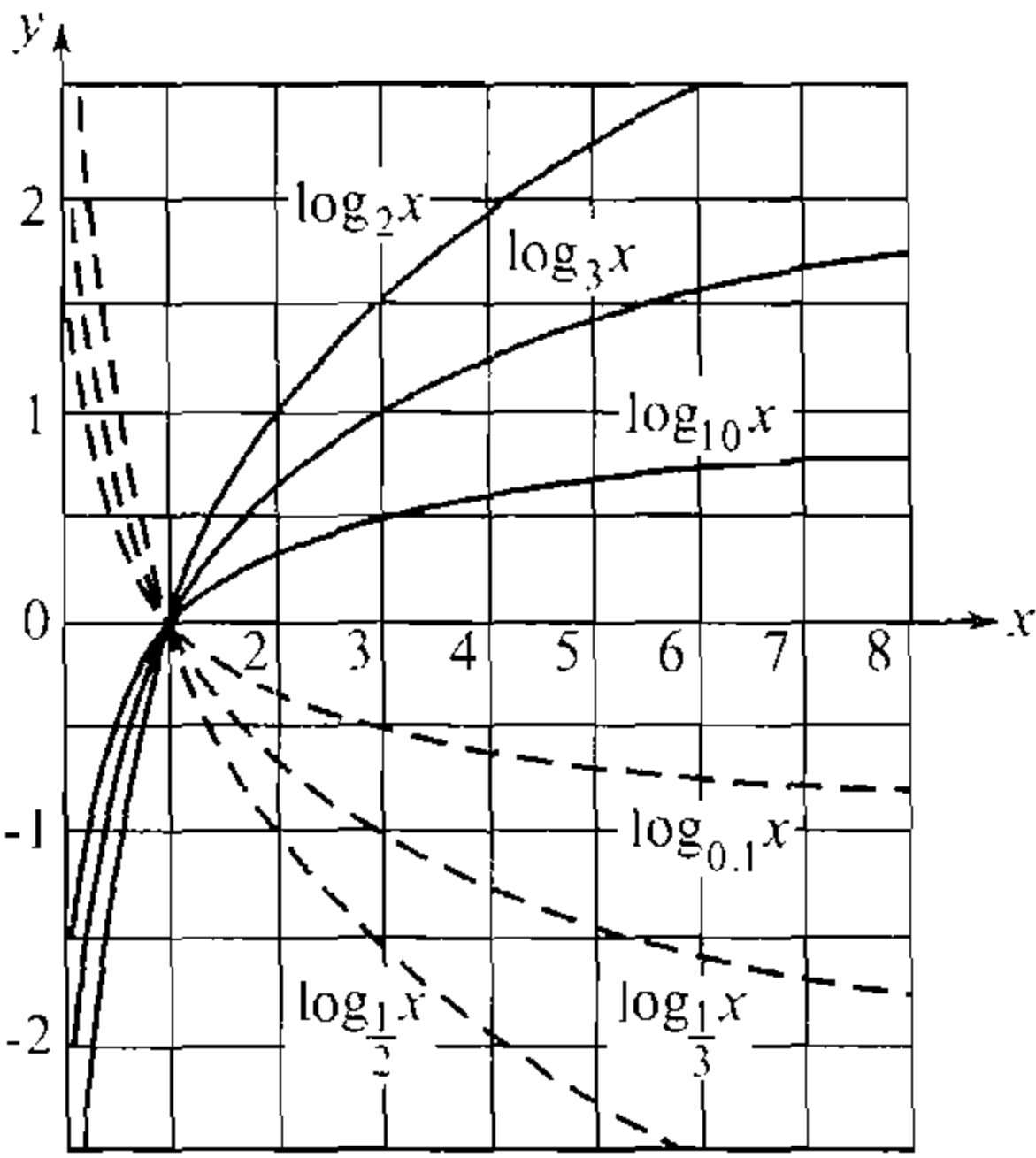


图 14



## 5° 三角函数:

$$y = \sin x \quad y = \cos x,$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = \sec x \quad y = \csc x,$$

最重要的是要牢牢记住当三角函数的变元作为角度来看时,恒表示为弧度(在没有预先声明相反的情形时). 对于  $\operatorname{tg} x$  及  $\sec x$  要除去形如

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

的数值, 而对于  $\operatorname{ctg} x$  及  $\csc x$  要除去形如

$$k\pi (k \text{ 是整数})$$

的数值.

在图 15 及图 16 内给出函数  $y = \sin x$  及  $y = \cos x$  的图像. 正弦的图像通常称为正弦曲线.

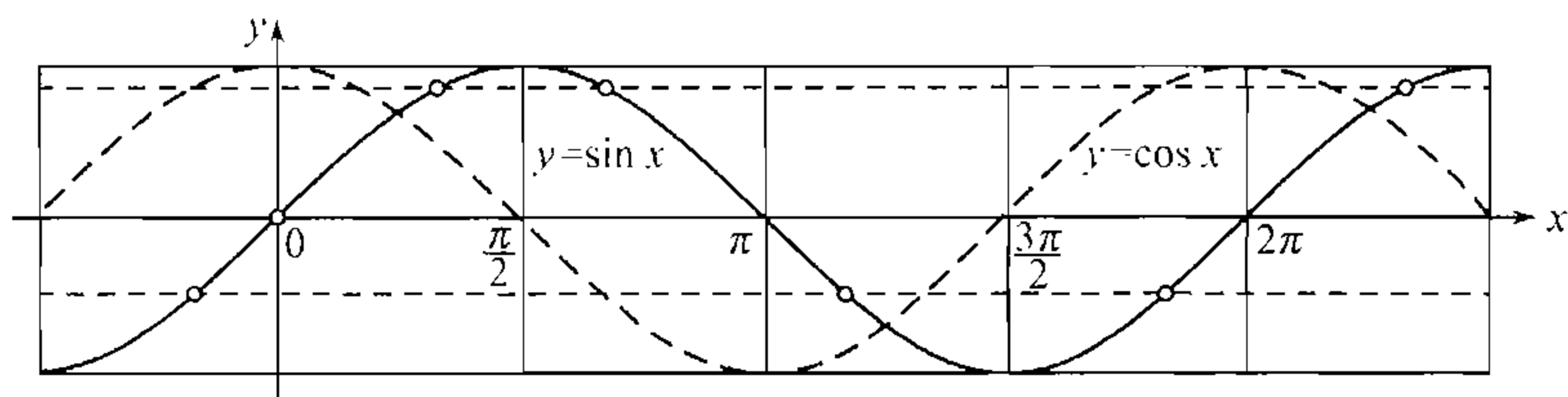


图 15

另外, 特别是在工程问题上, 很有用的函数为:

## 6° 双曲函数, 函数

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \dots$$

就是所谓双曲函数(双曲正弦, 余弦, 正切, 余切, ……); 它们对于  $x$  的一切数值都有意义, 但  $\operatorname{cth} x$  在  $x = 0$  时并无意义, 须除外. 这些函数显得与三角函数非常地相似.

例如, 对于它们成立公式(注意符号!):

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

由此, 在  $y = x$  时推得:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$



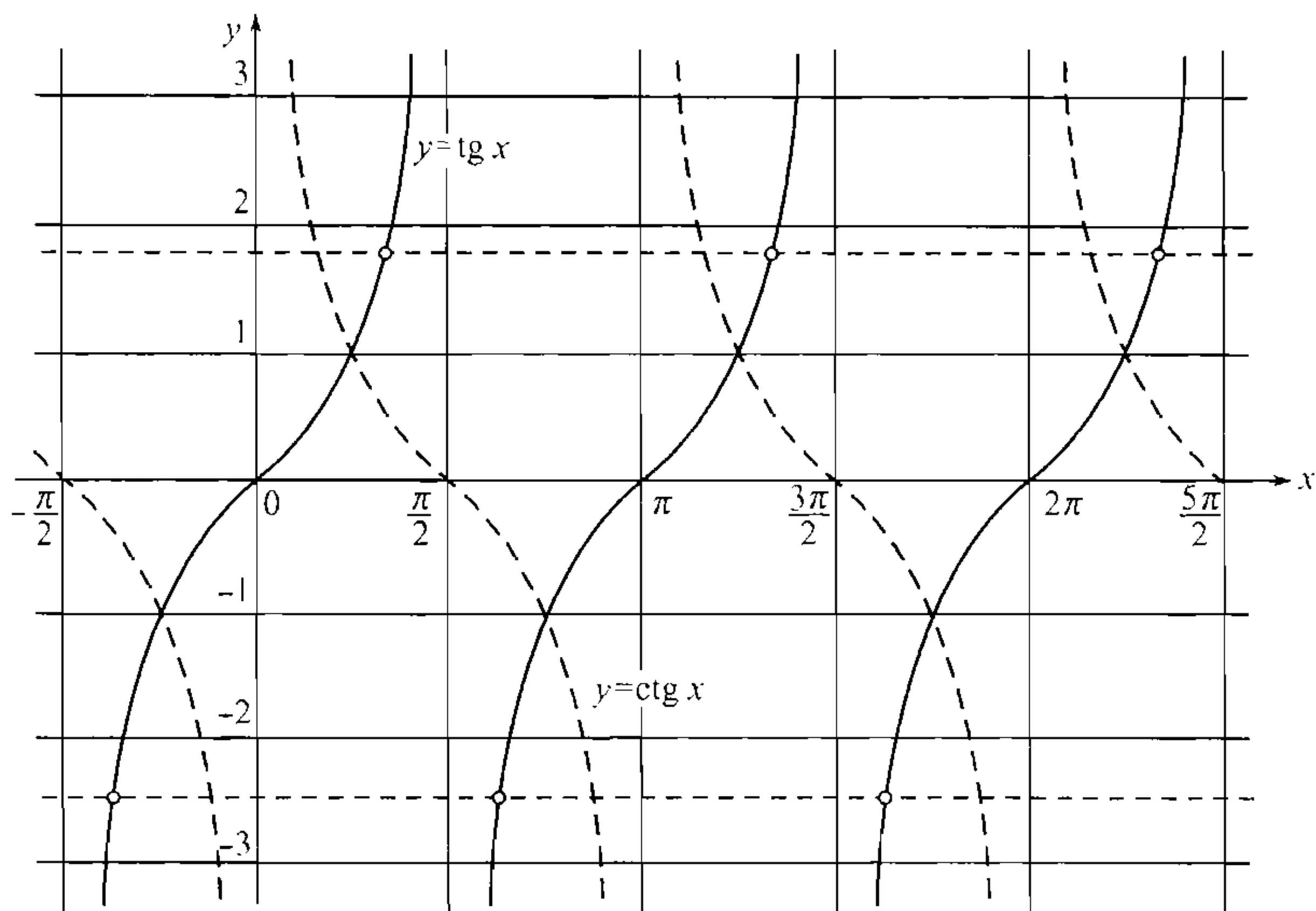


图 16

例如, 这些公式中的第一个实际上就是很易验证的恒等式

$$\frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

其余的也可以同样地验证.

在图 17 及图 18 内画着双曲函数的图像.

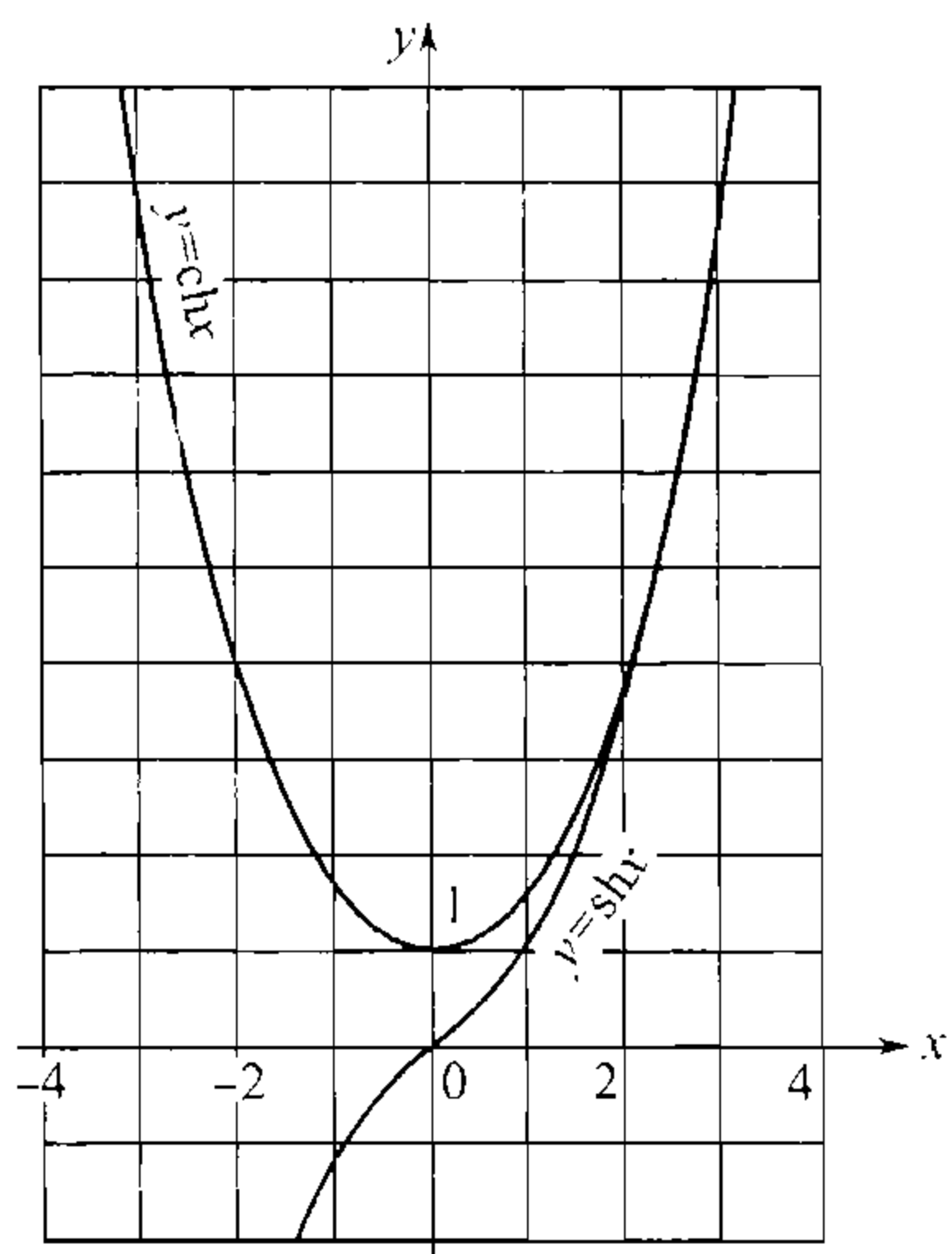


图 17

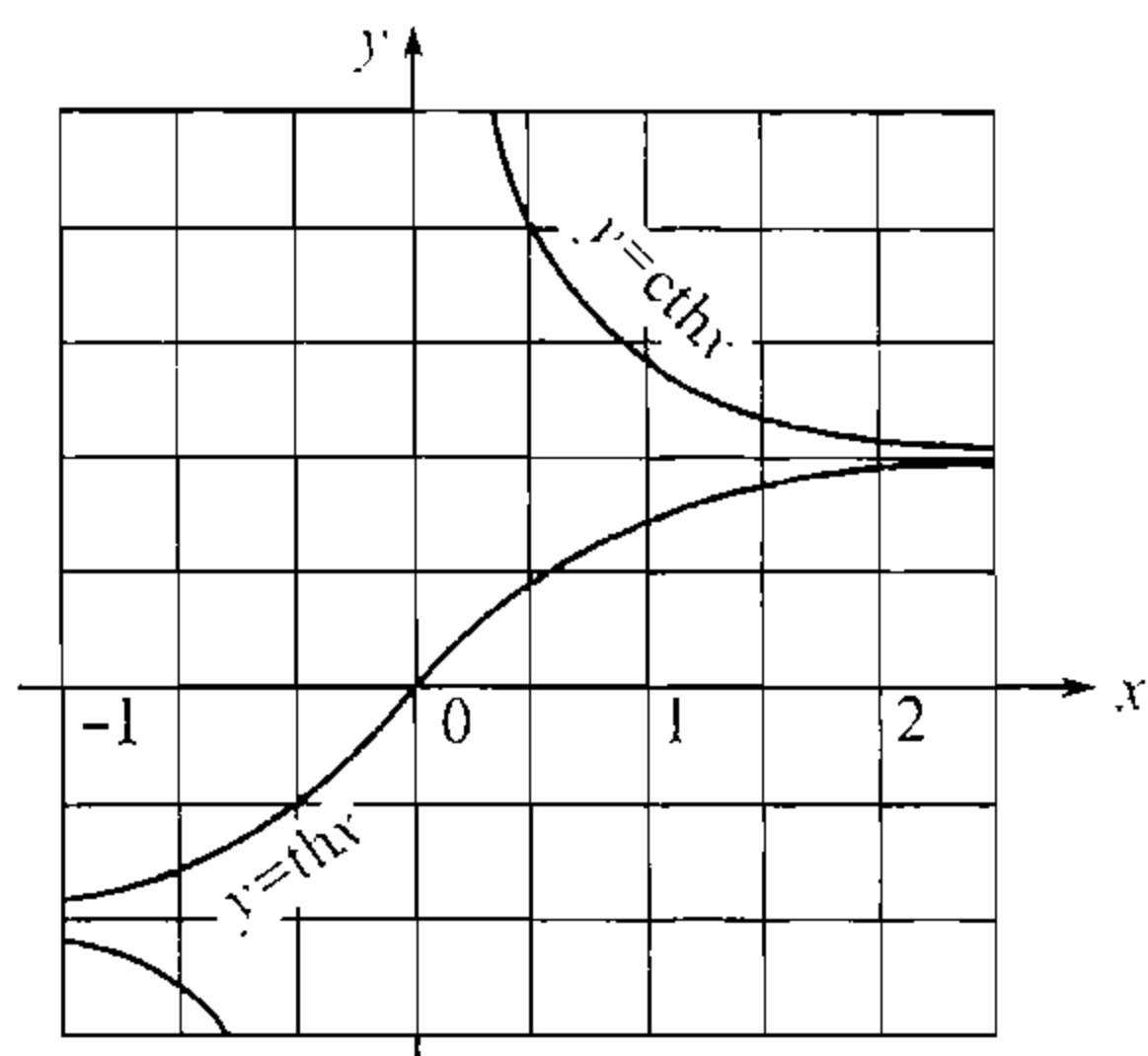


图 18



**49. 反函数的概念** 在论及反三角函数之前, 先对反函数作一总的说明.

假定在某一区域  $\mathcal{X}$  内给定函数  $y = f(x)$ , 并设当  $x$  在区域  $\mathcal{X}$  内变动时, 一切函数值所成的集是  $\mathcal{Y}$  (在实用上  $\mathcal{X}$  及  $\mathcal{Y}$  通常都是区间).

由区域  $\mathcal{Y}$  内选取任一数值  $y = y_0$ ; 则在区域  $\mathcal{X}$  内必能求出数值  $x = x_0$ , 使得函数在  $x_0$  所取的数值刚好就是  $y_0$ , 即

$$f(x_0) = y_0;$$

像这样的数值  $x_0$  可能出现好多个. 因此,  $\mathcal{Y}$  内的任一数值  $y$  将与一个或几个  $x$  的数值相对应; 由此对应地确定在区域  $\mathcal{Y}$  内的单值或多值函数  $x = g(y)$ , 它就称为函数  $y = f(x)$  的反函数<sup>15)</sup>.

考察例题:

1) 设  $y = a^x (a > 1)$ , 式中  $x$  在区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内变动着,  $y$  的数值充满区间  $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$ , 并且与这区间内的每一  $y$  对应着的, 我们已知道 [20], 在  $\mathcal{X}$  内只有一个确定的  $x = \log_a y$ . 在这种场合, 反函数是单值的.

2) 反之, 对于函数  $y = x^2$ , 若  $x$  在区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内变动, 反函数就是双值的: 对应于区间  $\mathcal{Y} = [0, +\infty)$  内的每一数值  $y$  有  $\mathcal{X}$  内的两个数值  $x = \pm\sqrt{y}$ . 代替这种双值函数通常分别地考察两个单值函数  $x = +\sqrt{y}$  及  $x = -\sqrt{y}$  (双值函数的两“支”). 仅需假设  $x$  的变动区域各限于区间  $[0, +\infty)$  及  $(-\infty, 0]$ , 则它们都可以当作函数  $y = x^2$  的反函数.

3) 仿此, 若取  $y = \operatorname{ch} x$ , 其中  $x$  的变动区域仍是区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$ , 则就  $e^x$  解方程

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad \text{或} \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0$$

求出 (在  $y \geq 1$  时) 两数值

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

由此

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

这仍是双值函数, 它分开成两个单值的支, 各对应于  $x$  从 0 改变至  $+\infty$  以及从  $-\infty$  改变至 0.

4) 又若  $y = \operatorname{sh} x$ , 则在任何  $y$  时, 由方程

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \text{或} \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0,$$

仅求出  $e^x$  的一个数值:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

<sup>15)</sup> 如果函数  $f$  的反函数是单值的, 那么函数本身称为可逆的. 通常谈到反函数时, 无条件地假定它是单值的.



因为在根号前带有负号的第二数值将是负值, 这是不可能的, 因此应该弃去. 由此

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

即在这里反函数是单值的.

注意到, 按照函数  $y = f(x)$  的图像很易判断它的反函数  $x = g(y)$  是单值或不是单值. 若任何平行于  $x$  轴的直线与这图像最多相交于一个点, 就出现第一种情形. 反之, 若这种直线中的某几条可与图像相交于几个点, 则反函数就是多值的. 在这种情形也很易按照图像划分  $x$  的变动区间成为几部分, 使得每一部分都对应了这函数的一个单值“支”. 例如, 只要一瞥图 4 内的抛物线 (它是函数  $y = x^2$  的图像), 就清楚地看出它的反函数是双值的, 如要得出单值“支”, 只要个别地考察这抛物线的右部及左部 (分别对应于  $x$  的正值及负值) 就够了<sup>①</sup>.

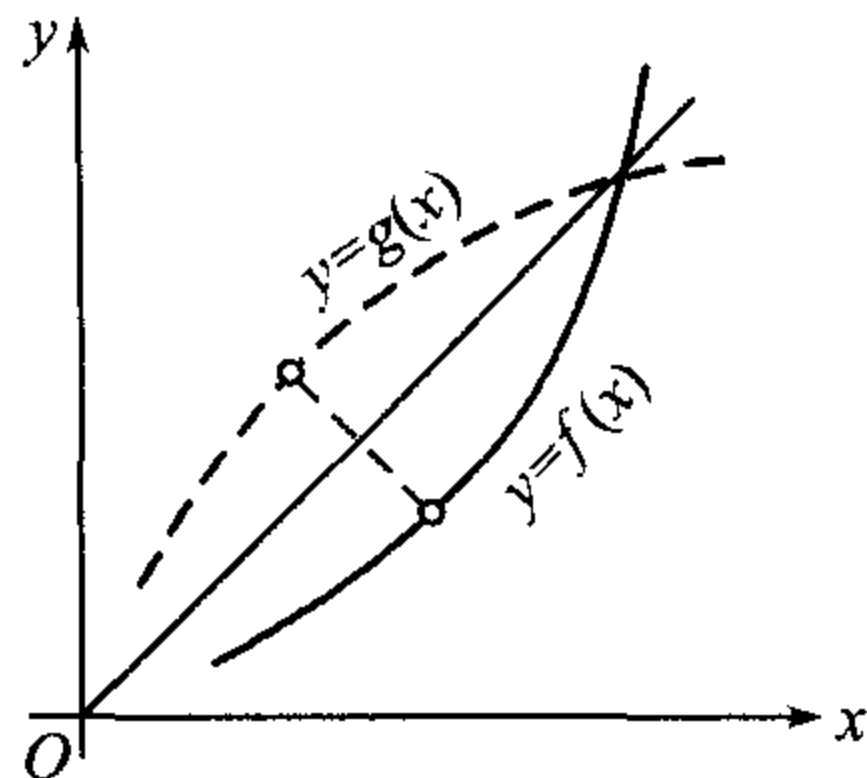


图 19

若函数  $x = g(y)$  是函数  $y = f(x)$  的反函数, 则显然, 两函数的图像重合着. 然而, 也可以仍旧用字母  $x$  表示反函数的变元, 即代替函数  $x = g(y)$  而考察  $y = g(x)$ . 若在这时  $x$  轴仍为水平, 而  $y$  轴仍为铅直, 则图形必须重作. 因为问题只在交换  $x$  轴和  $y$  轴所担任的角色, 所以最简单的办法是使图内的平面  $Oxy$  绕第一象限角的分角线旋转  $180^\circ$  (图 19).

这样,  $y = g(x)$  的图像就可作为  $y = f(x)$  的图像关于分角线的镜面反射而得到. 例如, 根据图 13 及 14 立刻看出, 它们就是这样的一种由另一种经过反射而得出的图像. 同样, 由于上述的理由, 很易解释在图 11 及 12 内的任一种图像 (关于第一象限角的平分线) 的对称性.

**50. 反三角函数** 作为在 48 内已讲述的初等函数的种类的补充, 今再考察

**7° 反三角函数:**

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \\ y &= \operatorname{arcctg} x \quad (y = \operatorname{arcsec} x, \quad y = \operatorname{arccsc} x). \end{aligned}$$

首先考察第一个函数. 函数  $y = \sin x$  在区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内定义着, 并且它的函数值充满区间  $\mathcal{Y} = [-1, 1]$  的全部. 平行于  $x$  轴的直线若与正弦曲线, 即函数  $y = \sin x$  的图像 (图 15) 相交, 交点必有无限多个; 换言之, 与区间  $[-1, 1]$  内的  $y$  的任一数值对应着的有无限多个  $x$  的数值. 因此其反函数, 记为

$$x = \operatorname{Arcsin} y^{②},$$

<sup>①</sup>下面 [83] 我们还要回到关于反函数的存在及单值性的问题.

<sup>②</sup>我们在当初 [48, 5°] 已着重指出, 三角函数的变元  $x$  表示角的弧度; 自然而然地, 在这里反三角函数的值 (若作为角或弧的度量来考察它) 也都表示为弧度.



是(无穷)多值的.

通常仅考察这函数对应于  $x$  在  $-\frac{\pi}{2}$  及  $\frac{\pi}{2}$  之间变动的一“支”. 与  $[-1, 1]$  内的任一  $y$  对应着的只有在这范围内的一个  $x$  值: 它记成

$$x = \arcsin y,$$

并称为反正弦函数的**主值**.

把正弦曲线绕第一象限角的分角线翻转(图 20), 则得多值函数  $y = \operatorname{Arcsin} x$  的图像; 其主支  $y = \arcsin x$  的图像用实线标出. 在  $x$  的区间  $[-1, 1]$  内它是单值地被确定着的, 且满足不等式

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

这是主支在其他各支中间的特征.

回想在初等三角学内, 当正弦的数值已知时, 怎样用角的一个数值表达出角的全部数值, 就很易写出给定反正弦函数的全部数值的公式:

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots).$$

或

$$\operatorname{Arcsin} x = (2k + 1)\pi - \arcsin x.$$

由正弦的加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

可得出反正弦函数的加法定理. 就是, 设  $\alpha = \arcsin x$ ,  $\beta = \arcsin y$  (其中  $x$  及  $y$  都在  $-1$  及  $+1$  之间); 则

$$\sin \alpha = x, \quad \sin \beta = y;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - y^2}.$$

并且根号之前都取  $+$  号, 因为根据反正弦函数的主值的特性,  $\alpha$  角及  $\beta$  角都在  $-\frac{\pi}{2}$  及  $+\frac{\pi}{2}$  之间, 故它们的余弦必为正值. 因此,

$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2},$$

由此

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y$$

$$= \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}),$$

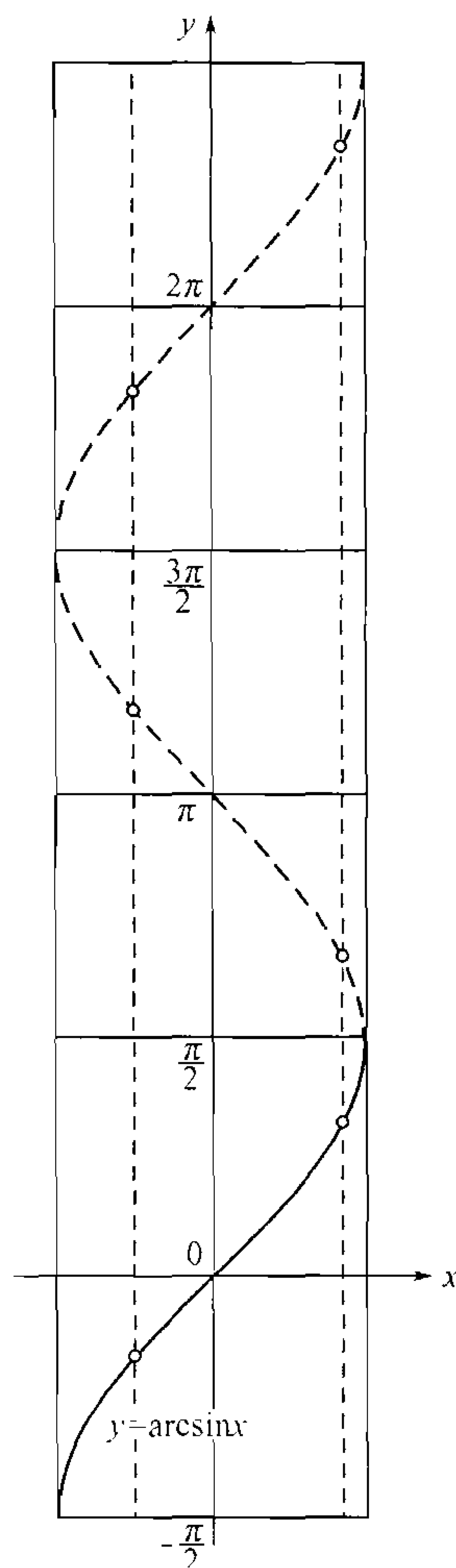


图 20



这公式可以更简单地写成

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$

但只能在  $\alpha + \beta$  不超出区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的场合.

若变元  $x$  与  $y$  (从而  $\alpha$  与  $\beta$ ) 异号, 这条件将自动地满足. 又在同号的场合, 很易看出上述条件相当于

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

类似于此的讨论亦可应用于函数  $y = \cos x (-\infty < x < +\infty)$ . 在这里反函数

$$y = \operatorname{Arccos} x (-1 \leq x \leq 1)$$

也是 (无穷) 多值的 (参阅图 15). 要分出它的单值支, 可附以条件

$$0 \leq \arccos x \leq \pi;$$

这是反余弦函数的主支.

函数  $\arccos x$  与  $\arcsin x$  由显明的关系式

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

联系着; 实际上, 不仅角  $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$  的余弦等于  $\sin(\arcsin x) = x$ , 且这角本身, 也包含在  $0$  与  $\pi$  之间.  $\operatorname{Arccos} x$  的其余的数值可以借其主值按照下面的公式表示出来:

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

函数  $y = \operatorname{tg} x$  对于全部  $x$  值, 除去  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的数值以外都有意义. 在这里  $y$  的数值充满区间  $(-\infty, +\infty)$ , 并且对应于任一  $y$  仍有无穷多个  $x$  值 (参阅图 16). 因此, 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内给定的反函数  $x = \operatorname{Arctg} y$  是 (无穷) 多值的. 在图 21 内画着函数  $y = \operatorname{Arctg} x$  的图像, 就是把函数  $y = \operatorname{tg} x$  的图像绕第一象限角的分角线旋转  $180^\circ$  而得出的. 反正切函数的主值  $\operatorname{arctg} x$  采用这多值函数的能满足不等式

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

的数值.

这样就确定了一个对于所有的  $x$  都有意义的单值函数, 即反正切函数的主支. 很易证明, 反正切函数的其余的数值, 可由下式求得:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

正切的加法定理:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$



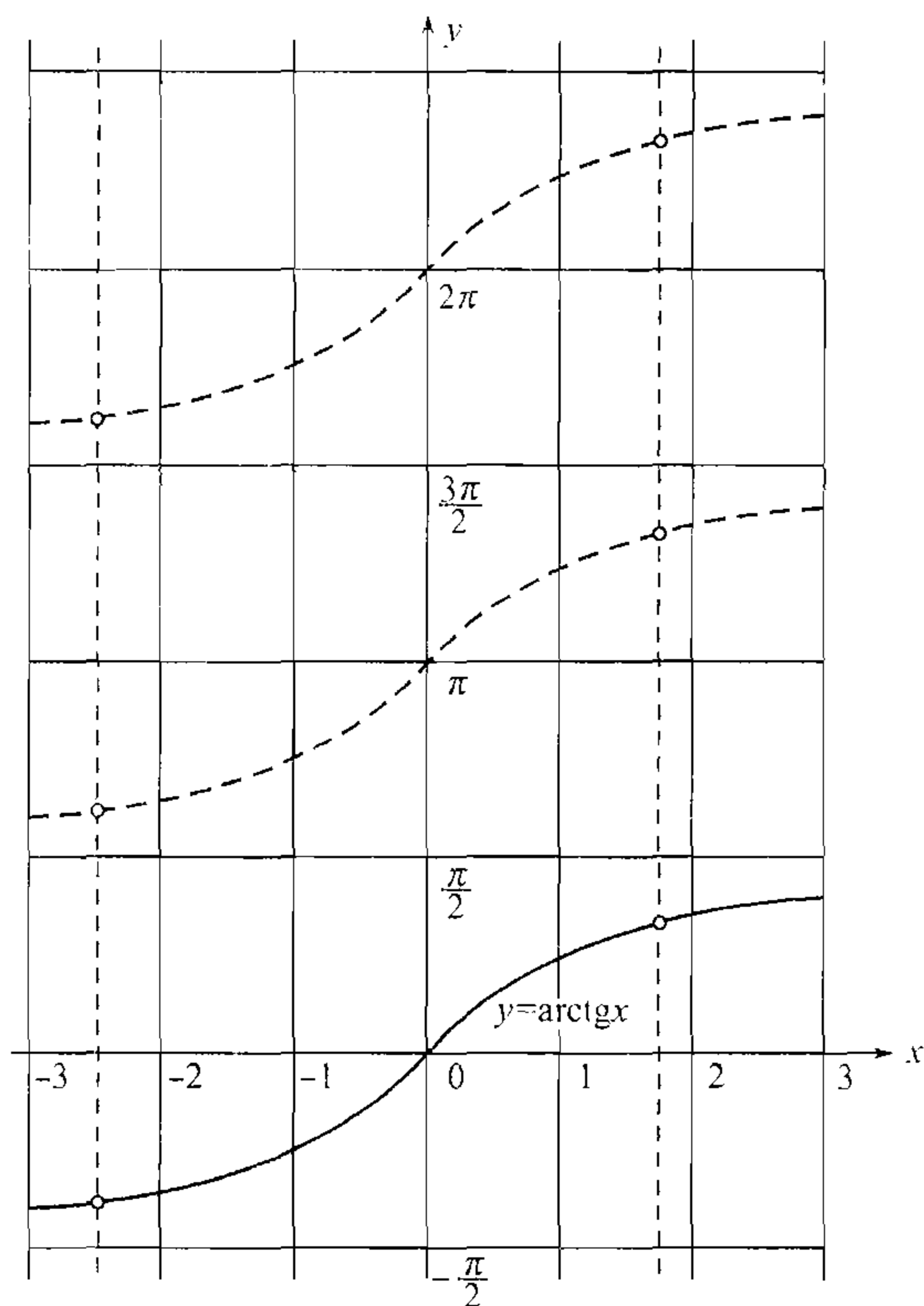


图 21

如果设  $\alpha = \operatorname{arctg} x, \beta = \operatorname{arctg} y$ , 便得出 (在  $xy \neq 1$  时)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy},$$

因此

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

此时等式可化成更简单的形状

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy},$$

仅需  $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ , 即  $xy < 1$ .

在函数  $\operatorname{arctg} x$  与  $\operatorname{arcsin} x$  之间亦不难建立直接的关系

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{或} \quad \operatorname{arcsin} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$(-\infty < x < +\infty)$ 

 $(-1 < x < +1)$



例如, 若设  $\alpha = \operatorname{arctg} x$ , 便有  $\operatorname{tg} \alpha = x$ , 则  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ , 并且因  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 根号前必带有正号; 由此, 自然地推得  $\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

再讲到函数  $\operatorname{Arcctg} x (-\infty < x < +\infty)$ ; 它的主值, 由不等式

$$0 < \operatorname{arctg} x < \pi$$

所确定, 这主值与  $\operatorname{arctg} x$  之间存在下面的关系:

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

表示反余切函数的其余数值的公式, 形如

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

我们不再讨论函数  $\operatorname{arcsec} x (-\infty < x \leq -1 \text{ 及 } 1 \leq x < +\infty)$  及  $\operatorname{arccsc} x$  (同是那两个变动区间), 让读者自己去分析了解罢.

**51. 函数的叠置. 总结** 今将介绍函数叠置的概念. 以另一变元的函数作为已给函数的变元, 便形成函数叠置. 例如, 叠置函数  $\sin x$  及  $\lg y$  就得出函数  $\lg \sin x$ ; 仿此, 又能得出函数

$$\sqrt{1 - x^2}, \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ 等等.}$$

一般, 假设函数  $y = f(x)$  对于在区域  $\mathcal{X} = \{x\}$  内的  $x$  是有意义的, 并且它的数值全部包含在区域  $\mathcal{Y} = \{y\}$  内. 再设函数  $z = \varphi(y)$  刚好在区域  $\mathcal{Y}$  内是有意义的. 则常说, 变量  $z$  借  $y$  做媒介而成为  $x$  的函数:

$$z = \varphi(f(x)).$$

依  $\mathcal{X}$  内已给的  $x$ , 先 (按照记号  $f$  所表示的规律) 求出对应于它的  $\mathcal{Y}$  内的  $y$  值, 再 (按照记号  $\varphi$  所表示的规律) 求出对应于这  $y$  值的  $z$  值; 那么它就是对应于所选的  $x$  而求出的  $z$  的数值. 所得的函数之函数或复合函数, 就是叠置函数  $f(x)$  及  $\varphi(y)$  的结果.

函数  $f(x)$  的数值不超出函数  $\varphi(y)$  的定义域  $\mathcal{Y}$  的范围之外这个假定是非常要紧的, 若忽略了它, 就会得出谬论. 例如, 假设  $z = \lg y$ , 而  $y = \sin x$ , 我们仅能考虑使  $\sin x > 0$  的那些值, 因为否则的话, 表达式没有意义.



我们认为是有好处的, 在这里再着重指出: 一种函数关系须借复合函数来表出的这一特性, 并不依赖于这函数关系的本身, 而只依赖于表示这关系的方法. 例如, 设  $z = \sqrt{1-y^2}$  当  $y$  在  $[-1, 1]$  内, 而  $y = \sin x$  当  $x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  内, 则

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

此处  $\cos x$  是以复合函数的形式出现的.

当完全弄清楚函数叠置的概念以后, 我们现在可以准确地说明在分析学内所研究的那些函数中的最简单的种类: 首先, 是前所列举的初等函数  $1^\circ \sim 7^\circ$ , 其次, 便是由它们用算术四则运算及有限次数地应用叠置所得的函数. 它们可用初等函数的有限形式来表示; 有时它们也一起称为初等函数.

以后, 掌握了更复杂的分析工具 (无穷级数, 积分), 我们将介绍另一些函数, 它们在分析学内同样担任着重要角色, 但是已越出了初等函数的范围.

## §2. 函数的极限

**52. 函数的极限的定义** 考察数集  $\mathcal{X} = \{x\}$ . 若在点  $a$  的任意近处包含有  $\mathcal{X}$  中异于  $a$  的  $x$  值, 则点  $a$  称为这数集的聚点.

为着要更准确地表达这定义, 我们引入点  $a$  的邻域的概念: 以点  $a$  为中心的开区间  $(a - \delta, a + \delta)$  就称为点  $a$  的邻域. 现在就可以说, 若在点  $a$  的任一邻域内包含  $\mathcal{X}$  中异于  $a$  的  $x$  值, 则点  $a$  是数集  $\mathcal{X}$  的聚点.

在这时, 聚点本身可以属于  $\mathcal{X}$  或不属于  $\mathcal{X}$ .

设在区域  $\mathcal{X}$  内给定函数  $f(x)$ , 且  $a$  是  $\mathcal{X}$  的聚点. 这函数在  $x$  接近于  $a$  时的性态是值得注意的. 若对于任一数  $\varepsilon > 0$  能求出数  $\delta > 0$ , 只需  $|x - a| < \delta$ , 能使

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1)$$

(式中的  $x$  取自  $\mathcal{X}$  内且异于  $a$ )<sup>①</sup>, 则称当  $x$  趋向于  $a$  时 (或在  $a$  点处) 函数  $f(x)$  以数  $A$  为极限. 这一事实记成

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (2)$$

设  $\mathcal{X}$  是这样一种区域, 仅在  $a$  的右边任意近处, 能找出  $\mathcal{X}$  内的异于  $a$  的  $x$  数值 (在这种场合点  $a$  称为  $\mathcal{X}$  的右聚点), 则可以把刚才所给函数的极限的定义特殊化, 使仅限于  $x > a$  的数值. 在这种场合, 若函数的极限存在, 就称为当  $x$  从右边趋向于  $a$  时函数  $f(x)$  的极限, 或简称 (在点  $a$  处的) 右极限, 并记成

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{或} \quad f(a+0)^{\textcircled{2}}.$$

<sup>①</sup>就因为  $a$  是  $\mathcal{X}$  的聚点, 所以可以确知, 在点  $a$  的邻域  $(a - \delta, a + \delta)$  内这种  $x$  的数值一定是存在的.

<sup>②</sup>若  $a$  本身等于 0, 则代替  $0 + 0(0 - 0)$  而简单地写成  $+0(-0)$ .



类似地可建立概念:左聚点, 及当  $x$  从左边趋向于  $a$  时函数的极限或 (在点  $a$  处的)左极限:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{或} \quad f(a-0).$$

若点  $a$  同时为  $\mathcal{X}$  的右聚点及左聚点, 则很易证明, 极限 (2) 存在的必要而且充分的条件为右极限及左极限各自存在而且相等:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A.$$

当  $x$  趋向于有限极限  $a$  时, 函数亦可以有无穷极限 (不带符号或有确定符号). 就是, 若对于任一数  $E > 0$ , 能求出数  $\delta > 0$ , 只需  $|x - a| < \delta$ , 便能使

$$f(x) > E \quad (f(x) < -E) \quad (3)$$

(式中的  $x$ , 如经常一样, 是取自  $\mathcal{X}$  内的异于  $a$  的数), 则称当  $x$  趋向于  $a$  时 (或在点  $a$  处) 函数  $f(x)$  以  $+\infty(-\infty)$  为极限.

这些事实的记法, 类似于 (2):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty(-\infty).$$

对于现在这个情形亦可以仿照前面定义右边及左边的单侧极限时的做法.

若数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  包含 (绝对值) 任意大的正 (负) 值  $x$ , 则称  $+\infty(-\infty)$  是  $\mathcal{X}$  的聚点.

在此假定下, 若对于不论怎样的数  $\varepsilon > 0$  恒有数  $\Delta > 0$  存在, 只需  $x > \Delta (x < -\Delta)$ , 便能使

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (4)$$

(式中的  $x$  取自  $\mathcal{X}$  内), 则称当  $x$  趋向于  $+\infty(-\infty)$  时函数  $f(x)$  有极限  $A$ . 并写成:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A. \quad (5)$$

最后, 易于改述上列定义, 使适用于  $A = +\infty$  或  $-\infty$  的场合.

所有这些定义的本质是同一件东西: 函数  $f(x)$  可任意地“接近”于其极限  $A$ , 只需自变量  $x$  充分地“接近”于它自己的极限  $a$ . 但变量“接近”于有限极限的意思是指, 他们之间的差 (的绝对值) 很微小; 而它“接近”于无穷极限的意思是指, 它本身 (的绝对值) 是很巨大, 且当讲及确定符号的无穷时, 极限的符号仍保持着.

很明显地, 数  $\delta(\Delta)$  在一切场合都依赖于  $\varepsilon(E)$ .

最后注意. 当函数  $f(x)$  趋向于 0 时, 它称为无穷小; 若  $f(x)$  趋向于  $\infty$ , 它就称为无穷大. 若后一情况发生于  $x \rightarrow a$  时, 则亦称在点  $a$  处函数成为无穷大.



**53. 变成整序变量的情形** 若将整序变量视为在自然数序范围内变动着的自变量  $n$  的函数, 则当  $n \rightarrow \infty$  时这函数的极限, 有如在 52 内所定义的, 显然与 23 及 27 内所定义的整序变量的极限 ( $\Delta$  的角色在那里由  $N$  担任) 相一致. 这样, 整序变量的极限是函数的极限的特殊情形.

而且, 反之, 在某些意义上, 函数的极限可归结于整序变量的极限.

设数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  有聚点  $a$  ( $a$  可以是有限的数, 也可以是不同符号无穷). 则由  $\mathcal{X}$  内可以 (用无数种方法) 取出以  $a$  为极限的  $x$  的 (异于  $a$  的) 序列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (6)$$

事实上, 若  $a$  是有限的, 则在给定一趋于零的整序变量  $\delta_n$  以后, 在点  $a$  的任一邻域  $(a - \delta_n, a + \delta_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 内必能求出  $\mathcal{X}$  中的异于  $a$  的点  $x = x_n$ ; 因  $|x_n - a| < \delta_n$ , 故  $x_n \rightarrow a$ . 当  $a$  为无穷时, 就给定一整序变量  $\Delta_n \rightarrow +\infty$ . 且对于任一  $\Delta_n$  求出  $\mathcal{X}$  中的一数值  $x = x_n$ , 使  $|x_n| > \Delta_n$ ; 显然, 有  $x_n \rightarrow \infty$  等等.

与变元的序列 (6) 对应着的是函数的序列

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (7)$$

很易看出, 在等式 (2) 成立时这序列恒收敛于  $A$ . 且以  $a$  及  $A$  均为有限的情形作为示例.

若给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 则首先根据极限定义 (2), 能取出与它对应的数  $\delta > 0$ . 由于序列 (6) 收敛于  $a$ , 所以根据数  $\delta$ , 必能求出 [23] 序号  $N$ , 使  $n > N$  时能成立不等式  $|x_n - a| < \delta$ , 因此 [参阅 (1)], 又有  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ . 由此亦就证明了序列 (7) 收敛于  $A$ .

这定理的逆亦是真实的:

今假设自变量  $x$  依着以  $a$  为极限的任意序列 (6) (由  $\mathcal{X}$  内取出的) 递变时, 与它对应的函数值的序列 (7) 恒有极限  $A$ . 则这数  $A$  就是 52 所定义的函数  $f(x)$  的极限.

我们在这里仍限于  $a$  及  $A$  均为有限数的情形. 试由反面推论, 假定  $A$  并非函数的极限. 那时对于某些数  $\varepsilon > 0$ , 就没有对应的  $\delta$  存在; 即不论取怎样小的  $\delta$ , 至少能求出变数  $x$  的一个数值  $x = x'$  (异于  $a$ ), 虽然

$$|x' - a| < \delta, \text{ 但仍有 } |f(x') - A| \geq \varepsilon.$$

取一趋于零的正数  $\{\delta_n\}$  的序列. 根据刚才所说的, 对于任一数  $\delta = \delta_n$  恒能找出数值  $x' = x'_n$ , 虽然

$$|x'_n - a| < \delta_n, \text{ 但仍有 } |f(x'_n) - A| \geq \varepsilon.$$



于是这些数值便组成某一序列

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots,$$

对于它们, 恒有

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

因  $\delta_n \rightarrow 0$ , 故  $x'_n \rightarrow a$ .

依定理的假定, 对应的函数的序列

$$f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_n),$$

应趋于  $A$ , 但这是不可能的, 因对于一切的  $n = 1, 2, \dots$  恒有  $|f(x'_n) - A| \geq \varepsilon$ . 所得的矛盾就证明了我们的命题.

这样, 我们在实质上已得出函数的极限概念的第二定义, 它在 52 内是用“ $\varepsilon - \delta$  的语言”表达着的. 现在我们又可以用“序列的语言”表达它, 即把等式 (2) 的意义理解为: 对于任何以  $a$  为极限的序列 (6), 对应的序列 (7) 常有极限  $A$ .

末了, 我们注意到, 只需假定对应于任何收敛于  $a$  的序列 (6), 序列 (7) 的极限常存在, 就足以推得一切这些极限是重合的. 事实上, 假定对于趋于  $a$  的两个序列

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots \quad \text{及} \quad x''_1, x''_2, \dots, x''_n, \dots,$$

有

$$f(x'_n) \rightarrow A' \quad \text{及} \quad f(x''_n) \rightarrow A'',$$

此处  $A' \neq A''$ . 则把两序列的各项相间着以组成新序列:

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots;$$

它显然是趋向于  $a$  的, 因为对于充分大的  $n$ ,  $x'_n$  及  $x''_n$  都与  $a$  相差任意小. 而同时对应的函数的序列:

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots, f(x'_n), f(x''_n), \dots,$$

则违反假定, 根本没有极限, 因为它的奇数项或偶数项所组成的部分序列, 各趋向于不同的极限 [40]. 所得的矛盾, 就证明形式如 (7) 的序列, 事实上始终趋向于同一的极限.

#### 54. 例题 1) 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1).$$

对于任何  $E > 0$ , 只要取  $\Delta = \log_a E$ , 就可由

$$x > \Delta \quad \text{导出} \quad a^x > E,$$



这就证明了我们的命题<sup>①</sup>.

仿此可证明

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

即不论  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < 1$ ) 怎样小, 若取  $\Delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon$ , 则

$$\text{在 } x < -\Delta \text{ 时必有 } a^x < \varepsilon.$$

又若  $0 < a < 1$ , 则用变换式  $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$  很易建立结果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1).$$

2) 证明 在  $a > 1$  时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty.$$

对于任何给定的  $E > 0$ , 只需  $x > a^E$ , 就有  $\log_a x > E$ , 因而仿此, 只需  $0 < x < a^{-E}$ , 就成立不等式:  $\log_a x < -E$ . 由此就证明了那两个关系式.

3) 我们再证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

且讨论第一个极限作为例子. 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 取  $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ , 就可使  $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , 于是

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

4) 关系式:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad (a > 1)$$

是更细致的例子.

回忆我们早已经遇见过它的特例:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

[32.9)]; 显然, 同时又有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty.$$

因此, 根据给定的  $E > 0$  能求出自然数  $N$ , 使在  $n > N$  时, 成立不等式

$$\frac{a^n}{n+1} > E.$$

今设  $x > N+1$ ; 若假定  $n = E(x)$ , 则

$$n > N \text{ 又 } n \leq x < n+1,$$

<sup>①</sup>我们在 27 内已经得出较为特殊的结果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad (a > 1).$$



于是

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > E,$$

这就证明了命题.

由此, 也如在 [32,9)] 内那样, 很易求得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad (a > 1, k > 0).$$

5) 类似地, 根据以前的结果 [32,11]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1),$$

一般可以建立

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0 \quad (a > 1),$$

式中  $x$  是任何正的实数.

把这里的  $x$  换成  $x^k (k > 0)$ , 容易证明,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0 \quad (a > 1, k > 0).$$

事实上, 若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 取这样的  $\Delta$ , 使当  $x > \Delta$  时已能满足不等式

$$\frac{\log_a x}{x} < k\varepsilon,$$

则在  $x > \Delta_1 = \Delta^{\frac{1}{k}}$  时就有  $x^k > \Delta$ , 因而

$$\frac{\log_a x}{x^k} < \varepsilon.$$

若把这里的  $x$  换成  $\frac{1}{x}$ , 则已得的结果可以改写成

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^k \log_a x = 0 \quad (a > 1, k > 0).$$

6) 由 25,5) 内已证明的极限关系

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

可以得出更普遍的极限关系

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1.$$

注意到, 显然有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

因此, 不论  $\varepsilon > 0$  怎样, 可以求出自然数  $n_0$ , 使 (若  $a > 1$ )

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon.$$

今若

$$|x| < \frac{1}{n_0} \quad \text{或} \quad -\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$



则

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}},$$

由此

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \quad \text{或} \quad |a^x - 1| < \varepsilon.$$

这就证明了前述的命题.

7) 现在我们将建立下面的 (对于以后也是很重要的) 结果:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (8)$$

但是首先我们必须证明下列有用的不等式:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \quad (9)$$

为这目的, 我们考察在半径为  $R$  的圆内的锐角  $\angle AOB$ , 弦  $AB$  及切圆于点  $A$  的切线  $AC$  (图 22). 则有:

$\triangle AOB$  的面积  $<$  扇形  $AOB$  的面积  $<$   $\triangle AOC$  的面积<sup>①</sup>.

若用  $x$  表示角  $\angle AOB$  的弧度, 于是弧  $\widehat{AB}$  的长就可用  $Rx$  来表示, 而这些不等式就可以改写成:

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

由此约去  $\frac{1}{2}R^2$  就得出不等式 (9).

在假定  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  之下, 用不等式 (9) 的各项去除  $\sin x$ , 则得:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

由此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

但

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x$$

[根据 (9)]. 于是

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

由此推得不等式

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|.$$

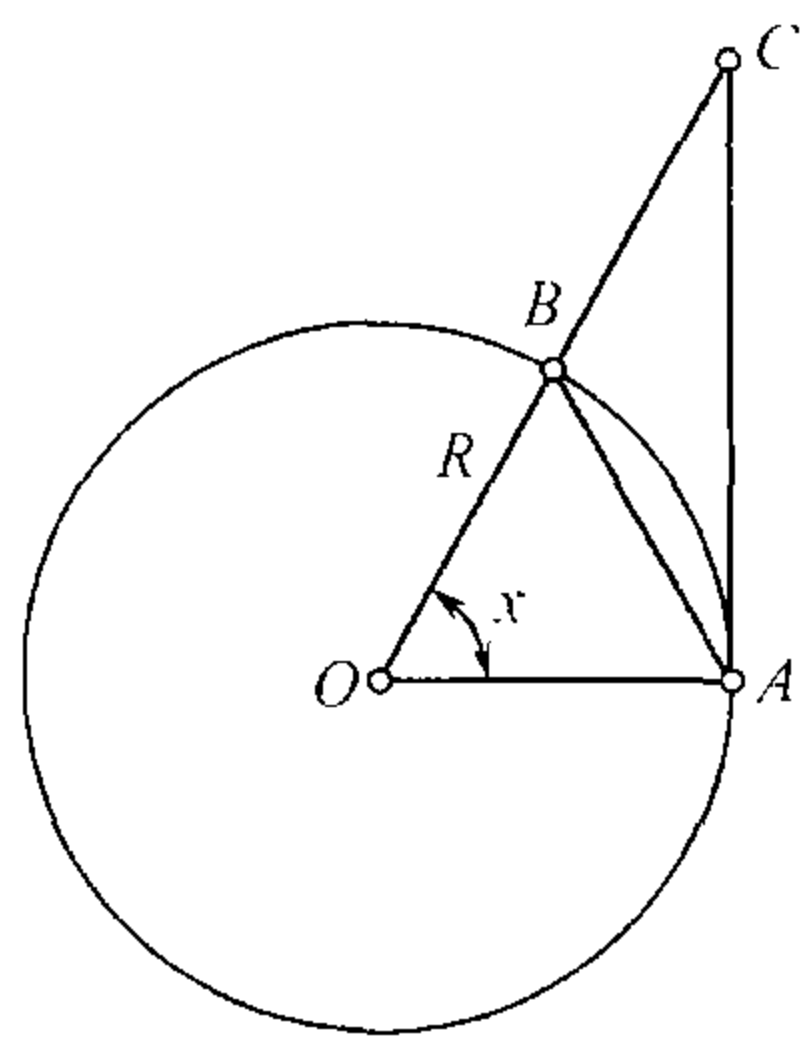


图 22

<sup>①</sup>在这里我们应用中学教程内已知的关于初等几何图形的面积方面的知识.



显然, 在改变  $x$  的符号时, 上式仍旧是正确的, 就是说, 对于一切  $x \neq 0$ , 只需  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , 这不等式总成立.

所得的不等式就证明了 (8) 式. 事实上, 对于任意给定的数  $\varepsilon > 0$ , 只需选取数  $\varepsilon$  及  $\frac{\pi}{2}$  中的最小者作为  $\delta$  就已足够了: 在  $|x| < \delta$  时, 首先, 这不等式是可用的 (因  $\delta \leq \frac{\pi}{2}$ ), 而用了它 (因  $\delta \leq \varepsilon$ ), 就得到

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

依函数极限的定义 [52], 这就表示, 函数  $\frac{\sin x}{x}$  在  $x$  趋向于 0 时以 1 为极限. 于是关系式 (8) 就被证实了.

7a) 极限关系式 (8) 根据 53 可以理解为: 只需  $x$  依收敛于零的序列  $\{x_n\}$  而递变, 整序变量  $\frac{\sin x_n}{x_n}$  终是趋于 1.

今试应用这事实来求整序变量的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n},$$

式中  $\varphi$  是任何异于 0 的数.

显然,

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2^2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2^2} = \cdots \\ &= 2^n \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n} \cdot \sin \frac{\varphi}{2^n}, \end{aligned}$$

于是那个很有趣的式子的形状就表示为

$$\frac{\sin \varphi}{2^n \cdot \sin \frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin \frac{\varphi}{2^n}}.$$

因为  $x_n = \frac{\varphi}{2^n} \rightarrow 0$ , 故依上述的命题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = 1,$$

于是本题内整序变量的极限就等于数  $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ .

8) 现在我们再研究一个十分重要的极限. 就是, 在 36 内曾定义数  $e$  作为整序变量的极限:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (10)$$

今我们要建立更普遍的结果:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (11)$$



及同样

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (11a)$$

这次我们要应用借“序列的语言”来表达的极限的第二个定义了 [53].

首先, 要记起, 与 (10) 同时也成立下面的等式

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e, \quad (12)$$

只要  $\{n_k\}$  是自然数的任意序列, 随标号  $k$  一起增大以至无穷 [40].

今设  $x$  依任何趋向于  $+\infty$  的序列  $\{x_k\}$  而递变; 并且可以当作一切  $x_k > 1$ . 令  $n_k = E(x_k)$ , 于是

$$n_k \leq x_k < n_k + 1 \quad \text{又} \quad n_k \rightarrow +\infty.$$

因为这时

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k},$$

所以

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

两个靠边的式子可以改写成:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{x_k} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}}, \\ \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} &= \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right), \end{aligned}$$

并且根据 (12),

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \rightarrow e, \text{ 同样地有 } \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \rightarrow e,$$

同时, 显然地,

$$1 + \frac{1}{n_k} \rightarrow 1, \quad 1 + \frac{1}{n_k + 1} \rightarrow 1;$$

这样, 上述的两式都趋于公共的极限  $e$ , 所以夹在他们中间的式子也应趋于  $e$  [依 28, 定理 3°]:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

由此, 关系式 (11) 内的第一式已经在“序列的语言”下获得证明.



为了再要证明 (11a), 可以假定序列  $\{x_k\}$  以  $-\infty$  为极限 (并且可以当作一切  $x_k < -1$ ). 若令  $x_k = -y_k$ , 则  $y_k \rightarrow +\infty$  (又一切  $y_k > 1$ ). 显然,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} &= \left(1 - \frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k - 1}\right)^{y_k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right).\end{aligned}$$

因为, 依前面所证明的, 最后一式的第一因式趋向于  $e$ , 第二因式显然以 1 为极限, 所以在左边的式子也应趋于  $e$ . 故公式 (11a) 已完全证实.

今把表达式  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  内的变量  $x$  换成  $\frac{1}{\alpha}$ ; 若  $\alpha$  是趋向于 0 (但不等于 0) 的序列中的一值, 则  $x = \frac{1}{\alpha}$  将趋向于  $\pm\infty$ . 因此, 公式 (11) 和 (11a) 可以改写成

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (13)$$

这一值得注意的结果是数  $e$  的一切应用上的基础.

9) 最后, 举一个函数的极限并不存在的例题也是很有趣的. 函数  $\sin x$  在  $x$  趋向于  $+\infty(-\infty)$  时就全然没有极限.

站在“序列的观点”上来说明极限的不存在最为简单. 只要注意  $x$  值的两个序列

$$\left\{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad \text{及} \quad \left\{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

都以  $+\infty$  为极限, 而与它们对应的函数值的序列却趋于两个相异的极限:

$$\sin\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi = -1 \rightarrow -1, \quad \sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = 1 \rightarrow 1.$$

(又可以改用这样的说法: 若取以  $+\infty$  为极限的  $x$  值的序列

$$\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则与它对应的函数值的序列:

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

就全然没有极限.)

若回想起正弦曲线的“振动”的特性, 则在所考察的情形极限并不存在是很明显的.

类似地, 函数  $\sin \frac{1}{\alpha}$  在  $\alpha$  (从右或从左) 趋向于 0 时极限并不存在. 实际上, 这仅是前述例题的另一形式: 只需在函数  $\sin x$  内把  $x$  换成  $\frac{1}{\alpha}$  就是. 显然, 若  $\alpha$  依从右 (从左) 接近于 0 的序列递变, 则  $x = \frac{1}{\alpha}$  就趋向于  $+\infty(-\infty)$ , 反之亦真.

在表达式  $\sin \frac{1}{\alpha}$  内, 将字母  $\alpha$  仍旧写成字母  $x$  (使变成惯用的横标的记号), 并考察当  $x$  的数值在由 0 至  $\frac{2}{\pi}$  (及由  $-\frac{2}{\pi}$  至 0) 的范围内时函数

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$



的图像.

记下依次减小到 0 的  $x$  数值:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \dots, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \frac{1}{n\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi}, \dots,$$

与它们对应的是增大至无穷大的  $\frac{1}{x}$  数值:

$$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2}, \dots.$$

在上述 (当  $x$  减小时) 各相邻数值之间的诸区间内, 函数  $\sin \frac{1}{x}$  更迭地由 1 减小至 0, 再由 0 减小至 -1, 然后又由 -1 增大至 0, 再由 0 增大至 1, 等等.

这样, 函数  $\sin \frac{1}{x}$ , 类似于函数  $\sin x$ , 就有着无数次的振动, 但  $\sin x$  的振动散布于无穷区间, 而此处  $\sin \frac{1}{x}$  的振动却见于有限区间中, 且凝聚于 0.

在图 23 内画着它的图像 (自然是很不完全的, 要画出无数次的振动是不可能的!). 因为当  $x$  的符号改变时  $\sin \frac{1}{x}$  的符号亦必改变, 所以图像的左半部与右半部关于原点对称的.

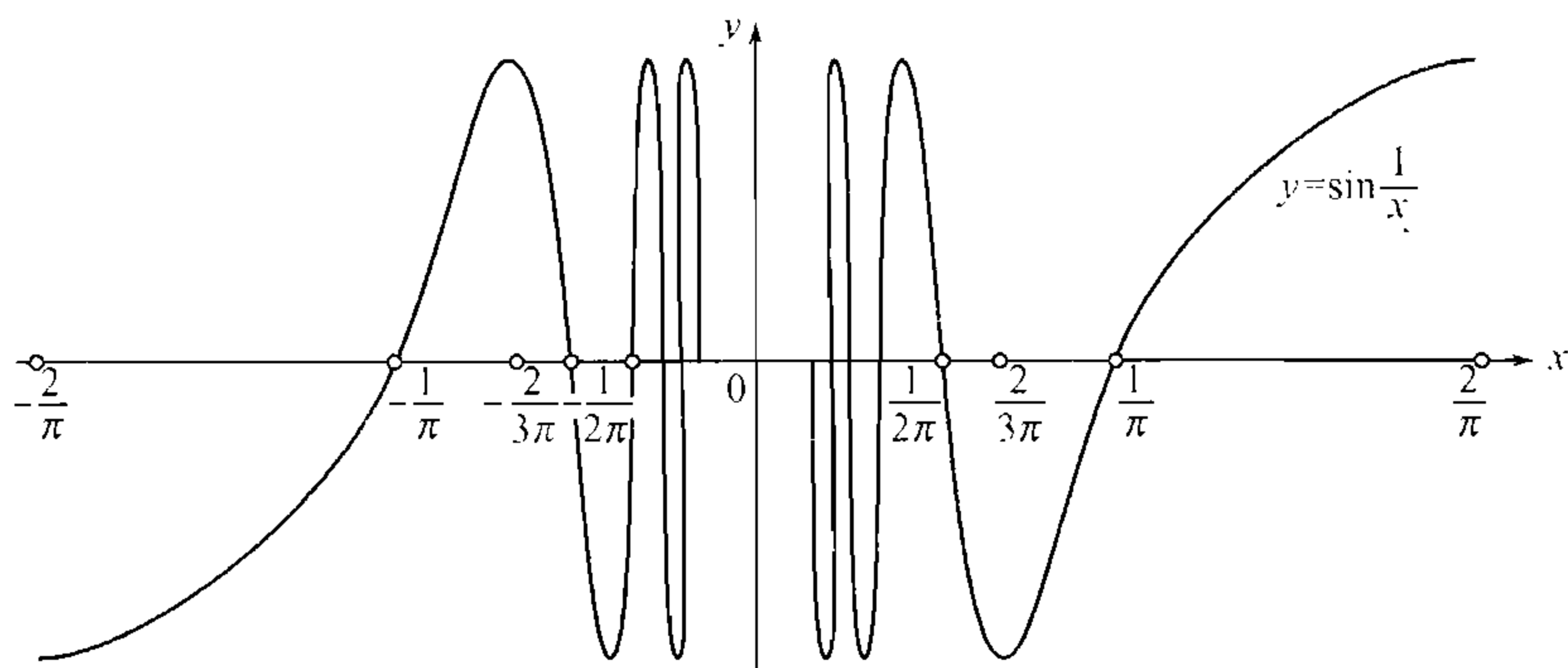


图 23

10) 若考察函数  $x \sin \frac{1}{x}$  (在  $x \neq 0$  时), 它与刚才研究过的函数  $\sin \frac{1}{x}$  仅相差一个乘数  $x$ , 则这次在  $x \rightarrow 0$  时就有极限存在了:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

这事实由不等式

$$|x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x|,$$

就可以立刻明白.

在  $x$  接近于 0 时, 我们的函数仍旧发生无数次的振动, 但它们的振幅 (由于乘数  $x$ ) 渐渐减小而趋于 0. 由此就保证了极限的存在.

函数

$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

的图像画在图 24 内: 它包藏在两条坐标角的分角线  $y = x$  与  $y = -x$  之间<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>在图 23 及 24 内, 为着要比较明晰地表示出无数次振动这一事实, 不得不在  $x$  轴上取较大的尺度, 因此也就造成了函数的准确图像失真.



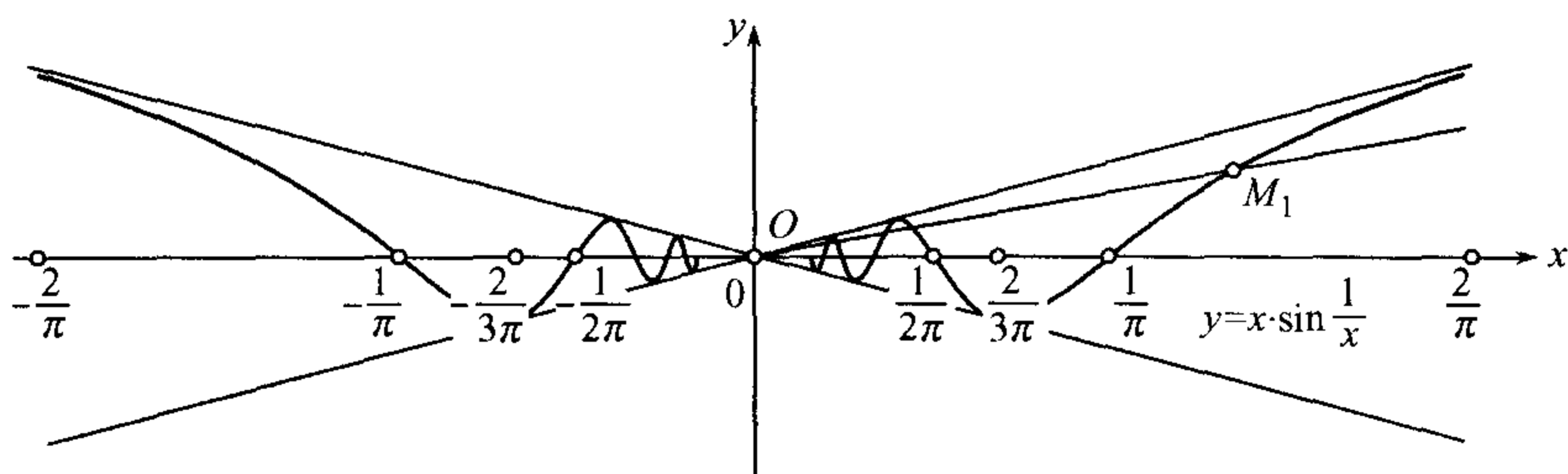


图 24

附注 我们已有一系列的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

具有一种共同的特性: 即此处所考察的诸函数中没有一个函数在  $x = 0$  时是有定义的. 但这并不影响我们说及当  $x \rightarrow 0$  时它们的极限的存在, 因为, 依照 52 中所给定义的准确意义, 刚好数值  $x = 0$  是不被考察的.

类似地, 函数  $\sin \frac{1}{x}$  在  $x = 0$  时并无意义的事实并不影响我们提出当  $x \rightarrow 0$  时它的极限的存在问题; 但现在极限并不存在.

**55. 极限理论的拓广** 在第一章内 (§1 和 §2) 所阐明的适合于整序变量的极限理论, 应如何拓广之使适合于这里所考察的任意函数的一般场合, 这一问题自然是会提出来的.

这存在着两条路径:

I. 首先, 可以把以前所叙述过的论断改写一下. 我们现在就对 26 内的命题 1° 实际地试行一下作为例子.

考察在某一以  $a^{①}$  为聚点的区域  $\mathcal{X}$  内所定义的函数  $f(x)$ .

1° 若当  $x$  趋于  $a$  时函数  $f(x)$  有一有限的极限  $A$ , 而  $A > p(A < q)$ , 则当  $x$  的值充分接近于  $a$  (异于  $a$ ) 时函数本身也就满足不等式

$$f(x) > p \quad (f(x) < q). \quad (14)$$

选取正数  $\varepsilon < A - p(q - A)$ , 就有

$$A - \varepsilon > p \quad (A + \varepsilon < q).$$

但依极限定义, 对于这  $\varepsilon$  必能求出  $\delta$ , 只需  $|x - a| < \delta$  (其中  $x$  取自  $\mathcal{X}$  内且异于  $a$ ), 就有

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

①数  $a$  可以是无穷; 但我们为着确定起见, 且限于  $a$  为有限的场合.



对于这些  $x$  值, 当然 (14) 式也能成立.

读者当已看到, 在证明时并不需引入任何新的观念.

由此又可以直接证实 26 内的命题  $2^\circ, 3^\circ$  及  $5^\circ$ . 例如, 在  $1^\circ$  内命  $p = 0 (q = 0)$ , 就得

$2^\circ$  若在  $x \rightarrow a$  时函数  $f(x)$  有一有限的正 (负) 极限, 则函数本身也必为正 (负). 至少, 对于充分接近于  $a$  但异于  $a$  的  $x$  的数值是如此.

类似于  $4^\circ$  的命题亦必真实, 但表示为更狭义的形式.

$4^\circ$  若在  $x \rightarrow a$  时函数  $f(x)$  有一有限的极限, 则对于充分接近于  $a$  的  $x$  的数值函数是有界的:

$$|f(x)| \leq M' \quad (M' = \text{常数}, |x - a| < \delta).$$

回想起有一有限极限的整序变量  $x_n$ , 最初也仅在  $n > N$  时才得出不等式  $|x_n| \leq M'$ ; 但因整序变量的数值仅只有有限个数不能满足这不等式, 故在有需要的时候也不难增大  $M'$ , 使一切  $x_n$  都能满足这不等式. 但在函数的情形, 一般说这是办不到的, 因为使  $|f(x)| > M'$  的  $x$  的数值可以是无穷集. 例如, 函数  $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$  在  $x \rightarrow 1$  时趋于 1; 显然, 若  $|x - 1| < \frac{1}{2}$ , 则  $f(x) < 2$ , 然而对于  $x$  的一切被考察的数值, 函数  $f(x)$  却不是有界的.

II. 在叙述别的定理以前, 我们首先应该约定, 若在那些定理内变量是用等式、不等式或算术运算等符号联系的, 则两个或几个 (在同一区域  $\mathcal{X}$  内所定义的) 函数  $f(x), g(x), \dots$  用这种符号连接起来时, 我们总把它们的数值了解为对应于同一个  $x$  的数值.

所有这些定理都可以用类似的方法重新证明, 但需着重指出, 实际上没有必要去一一证明它们. 若站在“序列的观点”上来谈函数的极限, 则既然对于序列定理已被证明, 那么对于函数它们也是正确的.

姑且讨论 30 内的定理  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ . 作为例子:

设在区域  $\mathcal{X}$  (有聚点  $a$ ) 内给定两函数  $f(x)$  及  $g(x)$ ; 在  $x$  趋于  $a$  时有有限极限

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

则函数

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (15)$$

也有有限极限 (在商的情形须假定  $B \neq 0$ ), 就是

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}.$$

用“序列的语言”译述上述的两个关系式, 就成为: 若  $\{x_n\}$  是  $\mathcal{X}$  内的任意序列, 有极限为  $a$ , 则

$$f(x_n) \rightarrow A, \quad g(x_n) \rightarrow B.$$



若把已经证明的定理应用于这两个整序变量, 则立即得出

$$\lim[f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim f(x_n)g(x_n) = A \cdot B, \quad \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

而这正就 (用“序列的语言”)表达着上面所要证明的东西<sup>①</sup>.

在 31 内所讲的关于“不定式”也都同样地自动转移到我们现在所考察的一般情形来了. 它们用约定的记号

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

来表示. 如同我们在自然数变量函数的简单情形一样, 这里为了要“确定不定式”, 仅只知道函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的极限还是不够的, 必须计及这些函数的变动的规律.

读者很容易检查出, 在前一目的例 4), 5) 内我们已遇见过不定式, 其型如  $\frac{\infty}{\infty}$  及  $0 \cdot \infty$ , 而在例 7) 内遇见过不定式其型如  $\frac{0}{0}$ . 在下一目内我们将再引入一些例题, 并应用极限论的最简单的定理.

在第四章的 §4 我们还要回到这个问题来, 在那里, 我们应用微分学给出了确定不定式的一般方法.

**56. 例题** 1) 把 32 的例 1) 及 2) 普遍化, 我们研究多项式

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k$$

而后再研究两个多项式的商

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_{l-1} x + b_l}$$

在  $x \rightarrow \pm\infty$  的性态.

经变形

$$p(x) = x^k \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} \right)$$

很易确定

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty \quad (\infty - \infty),$$

并且极限的符号可以这样确定: 当  $k$  为偶数时它仅由  $a_0$  的符号来决定, 当  $k$  为奇数时除  $a_0$  以外还要看  $x$  的符号.

2) 类似于此, 我们可求出

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty, \quad \frac{a_0}{b_0}, \quad 0 \left( \frac{\infty}{\infty} \right),$$

按照  $k > l$ ,  $k = l$  或  $k < l$ . 极限的符号 (在第二种情形) 依  $a_0$  及  $b_0$  的符号而确定, 但在  $k - l$  为奇数时还须依  $x$  的符号而确定.

<sup>①</sup>在商的情形可以注意到 (类似于在论及整序变量时我们曾做过的那样), 在  $x$  充分接近于  $a$  时分母  $g(x) \neq 0$ , 于是分式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  就有了意义, 至少在  $x$  的这些数值时是如此.



3) 今将证明对于任意的正有理指数  $r$  有公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r^{\textcircled{1}} \left( \frac{0}{0} \right).$$

从指数为自然数:  $r = n$  这种最简单的情形开始. 依牛顿二项定理

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + x^n}{x} = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x + \cdots + x^{n-1};$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时最后一式的一切项, 除第一项外, 都趋于 0, 因此实际上就成为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$

今令  $r = \frac{1}{m}$  (式中  $m$  是自然数), 并考察式子

$$\frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x}.$$

假定

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = y, \text{ 由此 } x = (1+y)^m - 1.$$

因为 (当作  $|x| < 1$ )

$$1 - |x| < \sqrt[m]{1+x} < 1 + |x|, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[m]{1+x} = 1,$$

于是, 随同着  $x \rightarrow 0$  亦有  $y \rightarrow 0$ . 则依前面的情形,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(1+y)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

最后, 要证明一般的情形  $r = \frac{n}{m}$ , 仍引用辅助变数  $y$ :

$$\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} = \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \frac{(1+y)^n - 1}{y} \cdot \frac{y}{(1+y)^m - 1}.$$

由此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} = \frac{n}{m}.$$

4) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}}{x^2}.$$

仍用同样的代换式  $\sqrt[m]{1+x} - 1 = y$ , 则被考察的式子变为

$$\frac{y - \frac{1}{m}[(1+y)^m - 1]}{[(1+y)^m - 1]^2} = \frac{-\frac{m-1}{2}y^2 + \cdots}{m^2y^2 + \cdots} = \frac{-\frac{m-1}{2} + \cdots}{m^2 + \cdots},$$

由此, 立刻明白, 所求的极限等于  $-\frac{m-1}{2m^2}$ .

<sup>①</sup>在下面 [77, 5) (B)] 它将被普遍地推广到任意的实指数的场合.



5) 极限 [54,7)]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

经常被应用着去求其他的极限.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left( \frac{0}{0} \right).$$

显然

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2;$$

因为括弧内的式子趋于 1, 所以总的极限就是  $\frac{1}{2}$ .

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \left( \frac{0}{0} \right).$$

在这里用变形法很容易导向上面讨论过的极限:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

只需注意当  $x \rightarrow 0$  时  $\cos x \rightarrow 1$ , 则由上面 (a) 的结果便自然能推得本式的结果了.

(B)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0(\infty - \infty).$$

在这里换成变量  $a = \frac{\pi}{2} - x$  将更为便利; 显然, 当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时  $a \rightarrow 0$ . 我们就有

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \csc a - \operatorname{ctg} a = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \frac{1 - \cos a}{a^2} \cdot \frac{a}{\sin a} \cdot a \rightarrow 0.$$

## 57. 单调函数的极限 关于函数极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

的存在问题, 对于某种特殊类型的函数, 即由单调整序变量 [34] 这概念拓广而得到的函数, 其解决特别简单.

设函数  $f(x)$  定义在某一区域  $\mathcal{X} = \{x\}$  内. 若对于这区域内的任意一对数值  $x$  与  $x'$ , 由  $x' > x$  能推得

$$f(x') > f(x) [f(x') < f(x)],$$

则  $f(x)$  称为在区域内的**增函数** (**减函数**). 又若由  $x' > x$  只能推得

$$f(x') \geq f(x) [f(x') \leq f(x)],$$

则  $f(x)$  称为**不减函数** (**不增函数**). 在这种场合, 有时也称  $f(x)$  是**广义增函数** (**减函数**), 这样比较便利些.

一切这种类型的函数总称为**单调函数**. 对于单调函数有一个重要的定理, 它完全类似于在 34 内曾经建立的关于单调整序变量的定理.



**定理** 设函数  $f(x)$  在区域  $\mathcal{X}$  内单调地增大, 即使是广义的也可以. 区域  $\mathcal{X}$  以大于一切  $x$  值的数  $a$  (它可以是有限的数, 或等于  $+\infty$ ) 作为聚点. 若在这时函数上有界:

$$f(x) \leq M \quad (\text{对于 } \mathcal{X} \text{ 内的一切 } x)$$

则当  $x \rightarrow a$  时函数有一有限的极限; 在与此相反的场所, 它趋向于  $+\infty$ .

**证明** 首先假定函数  $f(x)$  上有界, 即当  $x$  在区域  $\mathcal{X}$  内变动时函数值所成的集  $\{f(x)\}$  是上有界的. 则这数集必有一有限的上确界  $A$  存在 [11]. 今将证明这数  $A$  就是所求的极限.

给任一任意数  $\varepsilon > 0$ , 依上确界的性质, 必能求出数值  $x' < a$ , 使  $f(x') > A - \varepsilon$ . 由于函数的单调性, 则当  $x > x'$  时当然更有:  $f(x) > A - \varepsilon$ . 另一方面, 因为永远有  $f(x) \leq A < A + \varepsilon$ , 故对满足上述条件的  $x$  显然成立不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这就证明了本命题, 只需在有限的  $a$  时假定  $x' = a - \delta$  (即  $\delta = a - x'$ ), 而在  $a = +\infty$  时取  $\Delta = x'$ .

若函数  $f(x)$  不是上有界, 则不论  $E$  是怎样的数: 必能求出  $x'$  使  $f(x') > E$ ; 而当  $x > x'$  时当然更有  $f(x) > E$  了, 余类推.

建议读者重述这一定理, 使适用于当极限值  $a$  小于  $x$  的一切数值的场合, 以及对于单调减函数的场合.

很易看出, 34 内关于单调整序变量的定理只是这一定理的特殊情形. 在那里标号  $n$  就是自变量, 而带有聚点  $+\infty$  的自然数序列  $\mathcal{N} = \{n\}$  就是它的变动区域.

以后经常遇到的函数  $f(x)$  的定义域  $\mathcal{X}$  是整个区间  $[a', a)$ , 其中  $a' < a$  而  $a$  可以是有限的数或  $+\infty$ , 或是区间  $(a, a']$ , 其中  $a' > a$  而  $a$  可以是有限的数或  $-\infty$ .

**58. 布尔查诺—柯西的一般判定法** 今转而考察一般的情形. 考察在以  $a$  为聚点的区域  $\mathcal{X} = \{x\}$  内给定的函数  $f(x)$ . 如同在整序变量的场合 [39] 一样, 现在可以建立当  $x$  趋于  $a$  时函数有一有限极限值存在的判定法了. 对于有限的  $a$  及对于  $a = +\infty$  的场合, 我们平行地叙述这一定理.

**定理** 函数  $f(x)$  当  $x$  趋向于  $a$  时有一有限极限的必要而且充分的条件是, 对于任一数  $\varepsilon > 0$  必存在着  $\delta > 0$  ( $\Delta > 0$ ), 只需

$$|x - a| < \delta, \quad |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta, x' > \Delta),$$

就能成立不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$



**证明** 我们在  $a$  是有限数的假定下进行证明.

**必要性** 设存在着有限极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

则依给定的  $\varepsilon > 0$  必能求出  $\delta > 0$ , 只需  $|x - a| < \delta$ , 就有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又设  $|x' - a| < \delta$ , 于是又有

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此, 假定同时有  $|x - a| < \delta$  及  $|x' - a| < \delta$ , 就得

$$|f(x) - f(x')| = |[f(x) - A] + [A - f(x')]| \leq |f(x) - A| + |A - f(x')| < \varepsilon.$$

**充分性** 可以应用完全类似于在整序变量的场合 [39] 所曾应用的那种论断. 然而更简单的方法是不去重复这些论断, 而直接把问题引向前已考察过的情形. 给我们打开这条道路的是用“序列的语言”表达的函数极限的第二定义 [53].

因此, 设在定理内所叙述的条件已经满足, 又依任意取的  $\varepsilon > 0$  能确定对应的  $\delta > 0$ .

若  $\{x_n\}$  是  $\mathcal{X}$  中  $x$  的任意收敛于  $a$  的序列, 则依序列的极限的定义, 必能求出序号  $N$ , 当  $n > N$  时能使  $|x_n - a| < \delta$ . 与  $n$  同时又取另一序号  $n' > N$ , 于是同时有

$$|x_n - a| < \delta \quad \text{及} \quad |x_{n'} - a| < \delta.$$

根据  $\delta$  的选法, 应有

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

因此, 只要序号  $n$  及  $n'$  同时  $> N$ , 这不等式就能成立. 这就表示整序变量  $f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 满足 39 中的条件, 因而序列

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

有一有限极限.

在 53 内 (参阅该目末尾的附注) 我们曾看到, 由此已足证明不论怎样选取收敛于  $a$  的序列  $\{x_n\}$ , 序列  $f(x_n)$  总趋于同一的极限; 这极限也就是函数的极限, 它的存在即是我们要证明的.

(上述条件的充分性亦很容易从布尔查诺 — 魏尔斯特拉斯定理内导出, 证法与在 41 末尾对于整序变量的证法相似.)



**59. 函数的上极限及下极限** 当  $x$  趋近于  $a$  时即使函数  $f(x)$  并无确定的极限存在, 但是对于特定的序列  $x_n \rightarrow a$  极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

仍可以存在; 把它称为函数的**部分极限**.

例如, 函数  $\sin x$  在  $x \rightarrow \pm\infty$  时 (或  $\sin \frac{1}{x}$  在  $x \rightarrow 0$  时) 其部分极限就充满于由  $-1$  至  $+1$  的整个区间中.

在函数的部分极限中恒能求出最大的与最小的, 称为它的上极限与下极限, 并记成

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{及} \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

函数有确定极限 (依通常的意义) 存在的必要而且充分的条件是: 上极限与下极限相等.

我们仅限于叙述这定理, 不再进行证明. 若要证明它, 只需依 42 内的次序进行好了.

### §3. 无穷小及无穷大的分阶

**60. 无穷小的比较** 假定在作某种研究时须同时考察一系列的无穷小量:

$$\alpha, \beta, \gamma.$$

一般地说来, 它们是同一变量  $x$  (譬如说) 的函数. 而  $x$  是趋于有限极限或无穷极限  $a$  的变量.

在很多场合, 按照它们接近于零的方式而将这些都称为无穷小的量加以比较是很有趣的. 二无穷小  $\alpha$  及  $\beta$  的比较以其比式的性态为基础<sup>①</sup>. 为此, 引进下列两个定义:

I. 若比式  $\frac{\beta}{\alpha}$  ( $\frac{\alpha}{\beta}$  亦一样) 有一异于零的有限极限, 则无穷小  $\alpha$  与  $\beta$  称为是同阶的.

II. 若比式  $\frac{\beta}{\alpha}$  趋于无穷小 (相反地, 比式  $\frac{\alpha}{\beta}$  趋向于  $\infty$ ), 则无穷小  $\beta$  称为是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 同时无穷小  $\alpha$  就是比  $\beta$  低阶的无穷小.

例如, 若  $\alpha = x \rightarrow 0$ , 则

$$\sin x, \operatorname{tg} x, \sqrt[m]{1+x} - 1$$

与这一无穷小相比较都是与它同阶的无穷小, 因为, 我们已知道 [54,7);56,3)]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{m}.$$

反之, 无穷小

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}, \quad 1 - \cos x, \operatorname{tg} x - \sin x \quad (1)$$

显然是比  $x$  高阶的无穷小 [56,4);5(a) 及 (6)].

<sup>①</sup>我们将假定用作除数的变量不等于零, 至少当  $x$  的数值充分接近于  $a$  时是如此.



当然也可能有二无穷小的比式并不趋向于任何极限的情形;例如,若取 [参阅 54,9),10)]

$$\alpha = x, \quad \beta = x \sin \frac{1}{x},$$

则它们的比式等于  $\sin \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时并无极限;在这种情形则说,这二无穷小不能比较.

注意,若无穷小  $\beta$  是比无穷小  $\alpha$  更高阶的,则这一事实就写成:

$$\beta = o(\alpha).$$

例如,可以写

$$1 - \cos x = o(x), \quad \operatorname{tg} x - \sin x = o(x), \quad \text{等等}.$$

这样,  $o(\alpha)$  就可作为比  $\alpha$  更高阶的无穷小的普遍记号. 我们以后就要应用这种方便的记法.

**61. 无穷小的尺度** 有时为了要更精确地比较无穷小的性态,需要用数字来表达它们的阶. 在这种情形,首先在所研究的无穷小内选出一个 (就说是  $\alpha$ ) 作为一种“标准”,把它称为**基本无穷小**. 当然基本无穷小的选取在某种程度内是任意的,但通常总取最简单的. 例如,假定被考察的量都是  $x$  的函数,而它们当  $x$  趋向于  $a$  时成为无穷小,那么根据  $a$  是零,是异于零的有限数或是无穷大,自然地,就依次选取

$$x, x - a, \frac{1}{x}$$

作为基本无穷小.

其次,再由基本无穷小  $\alpha$  (我们认作  $\alpha > 0$ ) 的各种正指数幂  $\alpha^k$  来组成一尺度,去评较性质上更为复杂的无穷小<sup>①</sup>.

III. 若  $\beta$  与  $\alpha^k$  ( $k > 0$ ) 是同阶的无穷小量,即若比式  $\frac{\beta}{\alpha^k}$  有异于零的有限极限,则称无穷小  $\beta$  为关于基本无穷小  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小量.

例如,我们已知 (1) 中诸无穷小 (当  $x \rightarrow 0$  时) 是比  $\alpha = x$  更高阶的无穷小,若对这说法仍觉不满意,就可准确地说, (1) 中前面两个是关于  $\alpha = x$  的二阶无穷小,而最后一个是三阶无穷小,因为 [56,4);5),(a) 及 (6)]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{1}{m}x}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

为着要看更复杂的例子,试考察表达式

$$\beta = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x};$$

<sup>①</sup>很易看出,在  $k > 0$  时  $\alpha^k$  将随着  $\alpha$  同时成为无穷小.



在  $x \rightarrow +\infty$  时它将是无穷小, 这是很明显的, 只需把它表示为下面的形状:

$$\beta = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}.$$

继续这变形法, 求得:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}.\end{aligned}$$

令  $\alpha = \frac{1}{x}$ , 现在已不难了解

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{\alpha^{3/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= -\frac{1}{4}. \textcircled{1}\end{aligned}$$

这样,  $\beta$  的阶就是  $\frac{3}{2}$ .

当然, 不要以为任一无穷小  $\beta$  (即使是与一切幂  $\alpha^k$  都能比较的) 都有确定的阶数.

下列有趣例题可以从 [54,4) 及 5)] 内已建立的公式得出 ( $a > 1, k > 0$ ):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0, \quad (2)$$

由此, 首先

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\log_a x} = \infty.$$

现在再把式中的  $x$  换成  $\frac{1}{x}$ , 并在第一式内假定  $a = \frac{1}{c}, 0 < c < 1$ , 则得:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{c^{\frac{1}{x}}}{x^k} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\log_a x}}{x^k} = \infty.$$

这样,  $c^{\frac{1}{x}} (0 < c < 1)$  就成为比一切幂  $x^k (k > 0)$  更高阶的无穷小, 而同时  $\frac{1}{\log_a x} (a > 1)$  成为比一切幂  $x^k$  更低阶的无穷小.

①在此处我们应用  $\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{1+z} = 1$ ; 这在 56,3) 内 (对任意  $m$  次幂的根式) 已经证明了.



**62. 等价无穷小** 今讨论同阶无穷小的一种非常重要的特殊情形.

IV. 无穷小  $\alpha$  与  $\beta$  称为等价无穷小 (记为  $\alpha \sim \beta$ ), 若它们的差  $\gamma = \beta - \alpha$  是比  $\alpha$  及  $\beta$  中的任何一个更高阶的无穷小:

$$\gamma = o(\alpha) \quad \text{及} \quad \gamma = o(\beta).$$

然而, 这只要  $\gamma$  是比这些无穷小之一更高阶就已够了, 因为, 例如, 若  $\gamma$  是比  $\alpha$  更高阶, 则它亦必比  $\beta$  更高阶. 事实上, 由  $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ , 就能推得

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} = \lim \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} = 0.$$

考察两个等价无穷小  $\alpha$  及  $\beta$ , 设  $\beta = \alpha + \gamma$ , 其中  $\gamma = o(\alpha)$ . 若近似地假定  $\beta \doteq \alpha$ <sup>①</sup>, 则当它们的值都在减小时, 不但由这代替所生的绝对误差  $|\gamma|$  趋于零, 而且相对误差  $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$  也趋于零. 换句话说, 近似等式  $\beta \doteq \alpha$  在  $\alpha$  及  $\beta$  的数值充分小时可以有任意大的准确度. 据此, 在近似计算内, 繁复的无穷小可以换成与它等价的简单的无穷小.

今建立一个有用的检定二无穷小的等价性的方法, 在本质上, 它就给出这概念的第二定义, 与前面所给的定义等价:

要使二无穷小  $\alpha$  与  $\beta$  成为等价的, 其充要条件为

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

先设这关系式成立, 于是

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha} - 1 \rightarrow 0.$$

则

$$\gamma = \beta - \alpha = \delta \cdot \alpha$$

就是比  $\alpha$  更高阶的无穷小, 因为

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \delta = 0.$$

反之, 设  $\alpha$  与  $\beta$  是等价的, 即  $\gamma = \beta - \alpha$  是比  $\alpha$  更高阶的无穷小. 由此就有

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{故} \quad \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 1.$$

这就是我们要证明的.

用这检定法, 立即看出, 在  $x \rightarrow 0$  时无穷小  $\sin x$  及  $\operatorname{tg} x$  是与  $x$  等价的, 而  $\sqrt[n]{1+x} - 1$  是与  $\frac{1}{n}x$  等价的. 由此就得出近似公式:

$$\begin{aligned} \sin x &\doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x, \\ \sqrt[n]{1+x} - 1 &\doteq \frac{1}{n}x, \quad \text{特例, } \sqrt{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>符号  $\doteq$  表示近似等式.



等价无穷小的已证明的性质可以应用于确定形如  $\frac{0}{0}$  的不定式, 即确定二无穷小的比式  $\frac{\beta}{\alpha}$  的极限. 这时, 它们中的任一个可以换成任何与它等价的无穷小, 而对于极限的存在及数值并无影响.

事实上, 若  $\bar{\alpha} \sim \alpha$ , 又  $\bar{\beta} \sim \beta$ , 即

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1, \quad \text{又} \quad \lim \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 1,$$

则比式

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\alpha},$$

与比式  $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$  的区别仅是多了两个趋于 1 的因式, 因此与它同时趋于同一的极限.

若能把  $\alpha$  及  $\beta$  选取得足够简单, 则立即可使问题大为简化; 例如,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

由已证明的定理推得: 都与第三者等价的二无穷小是等价的.

**63. 主部的分出** 若选定  $\alpha$  为基本无穷小, 则形如  $c \cdot \alpha^k$  的量自然就认为是最简单的无穷小, 此处  $c$  是常系数, 而  $k > 0$ . 设  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小, 即

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c,$$

式中  $c$  是异于零的有限数, 则

$$\lim \frac{\beta}{c\alpha^k} = 1.$$

而无穷小  $\beta$  与  $c\alpha^k$  就是等价的无穷小:  $\beta \sim c\alpha^k$ .

与给定的无穷小  $\beta$  等价的这个最简单的无穷小  $c\alpha^k$  就称为  $\beta$  的主部 (或主项).

应用上面所建立的结果, 除去已经指出的简单例题以外, 很易分出下列各式的主部:

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

此处  $x \rightarrow 0$ , 而  $\alpha = x$  本身就是基本无穷小.

最后, 若  $x \rightarrow +\infty$  而采用  $\alpha = \frac{1}{x}$  作为基本无穷小, 就有

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \sim -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

一切这些结果再一次导向近似公式.

设  $\beta \sim c\alpha^k$ , 即  $\beta = c\alpha^k + \gamma$ , 式中  $\gamma = o(\alpha^k)$ . 可以想象, 从无穷小  $\gamma$  内再可以分出主部:  $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$ , 式中  $k' > k$ , 而  $\delta = o(\alpha^{k'})$ , 余类推.

例如, 若假定 (设  $x \rightarrow 0$ ):

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1}{n}x + \gamma,$$



则我们已求得 [56,4)]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2},$$

于是  $\gamma$  的主部是  $-\frac{m-1}{2m^2}x^2$ . 由此

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m}x - \frac{m-1}{2m^2}x^2 + o(x^2).$$

特别是,

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

这种从无穷小内逐次分出阶数始终在增高的最简单的无穷小的步骤, 可以继续下去.

在本目内我们仅限于建立主部的普遍概念, 并且只用少数几个例题说明它们. 对刚才所讲如何做出已给无穷小的主部, 以及如何从无穷小内继续分出更高阶的最简单无穷小, 以后我们还要指出系统的方法 [参看 104,124].

末了, 再讨论这样的问题: 若已知二无穷小  $\beta$  及  $\gamma$  的主部是  $c\alpha^k$  及  $c'\alpha^{k'}$ , 则关于其和  $\beta + \gamma$  的主部能说些什么?

在  $k \neq k'$  时, 它的主部显然就是  $c\alpha^k$  及  $c'\alpha^{k'}$  两项中指数较小的那一项. 今设  $k = k'$ , 则  $\beta + \gamma$  的主部就是  $(c + c')\alpha^k$ ——唯需假定  $c + c' \neq 0$ . 但当两个主部互相对消的情形, 则和  $\beta + \gamma$  将是比任一加数更高阶的无穷小.

例如, 在  $x \rightarrow 0$  时, 对于无穷小

$$\beta = \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad \text{及} \quad \gamma = \sqrt{1-x} - 1 \sim -\frac{1}{2}x$$

就是如此. 若再分出它们以后的主部:

$$\beta = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2), \quad \gamma = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

则很明显的, 有

$$\beta + \gamma = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2),$$

于是  $\beta + \gamma$  就是二阶无穷小, 而它的主部等于  $-\frac{1}{4}x^2$ .

**64. 应用题** 现在举几个应用问题来说明以上讲过的这些.

1) 设用长  $l$  米的尺测量某一地方的直线距离. 因为实际上没有把尺准确地沿着测量的直线放置, 以致测量的结果显得比真实的长度大了一些. 试就最坏的情形而论, 假设在测量时把尺放成锯齿形, 就是说, 它的两端交迭地忽而偏在直线的一侧忽而偏在另一侧, 其离开直线的距离为  $\lambda$  米 (图 25). 今试估计其误差.

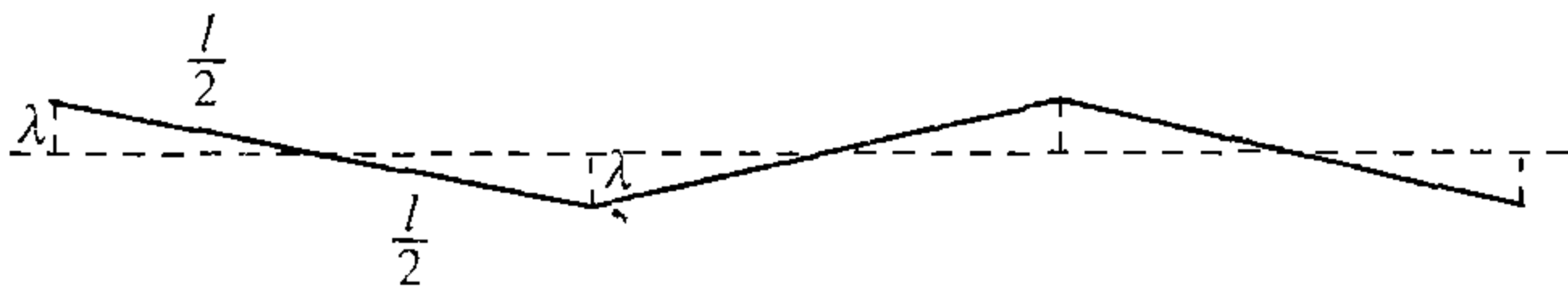


图 25



在尺每放下一次时所发生的绝对误差等于尺的长度  $l$  与它在所测量的直线上的投影的差; 其投影是:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \lambda^2} = l\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

应用近似公式

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x.$$

于  $x = -\frac{4\lambda^2}{l^2}$  的场合 (由于  $\lambda$  比  $l$  小得多, 所以这样做是可以的), 可以把投影的长度换成下式:

$$l\left(1 - \frac{2\lambda^2}{l^2}\right) = l - \frac{2\lambda^2}{l}.$$

因此, 绝对误差是  $\frac{2\lambda^2}{l}$ , 而相对误差显然是  $\frac{2\lambda^2}{l^2}$ . 这相对误差并不随所量距离的长短而改变.

若限制相对误差不能大于  $\delta$ , 即应有  $\frac{2\lambda^2}{l^2} < \delta$ , 则必须  $\lambda < l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$ .

例如, 在用 2 米的尺 ( $l = 2$ ) 测量时, 要达到 0.001 的相对准确度, 只要偏差  $\lambda$  不超过  $2\sqrt{0.0005} \doteq 0.045$  米 = 4.5 厘米就够了.

2) 今求一开接皮带的长度  $l$  的公式. 它套在一对滑轮上, 它们的半径各为  $R$  及  $r$ , 两中心之间的距离为  $d$  (图 26).

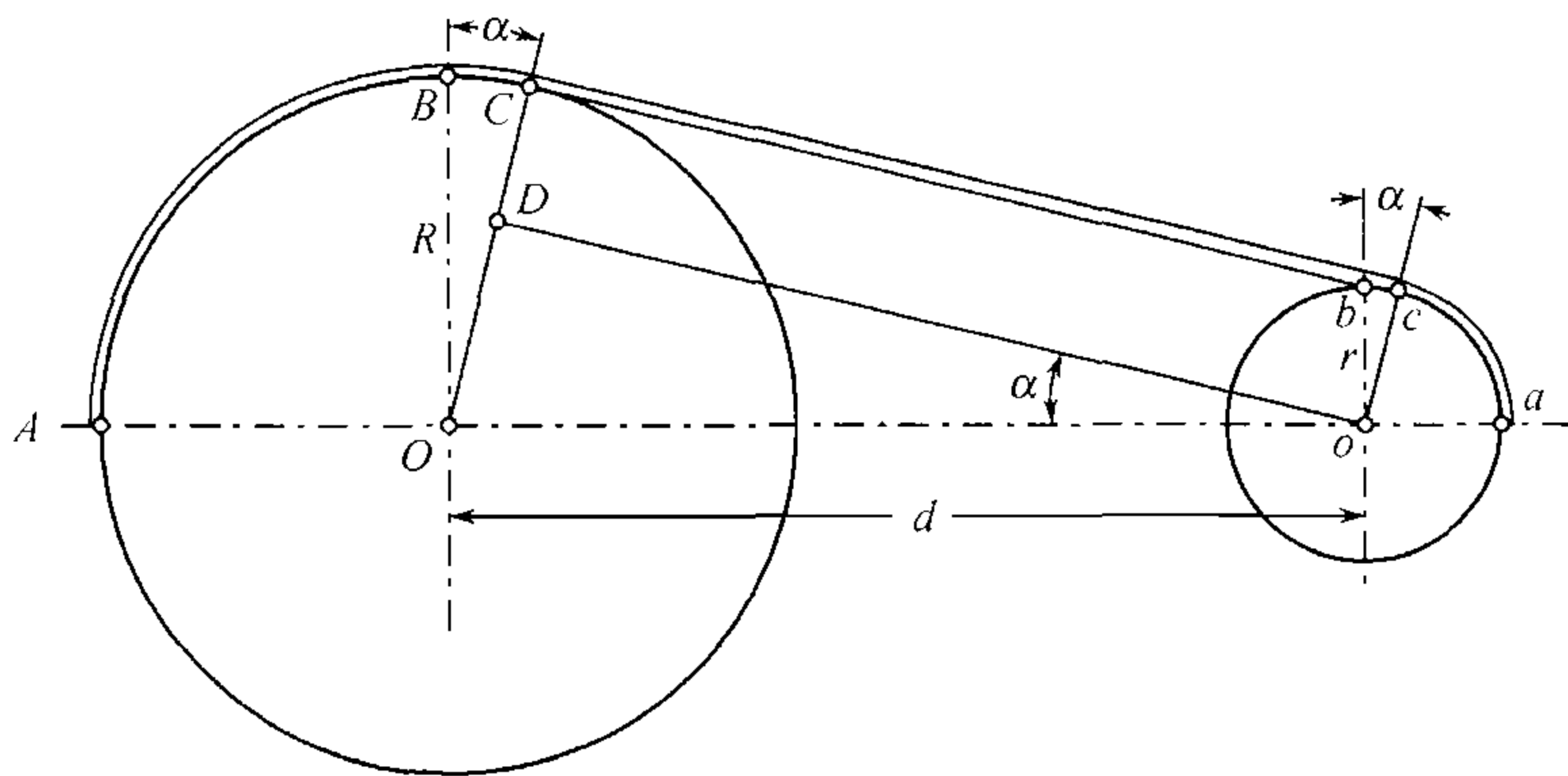


图 26

由图知

$$\frac{l}{2} = \widehat{AC} + Cc + \widehat{ca}.$$

但  $\widehat{AC} = R\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ ,  $\widehat{ca} = r\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ , 此处用  $a$  表示相等的角  $\angle BOC$  及  $\angle boc$ ; 而从  $\triangle ODO$  内

$$Cc = Do = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}.$$

这样

$$l = \pi(R + r) + 2a(R - r) + 2\sqrt{d^2 - (R - r)^2}.$$

要化简这公式, 回忆

$$\alpha \doteq \sin \alpha = \frac{OD}{Oo} = \frac{R - r}{d},$$



但须假定  $R - r$  对于  $d$  来说是很微小的. 在同一假定下,

$$\sqrt{d^2 - (R - r)^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{R - r}{d}\right)^2} \doteq d\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R - r}{d}\right)^2\right].$$

把这些数值代入并整理化简就得出最后的公式:

$$l \doteq \pi(R + r) + 2d + \frac{(R - r)^2}{d}.$$

3) 在分割圆弧时, 下面的应用题是有价值的: 求圆弧  $ABC$  内的矢  $f = DB$  与其半弧  $AB_1B$  内的矢  $f_1 = D_1B_1$  的比值 (图 27).

若令圆的半径等于  $r$ ,  $\angle AOB = \varphi$ , 则  $\angle AOB_1 = \frac{\varphi}{2}$   
又

$$\begin{aligned} f &= DB = r(1 - \cos \varphi), \\ f_1 &= r(1 - \cos \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

这样, 所求的比值等于

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

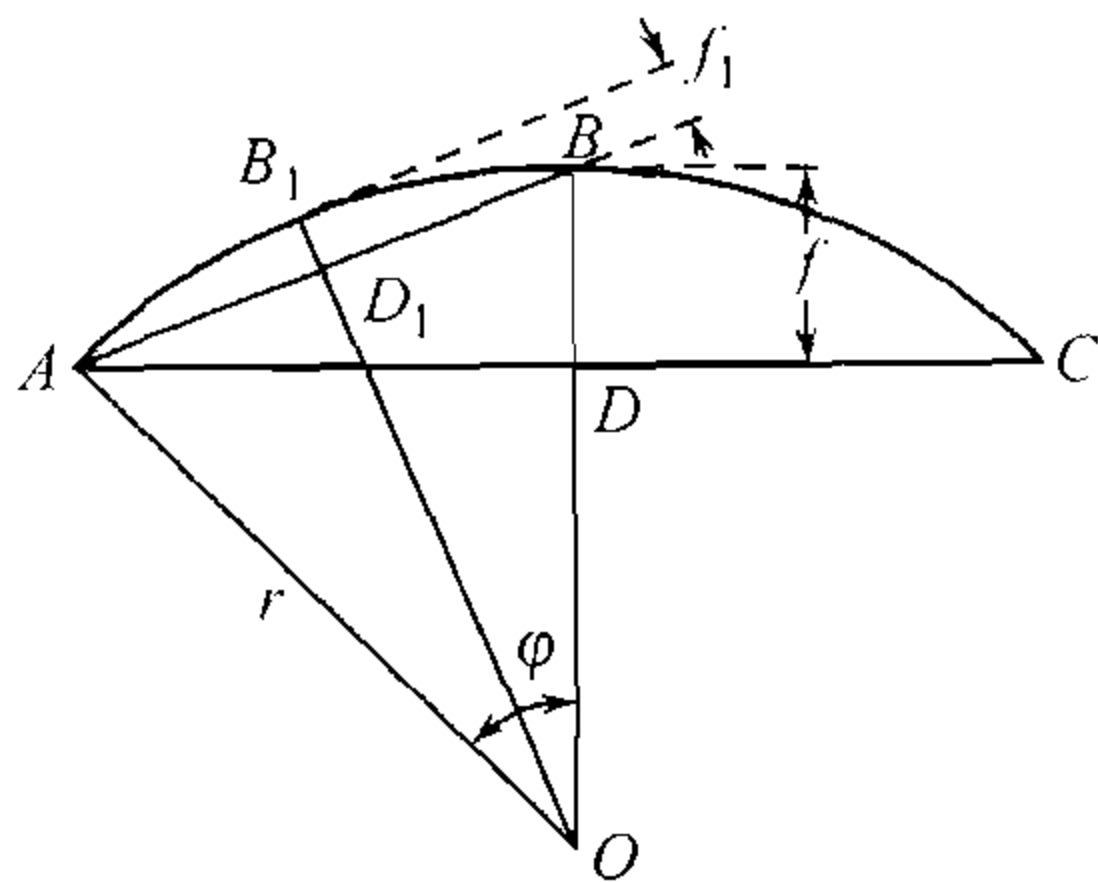


图 27

这式子太嫌繁复, 在实用上很不便. 我们将求出它在  $\varphi \rightarrow 0$  时的极限 (因为对于充分小的  $\varphi$ , 可以用这式子的极限作为它的近似值). 为此目的, 就将分子及分母分别用它们的主部代入, 立即求得:

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2} = 4.$$

这样, 当弧对应于不大的中心角时, 可以近似地认为, 弧的矢是半弧的矢的四倍. 这就使我们得以逐次地找出一弧的许多中间点, 只要弧的两端及其中点已知时.

**65. 无穷大的分阶** 注意, 对于无穷大量也可以进行相似的分阶如同在 60 内一样, 我们将所考察的诸无穷大量当作是同一变量  $x$  的函数, 当  $x$  趋于  $a$  时它们趋于  $\infty$ .

I. 二无穷大  $y$  及  $z$  称为是同阶的无穷大, 若它们的比式  $\frac{z}{y}$  ( $\frac{y}{z}$  也如此) 有异于零的有限极限.

II. 但若比式  $\frac{z}{y}$  趋于  $\infty$  (而比式  $\frac{y}{z}$  趋于零), 则称  $z$  为比  $y$  更高阶的无穷大, 而同时  $y$  称为比  $z$  更低阶的无穷大.

当比式  $\frac{z}{y}$  不趋于任何极限时, 无穷大  $y$  与  $z$  就是不能比较的.

在同时考察一系列的无穷大量时, 可选取其中之一 (就说是  $y$ ) 当作基本无穷大, 而其余的无穷大就与它的幂相比较. 例如, 若 (如我们上面曾假定的) 它们全部都是



$x$  的函数, 且当  $x \rightarrow a$  时趋于  $\infty$ , 那么, 通常若  $a = \pm\infty$  就取  $|x|$  本身, 因而  $a$  为有限数时就取  $\frac{1}{|x-a|}$  作为基本无穷大.

III. 无穷大  $z$  称为  $k$  阶的无穷大 (关于基本无穷大  $y$ ), 如果  $z$  与  $y^k$  是同阶的话, 即若比式  $\frac{z}{y^k}$  有异于零的有限极限.

我们在这里不再引入例题, 因为把前面所考察过的无穷小量换成它们的倒数, 就能很容易地得出这种例题. 我们要提到的仅是: 当  $x \rightarrow +\infty$  时  $a^x (a > 1)$  是比任何幂  $x^k$  更高阶的无穷大 ( $k$  是正指数), 而  $\log_a x (a > 1)$  是比任何  $x^k$  更低阶的无穷大, 这是从 [61 公式 (2)] 推得的.

## §4. 函数的连续性及间断

**66. 函数在一点处的连续性的定义** 与函数的极限概念密切联系着的是数学分析中另一重要概念 —— 函数的连续性的概念.

考察定义在以  $x_0$  为聚点的某个区域  $\mathcal{X} = \{x\}$  内的函数  $f(x)$ ; 并设点  $x_0$  本身属于  $\mathcal{X}$ , 于是在这点函数有确定的数值  $f(x_0)$ .

当建立函数在  $x$  趋于  $x_0$  时的极限概念 [52, 53]

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

时, 曾不止一次地着重指出, 变数  $x$  并不取数值  $x_0$ ; 这数值甚至可以不属于函数的定义域, 即使它属于这定义域, 但在研究上述极限时数值  $f(x_0)$  也不考虑在内.

然而, 正是当

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

的情形才有着特殊的重要性. 常说, 函数  $f(x)$  当  $x = x_0$  时 (或在点  $x = x_0$  处) 是连续的, 只要关系式 (1) 能成立; 又若它不成立, 就说当  $x$  取这数值时 (或在这点) 函数有间断<sup>①</sup>.

当函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处为连续の場合 (显然, 只限于这种场合) 若要计算  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 我们就可以不管  $x$  在本身趋向于  $x_0$  的过程中是否特殊地取过数值  $x_0$ .

函数的连续性的定义也可以用其他的术语来叙述. 由数值  $x_0$  过渡到旁的数值  $x$ , 可以想象为给数值  $x_0$  加上一个增量  $\Delta x_0 = x - x_0$ <sup>②</sup>. 函数的新值  $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x_0)$  与原值  $y_0 = f(x_0)$  相差一个增量

$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

<sup>①</sup> 这术语是与曲线的连续及间断的直观看法有关的; 若函数的图像是连续的, 函数就是连续的; 函数的间断点就对应于图像上的间断点. 然而事实上, 曲线的连续概念本身就需要有所根据, 而作为根据的最简单的方法, 刚好就是函数的连续性!

<sup>②</sup> 在分析上照例把量  $x, y, t, \dots$  的增量各记成  $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \dots$ . 这些记法必须看作是整个符号, 不要把  $\Delta$  与  $x$  及  $y$  等拆开.



要使函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处是连续的, 其充要条件是: 在这点函数的增量  $\Delta y_0$  与自变数的增量  $\Delta x_0$  一同趋向于零. 换句话说: 连续函数的特性就是, 对应于变元的无穷小增量, 函数的增量也是无穷小.

回到基本定义 (1), 试用“ $\varepsilon - \delta$  的语言” [52] 显示它的内容. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的连续性的意义可归结如下: 对于不论怎样的数  $\varepsilon > 0$  必能求出数  $\delta > 0$ , 使由

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{可以引出} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这样, 最后的不等式在点  $x_0$  的充分小的邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内就应该成立.

最后, 用“序列的语言”表达连续性: 在  $\mathcal{X}$  内任意取收敛于  $x_0$  的  $x$  的序列:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

则对应的函数值的序列

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

必收敛于  $f(x_0)$ .

**附注** 设点  $x = x_0$  是函数  $f(x)$  的定义区域  $\mathcal{X}$  的聚点, 但本身不属于  $\mathcal{X}$ , 于是函数在这点是没有定义的. 然若存在着有限极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

那么只要补充函数的定义, 令  $f(x_0)$  等于这极限,  $f(x)$  就在  $x = x_0$  处是连续的了. 在类似于此的情形我们以后经常就是这样来理解的.

反之, 若所说的极限并不存在, 那么即使函数在这一点  $x = x_0$  没有确定也好, 我们总是说, 函数在这一点遭受间断: 这时不论函数在  $x = x_0$  补取什么数值, 它在此处还是有间断!

我们以后通常要考察在区间  $\mathcal{X}$  内确定的函数; 区间中的一切点都是它的聚点, 于是对于其中的任何一点都可以提出有关连续性的问题. 为着讲述的简化, 我们约定, 若函数在区间  $\mathcal{X}$  内的每一点都是连续的, 就说函数在区间  $\mathcal{X}$  内是连续的.

**67. 连续函数的算术运算** 在列举连续函数的例题以前, 先建立下面的简单的命题, 它使我们极容易地扩大了连续函数的数目.

**定理** 若二函数  $f(x)$  及  $g(x)$  是在同一区间  $\mathcal{X}$  内定义着的, 且都在点  $x_0$  处连续, 则函数

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在那一点连续, 最后一式须附以条件  $g(x_0) \neq 0$ .

这可以直接从各有极限的二函数的和, 差, 积及商的极限定量 [55] 推得.



且讨论二函数的商作为例子. 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在点  $x_0$  处为连续的假定等于说存在着等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

但由此依商的极限的定理 (因为分母的极限不是零), 就有:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

而这等式亦就表示函数  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在点  $x_0$  处是连续的.

**68. 连续函数的例题** 1° 有理整函数及分式函数 函数  $f(x) = x$  显然在全区间  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的: 若  $x_n \rightarrow x_0$ , 则  $f(x_n) = x_n \rightarrow x_0 = f(x_0)$ . 完全与此相同. 恒等于常数的函数亦是连续的.

由此, 根据前段的定理, 已可推得任何单项式

$$ax^m = \overbrace{a \cdot x \cdot x \cdots x}^{m \text{次}}$$

的连续性, 因为它可视为连续函数的积. 再者多项式 (有理整函数)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

可视为连续函数的和, 所以也是连续的. 在上面所讲的各场合连续的范围都是在全区间  $(-\infty, +\infty)$  内.

最后, 两多项式的商 (有理分式函数):

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

显然亦是同样地在任一数值  $x$  时是连续的, 但须除去使分母等于零的那些数值.

2° 指数函数 我们将证明指数函数  $a^x$  对于任何数值  $x = x_0$  都是连续的, 换句话说, 即证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

(同时只需限于  $a > 1$  时就够了.)

我们在 54.6) 内已看到

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1.$$

因为函数  $a^0$  的数值恰好是 1, 所以这等式就表示着指数函数在点  $x = 0$  处是连续的. 由此已很容易转而证明它在任何点都是连续的; 实际上,

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$



但当  $x \rightarrow x_0$  时, 显然  $x - x_0 \rightarrow 0$ , 于是, 依照已证明的,

$$a^{x-x_0} \rightarrow 1, \quad \text{因而} \quad a^x \rightarrow a^{x_0},$$

此即需证者.

3° 双曲函数 依已经讲过的定理, 它们的连续性可以直接从已证明的指数函数的连续性中推得, 因为它们全是函数  $e^x$  的有理表达式.

4° 三角函数 先讨论函数  $\sin x$ . 它也是在任何数值  $x = x_0$  时是连续的, 即有等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

要证明它, 注意到在 54,(9) 内 (对于  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) 已建立的不等式

$$\sin x < x,$$

从它很易推得不等式

$$|\sin x| \leq |x|,$$

对于一切数值  $x$  都是真实的 (当  $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1$  时, 立刻由  $|\sin x| \leq 1$  推得). 其次有

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2}, \end{aligned}$$

即

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|, \quad (2)$$

不论  $x$  及  $x_0$  是怎样的数值.

若给定任何  $\varepsilon > 0$ , 则令  $\delta = \varepsilon$ ; 当  $|x - x_0| < \delta$  时就有

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

这就证明了  $\sin x$  的连续性. 类似于此, 可以确定函数  $\cos x$  同样对于任何数值  $x$  也是连续的.

由此, 依前面一目的定理, 已可推出函数

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$$

的连续性. 但对于前面二函数要除去使  $\cos x$  等于 0 的形如  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$  的数值; 对于后面二函数要除去使  $\sin x$  等于 0 的形如  $k\pi$  的数值.



**69. 单侧连续·间断的分类** 上面我们用等式 (1) 定义了函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的连续性的概念. 在这时, 要计算极限 (1), 我们既可以使  $x$  从右方, 也可以使  $x$  从左方接近于  $x_0$ . 今将建立函数在所给点为单侧连续或单侧间断的概念.

常说: 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处是右 (左) 连续的, 只需能满足极限关系式:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0 + 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \\ [f(x_0 - 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若这关系式内的一式或另一式并不成立, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有右间断或左间断.

仅论及函数的定义区间  $\mathcal{X}$  的左 (右) 端<sup>①</sup>时, 显然只能说右 (左) 连续或右 (左) 间断. 又若  $x_0$  是区间  $\mathcal{X}$  的内点, 即并不重合于某一端点, 则若要使等式 (1), 即函数在点  $x_0$  为连续的常义表达式成立, 其充要条件为等于 (3) 的两式同时成立 [52]. 换言之, 说函数在点  $x_0$  处连续就等于说它在这一点同时是右连续及左连续.

让我们来详细地讨论函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处之右连续或右间断的问题. 假定函数  $f(x)$  在  $x_0$  的右方某区间  $[x_0, x_0 + h](h > 0)$  内是有意义的, 我们看到, 连续之充要条件为: 首先, 当  $x$  从右趋向于  $x_0$  时函数  $f(x)$  的极限  $f(x_0 + 0)$  要存在, 且第二, 这极限应等于函数在点  $x_0$  处的数值  $f(x_0)$ .

因此, 在怎样的情况下, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处出现右间断是很容易认清的. 可能碰到, 即使有限的极限  $f(x_0 + 0)$  存在, 但它不等于数值  $f(x_0)$ , 这种间断称为普通间断或第一类间断<sup>②</sup>. 但亦可能碰到, 极限  $f(x_0 + 0)$  是无穷或根本不存在, 则称为第二类间断.

在下一目内我们将引入这些间断的例子.

**附注** 若函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处没有意义 (参阅 66 内的附注), 则函数在这点要恢复连续性仅当有限极限  $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$  两者都存在并相等时才有可能.

若这两极限之一是无穷或根本不存在, 则说在对应的那一方有第二类间断存在.

**70. 间断函数的例题** 1) 考察函数  $y = E(x)$  (它的图像表示在图 8 中). 若  $x_0$  不是整数, 又  $E(x_0) = m$ . 即  $m < x_0 < m + 1$ , 则对于在区间  $(m, m + 1)$  内的一切  $x$  的数值都有  $E(x) = m$ , 由此显然可知函数在  $x_0$  是连续的.

但若  $x_0$  等于整数  $m$ , 情形就不同了. 函数在这点为右连续, 因为在  $x = m$  的右方, 即对  $(m, m + 1)$  中的  $x$  值, 有  $E(x) = m$ , 于是  $E(m + 0) = m = E(m)$ . 反之, 在  $x = m$  的左方, 对于在  $(m - 1, m)$  内的  $x$  数值, 显然有  $E(x) = m - 1$ ; 由此, 又有  $E(m - 0) = m - 1$ , 它不等于数值  $E(m)$ , 因此在点  $x = m$  的左方函数有普通间断或跃度!

<sup>①</sup>假定这端点是有限的数.

<sup>②</sup>在这场合也说函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的右方有跃度, 它在数量上等于  $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ .



2) 取在 46 内已考察过的函数:

$$y = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

(它的图像画在图 28 中). 它在点  $x = \pm 1$  处有普通右间断和左间断, 因为:

$$f(\pm 1) = 0, \quad f(-1 - 0) = f(1 + 0) = 1$$

$$f(-1 + 0) = f(1 - 0) = -1,$$

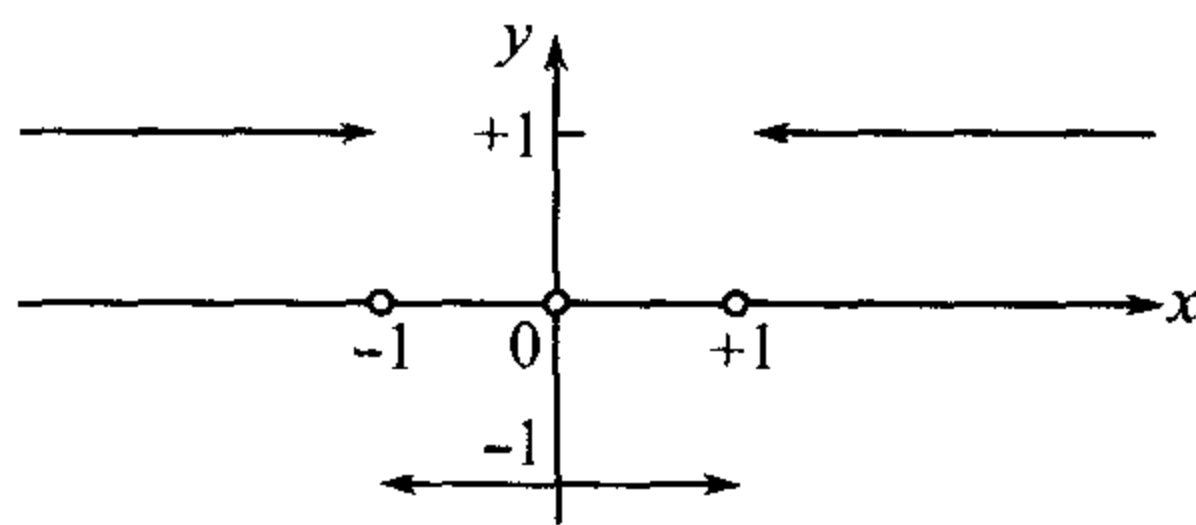


图 28

3) 对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (x \neq 0),$$

从左右两方看来点  $x = 0$  都是第二类间断点; 就是在这点函数从右方或左方都趋于  $\infty$ :

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

4) 54,9) 内已考察过的函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

在点  $x = 0$  处有第二类的两方间断点, 因为不论  $x$  从右或者从左趋向于 0, 这函数的极限都不存在.

5) 反之, 若取函数 [54,10)]

$$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

我们已看到, 它的极限存在,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

因此, 根据 66 的附注, 令  $f(0) = 0$ , 我们就恢复了函数在  $x = 0$  的连续性.

6) 当  $x \neq 0$  时用等式:

$$f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

定义二函数, 此外, 又令  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ .

对于第一个函数有

$$f_1(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} e^z = +\infty,$$

$$f_1(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0.$$

于是在点  $x = 0$  有第二类右方间断, 但却是左方连续. 对于第二个函数则有

$$f_2(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2},$$

因此在点  $x = 0$  的两方都有跃度. 这些函数的图像画在图 29 及 30 中.



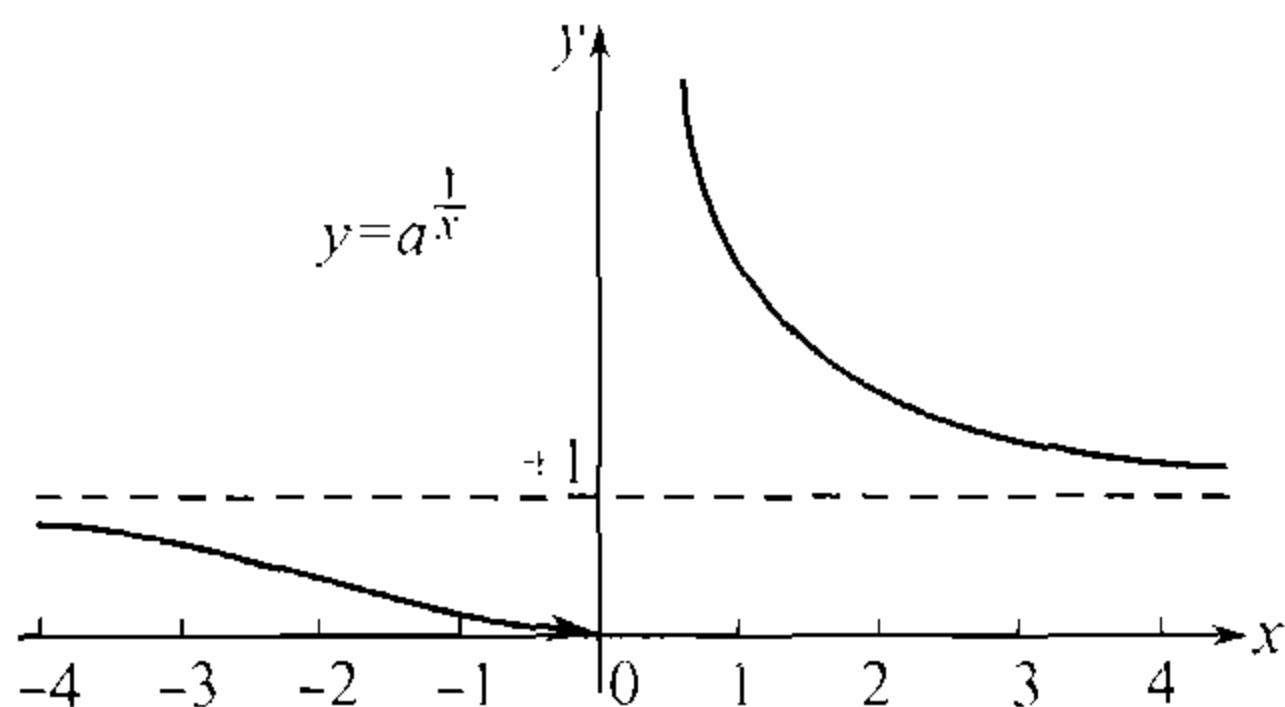


图 29

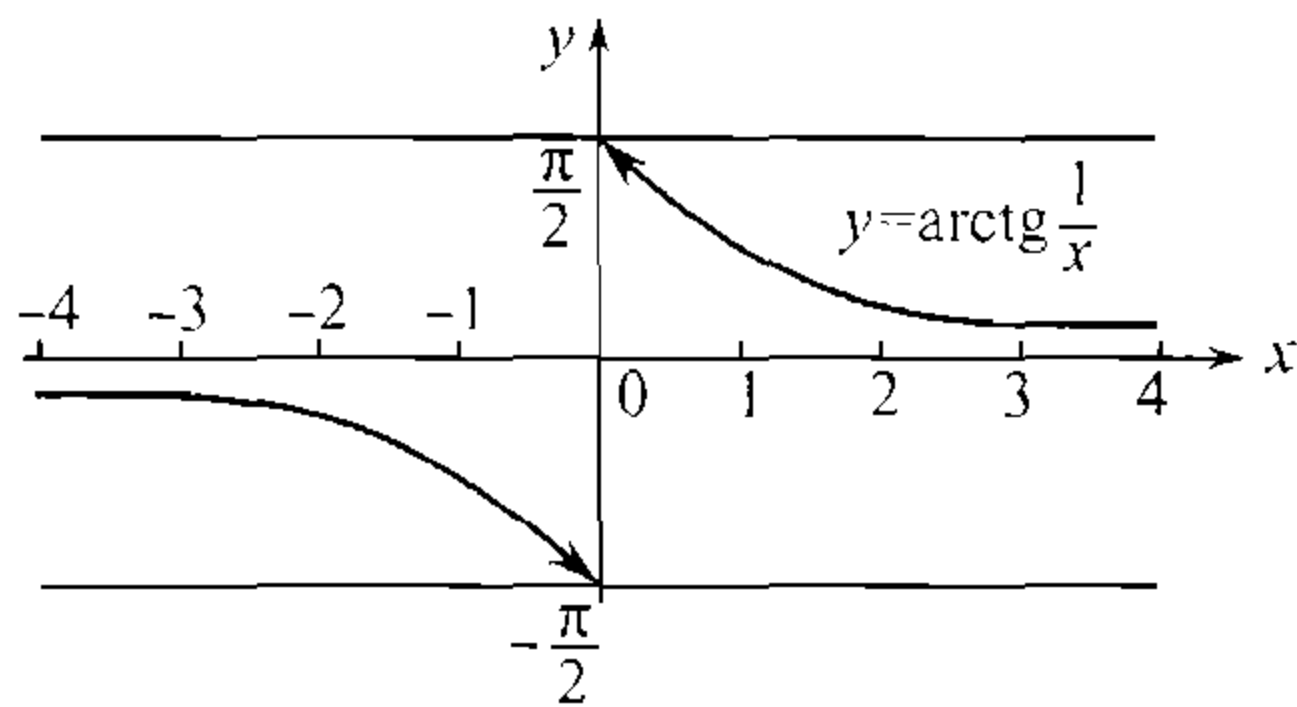


图 30

7) 再回想狄利克雷函数 [46]:

$$\begin{aligned}\chi(x) &= 1, \text{ 若 } x \text{ 是有理数,} \\ \chi(x) &= 0, \text{ 若 } x \text{ 是无理数.}\end{aligned}$$

因为在有理点的任意近处总有无理点, 反过来也如此, 所以不论  $x_0$  是区间  $(-\infty, +\infty)$  内怎样的点, 当  $x \rightarrow x_0$  时  $\chi(x)$  没有极限存在, 因为函数在任一点处有第二类的两方间断.

8) 最后, 在区间  $[0, 1]$  内定义函数  $f(x)$ : 若  $x$  是有理数而表示为不可通约分数  $\frac{p}{q}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{q}$ ; 对于无理数  $x$  则令  $f(x) = 0$ ①. 我们可以肯定, 函数在任一有理点有普通间断, 同时在任一无理点它是连续的.

事实上, 设  $x_0$  是所考察的区间内的任意一点. 若指定任意数  $\varepsilon > 0$ , 则不超过  $\frac{1}{\varepsilon}$  的自然数  $q$  仅只有有限个数存在, 意即在区间内只能找出有限个有理点  $\frac{p}{q}$  使  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$ . 点  $x_0$  可以用不含任一个这种点在内 (或许要除去点  $x_0$  本身) 的邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  来包围住. 那么, 只要  $|x - x_0| < \delta$  ( $x \neq x_0$ ), 不论  $x$  是否有理数, 在任何情形常有  $|f(x)| < \varepsilon$ . 意即, 对于任意点  $x_0$  存在着

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若  $x_0$  是无理点, 则又有  $f(x_0) = 0$ , 即函数在这点为连续; 又若  $x_0$  是有理点, 则  $f(x_0)$  异于 0. 故有两方的普通间断.

**71. 单调函数的连续性及间断** 考察函数  $f(x)$ , 当  $x$  在区间  $\mathcal{X}$ ②内变动时它单调增大 (减小) 着, 可能是广义的 [57]. 关于这种函数有下面的定理:

1° 单调增 (减) 函数  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内若有间断, 只能有第一种间断, 即跃度.

取区间  $\mathcal{X}$  内的任意点  $x_0$ , 并设它不是这区间的左端. 考察在  $x_0$  左方的部分区间. 并应用 57 内关于单调函数的极限定理, 由于  $x < x_0$  时, 显然  $f(x) \leq f(x_0)$ , 因此存在着有限的极限

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0).$$

若它重合于数值  $f(x_0)$ , 则函数在点  $x_0$  为左方连续; 在相反的场所, 函数有跃度.

①这函数是黎曼 (B.Riemann) 考察过的.

②这区间可以是有限的, 也可以是无穷的, 闭的或开的 (一端开或两端都开).



同时类似地可证函数在区间  $\mathcal{X}$  内的任一点  $x_0$  (不是区间的右端) 为右方连续或跃度.

用已证明的定理很容易建立在实用上极为方便的单调函数的连续性的检定法:

2° 若在区间  $\mathcal{X}$  内为单调增大 (减小) 的函数  $f(x)$  的数值都包含在区间  $\mathcal{Y}$  内, 且把它全部填满 (使  $\mathcal{Y}$  内的每一数值  $y$  至少有一次被取作函数数值), 则这函数在  $\mathcal{X}$  内是连续的<sup>①</sup>.

试设函数  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内的任何一点  $x_0$  处有间断, 例如在左方; 我们已看到, 这间断只能跃度. 在这场合存在着极限  $f(x_0 - 0)$ , 但它小于数值  $f(x_0)$ . 因为当  $x < x_0$  时必有  $f(x) \leq f(x_0 - 0)$ , 而当  $x > x_0$  时显然有  $f(x) \geq f(x_0)$ , 所以函数不可能取属于区间  $\mathcal{Y}$  而位于  $f(x_0 - 0)$  与  $f(x_0)$  之间的数值  $y$ , 这就违反了定理的条件. 所以, 函数  $f(x)$  事实上不会有间断.

在下一目内读者将遇到一系列的例题, 它们是这有用的定理的应用.

**72. 初等函数的连续性** 一系列初等函数的连续性已在 68 内用例题的形式证明了. 现再应用前一目的定理 2, 首先, 很容易重新建立函数  $a^x$  或  $\sin x$  的连续性.

当  $x$  在区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内变动时函数  $y = a^x (a > 1)$  单调增大. 它的数值全是正的, 且充满全区间  $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$ , 这由对数  $x = \log_a y$  对于任何  $y > 0$  都存在 [20] 的事实立刻可知. 因此, 指数函数在任何  $x$  的数值时是连续的.

类似于此, 当  $x$  在区间  $\mathcal{X} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  内变动时函数  $y = \sin x$  的连续性可由它在这区间内的单调性, 以及它取到  $-1$  与  $+1$  之间每一数值的事实 (几何上确定的事实) 立刻推得. 论及任意形如

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的区间时, 亦有同样的话可说.

但是使我们更感兴趣的是, 新的结果也可应用前一目的定理很容易地得出. 我们现在要继续列举在 68 已开始的基本初等函数.

5° 对数函数  $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ . 限于  $a > 1$  的场合, 我们就看到, 当  $x$  在区间  $\mathcal{X} = (0, +\infty)$  内变动时这函数是增函数. 在这时它显然也取到区间  $\mathcal{Y} = (-\infty, +\infty)$  内的任何数值  $y$ , 就是适合  $x = a^y$  的  $y$ . 由此已看出它的连续性.

6° 幂函数  $y = x^\mu (\mu \geq 0)$ . 当  $x$  由 0 增大至  $+\infty$  时, 若  $\mu > 0$ , 则函数增大着, 若  $\mu < 0$ , 则函数减小着. 在这时它取到任何正的数值  $y$  (适合  $x = y^{\frac{1}{\mu}}$ ), 因此, 它也是连续的<sup>②</sup>.

<sup>①</sup>  $f(x)$  的数值完全填满区间  $\mathcal{Y}$  在这里是单调函数连续的充分条件; 以后 [82] 我们将证明它也是必要条件.

<sup>②</sup> 若  $\mu > 0$ , 则数值 0 既包括在  $x$  的变动区间内, 也包括在  $y$  的变动区间内; 当  $\mu < 0$  时数值 0 不包括在内. 再则, 若  $\mu$  是整数  $\pm n$  或带有奇数分母的分数  $\pm \frac{q}{p}$ , 则也可以在  $x < 0$  时考察  $x^\mu$ , 这时它的连续性可以类似地证明.



## 7° 反三角函数

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

首二函数在区间  $[-1, +1]$  内是连续的, 而末二函数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的. 证明留给读者.

这样, 可以总括起来说, 基本初等函数在一切使它们有意义的点(即在它们的自然定义域内)都是连续的.

**73. 连续函数的叠置** 将已知的连续函数加以叠置 [51], 可以构成更多的连续函数.

这是以下面的定理为基础.

**定理** 设函数  $\varphi(y)$  定义于区间  $\mathcal{Y}$  之内, 而函数  $f(x)$  定义于区间  $\mathcal{X}$  之内, 并且当  $x$  在  $\mathcal{X}$  内变动时后一函数的数值永不越出  $\mathcal{Y}$  的范围. 若  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内的一点  $x_0$  是连续的, 又  $\varphi(y)$  在  $\mathcal{Y}$  内与它对应的点  $y_0 = f(x_0)$  是连续的, 则复合函数  $\varphi(f(x))$  在点  $x_0$  亦是连续的.

**证明** 指定任意数  $\varepsilon > 0$ . 因为  $\varphi(y)$  在  $y = y_0$  为连续, 故依  $\varepsilon$  必能求出  $\sigma > 0$ , 使

$$\text{由 } |y - y_0| < \sigma \text{ 可以推得 } |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

另一方面, 由于  $f(x)$  在  $x = x_0$  为连续, 依  $\sigma$  必能求出  $\delta > 0$ , 使

$$\text{由 } |x - x_0| < \delta \text{ 可以推得 } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma.$$

依原来选定  $\delta$  的方法, 由此再推得

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon.$$

这样, 函数  $\varphi(f(x))$  在点  $x_0$  处的连续性已用“ $\varepsilon - \delta$  的语言”证明了.

例如, 若将幂函数  $x^\mu (x > 0)$  表示为复合函数的形式, 如:

$$x^\mu = e^{\mu \ln x}$$

它由叠置对数函数及指数函数而得, 则由后二函数的连续性已可推得幂函数的连续性.

**74. 一个函数方程的解** 为着要使下段的叙述简化起见, 今研究下面的问题 (它本身也很有趣).

求对区间  $(-\infty, +\infty)$  内的任何  $x$  及  $y$  常能满足条件

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\text{A})$$



的一切连续函数  $f(x)$ .

方程 (A) 就是所谓函数方程的最简单的例子, 它表述出所求函数的某一性质, 依着这性质应能求出那个未知函数. 我们的任务是要求出方程 (A) 的一切连续解.

很易看出, 线性齐次函数

$$f(x) = cx \quad (c = \text{常数}) \quad (\text{a})$$

满足这方程:

$$c(x+y) = cx + cy.$$

但现在的问题却是: 它是否就是具有性质 (A) 的唯一的连续函数?

为着要证明确实是这样, 我们先假定某一连续函数  $f(x)$  满足方程 (A), 然后指出那时它必须具有形式 (a).

首先, 用数学归纳法很易推广关系式 (A) 至任意个 ( $= n$ ) 加数的情形:

$$\overbrace{f(x+y+\cdots+z)}^n = f(x) + f(y) + \cdots + f(z). \quad (4)$$

实际上, 若假定它在任何  $n \geq 2$  项相加时为真, 则它在  $n+1$  项相加时亦为真:

$$\overbrace{f(x+y+\cdots+z+u)}^n = \overbrace{f(x+y+\cdots+z)}^n + f(u) = [f(x) + f(y) + \cdots + f(z)] + f(u).$$

假定在 (4) 内令  $x = y = \cdots = z$ , 就得出:

$$f(nx) = n \cdot f(x). \quad (5)$$

在此处把  $x$  换成  $\frac{1}{n}x$ , 则得

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x),$$

而后, 若把  $x$  换成  $mx$  ( $m$  是自然数) 并应用前面的等式, 就得出关系式

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x). \quad (6)$$

今在基本方程 (A) 中令  $x = y = 0$ , 则得

$$f(0) = 2f(0), \quad \text{于是} \quad f(0) = 0. \quad (7)$$

若又取  $y = -x$ , 则利用 (7), 就得出:

$$f(-x) = -f(x),$$

因此函数  $f(x)$  在  $x$  变号时亦变号. 然后, 由 (5) 及 (6) 很易引出:

$$f(-nx) = -f(nx) = -n \cdot f(x). \quad (8)$$

而类似地可证成立更一般的式子:

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x). \quad (9)$$



所得的关系式 (5)~(9) 可以联合成为等式

$$f(rx) = r \cdot f(x),$$

在任何实数值  $x$  时, 不论  $r$  是怎样的有理数, 它总是真实的.

若在这里取  $x = 1$ , 并用  $c$  表示  $f(1)$ , 则得

$$f(r) = cr.$$

这样, 就本质上说来, 我们已确定函数的形式  $f$ , 但迄今仅适用于变元的有理数值. 并且迄今为止, 我们仅应用函数满足条件 (A) 这一事实, 而并未考虑它的连续性.

今设  $\rho$  是变元的任意无理数值. 很易做一趋向于它的有理数序列

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

(例如, 可以取对应于  $\rho$  的无穷十进小数的诸段). 我们立即看到

$$f(r_n) = cr_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由上式求  $n \rightarrow +\infty$  时的极限; 在右方我们得到  $c\rho$ , 而在左方, 由于函数  $f$  的连续性的假定, 得

$$\lim f(r_n) = f(\rho),$$

于是, 最后

$$f(\rho) = c\rho.$$

这样, 实际上, 我们的函数对于变元的一切实数值都可借公式 (a) 来表示. 这公式就给出方程 (A) 的最普遍的连续函数解.

### 75. 指数函数、对数函数及幂函数的函数特性

1° 如果

$$f(x) = a^x \quad (a > 0), \tag{6}$$

则对于两个不论是怎样的实数  $x$  及  $y$ , 恒有等式

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{B}$$

成立, 它们表示着大家都知道的乘幂法则:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

事实上, 函数的性质 (B) 再加上连续性就完全确定了指函数. 再准确地说:

指数函数(若除去恒等于 0 的函数以外)是确定于全区间  $(-\infty, +\infty)$  内, 并且满足条件 (B) 的唯一连续函数.

换句话说, 公式 (6)——除去已指出的例外——给出函数方程 (B) 的最普遍的连续函数解.

为着证明, 我们考察任意确定于  $(-\infty, +\infty)$  内并且满足条件 (B) 的连续函数  $f(x)$ , 除去  $f(x) \equiv 0$  的那种平凡的情形.



因此, 在某一数值  $x = x_0$  时函数必异于 0. 在 (B) 内令  $y = x_0 - x$  则得

$$f(x) \cdot f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0;$$

由此很清楚地,  $f(x)$  在任一  $x$  时异于 0. 再次, 在 (B) 内把  $x$  及  $y$  都换成  $\frac{x}{2}$ , 就求得:

$$f(x) = \left[ f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2,$$

于是  $f(x)$  永远严格地是正的.

再利用这些事实, 把等式 (B) 取对数 (例如, 用数  $e$  做底) 得:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

若令

$$\varphi(x) = \ln f(x),$$

我们就得出一个用  $\varphi(x)$  表示的函数, 连续 (作为连续函数叠置的结果, 73) 而且满足类似于 (A) 的条件:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

我们已证过, 在这情形必须有

$$\varphi(x) = \ln f(x) = cx \quad (c = \text{常数}),$$

由此, 最后 (若令  $a = e^c$ ) 即得

$$f(x) = e^{cx} = a^x,$$

此即所要证的.

2° 若

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1), \tag{B}$$

则在  $x$  及  $y$  为任意正值时, 必有

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{B}$$

这就是积的对数法则,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

而在这里, 这等式连同连续性恰好就是对数函数的全部特征性质:

对数函数(除去前述的例外)是确定于区间  $(0, +\infty)$  内并且满足条件 (B) 的唯一连续函数, 于是公式 (B) 就给出函数方程 (B) 的最普遍的连续函数解.

为着证明, 就取在  $x > 0$  时满足这方程的任意连续函数  $f(x)$ . 引入在区间  $(-\infty, +\infty)$  内变动着的新变量  $\xi$ , 并令

$$x = e^\xi, \quad \varphi(\xi) = f(e^\xi),$$

由此

$$\xi = \ln x, \quad f(x) = \varphi(\ln x).$$



连续函数  $\varphi(\xi)$  (根据 73) 满足 (A) 型的条件 [参阅 (B)]

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) + f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta).$$

因此

$$\varphi(\xi) = c\xi \quad \text{而} \quad f(x) = c \cdot \ln x,$$

若除去  $c = 0$  的情形 (那时  $f(x) \equiv 0$ ), 则所得的结果又可以写成

$$f(x) = \log_a x,$$

式中  $a = e^{\frac{1}{c}}$ . 由此一切都已证明.

3° 最后, 转而讨论函数

$$f(x) = x^{\mu}, \quad (\Gamma)$$

显然, 在  $x$  及  $y$  为任何正数值时它满足函数方程

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \quad (\Gamma)$$

因为

$$(xy)^{\mu} = x^{\mu} \cdot y^{\mu}.$$

这方程再加上连续性, 在本题的情形, 同样可以作为幂函数的全部特征性质. 就是说:

幂函数 (除去普通的例外) 是确定于区间  $(0, +\infty)$  内, 并满足条件  $(\Gamma)$  的唯一连续函数.

事实上, 若给定在  $x > 0$  时满足条件  $(\Gamma)$  的连续函数  $f(x)$ , 则可利用在 2° 内曾用过的同一代换式. 于是函数  $\varphi(\xi)$  将满足条件 [参阅  $(\Gamma)$ ]

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) \cdot f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta).$$

我们已经知道 (若除去恒等于零情形), 必有

$$\varphi(\xi) = a^{\xi} \quad (a > 0).$$

由此, 若令  $\mu = \ln a$ , 则

$$f(x) = a^{\ln x} = x^{\mu},$$

此即需证者.

## 76. 三角余弦及双曲余弦的函数特性

4° 若

$$f(x) = \cos ax \quad \text{或} \quad \operatorname{ch} ax \quad (a \geq 0), \quad (\Pi)$$

则对于  $x$  及  $y$  的任何实数值满足关系式

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(x) \cdot f(y). \quad (\Pi)$$

这可从两种余弦的加法定理推出来:

$$\cos(y \pm x) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{ch}(y \pm x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$



[48,6°]. 这里, 函数方程(II) 以及函数须为连续的条件, 便完全确定了两种余弦:

三角余弦及双曲余弦(II) 是确定于区间  $(-\infty, +\infty)$  上并在其上满足条件 (II) 的唯一连续函数(如果, 跟以前一样, 不把恒等于零的函数算在的话).

所以, 设  $f(x)$  是满足条件(II) 且对所有  $x$  都连续的函数. 令  $x = 0$ , 并取使  $f(y) \neq 0$  的任一值作为  $y$ , 则可知

$$f(0) = 1. \quad (10)$$

在这种情形下, 当  $y = 0$  时便得到

$$f(-x) = f(x) \quad (11)$$

故  $f(x)$  是偶函数.

由于连续函数  $f(x)$  在  $x = 0$  是正的, 故可找到这样的一个正数  $c$ , 使  $f(x)$  在全区间  $[0, c]$  上是正的. 这以后, 要看是  $(\alpha)f(c) \leq 1$  还是  $(\beta)f(c) > 1$ , 而分两路来作研究. 先研究情形  $(\alpha)$ .

因  $0 < f(c) \leq 1$ , 故可找到这样的  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ), 使

$$f(c) = \cos \theta. \quad (12)$$

然后把基本关系式 (II) 改写为

$$f(y+x) = 2f(x) \cdot f(y) - f(y-x),$$

并在该式中依次设

$$x = c, \quad y = c;$$

$$x = c, \quad y = 2c;$$

$$x = c, \quad y = 3c;$$

等等. 我们便得到 [利用 (10) 及 (12)]

$$f(2c) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta,$$

$$f(3c) = 2 \cos \theta \cos 2\theta - \cos \theta = \cos 3\theta,$$

$$f(4c) = 2 \cos \theta \cos 3\theta - \cos 2\theta = \cos 4\theta,$$

等等. 利用数学归纳法, 不难证明, 对任何自然数  $m$ , 有公式

$$f(mc) = \cos m\theta. \quad (13)$$

若在 (II) 中设  $x = y = \frac{1}{2}c$ , 则得 [仍利用 (10) 及 (12)]:

$$\left[ f\left(\frac{1}{2}c\right) \right]^2 = \frac{f(0) + f(c)}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \left[ \cos \frac{\theta}{2} \right]^2;$$

而由于  $f(x)$  在 0 与  $c$  间为正, 函数  $\cos x$  在 0 与  $\theta$  间为正, 故在两边取正根, 便得等式

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2}.$$



完全一样地, 若在 (II) 中设  $x = y = \frac{c}{2^2}$ , 则得

$$f\left(\frac{c}{2^2}\right) = \cos \frac{\theta}{2^2}.$$

等等. 这样, 相继地 (用数学归纳法!), 便得到一般关系式

$$f\left(\frac{c}{2^n}\right) = \cos \frac{\theta}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

最后, 把从 (12) 得出 (13) 的推理过程再重复一遍, 便可从 (14) 得出等式

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos \frac{m}{2^n}\theta.$$

于是, 对  $\frac{m}{2^n}$  型的正的  $x$  值, 有:

$$f(cx) = \cos \theta x. \quad (15)$$

但由于任何正数  $x$  可表示为  $\frac{m}{2^n}$  型的极限, 因此利用极限过程 (根据函数  $f(x)$  与  $\cos x$  的连续性) 便可知公式 (15) 对所有  $x > 0$  都成立. 由于 (11), 这公式对  $x < 0$  也成立, 而由于 (10), 公式对  $x = 0$  也成立. 若在 (15) 中把  $x$  换为  $\frac{x}{c}$ , 并令  $\frac{\theta}{c} = a$ , 则最后便得:

$$f(x) = \cos ax.$$

在情形 (β), 我们有:  $f(c) > 1$ ; 于是可求得这样的  $\theta$ , 使

$$f(c) = \operatorname{ch} \theta.$$

把上述推理再逐字重复一遍, 并依据双曲余弦的关系式 (与三角余弦的关系式相似), 便在所论的情形下得出

$$f(x) = \operatorname{ch} ax \quad (a > 0).$$

当  $a = 0$  时, 从两个公式都得出:  $f(x) \equiv 1$ .

函数方程 (A), (B), (B), (Γ) 与 (II) 最先是柯西研究的, 他并且给出了这些方程的连续函数解.

**77. 函数的连续性在计算极限时的应用** 函数的连续性在极限计算中可以有各种各样的应用<sup>①</sup>. 我们在本目内就讲一些这类的例题.

1) 在  $x$  为任何实数值时我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

事实上, 所考察的式子 (设想  $x \neq 0$ ) 可以改写为

$$\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

的形式. 因为  $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ , 故在方括号内的整序变量趋于  $e$  [54(13)], 然后利用幂函数的连续性 (此处  $x = \text{常数}$ ), 全式就以  $e^x$  为极限.

<sup>①</sup>事实上我们在别处早已这样做过了; 如, 在 56 例 3) 内我们顺便确定  $\sqrt[n]{x}$  在  $x = 1$  的连续性并利用着它, 而在例 5)(6) 内又利用过  $\cos x$  在  $x = 0$  的连续性.



## 2) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x] \quad (\infty - \infty),$$

式中  $a_1, a_2, \dots, a_k$  是给定的常数.

应用恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}},$$

并用代换式

$$y = \sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)} \text{ 及 } z = x.$$

则所考察的式子就可表示为

$$\begin{aligned} & \frac{(x+a_1)\cdots(x+a_k) - x^k}{(\sqrt[k]{\cdots})^{k-1} + x(\sqrt[k]{\cdots})^{k-2} + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{(a_1 + \cdots + a_k) + \frac{a_1 a_2 + \cdots + a_{k-1} a_k}{x} + \cdots}{\left(\sqrt[k]{\left(1 + \frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{x}\right)}\right)^{k-1} + \cdots + 1} \end{aligned}$$

的形式. 在  $x \rightarrow +\infty$  时被开方式趋向于 1, 因此, 据根式的连续性(因为根式可作为幂函数的特例), 根式本身的极限为  $\sqrt[k]{1} = 1$ . 因为分母中的 (根式的)  $(k-1)$  次多项式也是连续函数, 所以分母趋于  $k$ , 而整个分式的极限是

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

3) 回到 33,13) 内的命题. 设  $a_n > 0$  且  $a_n \rightarrow a$ ; 暂设  $0 < a < +\infty$ . 应用该命题于序列  $\{\ln a_n\}$ .

因为  $\ln a_n \rightarrow \ln a$  (根据对数函数的连续性), 所以

$$\lim \ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

此时, 依指数函数的连续性,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \rightarrow e^{\ln a} = a.$$

用 54, 极限 1) 及 2), 这结果也可以推广到  $a = 0$  及  $a = +\infty$  的情形.

这样, 我们就得出该命题的下列变换:

若正的整序变量  $a_n$  有极限 (有限或否), 则整序变量

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

也必有同一极限.

## 4) 应用这命题于序列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots$$

引出有趣的推论:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

只要假定其中的第二个极限存在便行.



为着示例, 试求极限.

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

令  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ , 就有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

故所求极限是  $\frac{1}{e}$ .

5) 再来确定下面一系列重要的极限, 它们在下一章内是极有用的:

$$(a) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \quad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$(b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \quad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$(B) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

我们有

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

因为右端对数符号后面的式子当  $\alpha \rightarrow 0$  时趋于  $e$  [54, (13)], 故 (由对数函数的连续性) 它的对数必趋于  $\log_a e$ . 此即所要证的.

注意已证明的公式的特例. 当论及自然对数 ( $a = e$ ) 时:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

这结果很简便. 而自然对数制所表出的优点在本质上即根源于此.

转向公式 (b), 令  $a^\alpha - 1 = \beta$ ; 则当  $\alpha \rightarrow 0$  时 (由指数函数的连续性) 也有  $\beta \rightarrow 0$ .

再则, 因  $\alpha = \log_a(1+\beta)$ , 于是若应用刚才所证明的结果:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

此即所要证的.

特别是, 若取  $\alpha = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ , 则得有趣的公式:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a (\infty \cdot 0).$$

最后, 要证明公式 (B), 可令  $(1+\alpha)^\mu - 1 = \beta$ ; 当  $\alpha \rightarrow 0$  时 (由幂函数的连续性) 必有  $\beta \rightarrow 0$ . 在等式  $(1+\alpha)^\mu = 1+\beta$  的两边取对数, 则得

$$\mu \cdot \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta).$$



利用这一关系式, 所给式就变形成为

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \mu \cdot \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

前已证明关系式

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \quad \text{及} \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

两者都趋向于 1, 于是总的乘积就以  $\mu$  为极限. 此即所要证的.

在 56,3) 内考察过的极限可作为  $\mu = r$  时的特例而由此得出.

**78. 幂指数式** 今考察幂指数式  $u^v$ , 式中的  $u$  及  $v$  是同一变量  $x$  的函数,  $x$  的变动区域  $\mathcal{X}$  具有聚点  $x_0$ ; 在特殊情形, 他们可以是两个整序变量  $u_n$  及  $v_n$ .

设存在着有限极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u = a \quad \text{及} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v = b$$

而且  $a > 0$ . 现在要求幂指数式  $u^v$  的极限.

把它表示为形式

$$u^v = e^{v \cdot \ln u}.$$

函数  $v$  及  $\ln u$  各有极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v = b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \ln u = \ln a$$

(此处应用对数函数的连续性), 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v \ln u = b \ln a.$$

由此, 由指数函数的连续性, 最后即得:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u^v = e^{b \cdot \ln a} = a^b.$$

在别的情形, 当已知乘积  $v \ln u$  的极限  $c$  时, 有限的或确定符号的无穷, 表达式  $u^v$  的极限亦可以确定. 对于有限数  $c$  时所求极限显然是  $e^c$ ; 若  $c = -\infty$  或  $+\infty$ , 则这极限各为 0 或  $+\infty$  [54, 1)].

该极限  $c = \lim\{v \ln u\}$  的确定 —— 仅由给定的极限  $a$  及  $b$  —— 总是可能的, 但须除去当这积 (在  $x \rightarrow x_0$  时) 表示为  $\infty \cdot 0$  型的不定式的那些情形. 很易判断, 例外的情形必对应于数值  $a$  及  $b$  的下列几种结合:

$$a = 1, \quad b = \infty;$$

$$a = 0, \quad b = 0;$$

$$a = +\infty, \quad b = 0.$$



在这些情形就说, 幂指数式  $u^v$  分别是  $1^\infty, 0^0, \infty^0$  型不定式<sup>①</sup>. 这时, 关于幂指数式  $u^v$  的极限的问题, 若只知道函数  $u$  及  $v$  的极限, 就很少解决的办法, 要想求  $u^v$  的极限就必须直接研究它们趋于自己的极限时的规律.

整序变量  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  在  $n \rightarrow \infty$  时, 或更普遍地说幂指数式  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  在  $\alpha \rightarrow 0$  时, 以  $e$  为极限, 给出  $1^\infty$  型不定式的一个例子. 上面, 在 76,3) 内我们曾考察整序变量  $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ , 它就表示  $0^0$  型不定式. 最后, 在 32,10) 内的  $\sqrt[n]{n}$  也是  $\infty^0$  型不定式.

再举几个新类型的不定式的定值法的例子.

**79. 例题** 1) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} (\infty^0)$ .

用  $y$  表示所给的幂指数式, 就有 [参阅 54,2) 及 5)]

$$\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

于是

$$y \rightarrow e^0 = 1.$$

2) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} (0^0)$ .

此处 [54,7) 及 5)]

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x \rightarrow 0,$$

因此仍得  $y \rightarrow 1$ .

3) 现在很容易用下列方法普遍地推广 76 的例 1): 若整序变量  $x_n \rightarrow x$  (此处  $x$  是有限数), 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x (1^\infty).$$

为要证明, 把所举的幂指数式表示为如下的形式

$$\left[\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}$$

就够了; 幂的底趋于  $e$ , 同时指数趋于  $x$ .

4) 可以变成这结果的又有例题

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x} (1^\infty).$$

令括号内的式子等于  $1 + \frac{x_n}{n}$ , 就有

$$x_n = n \cdot \left[\cos \frac{x}{n} - 1 + \lambda \sin \frac{x}{n}\right] = \lambda x \cdot \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - x \cdot \frac{1 - \cos \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \rightarrow \lambda x.$$

余类推.

5) 类似地解决了例题 ( $a, b > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab} (1^\infty).$$

<sup>①</sup>关于这些记号或许需复述在第 31 页脚注内所讲过的.



此处

$$x_n = n \cdot \left[ \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right] = \frac{1}{2} [n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)],$$

于是, 根据 77.5)(6) 的公式的一个特殊推论:

$$x_n \rightarrow \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab},$$

而所求极限, 实际上, 就等于  $e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ .

6) 最后, 考察极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} \right]^{-\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1^\infty).$$

读者可以看到在  $1^\infty$  型不定式的情形将问题直接引导到  $e$  是很便利的.

我们已经说过, 确定一切类型的不定式的普遍方法将在第四章 (§4) 内讲到.

## §5. 连续函数的性质

**80. 关于函数取零值的定理** 今着手研究在某一区间内连续的函数的基本性质. 这些性质是很有趣的, 而且在以后的叙述中, 经常要用它们作为各种论断的根据

先从下面的布尔查诺 (B.Bolzano) 和柯西 (A.L.Cauchy) 的简单定理开始.

**布尔查诺—柯西第一定理** 设函数  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义着并且连续的, 又在这区间的两端点处取得异号的数值. 则在  $a$  与  $b$  之间必能求出一点  $c$ , 在这点处函数等于零:

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

这定理有很简单的几何意义: 若连续的曲线从  $x$  轴的一方转移到另一方, 则它必与这轴相交 (图 31).

**第一种证明** 我们将依布尔查诺的方法进行 [41]——即用逐次等分区间的方法. 为着确定起见, 令  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . 我们用点  $\frac{a+b}{2}$  把区间  $[a, b]$  分成两半. 可能偶然地遇到函数  $f(x)$  恰在这点处等于零, 那么令  $c = \frac{a+b}{2}$ , 定理就已得到证明. 次设  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ ; 则两区间  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  中必有一个, 在它的两端点处函数取得异号的数值 (且这时在左端为负值, 在右端为正值). 用  $[a_1, b_1]$  表示这区间, 就有

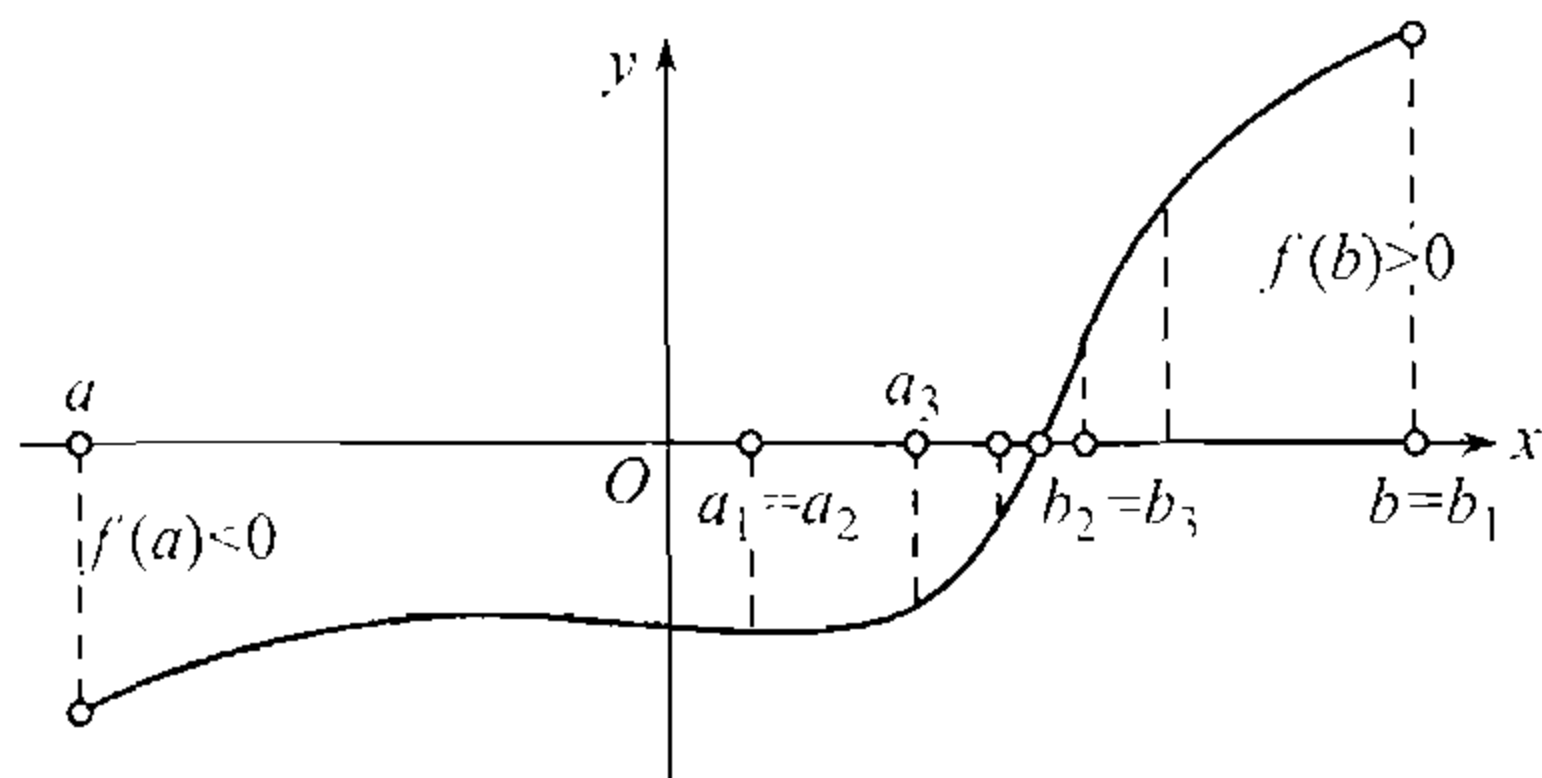


图 31

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$



再把区间  $[a_1, b_1]$  分成两半, 且仍丢开当  $f(x)$  在这区间的中点  $\frac{a_1 + b_1}{2}$  处等于零的情形. 因为那时定理已得证明. 再用  $[a_2, b_2]$  表示那半个区间, 它使

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

继续进行这种构成区间的步骤. 这时, 或则在有限次步骤以后, 我们碰到作为分点的某一点, 在该处函数等于零, 而定理的证明就完成了; 或则我们得出内含区间 (依次地一个包含一个) 的无穷序列. 我们就来讨论这最后的情形. 对于第  $n$  个区间  $[a_n, b_n] (n = 1, 2, \dots)$  必有

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \quad (1)$$

并且它的长度显然等于

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}. \quad (2)$$

易见这些区间所构成的序列满足内含区间的引理 [38] 中所列的条件, 因为, 由于 (2)  $\lim(b_n - a_n) = 0$ : 因此, 在区间  $[a, b]$  内存在着一点  $c$ , 满足

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

兹证明这点恰好能满足定理的要求.

将不等式 (1) 取极限, 同时并应用函数的连续性 (特别是, 在点  $x = c$  处), 就同时得出

$$f(c) = \lim f(a_n) \leq 0 \quad \text{及} \quad f(c) = \lim f(b_n) \geq 0,$$

因此, 实际上, 必有  $f(c) = 0$ . 定理证明完毕.

以下我们将给出柯西定理的第二种证明, 它是依据另一种观念的. 预先叙述下面的明显的命题:

**引理** 若函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处为连续, 且  $f(x_0)$  的数值异于 0, 则对于充分接近于  $x_0$  的一切  $x$  的数值, 函数  $f(x)$  仍保持着在点  $x_0$  处的符号.

这可由 55,1 的论点 2° 推得, 不过在本题的情形, 函数的极限  $A$  这一角色 (由于连续性) 由  $f(x_0)$  担任.

**第二种证明** 考察区间  $[a, b]$  内使  $f(\bar{x}) < 0$  的一切点  $x = \bar{x}$ . 在这些点之中显然应有点  $a$  以及 (根据引理) 接近于  $a$  的许多点. 集  $\{\bar{x}\}$  被数  $b$  上有界. 今令  $c = \sup\{\bar{x}\}$  [11], 我们要证  $f(c) = 0$ .

事实上, 假设情形与此相反, 那么或则  $f(c) < 0$ , 或则  $f(c) > 0$ . 若是  $f(c) < 0$  (则显知  $c < b$ , 因为我们给定  $f(b) > 0$ ), 则依引理, 在  $c$  的稍右处将能找出数值  $\bar{x}$ , 使  $f(\bar{x}) < 0$ , 而这就违反了  $c$  是  $\{\bar{x}\}$  的上界的定义. 又若是  $f(c) > 0$ , 则 —— 仍根据引理 —— 在  $c$  的左方的近处, 就是在某一充分小的区间  $(c - \delta, c)$  内, 全部成立



$f(x) > 0$ , 于是在那里就根本不能有数值  $\bar{x}$ . 但这同样是不可能的, 因为按照定义,  $c$  是  $\{\bar{x}\}$  的上确界.

定理证明完毕.

须注意, 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  内连续的要求很重要: 函数只要在一点处有间断, 就可以从负值转变为正值而并不等于零. 例如,  $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$  就是这样的函数, 虽然  $f(0) = -\frac{1}{2}$ , 而  $f(1) = \frac{1}{2}$  (在  $x = 1$  时有跃度), 但它并不在任何一点等于零.

**81. 应用于解方程** 已证明的定理在解方程时是有用处的.

首先, 用它来确定根的存在. 例如, 对于方程

$$2^x = 4x,$$

根  $x = 4$  是很明显的, 但要指出再有一个根存在就较为困难了. 而其实, 函数  $f(x) = 2^x - 4x$  在  $x = 0$  时取值  $f(0) = 1 > 0$ , 而在  $x = \frac{1}{2}$  时取值  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0$ , 因此 (因为它是连续的) 它必在  $0$  与  $\frac{1}{2}$  之间的某一点等于零.

另一例子: 考察一般奇次幂 (实系数) 的代数方程

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

当  $x$  的绝对值充分大时, 多项式的符号全视最高次幂的项的符号而定, 即当  $x$  为正时与  $a_0$  同号, 当  $x$  为负时与  $a_0$  异号. 因为多项式是连续函数, 既然要变号, 则它在区间内某一点处必然要等于  $0$ . 由此: 一切奇次 (实系数) 代数方程至少必有一个实根.

柯西定理不仅可以应用于确定实根的存在, 并且可以用来计算它的近似值. 用例题来说明. 设  $f(x) = x^4 - x - 1$ . 因为  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 13$ , 所以多项式在  $1$  与  $2$  之间必有一根. 把这区间  $[1, 2]$  分成  $10$  等分, 各分点为  $1.1; 1.2; 1.3; \cdots$  并逐个计算:

$$f(1.1) = -0.63 \cdots; f(1.2) = -0.12 \cdots; f(1.3) = +0.55 \cdots; \cdots$$

就看出在  $1.2$  与  $1.3$  之间包含着一个根. 再把这区间  $10$  等分, 求出:

$$f(1.21) = -0.06 \cdots; f(1.22) = -0.004 \cdots; f(1.23) = +0.058 \cdots; \cdots$$

现在很清楚, 可知这根位于  $1.22$  与  $1.23$  之间; 这样, 我们已经知道根的数值准确度达  $0.01$ , 余类推<sup>①</sup>.

有了这些事实以后, 现在再来把同一定理的上述两种证明比较一下该是很有趣味的. 第二种证明仅是方程  $f(x) = 0$  的根的“存在的证明”, 并没有说及怎样求出这根. 而第一种证明却指出了实际求根的确定方法: 用两半两半地逐次等分区间的方法 (我们限于分成两半是为了简便), 在实际上可以把所求的根包含于长度为任意小的区间内, 即可以计算这根至任意的准确度.

<sup>①</sup>可是, 实际上这方法是不方便的. 在第四章 (§5) 内将指出远比它更为有效的方法.



82. 介值定理 在 80 内已证明的定理可以如下直接地加以普遍化:

布尔查诺-柯西第二定理 设函数  $f(x)$  是在某一区间  $\mathcal{X}$  (闭的或不闭的, 有限的甚至无穷的都可以) 内定义着并且连续的. 若在这区间内的两点  $x = a$  及  $x = b$  ( $a < b$ ) 处函数具有不相等的数值

$$f(a) = A \quad \text{及} \quad f(b) = B,$$

则对于  $A$  与  $B$  之间的任意数  $C$  必能求出  $a$  与  $b$  之间的点  $x = c$ , 使

$$f(c) = C^{①}.$$

证明 例如, 我们设

$$A < B, \quad \text{于是} \quad A < C < B.$$

在区间  $[a, b]$  内考察辅助函数  $\varphi(x) = f(x) - C$ . 这函数在区间  $[a, b]$  内是连续的, 且在这区间的两端点处有异号:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

依布尔查诺-柯西第一定理, 在  $a$  与  $b$  之间必能求出点  $x = c$ , 使  $\varphi(c) = 0$ , 即

$$f(c) - C = 0 \quad \text{或} \quad f(c) = C,$$

此即所要证的.

这样, 我们已建立了在区间内为连续的函数  $f(x)$  的重要性质: 当函数从一个数值转变到另一个数值时, 它必经过每一中间值至少一次.

换句话说, 这性质又可以如此表达: 当  $x$  在任何区间  $\mathcal{X}$  内变动时, 连续函数  $f(x)$  所取得的数值完全充满某一区间  $\mathcal{Y}$ .

事实上, 设

$$m = \inf\{f(x)\}, \quad M = \sup\{f(x)\}^{②},$$

又  $y_0$  是在  $m$  与  $M$  之间的任意数:

$$m < y_0 < M.$$

则必能求出函数值  $y_1 = f(x_1)$  及  $y_2 = f(x_2)$  ( $x_1$  及  $x_2$  取自区间  $\mathcal{X}$ ), 使

$$m \leq y_1 < y_0 < y_2 \leq M;$$

①显然, 布尔查诺-柯西第一定理是这定理的特殊情形: 若  $A$  与  $B$  异号, 则可取 0 当作  $C$ .

②提醒读者, 若集  $\{f(x)\}$  不是上(下)有界, 则(在 11 内)我们约定令  $M = +\infty$  ( $m = -\infty$ ).



这是由数集的确界的定义推得的. 但依已证明的定理, 在  $x_1$  与  $x_2$  之间必存在着数值  $x = x_0$  (显然亦属于  $\mathcal{X}$ ), 使  $f(x_0)$  恰巧等于  $y_0$ ; 因此, 这数  $y_0$  也属于集  $\mathcal{Y}$ .

这样  $\mathcal{Y}$  就是以  $m$  及  $M$  为两端点的区间 (两端点本身可否属于这区间要看情形而定; 参阅 84.)

在 71, 2° 内我们已看到, 在单调函数的情形, 由上述的性质可以反转来推出函数的连续性. 然而不应认为在任何时候都可以这样倒推; 很容易做出一个具有这种的性质的间断函数. 例如, 函数 [70, 4]:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

当  $x$  在任何含有间断点  $x = 0$  的区间内变动时, 其值还是完全充满了区间  $[-1, +1]$ .

**83. 反函数的存在** 现在应用前面一目内所研究过的连续函数的性质来解决反函数在何种假定之下始为单值且连续的问题 (参阅 49).

**定理** 设函数  $y = f(x)$  是在某一区间  $\mathcal{X}$  内定义的, 它连续而且单调增大 (减小) ①. 则在对应的函数值所成的区间  $\mathcal{Y}$  内必存在单值的反函数  $x = g(y)$ , 也是连续而且单调增大 (减小).

**证明** 暂限于增函数的情形. 在上面我们看到, 连续函数  $f(x)$  的函数值完全充满于某一区间  $\mathcal{Y}$ , 于是对于这区间内的每一数值  $y_0$ , 至少必能求出一个数值  $x_0$  ( $\mathcal{X}$  内的), 使

$$f(x_0) = y_0.$$

但由于这函数的单调性, 所以这种数值只能求出一个: 即若  $x_1 >$  或  $<$   $x_0$ , 则对应地, 亦必有  $f(x_1) >$  或  $<$   $f(x_0)$ .

就把这数值  $x_0$  与从  $\mathcal{Y}$  内任意取的  $y_0$  一一对照起来, 我们便得出单值函数

$$x = g(y),$$

它是函数  $y = f(x)$  的反函数.

很易看出, 这函数  $g(y)$  与  $f(x)$  相似, 也是单调增大的. 因若

$$y' < y'' \quad \text{又} \quad x' = g(y'), \quad x'' = g(y'');$$

则依函数  $g(y)$  本身的定义, 必同时有

$$y' = f(x') \quad \text{及} \quad y'' = f(x'').$$

若是  $x' > x''$ , 则根据函数  $f(x)$  的增大性, 必  $y' > y''$ , 违反原来的假设. 其次, 亦不能有  $x' = x''$ , 因为那时也必有  $y' = y''$ , 也是违反原来的假设的. 因此, 只有不等式  $x' < x''$  是可能的. 于是知  $g(y)$  确实是增大的.

①用狭义的说法 (这在此处是很重要的).



最后, 要证明函数  $x = g(y)$  的连续性, 只要引用 71, 2° 的定理就够了, 该定理的条件是满足的: 函数  $g(y)$  为单调, 并且它的数值显然完全充满于区间  $\mathcal{X}$  ①.

定理的一切论点在几何上是很明显的, 读者很容易照着图 32 去“阅读”它们.

用已证明的定理可以重新建立一系列我们已经知道的结果.

若把它应用于区间  $\mathcal{X} = [0, +\infty)$  内所定义的函数  $x^n$  ( $n$  是自然数), 则当  $y$  在  $\mathcal{Y} = [0, +\infty)$  内时得出 (算术的) 根  $x = \sqrt[n]{y}$  的存在及连续性. 从区间  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内所定义的函数  $y = a^x$  出发, 就可证明对数函数  $x = \log_a y$  在区间  $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$  内的存在及连续性. 最后, 考察函数  $y = \sin x$  及  $y = \operatorname{tg} x$ , 第一个在区间  $\mathcal{X}_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  内, 而第二个在开区间  $\mathcal{X}_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内, 就可证明它们的反函数  $x = \arcsin y$  及  $x = \operatorname{arctg} y$  各在区间  $\mathcal{Y}_1 = [-1, +1]$  及  $\mathcal{Y}_2 = (-\infty, +\infty)$  内是存在而且连续的.

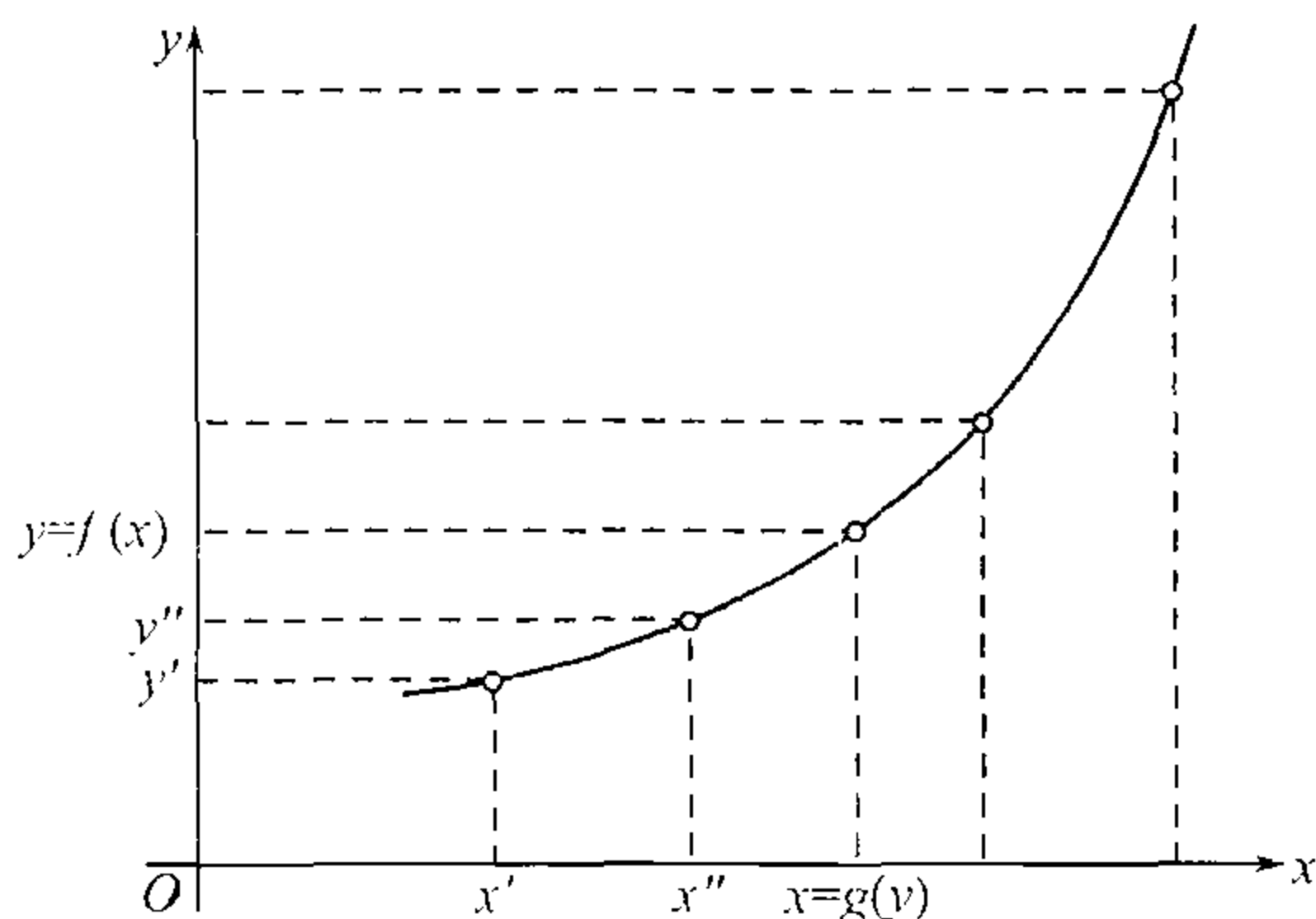


图 32

(在这时我们假定函数  $x^n, a^x, \sin x, \operatorname{tg} x$  的连续性已经预先证明, 且并未引用它们的反函数的存在——否则, 就将得出循环推理. 这种证明已在 68 内给出; 至于 72 内的那种考虑在此处显然是不适宜的.)

再考察这样的例题.

设  $x$  在  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内时

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x, \quad \text{式中 } 0 < \varepsilon < 1. \quad (3)$$

很易指出这函数是单调增大的 (狭义的). 即若  $x'' > x'$ , 而对应的  $y$  的数值各为  $y'', y'$ , 则

$$y'' - y' = (x'' - x') - \varepsilon(\sin x'' - \sin x').$$

但 [参阅 68, (2)]

$$|\sin x'' - \sin x'| \leq x'' - x',$$

由此就推得

$$y'' - y' > 0, \quad \text{即 } y'' > y'.$$

把定理应用于这种情形, 就可证明  $x$  亦是  $y$  的单值函数, 等等.

引入的例题值得注意的是已经接触到一个理论天文学上的问题. 方程

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E \quad (3a)$$

①不论怎样从  $\mathcal{X}$  内取  $x$ , 只要假定  $y = f(x)$ , 则对于这  $y$ , 函数  $g(y)$  的数值就恰好是所取的  $x$ .



就是著名的开普勒方程, 它表出行星的平近点角  $M$  与其偏近点角  $E$  间的关系 ( $\varepsilon$  是行星轨道的离心率). 这样, 我们已证明, 不论平近点角是怎样的数值, 实际上, 开普勒方程单值地确定了偏近点角的数值.

**84. 关于函数的有界性的定理** 如果函数  $f(x)$  对于某一有限区间内一切  $x$  的数值都有定义 (因此, 函数必取有限的数值), 我们并不能立刻由此推出函数必须为有界, 即函数数值所成的集  $\{f(x)\}$  的有界性. 例如, 设函数  $f(x)$  是这样定义的:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ 若 } 0 < x \leq 1, \text{ 又 } f(0) = 0.$$

这函数仅取有限数值, 但它却不是有界的, 因为当  $x$  接近于 0 时, 它可以取任意大的数值. 顺便指出, 在半开区间  $(0, 1]$  内它是连续的. 但在点  $x = 0$  处有间断.

但对于闭区间内连续的函数情形就不同了.

**魏尔斯特拉斯第一定理** 若函数  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义并且连续的, 则它必是有界的, 即必存在着有限的常数  $m$  及  $M$ , 使当  $a \leq x \leq b$  时

$$m \leq f(x) \leq M.$$

**证明** 由反证法来证明: 设函数  $f(x)$  当  $x$  在区间  $[a, b]$  内变动时为无界的.

在这种情形, 对于每一个自然数  $n$ , 在区间  $[a, b]$  内必能求出数值  $x = x_n$ , 使

$$|f(x_n)| \geq n. \quad (4)$$

依布尔查诺 — 魏尔斯特拉斯引理 [41], 由序列  $\{x_n\}$  中可以分出部分序列  $\{x_{n_k}\}$  收敛于有限极限:

$$x_{n_k} \rightarrow x_0 \quad (k \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

并且显然  $a \leq x_0 \leq b$ . 由于函数在点  $x_0$  处的连续性, 则亦应该有

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0),$$

而这是不可能的, 因为由 (4) 推得

$$|f(x_{n_k})| \rightarrow \infty.$$

所得的矛盾就证明了本定理.

**85. 函数的最大值及最小值** 我们知道, 一个无穷数集, 即使是有界的, 其中也可能没有最大的 (最小的) 元素. 因此, 若函数  $f(x)$  是在  $x$  的某一变动区间内定义着而且甚至是有界的, 但在函数数值所成的集  $\{f(x)\}$  中仍可能不出现最大的 (最小的) 数值. 这时函数  $f(x)$  的数值在该区间内不能达到它们的上 (下) 确界. 例如, 函数

$$f(x) = x - E(x)$$



就是这样 (它的图像画在图 33 中). 当  $x$  在任意区间  $[0, b] (b \geq 1)$  内变动时, 函数值的上确界是 1. 但它不能被达到, 因此函数无最大值.

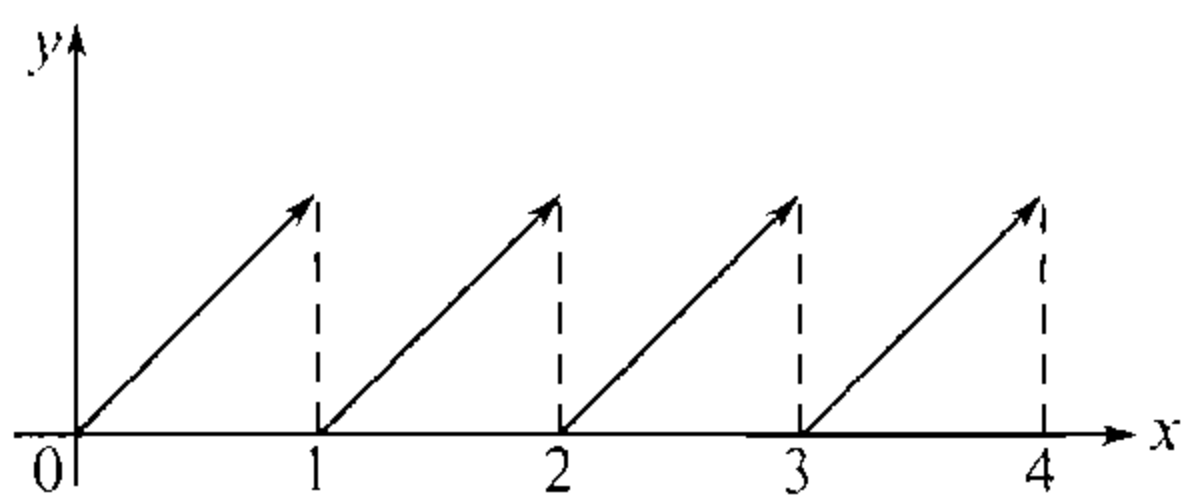


图 33

读者也许已明白. 与此有关的是所考察的函数在  $x$  取自然数值时有间断存在, 实际上, 对于在闭区间内连续的函数成立着:

**魏尔斯特拉斯第二定理** 若函数  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义着而且连续的, 则它在这区间内必能达到自己的上确界及下确界.

换言之, 在区间  $[a, b]$  内必能求出  $x = x_0$  及  $x = x_1$ , 使  $f(x_0)$  及  $f(x_1)$  依次为  $f(x)$  的一切数值中的最大者及最小者.

**第一种证明** 令

$$M = \sup\{f(x)\};$$

依前一定理这数是有限数. 假定 (与需要证明的相反) 恒有  $f(x) < M$ , 即限界  $M$  不能被达到. 在这种情形可以考察辅助函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

因为依假定, 此处分母不能等于零, 故函数是连续的, 因此 (依前一定理) 是有界的:  $\varphi(x) \leq \mu (\mu > 0)$ . 但由此很易得出

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu},$$

即有一小于  $M$  的  $M - \frac{1}{\mu}$  成为  $f(x)$  的函数值所成之集的上界, 这是不可能的, 因为  $M$  是这数集的上确界. 所得的矛盾就证明了定理: 在区间  $[a, b]$  内必能求出数值  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = M$  是  $f(x)$  的一切数值中的最大者.

仿此又可以证明关于最小值的论点.

**第二种证明** 在这里亦可从布尔查诺—魏尔斯特拉斯引理 [41] 出发. 且限于最大值来证明. 同刚才一样, 若

$$M = \sup\{f(x)\},$$

则依上确界的性质 [11], 对于任何  $n$  必能在  $[a, b]$  内求出  $x = x_n$ , 使

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \quad (5)$$

于是从序列  $\{x_n\}$  内可以分出部分序列  $\{x_{n_k}\}$  收敛于  $[a, b]$  内某一数值  $x_0$ :  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , 由于函数的连续性亦有

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0).$$



同时由 (5) 有

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}, \text{ 取极限, 得 } f(x_0) \geq M.$$

但  $f(x_0)$  不能大于函数值集的上界  $M$ , 因此

$$f(x_0) = M$$

此即所要证的.

须注意, 刚才所进行的两种证明都是纯粹的“存在的证明”, 并没有给出任何求数值  $x = x_0$  的方法. 以后 [第四章 §1 内], 在关于函数作更多的假定下, 我们将学会实际求函数达到最大或最小值时的自变数的数值.

若函数  $f(x)$  当  $x$  在任何区间  $\mathcal{X}$  内变动时是有界的, 则差

$$\omega = M - m$$

称为函数在这区间内的振幅.

此外, 振幅  $\omega$  也可以定义为一切可能的差  $f(x'') - f(x')$  所成的集的上确界, 其中  $x'$  及  $x''$  是在区间  $\mathcal{X}$  内的互不相关的任意数值;

$$\omega = \sup_{x', x'' \text{ 在 } \mathcal{X} \text{ 内}} \{f(x'') - f(x')\}.$$

当论及在有限闭区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  内的连续函数  $f(x)$  时, 则由已证明的定理可知, 振幅不过是函数在这区间内的最大值与最小值之差罢了.

在这种情形, 函数值的区间  $\mathcal{Y}$  就是闭区间  $[m, M]$ , 而振幅就是这区间的长.

**86. 一致连续的概念** 若函数  $f(x)$  是在某一区间  $\mathcal{X}$  (闭的或不闭的, 有限的或无穷的) 内定义着而且在这区间内的一点  $x_0$  处是连续的, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

或 [用“ $\varepsilon - \delta$  的语言”, 66]: 对于任一数  $\varepsilon > 0$  必能求出数  $\delta > 0$ , 使由

$$|x - x_0| < \delta \text{ 能推出 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

今假定函数  $f(x)$  在全区间  $\mathcal{X}$  内是连续的, 即在这区间的每一点  $x_0$  处是连续的. 则对于  $\mathcal{X}$  内的任一点  $x_0$ , 必能依给定的  $\varepsilon$  而各别地求出合于上述意义的对应的  $\delta$ . 当  $x_0$  在  $\mathcal{X}$  的范围内变动时, 即使  $\varepsilon$  不变动, 数  $\delta$  一般地说也是要变动的. 要相信这事, 只要一看图 34 就够了. 图中在函数变动得很慢的地区 (图像表示为平斜的曲线) 所适用的  $\delta$  比在函数变动得很快的地区 (在那里图像峻峭地上升或下降) 所适用的  $\delta$  要大得多, 换句话说, 数  $\delta$  一般地不仅依赖于  $\varepsilon$ , 并且亦依赖于  $x_0$ .



若只论及  $x_0$  的有限个数值 (当  $\varepsilon$  不变动时), 则由有限个与它对应的数  $\delta$  内可以选出最小的一个, 而这  $\delta$  显然同时可适用于一切被考察的点  $x_0$ .

但关于包含在区间  $\mathcal{X}$  内的无穷多个数值  $x_0$  却不能这样去推断: (当  $\varepsilon$  不变动时) 与它们对应的是无数个的  $\delta$ , 其中可能会有任意小的. 这样, 关于区间  $\mathcal{X}$  内的连续函数  $f(x)$  就发生一个问题: 对于已给的  $\varepsilon$  是否存在这样的  $\delta$ , 能适用于这区间内的一切点  $x_0$ ?

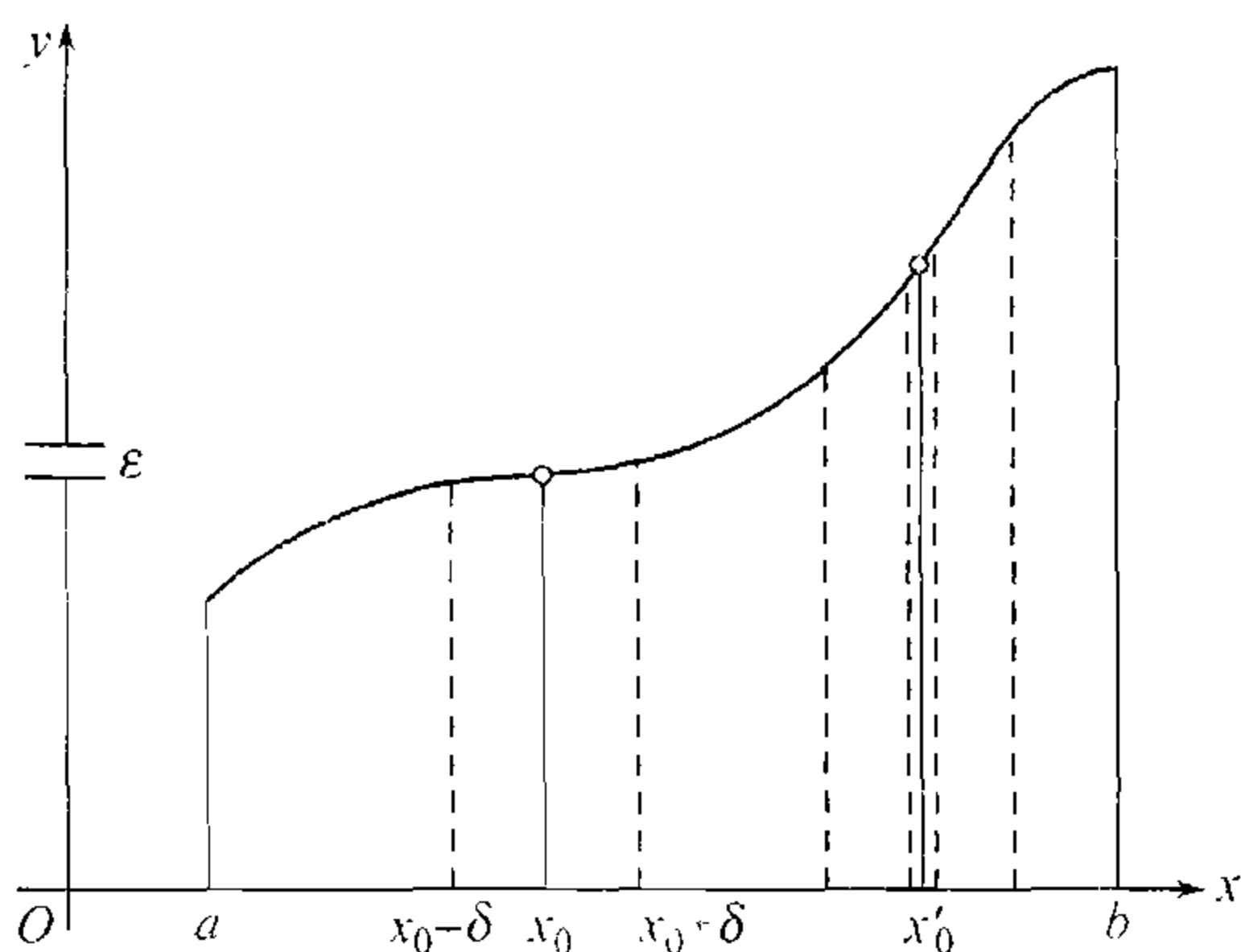


图 34

若对于任一数  $\varepsilon > 0$  能求出数  $\delta > 0$ , 使由

$$|x - x_0| < \delta \text{ 就能推出 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

不论点  $x_0$  及  $x$  是在区间  $\mathcal{X}$  内的什么地位, 则函数  $f(x)$  称为在区间  $\mathcal{X}$  内是一致连续的.

在这种情形, 数  $\delta$  仅依赖于  $\varepsilon$ , 而且可以在选定点  $x_0$  以前就指出来:  $\delta$  同时适用于一切  $x_0$ .

一致连续表示: 在区间的任何部分只要变元的两个数值达到一定的接近程度, 就足以使对应的函数值达到所需的接近程度.

可以举例说明, 函数在区间内一切点处的连续性不能必然地推出它在这区间内的一致连续性. 例如, 设  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x$  包含于  $0$  及  $\frac{2}{\pi}$  之间, 但  $0$  除外. 在这种情形,  $x$  的变动区域是非闭区间  $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ , 且在它的每一点处函数是连续的. 今令

$$x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}, x = \frac{1}{n\pi} \text{ (式中 } n \text{ 是任意的自然数): 则}$$

$$f(x_0) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1, \quad f(x) = \sin n\pi = 0.$$

于是

$$|f(x) - f(x_0)| = 1,$$

虽然  $|x - x_0| = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$  可以随  $n$  的增大而成为任意小. 在这里, 对于  $\varepsilon = 1$  不能求出  $\delta$  使同时适用于  $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$  内的一切点  $x_0$ , 虽然对于其中每一个别的数值  $x_0$ , 由于函数的连续性, 这种  $\delta$  是存在的!

非常值得注意的是在闭区间  $[a, b]$  内已不再有与此类似的情况, 这由下面的康托 (G.Cantor) 的定理可以明白.



**87. 康托定理** 若函数  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义着而且连续, 则它在这区间内也是一致连续的.

**证明** 我们用反证法来证明. 设对于某一确定的数  $\varepsilon > 0$ , 在一致连续性的定义内所论及的那种数  $\delta > 0$  并不存在. 在这种情形, 不论取怎样的数  $\delta > 0$ , 在区间  $[a, b]$  内必可求出这样的两个数值  $x'_0$  及  $x'$ , 虽然

$$|x' - x'_0| < \delta \quad \text{但仍然} \quad |f(x') - f(x'_0)| \geq \varepsilon.$$

今取正数的序列  $\{\delta_n\}$ , 且  $\delta_n \rightarrow 0$ .

根据已讲过的, 对于每一  $\delta_n$  可在  $[a, b]$  内求出数值  $x_0^{(n)}$  及  $x^{(n)}$  (它们担任着  $x'_0$  及  $x'$  的角色), 虽然 (对  $n = 1, 2, \dots$ )

$$|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n, \quad \text{但仍然} \quad |f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon.$$

依布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理 [41], 由有界序列  $\{x^{(n)}\}$  内可以取出部分序列, 收敛于区间  $[a, b]$  内的某一点  $x_0$ . 为着不使记法繁复, 就算序列  $\{x^{(n)}\}$  本身已收敛于  $x_0$ .

因为  $x^{(n)} - x_0^{(n)} \rightarrow 0$  (因  $|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n$ , 而  $\delta_n \rightarrow 0$ ), 所以序列  $\{x_0^{(n)}\}$  也同时收敛于  $x_0$ . 由于函数在点  $x_0$  处的连续性, 应该有

$$f(x^{(n)}) \rightarrow f(x_0) \quad \text{及} \quad f(x_0^{(n)}) \rightarrow f(x_0),$$

于是

$$f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)}) \rightarrow 0,$$

但这违反了在一切数值  $n$  时

$$|f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon$$

的事实. 定理证明完毕.

由已证明的定理直接得出在以后对我们有用的推论:

**推论** 设函数  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义着而且连续的. 则依给定的  $\varepsilon > 0$  能求出这样的  $\delta > 0$ , 若把区间任意分成长度小于  $\delta$  的部分区间, 则在每一个部分区间内函数  $f(x)$  的振幅将小于  $\varepsilon$ .

事实上, 若依给定的  $\varepsilon$  而取在一致连续性的定义内所说及的那种数作为  $\delta$ , 则在长度小于  $\delta$  的部分区间内, 任意两函数值之差的绝对值就小于  $\varepsilon$ . 特别, 若取这两函数值为函数在部分区间内的最大值与最小值, 则它们的差就给出函数在该部分区间内的振幅 [85].



**88. 博雷尔引理** 现在我们将证明一个有趣的辅助命题, 它与布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理相似, 在进行细致的讨论时常是有用处的, 它属于博雷尔 (E.Borel).

在考察区间  $[a, b]$  时, 同时再考察诸开区间  $\sigma$  所成的系  $\Sigma$ , 其中开区间的个数可以是有限的也可以是无穷的. 若对于区间  $[a, b]$  内的每一点  $x$  必有  $\Sigma$  内的区间  $\sigma$  包含它. 就约定说系  $\Sigma$  覆盖区间  $[a, b]$  (或这区间被系  $\Sigma$  所覆盖, 等等) 这种说法将简化我们对于上述命题的叙述及证明.

**博雷尔引理** 若闭区间  $[a, b]$  被一个开区间的无穷系  $\Sigma = \{\sigma\}$  所覆盖, 则恒能从  $\Sigma$  里面选出有限子系

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\},$$

它同样能覆盖全区间  $[a, b]$ .

**第一种证明** 应用布尔查诺的方法 [41] 从反面进行. 假设区间  $[a, b]$  不能被  $\Sigma$  内的有限个区间  $\sigma$  所覆盖. 把区间等分为两半. 那时至少两半之一不能被有限个  $\sigma$  所覆盖; 事实上, 若某一半可以被 ( $\Sigma$  内的) 区间  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  所覆盖, 而另一半可以被 ( $\Sigma$  内的) 区间  $\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \dots, \sigma_n$  所覆盖, 则由这些区间全体所组成的有限系  $\Sigma^*$  就已能覆盖全区间  $[a, b]$  了, 这是违反假设的. 今用  $[a_1, b_1]$  表示那不能被有限个  $\sigma$  所覆盖的半区间 (若两者都是如此, 则任取其中之一). 再把这区间等分为两半, 并用  $[a_2, b_2]$  表示那不能被有限个  $\sigma$  所覆盖的半区间, 余依此类推.

继续不断进行这种步骤, 我们将得出内含区间  $[a_n, b_n] (n = 1, 2, \dots)$  的无穷序列, 其中每一区间是前一区间的一半. 所有这些区间都是这样选取的, 它们之中没有一个可以被有限个区间  $\sigma$  所覆盖. 依内含区间的引理 [38], 它们有一个公共点  $c$ , 端点  $a_n, b_n$  都趋向于这点为极限.

这点  $c$ , 像区间  $[a, b]$  内的任一点一样, 必位于某一个区间  $\sigma$  内, 说是在  $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$  内, 于是  $\alpha < c < \beta$ . 但趋向于  $c$  的整序变量  $a_n$  及  $b_n$  从某一序号开始它们本身就将包含在  $\alpha$  与  $\beta$  之间 [26, 1°], 于是由它们决定的区间  $[a_n, b_n]$  显然只要用一个区间  $\sigma_0$  就可全部被覆盖住, 违反了这些区间  $[a_n, b_n]$  的选法, 所得的矛盾就证明这引理.

再引入一种证明, 它建立在新的观念上; 它属于勒贝格 (H. Lebesgue).

**第二种证明** 考察区间  $[a, b]$  内具有那种性质的点  $x^*$ , 使得区间  $[a, x^*]$  能用有限个区间  $\sigma$  来覆盖. 这种点  $x^*$ , 一般地说, 是存在的: 因为, 例如, 点  $a$  位于某一个  $\sigma$  内, 则一切接近于它的点就都含在这  $\sigma$  内, 因此, 就都成为点  $x^*$ .

我们的任务是要证明点  $b$  亦属于点  $x^*$  之列.

因为一切  $x^* \leq b$ . 故亦存在着 [11]

$$\sup\{x^*\} = c \leq b.$$

像区间  $[a, b]$  内的任一点那样,  $c$  必属于某一  $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$ .  $\alpha < c < \beta$ . 但依上确界的性质, 就能求出  $x_0^*$  使  $\alpha < x_0^* \leq c$ . 区间  $[a, x_0^*]$  已能用有限个区间  $\sigma$  来覆盖 (依点



$x^*$  的定义) 现在只要再把  $\sigma_0$  加入这些区间去, 他们就能覆盖住全区间  $[a, c]$  了, 因此  $c$  也属于点  $x^*$  之列.

而且很明显地,  $c$  不能小于  $b$ , 因为否则在  $c$  与  $\beta$  之间将能再求出点  $x^*$ , 违反数  $c$  是一切  $x^*$  的上确界的定义. 这样, 必须  $b = c$ ; 意即  $b$  是  $x^*$  中的一点, 即区间  $[a, b]$  能用有限个区间  $\sigma$  来覆盖, 这就是我们所要证明的.

必须注意, 基本区间  $[a, b]$  是闭区间以及  $\Sigma$  中的区间  $\sigma$  是开区间这两个假定对于引理的结论的真实性是同等重要的. 例如, 开区间

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \cdots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \cdots$$

的全体覆盖区间  $(0, 1]$ , 但从它们中间就不能选出具有同样性质的有限子系. 类似于此, 闭区间

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \cdots, \left[\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right], \cdots \text{ 及 } [1, 2]$$

覆盖住区间  $[0, 2]$ , 但也不能从它们中间选出具有同样性质的有限子系.

**89. 基本定理的新证明** 今将指出博雷尔引理怎样被应用着去证明连续函数的基本定理——布尔查诺—柯西, 魏尔斯特拉斯及康托的定理.

1° 布尔查诺—柯西第一定理 [80] 这次的证明将要从反面着手. 设——在遵守定理的假定之下——函数  $f(x)$  始终不在任何一点等于零. 则依 [80] 的引理, 区间  $[a, b]$  内的每一点  $x'$  可以用这样的邻域  $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$  盖住, 使  $f(x)$  在这范围内保持确定的符号<sup>①</sup>.

这种邻域所成的无穷系  $\Sigma = \{\sigma\}$  自然就覆盖住全部给定区间  $[a, b]$ . 因此, 依博雷尔引理, 只要其中有限个区间所成的子系  $\Sigma^*$  也就够用了.

给定区间的左端点  $a$  属于系  $\Sigma^*$  中的某一个邻域内, 就说是邻域  $\sigma_1 = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ . 这邻域的右端  $x_1 + \delta_1$  又属于  $\Sigma^*$  中的另一邻域  $\sigma_2 = (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ , 点  $x_2 + \delta_2$  又属于  $\Sigma^*$  中的邻域  $\sigma_3 = (x_3 - \delta_3, x_3 + \delta_3)$ , 等等 (图 35).

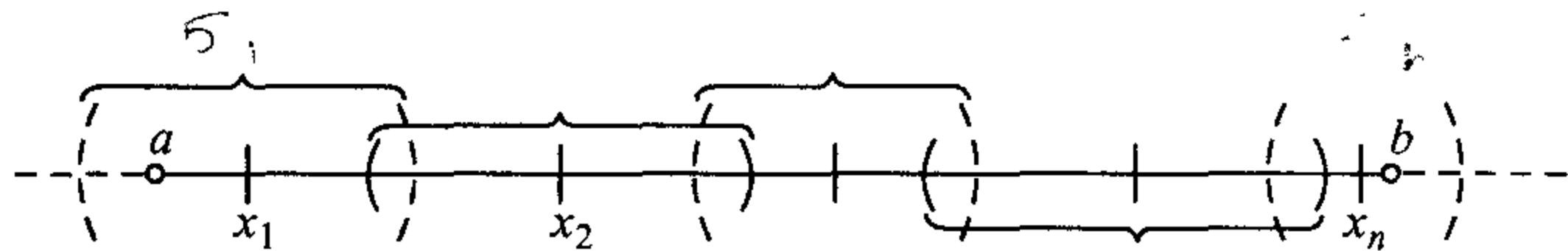


图 35

经过有限次向右移动的步骤以后, 我们将到达  $\Sigma^*$  中的邻域  $\sigma_n = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ , 在它里面已经含有给定区间的右端点  $b$ . 若除去区间

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n \tag{6}$$

<sup>①</sup>即在这邻域与区间  $[a, b]$  的公共部分, 因  $x$  仅能在它里面变动.



以外  $\Sigma^*$  还包含任何旁的区间, 则显然可以把它们省略去了.

在邻域  $\sigma_1$  内函数  $f(x)$  保持着确定的符号, 就是  $f(a)$  的符号. 但在  $\sigma_2$  内函数亦有确定的符号, 它也应当和  $f(a)$  的符号一致, 因为  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  有互相重叠的部分. 同样可知, 函数在次一邻域  $\sigma_3$  内也将保持与  $f(a)$  同样的符号, 因为  $\sigma_3$  与  $\sigma_2$  也有互相重叠的部分, 等等. 最后达到结论, 在最后的邻域  $\sigma_n$  内函数亦有与  $f(a)$  同样的符号, 于是  $f(b)$  与  $f(a)$  的符号一致, 这就违反了假定. 定理证明完毕.

2° 魏尔斯特拉斯第一定理[84] 由于函数  $f(x)$  的连续性, 不论在区间  $[a, b]$  内取怎样的点  $x'$ , 当给定了  $\varepsilon > 0$  以后, 可以用适当小的邻域  $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$  盖住这点, 使得对于一切属于这邻域的  $x$  成立不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

或

$$f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$$

这样, 在每一个这种邻域的范围內, 函数  $f(x)$  显然是有界的: 它以  $f(x') - \varepsilon$  为下界, 以  $f(x') + \varepsilon$  为上界.

读者一定明白, 在这里对于具有上述性质的邻域的无穷系  $\Sigma$  也必须应用博雷尔引理. 从这引理推得, 在  $\Sigma$  内存在有限个邻域 (6), 其全体亦同样能覆盖住全区间  $[a, b]$ . 若

在  $\sigma_1$  内             $m_1 \leq f(x) \leq M_1,$   
在  $\sigma_2$  内             $m_2 \leq f(x) \leq M_2,$   
.....  
在  $\sigma_n$  内             $m_n \leq f(x) \leq M_n,$

则从数  $m_1, m_2, \dots, m_n$  内取出最小者当作  $m$ , 从数  $M_1, M_2, \dots, M_n$  内取出最大者当作  $M$ , 显然在全区间  $[a, b]$  内将有

$$m \leq f(x) \leq M.$$

这就是我们所要证明的.

3° 康托定理[87] 给定任意数  $\varepsilon > 0$ . 在这次对于区间  $[a, b]$  内的每一点  $x'$  我们用这样的邻域  $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$  来盖住它, 使得在它的范围内成立不等式

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若  $x_0$  同样是这邻域中的点, 则同时也有

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样, 对于  $\sigma'$  内的任意两点  $x$  及  $x_0$  将有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



把每一邻域  $\sigma'$  向中心缩短一半, 即不考察邻域  $\sigma'$  而考察邻域

$$\overline{\sigma'} = \left( x' - \frac{\delta'}{2}, x' + \frac{\delta'}{2} \right).$$

由这些邻域同样能组成覆盖全区间  $[a, b]$  的系  $\overline{\Sigma}$ , 而且我们正是要对  $\overline{\Sigma}$  来应用博雷尔引理. 这样, 区间  $[a, b]$  就能用  $\overline{\Sigma}$  内的有限个区间

$$\overline{\sigma}_i = \left( x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

来覆盖.

今设  $\delta$  是一切数  $\frac{\delta_i}{2}$  中的最小者, 而  $x_0, x$  是给定区间内满足条件,

$$|x - x_0| < \delta \tag{7}$$

的任意两点. 点  $x_0$  应当属于某一个被选出的邻域, 设为

$$\overline{\sigma}_{i_0} = \left( x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2}, x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2} \right),$$

于是  $|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$ .

因为  $\delta \leq \frac{1}{2}\delta_{i_0}$ , 故由 (7),  $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$ , 由此  $|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}$ , 即点  $x$  (点  $x_0$  当然也是) 属于那最初取出的邻域

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0}, x_{i_0} + \delta_{i_0}),$$

该邻域收缩了以后就得出邻域  $\overline{\sigma}_{i_0}$ , 这时, 依那些最初取出的邻域的性质, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

由于选取  $\delta$  并不依赖于点  $x_0$  的地位, 函数  $f(x)$  的一致连续性就已证明.

由上述论证很易看出, 当个别点的邻域的“局部”性质必须扩充到全部所考察的区间时, 博雷尔引理就常能很成功地用来达到这目的.



# 第三章 导数及微分

## §1. 导数及其求法

90. 求动点速度的问题 我们将从特殊的例题开始, 就是考察有重量的质点在真空中 (为着不计空气的阻力) 的自由降落.

若时间  $t$ (秒) 是从开始降落的时候计算起的, 则在这段时间内所经过的路程  $s$ (米), 依已知的公式可表示为

$$s = \frac{g}{2}t^2, \tag{1}$$

式中  $g = 9.81$ (米/秒<sup>2</sup>). 由此出发, 需要确定质点在时刻  $t$ [即当质点在位置  $M$  时 (图 36)]的运动的速度的速度  $v$ .

给变量  $t$  加一增量  $\Delta t$ , 并考察时刻  $t + \Delta t$ , 其时质点在位置  $M_1$ . 在时间  $\Delta t$  内的路程的增量  $MM_1$  记成  $\Delta s$ .

在 (1) 内用  $t + \Delta t$  代换  $t$ , 则得路程的新值的表达式

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2,$$

由此

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + \Delta t^2).$$

用  $\Delta t$  除  $\Delta s$ , 我们就得出质点在区间  $MM_1$  内降落的平均速度:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t.$$

可见, 这速度随着  $\Delta t$  的变动而变动着, 故知在时刻  $t$  以后所经过的时间  $\Delta t$  愈少, 就愈能更好地表达出质点在时刻  $t$  的降落情况.

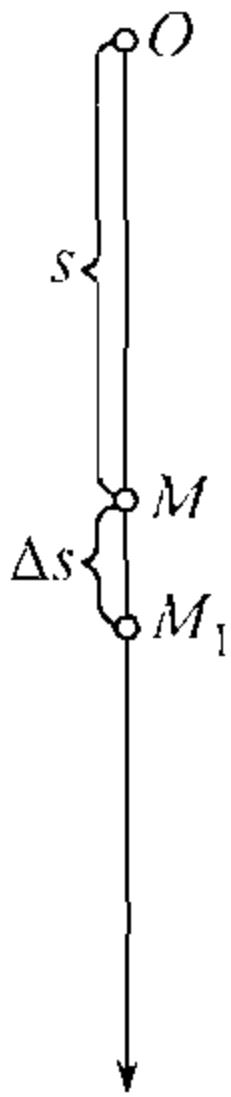


图 36



当  $\Delta t$  趋向于零时质点在时间  $\Delta t$  内的平均速度  $\bar{v}$  的极限  $v$  称为质点在时刻  $t$  的速度.

在目前的情形, 显然

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t \right) = gt.$$

类似地, 可以算出质点在一般直线运动中的速度  $v$ , 质点的位置由它到某一始点  $O$  的距离  $s$  所确定; 这距离即称为它所经过的路程. 时间  $t$  由某一起始的时刻算起, 而且并不一定要从质点在位置  $O$  的时刻算起. 当已经知道运动方程:  $s = f(t)$  时, 运动就作为完全给定的了. 质点在任何时刻的位置即可由运动方程确定; 在刚才考察的例题内, 方程 (1) 就担任着这种角色.

要确定在所给时刻  $t$  的速度  $v$ , 必须同上面那样给  $t$  以增量  $\Delta t$ ; 路程  $s$  就对应地增大  $\Delta s$ . 比式

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

表示出在时间  $\Delta t$  内的平均速度  $\bar{v}$ . 由此, 使趋向极限, 就得出在时刻  $t$  的真实速度  $v$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

以下我们将考察另一重要的问题, 也将导致相似的极限运算.

**91. 在曲线上作切线的问题** 设已给曲线  $(K)$  及其上一点  $M$  (图 37); 今将建立曲线在点  $M$  处的切线的概念.

在中学教本内, 圆的切线即定义为“与曲线只有一个公共点的直线”. 但这定义有特殊性, 不能说明相切的本质. 例如, 若企图应用这定义于抛物线  $y = ax^2$  (图 38, a), 则在原点  $O$  处两坐标轴都适合这定义; 但在这时大概读者也能立刻明白, 事实上仅  $x$  轴是抛物线在点  $O$  处的切线!

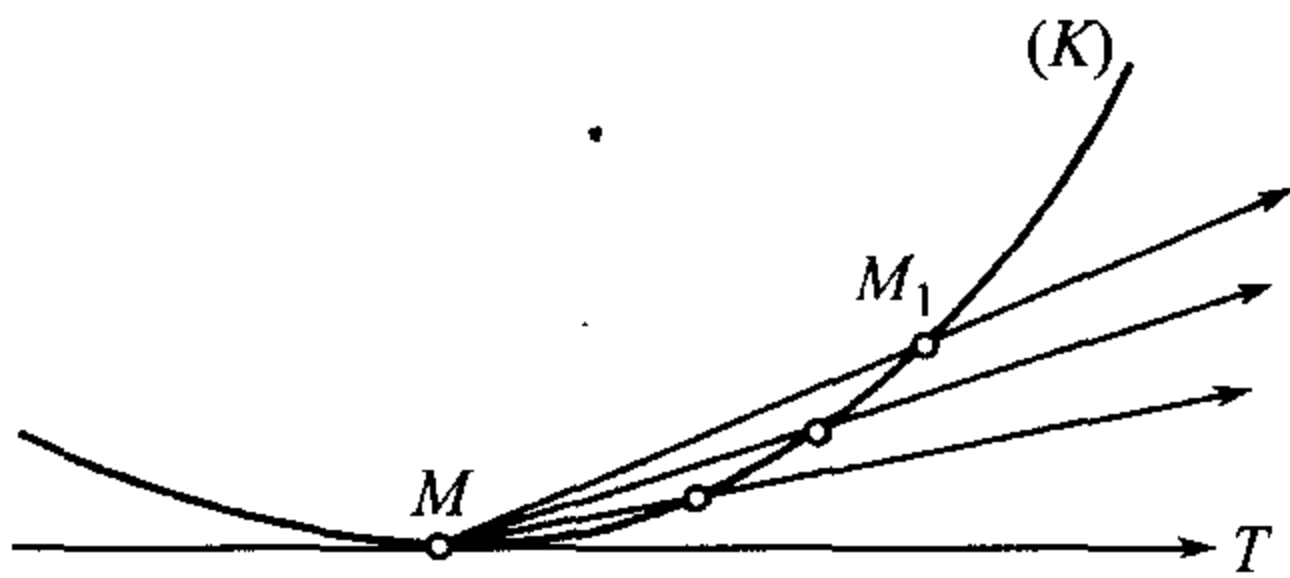


图 37

现在我们就将给出切线的普遍定义. 在曲线  $(K)$  上 (图 37), 除点  $M$  以外再取一点  $M_1$ , 并引割线  $MM_1$ . 当点  $M_1$  沿曲线移动时, 这割线将绕点  $M$  而转动.

当点  $M_1$  沿曲线  $(K)$  而趋于与  $M$  重合时, 割线  $MM_1$  的极限位置  $MT$  就称为曲线  $(K)$  在点  $M$  处的切线 (这定义的意义就是, 只要弦  $MM_1$  充分小,  $\angle M_1MT$  就可成为任意小).

例如, 应用这定义求抛物线  $y = ax^2$  在任意点  $M(x, y)$  处的切线. 因为切线经过这点, 那么, 要正确地表示它的位置, 只要再知道它的斜率就够了. 这样, 问题就归结于: 求在点  $M$  处切线的斜率  $\operatorname{tg} \alpha$ .



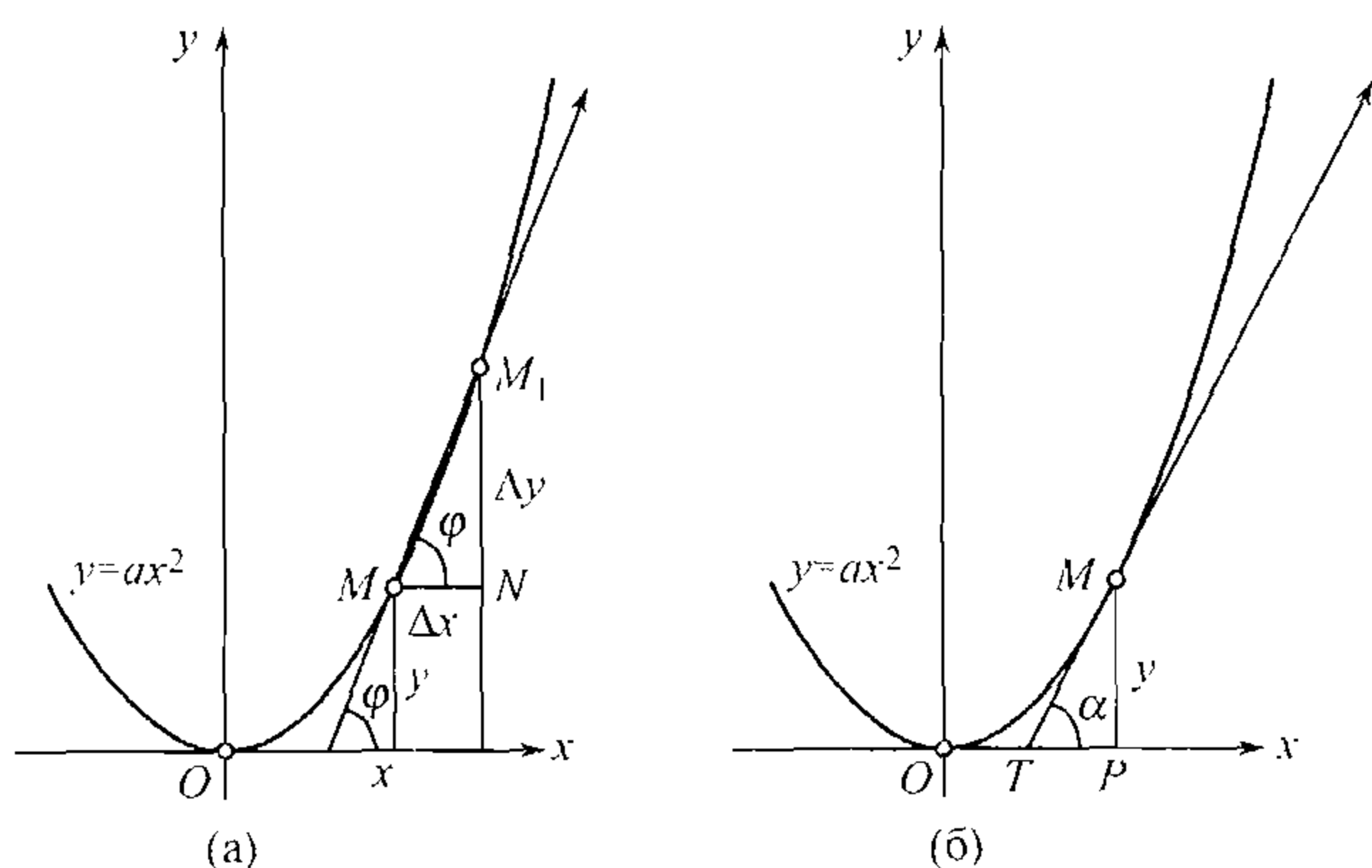


图 38

给横标  $x$  以增量  $\Delta x$ , 即由曲线上的  $M$  点移至  $M_1$ , 这点有横标  $x + \Delta x$  及纵标

$$y + \Delta y = a \cdot (x + \Delta x)^2$$

(图 38,a). 割线  $MM_1$  的斜率  $\operatorname{tg} \varphi$  由  $\triangle MNM_1$  内确定. 在这三角形内直角边  $MN$  等于横标的增量  $\Delta x$ , 而直角边  $NM_1$  显然是纵标的对应增量

$$\Delta y = a(2x \cdot \Delta x + \Delta x^2),$$

于是

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

要得出切线的斜率, 很易理解, 需要求上式当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限. 这样, 我们就得结果

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a \cdot \Delta x) = 2ax.$$

[顺便指出, 由此推得抛物线的切线的实际作图的简法. 就是, 由  $\triangle MPT$  (图 38,b), 线段

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

于是  $T$  是线段  $OP$  的中点. 因此, 要作出抛物线在点  $M$  处的切线, 只要平分线段  $OP$ , 把它的中点同  $M$  连接起来就是.]

在任意曲线的情形, 设曲线有方程

$$y = f(x),$$

其切线的斜率可用相似的方法来确定. 与横标的增量  $\Delta x$  对应的纵标的增量是  $\Delta y$ , 比式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



表示割线的斜率  $\operatorname{tg} \varphi$ . 求这比式当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限, 就得出切线的斜率

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

**92. 导数的定义** 在解决上面所考察的两个基本问题时, 我们所施行的演算, 把它们对照起来, 就很容易看出, 在两种情形内——若抽去变量的意义上的差别——本质上是同一个做法: 函数的增量除以自变量的增量, 再算出这比式的极限. 用这种方法我们就达到微分学的基本概念——导数的概念.

设函数  $y = f(x)$  是在区间  $\mathcal{X}$  内定义着的. 从自变量的某一数值  $x = x_0$  出发, 给它加一增量  $\Delta x \leq 0$  使不越出区间  $\mathcal{X}$ , 于是新值  $x_0 + \Delta x$  亦属于这区间. 那时函数值  $y = f(x_0)$  将换成新值  $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ , 即获得增量

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

若函数的增量  $\Delta y$  与引起这增量的自变量的增量  $\Delta x$  的比式当  $\Delta x$  趋向于 0 时的极限存在, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 这极限就称为函数  $y = f(x)$  当  $x = x_0$  时 (或在所给点  $x = x_0$  处) 关于自变量  $x$  的导数.

这样, 对于自变量的定值  $x = x_0$ , 函数的导数——如果存在的话——是一个确定的数<sup>①</sup>; 若在全区间  $\mathcal{X}$  内, 即对这区间内的每一  $x$  的数值, 导数总存在着, 则它仍是  $x$  的函数.

应用刚才引入的概念, 则在 90 内讲过的动点的速度就可以简括地说成:

速度  $v$  是动点所经过的路程  $s$  关于时间  $t$  的导数. 若在更普遍的意义上来理解“速度”这名词, 就可以永远把导数当作某一种“速度”来处理. 就是, 有了自变量  $x$  的函数  $y$ , 就可以提出变量  $y$  关于变量  $x$  (当已给  $x$  值时) 的变化率(变动的速度)的问题.

若加于  $x$  的增量  $\Delta x$  引起  $y$  的增量  $\Delta y$ , 则仿照 90, 比式  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  就可以作为当  $x$  变动一数量  $\Delta x$  时  $y$  关于  $x$  的平均变化率:

$$\bar{V} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当  $\Delta x$  趋向于 0 时这比式的极限自然就称为  $y$  在所给  $x$  值时的变化率:

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{V} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

即刚好是  $y$  关于  $x$  的导数.

<sup>①</sup>暂时限于上述极限为有限的情形 [参阅 101].



在 91 内我们曾考察由方程  $y = f(x)$  所给定的曲线, 并已解决在给定点处引一切线的问题. 现在我们可以把所得的结果叙述为:

切线的斜率  $\operatorname{tg} \alpha$  是纵标  $y$  关于横标  $x$  的导数.

导数的这一几何说明经常是有用处的.

我们再补充几个类似于上面已考察过的例子以说明导数的概念.

若运动的速度  $v$  不是常量, 它本身亦随着时间  $t$  的过程而变动;  $v = f(t)$ , 则称“速度的变化率”为加速度.

就是, 若对应于时间的增量  $\Delta t$  速度的增量为  $\Delta v$ , 则比式

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

表示出在时间  $\Delta t$  内的平均加速度, 而它的极限就给出在所给时刻的运动的加速度:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

这样, 加速度是速度关于时间的导数.

在热学方面, 我们将用导数以建立物体在所给温度时的热容量的概念.

用下面的记号表示这问题内引入的物理量:  $\theta$  是温度 (摄氏度),  $W$  是使物体从  $0^\circ\text{C}$  加热至  $\theta^\circ\text{C}$  所需要的热量 (卡). 显然  $W$  是  $\theta$  的函数:  $W = f(\theta)$ . 给  $\theta$  以一增量  $\Delta\theta$ , 则  $W$  亦得一增量  $\Delta W$ . 物体从  $\theta^\circ\text{C}$  加热至  $(\theta + \Delta\theta)^\circ\text{C}$  时的平均热容量就是

$$\bar{c} = \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

但一般地说, 因为当  $\Delta\theta$  变动时这平均热容量亦变动着, 我们就不能用它作为在所给温度  $\theta$  时的热容量. 要得出后者, 必须将上式取极限:

$$c = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \bar{c} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

因此, 可以说, 物体的热容量是热量关于温度的导数.

最后, 从电学内取出一个例子: 建立在所给时刻的电流强度的概念.

用  $t$  表示从某一时刻算起的时间 (秒), 用  $Q$  表示在这时间内流过导线的横截面的电量 (库仑). 显然  $Q$  是  $t$  的函数:  $Q = f(t)$ . 仿照以前的论断, 可得在时间  $\Delta t$  内的平均电流强度是

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

而在所给时刻的电流强度则可由极限

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{I} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

来表示. 即电流强度是流过的电量关于时间的导数.



一切这些导数的应用 (很容易再多举一些) 十分鲜明地表明着一个事实, 即导数的概念与各种知识领域内的基本概念是很紧密地关联着的.

导数的求法, 其性质的研究及应用就是微分学的主要的研究对象.

导数的表示法常使用各种记号:

$\frac{dy}{dx}$  或  $\frac{df(x_0)}{dx}$  ① 莱布尼茨 (G.W.Leibniz) :

$y'$  或  $f'(x_0)$  拉格朗日 (J.L.Lagrange) ;

$Dy$  或  $Df(x_0)$  柯西 (A.L.Cauchy) .

以后我们使用拉格朗日的简单的表示法为主. 若应用函数表示法  $f'(x_0)$ , 则在括号内的字母  $x_0$  就指在取导数时的那个自变量的数值. 最后须指出, 有时, 当关于哪一个变量而取导数 (同它比较以确定“函数的变化率”) 都可能发生怀疑时, 这变量就用下标的形式写出:

$$y'_x, f'_x(x_0), D_x y, D_x f(x_0),$$

并且下标  $x$  与正在取导数的自变量的特殊数值  $x_0$  并无关系.

(在某种意义上, 可以说, 整个记号

$$\frac{df}{dx}, f' \text{ 或 } f'_x, Df \text{ 或 } D_x f$$

就担任着导函数的函数记号的角色.)

现在应用刚才引入的表示导数的记号, 记下前面得出的某些结果. 对于运动的速度就有:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{或} \quad v = s'_t,$$

对于加速度就有:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{或} \quad a = v'_t.$$

类似地, 曲线  $y = f(x)$  的切线的斜率就写成:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg} \alpha = y'_x,$$

以及其他等等.

**93. 求导数的例题** 现求一系列的初等函数的导数作为例题.

1° 首先注意到明显的结果: 若  $y = c = \text{常量}$ , 则不论  $\Delta x$  是怎样的, 恒有  $\Delta y = 0$ , 于是  $y' = 0$ ; 又若  $y = x$ , 则  $\Delta y = \Delta x$ , 而  $y' = 1$ .

2° 今设  $y = x^n$ , 此处  $n$  是自然数.

给  $x$  以增量  $\Delta x$  ②; 则  $y$  的新的数值就是

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots$$

①我们暂时把莱布尼茨的记法当作整个记号看待; 下面 [104] 我们将看到, 它们也可以当作分式看待.

②若所求的是变元的任意值时的导数, 则通常就用那表示变元的字母来表示它, 而不加任何下标.



于是

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots,$$

而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots.$$

因为当  $\Delta x \rightarrow 0$  时除首项以外的一切项都趋向于零, 故

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

3° 若  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$ , 于是

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

由此

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

这时当然假定  $x \neq 0$ .

4° 考察函数  $y = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ). 就有:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \sqrt{x + \Delta x}, \\ \Delta y &= \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}; \end{aligned}$$

最后, 利用根式的连续性, 就得

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

一切这些结果, 都可包含在下面的情形内作为它的特殊情形.

5° 幂函数:  $y = x^\mu$  (此处  $\mu$  是任意实数).  $x$  的变动区域依赖于  $\mu$ ; 它已在 48, 2° 内被指出. 我们有 ( $x \neq 0$  时)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$



若利用 77[5] (B) ] 内已算出的极限, 便有

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1} \textcircled{1}.$$

在特殊情形

若

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{则} \quad y' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

若

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{则} \quad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6° 指数函数:  $y = a^x (a > 0, -\infty < x < +\infty)$ . 此处

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

利用 77[5] (6) ] 内已算出的极限, 可得:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

特殊情形,

若  $y = e^x$ , 则亦得  $y' = e^x$ .

因此, 指数函数 (在  $a > 1$  时) 的增大率与函数值成比例: 函数达到愈大的数值时, 它在该时刻就增大得愈快. 这就表出指数函数增大的准确性质, 我们在前面也已经讲到过它了 [参阅 65].

7° 对数函数:  $y = \log_a x (0 < a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ . 在这情形

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

利用 77[5](a)] 内已算出的极限:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

特殊情形, 对于自然对数就得出非常简单的结果:

在

$$y = \ln x \quad \text{时有} \quad y' = \frac{1}{x}.$$

这是作理论研究时宁愿采用自然对数的一种 (虽然在本质上并非新的) 根据.

对数函数 (在  $a > 1$  时) 的增大率与变元的数值成反比, 且在变元无限增大时它保持着正值而趋于零, 这情况与以前 [65] 所讲过的是符合的.

<sup>①</sup>若  $\mu > 1$ , 则很易直接求得在  $x = 0$  时的导数值:  $y' = 0$ .



8° 三角函数 设  $y = \sin x$ , 则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

利用函数  $\cos x$  的连续性及已知的极限 [54, 8) ]  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ , 就得

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x^{\text{①}}.$$

类似地, 我们可以求:

若  $y = \cos x$ , 则  $y' = -\sin x$ .

在  $y = \operatorname{tg} x$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\sin(x + \Delta x) \cdot \cos x - \cos(x + \Delta x) \cdot \sin x}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} \\ &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

由此, 同上面一样,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

类似地,

$$\text{若 } y = \operatorname{ctg} x, \text{ 则 } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x.$$

**94. 反函数的导数** 在求反三角函数的导数之前, 先证明下面的普遍的定理.

**定理** 设 1) 函数  $f(x)$  满足 83 中关于反函数存在的定理的条件, 2) 在点  $x_0$  有异于零的有限导数  $f'(x_0)$ . 于是在对应点  $y_0 = f(x_0)$  反函数  $g(y)$  的导数  $g'(y_0)$  也存在, 且等于  $\frac{1}{f'(x_0)}$ .

**证明** 给数值  $y = y_0$  以任意的增量  $\Delta y$ , 则函数  $x = g(y)$  亦将获得对应的增量  $\Delta x$ . 注意, 在  $\Delta y \neq 0$  时, 由于函数  $y = f(x)$  的单值性, 亦必有  $\Delta x \neq 0$ . 就有

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

<sup>①</sup>注意, 这公式的简洁性应归功于用弧度来做角度的单位, 假使我们用度数来做角度的单位, 则正弦与角的比值的极限将不等于 1, 而很易看出是  $\frac{\pi}{180}$ , 那时我们将有

$$(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x.$$



今若 (依任意规律) 使  $\Delta y \rightarrow 0$ , 则 —— 由于假定函数  $x = g(y)$  是连续的 —— 增量  $\Delta x \rightarrow 0$ . 但那时上式右端的分母趋于极限  $f'(x_0) \neq 0$ , 因此, 左端的极限存在, 且等于其倒数  $\frac{1}{f'(x_0)}$ ; 它就是导数  $g'(y_0)$ .

因此, 就有简单的公式:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

很易说明它的几何意义. 我们知道, 导数  $y'_x$  是函数  $y = f(x)$  的图像上的切线与  $x$  轴间的角  $\alpha$  的正切. 但反函数  $x = g(y)$  有着同一的图像, 不过它的自变量是  $y$  罢了. 因此导数  $x'_y$  等于同一切线与  $y$  轴间的角  $\beta$  的正切 (图 39). 这样, 上面导出的公式就变成大家知道的关系式

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

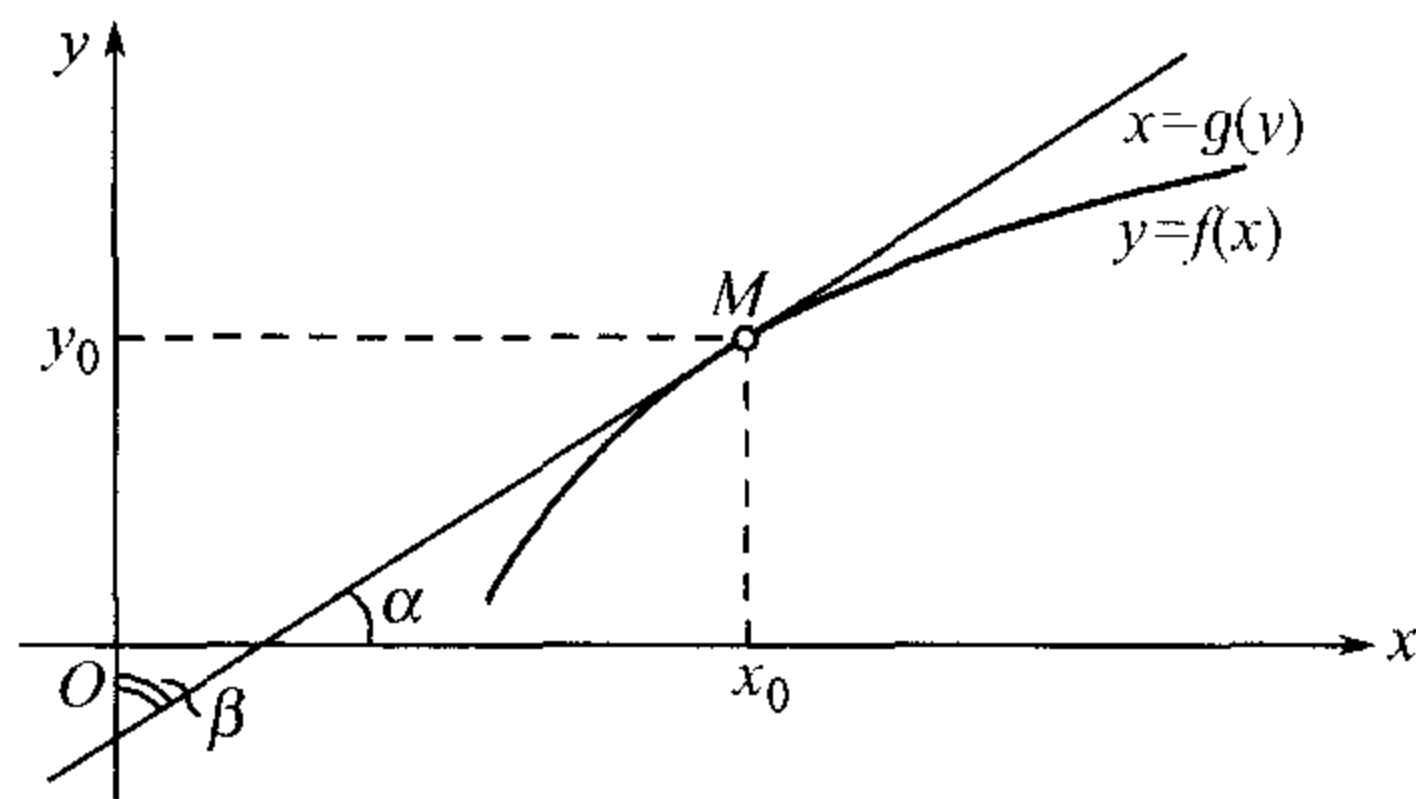


图 39

其中  $\alpha$  与  $\beta$  之和等于  $\frac{\pi}{2}$ .

令  $y = a^x$  作为例子. 它的反函数就是  $x = \log_a y$ . 因为 (参阅 6°)  $y'_x = a^x \cdot \ln a$ , 故依目前的公式, 有

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{y},$$

与 7° 相符合.

现在要转到求反三角函数的导数, 为了方便, 我们把变量  $x$  与  $y$  互相对调, 把已证明的公式改写成

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

9° 反三角函数 考察函数  $y = \arcsin x (-1 < x < 1)$ , 其中  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ . 它是函数  $x = \sin y$  的反函数. 函数  $x = \sin y$  当  $y$  在刚才指定的范围内时有正值的导数  $x'_y = \cos y$ , 在这种情形导数  $y'_x$  也存在, 且依我们的公式

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

因  $\cos y > 0$ , 根式前应取正号.

我们除去  $x = \pm 1$  的数值, 因为与它对应的数值是  $y = \pm \frac{\pi}{2}$ , 在这时导数  $x'_y = \cos y = 0$ .

函数  $y = \operatorname{arctg} x (-\infty < x < +\infty)$  是函数  $x = \operatorname{tgy}$  的反函数. 依我们的公式

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



类似地可以得出

对于

$$y = \arccos x. \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

对于

$$y = \operatorname{arctg} x. \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

95. 导数公式一览表 现在把我们已求出的一切导数公式列成一览表如下:

1.	$y = c$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
6.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

96. 函数的增量的公式 先在这里证明两个简单的命题, 它们在以后是有用的.

设函数  $y = f(x)$  是在区间  $\mathcal{X}$  内定义着的. 从这区间内的一个固定值  $x = x_0$  出发, 用  $\Delta x \geq 0$  表示  $x$  的任意增量, 但须限制  $x_0 + \Delta x$  使不越出  $\mathcal{X}$  的范围以外. 于



是对应的函数的增量就是

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1° 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处有 (有限的) 导数  $y'_x = f'(x_0)$ , 则函数的增量可以表示为如下的形式:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (2)$$

或更简短地

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (2a)$$

式中的  $\alpha$  是依赖于  $\Delta x$  的量, 且随着  $\Delta x$  一同趋于零.

因为由导数的定义, 在  $\Delta x \rightarrow 0$  时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'_x,$$

故令

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

就看出也有  $\alpha \rightarrow 0$ . 由此解出  $\Delta y$ , 即得公式 (2a).

因为量  $\alpha \cdot \Delta x$  (在  $\Delta x \rightarrow 0$  时) 是较  $\Delta x$  更高阶的无穷小, 故使用在 60 内引入的记法, 我们的公式就可以改写成

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (3)$$

或

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x). \quad (3a)$$

**附注** 到现在为止, 我们算作  $\Delta x \geq 0$ ; 故量  $\alpha$  在  $\Delta x = 0$  时是不曾定义的. 当我们说在  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\alpha \rightarrow 0$ , 必已预先假设 (像通常那样)  $\Delta x$  系依任意规律趋于零, 但并不取得零值. 现在就令在  $\Delta x = 0$  时  $\alpha = 0$ ; 那时公式 (2) 在  $\Delta x = 0$  时自然仍为有效. 然除此以外,  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\alpha \rightarrow 0$  这一关系却可比以前得到更广义的理解, 就是在  $\Delta x$  趋于零的过程中, 它也可以取等于零的数值了.

由已证明的公式直接推得:

2° 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处有 (有限的) 导数, 则函数在这点必然是连续的.

实因, 由 (2a), 很清楚地, 由  $\Delta x \rightarrow 0$  的关系就立即引出  $\Delta y \rightarrow 0$ .



97. 求导数的几个简单法则 在前几目内我们已求出初等函数的导数. 在这一目及下面一目内, 我们将建立一系列的法则, 用了它们就可以求任何由初等函数经过有限次的算术运算及叠置 [51] 所得出的函数的导数.

I. 设函数  $u = \varphi(x)$  (在定点  $x$  处) 有导数  $u'$ . 我们要证明, 函数  $y = cu$  ( $c =$  常数) (在同一点处) 也有导数, 并求出它.

若自变量  $x$  得一增量  $\Delta x$ , 则函数  $u$  亦得一增量  $\Delta u$ , 而由开始的数值  $u$  变为数值  $u + \Delta u$ . 函数  $y$  的新值就是  $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$ .

由此  $\Delta y = c \cdot \Delta u$  而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

因此, 导数存在且等于

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

这公式表示这样一条法则: 常数因子可以从导数的符号内取出.

II. 设函数  $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ , (在定点  $x$  处) 有导数  $u', v'$ . 今证明, 函数  $y = u \pm v$  (在同一点处) 也有导数, 并求出它.

给  $x$  以增量  $\Delta x$ ; 于是  $u, v$  及  $y$  就对应地各得增量  $\Delta u, \Delta v$  及  $\Delta y$ . 它们的新值  $u + \Delta u, v + \Delta v$  及  $y + \Delta y$  可用同样的关系式连接着:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v),$$

由此

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

于是导数  $y'$  存在且等于

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

这结果可以很容易地推广到任意有限个加数的情形 (用同样的方法).

III. 在关于函数  $u, v$  的同样的假定下, 我们证明, 函数  $y = u \cdot v$  也有导数, 并求出它.

同上面一样, 对应于增量  $\Delta x$  有增量  $\Delta u, \Delta v$  及  $\Delta y$ ; 这时  $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$ , 于是

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$



因为根据 96, 2°, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  也有  $\Delta v \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

即导数  $y'$  存在并等于

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

若  $y = uvw$ , 并且  $u', v', w'$  都存在, 则

$$y' = [(uv) \cdot w]' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

很易判断, 在  $n$  个因子相乘时将类似地有:

$$[\overbrace{uvw \cdots s}^n]' = u'vw \cdots s + uv'w \cdots s + uvw' \cdots s + \cdots + uvw \cdots s'. \quad (4)$$

要证明这事, 我们利用数学归纳法. 假定公式 (4) 在  $n$  个因子相乘时是真实的, 再证明它在  $(n+1)$  个因子相乘时也是真实的:

$$[\overbrace{uvw \cdots st}^{n+1}]' = [(\overbrace{uvw \cdots s}^n) \cdot t]' = (uvw \cdots s)' \cdot t + (uvw \cdots s) \cdot t';$$

将导数  $(uvw \cdots s)'$  依公式 (4) 展开, 就得出公式

$$[uvw \cdots st]' = u'vw \cdots st + uv'w \cdots st + \cdots + uvw \cdots s't + uvw \cdots st',$$

完全类似于 (4). 因为公式 (4) 在  $n=2$  及 3 时的真实性我们已直接证明了, 所以这公式对于任意的  $n$  也是真实的.

IV. 最后, 若  $u, v$  满足于前面的假定, 此外, 又假定  $v$  异于零, 则我们将证明, 函数  $y = \frac{u}{v}$  也有导数, 并求出它.

用同上面一样的表示法, 就有

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

于是

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)}.$$

在此处使  $\Delta x$  趋向于零 (则同时亦有  $\Delta v \rightarrow 0$ ), 就证明了导数的存在,

且

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$



**98. 复合函数的导数** 现在我们可以建立一条在实际求导数时十分重要的法则. 只要被组合的各个函数的导数已经知道时, 我们就能够按这法则来求复合函数的导数.

V. 设 1) 函数  $u = \varphi(x)$  在某一点  $x_0$  处有导数  $u'_x = \varphi'(x_0)$ , 2) 函数  $y = f(u)$  在对应点  $u_0 = \varphi(x_0)$  也有导数  $y'_u = f'(u)$ . 于是复合函数  $y = f(\varphi(x))$  在上述的点  $x_0$  处亦将有导数, 它等于  $f(u)$  的导数与  $\varphi(x)$  的导数的乘积:

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)^{\textcircled{1}},$$

或更简短地

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

为了证明, 给  $x$  以任意增量  $\Delta x$ ; 设  $\Delta u$  是函数  $u = \varphi(x)$  的对应增量, 又最后,  $\Delta y$  是由增量  $\Delta u$  所引起的函数  $y = f(u)$  的增量. 利用关系式 (2a), 把  $x$  换成  $u$ , 就改写成

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

( $\alpha$  依赖于  $\Delta u$  并与它一同趋向于零). 用  $\Delta x$  除各项, 就得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

若  $\Delta x$  趋向于零, 则  $\Delta u$  亦趋向于零 [96, 2°], 于是, 我们知道, 依赖于  $\Delta u$  的量  $\alpha$  亦将趋向于零. 因此, 有极限存在

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

它就是所求的导数  $y'_x$ .

**附注** 在此处就表现出 96 中的附注的用处了: 当  $\Delta x$  是自变量的增量时, 我们可以假定它异于零, 但对于  $x$  的函数  $u = \varphi(x)$  的增量  $\Delta u$  来说, 即使在  $\Delta x \neq 0$  时我们也没有权利设想  $\Delta u \neq 0$  了.

**99. 例题<sup>②</sup>** 先举几个应用法则 I ~ IV 的例题.

1) 考察多项式:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n.$$

先依法则 II, 再依法则 I, 就有

$$\begin{aligned} y' &= (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \cdots + (a_{n-2} x^2)' + (a_{n-1} x)' + (a_n)' \\ &= a_0 (x^n)' + a_1 (x^{n-1})' + \cdots + a_{n-2} (x^2)' + a_{n-1} (x)' + (a_n)'. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>须着重指出, 记号  $f'_u(\varphi(x_0))$  表示函数  $f(u)$  关于变元  $u$  (并非关于  $x$ ) 的导数在这个变元取值  $u_0 = \varphi(x_0)$  时的值.

<sup>②</sup>以下用字母  $x, y, u, v$  表示变量, 而别的字母就表示常量.



利用 [95] 公式 1,2,3, 最后得

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

2)  $y = (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x$ . 依法则 III

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)' \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot (e^x)'$$

根据前一例题及 [95] 公式 4, 求出

$$y' = (4x - 5) \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x = (2x^2 - x - 4) \cdot e^x.$$

3)  $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ . 依法则 IV,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{a(x^2+1) - (ax+b) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

4) 再求函数  $y = \operatorname{tg} x$  的导数, 从公式  $y = \frac{\sin x}{\cos x}$  出发. 应用法则 IV(及 95 的公式 6, 7) 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{参阅 } 95, 8). \end{aligned}$$

5)  $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$ . 在这里必须先应用法则 IV, 再应用法则 II 及 III(及 95 公式 6, 7):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x \sin x + \cos x)'(x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x)(x \cos x - \sin x)'}{(x \cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x \cos x \cdot (x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x) \cdot (-x \sin x)}{(x \cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

这里分子与分母的导数是立刻算出的, 并未分开为两个步骤. 通过习题必须达到一般地能立刻写出导数的地步.

求复合函数的导数的例题:

6) 设  $y = \ln \sin x$ , 换言之,  $y = \ln u$ ,  $u = \sin x$ . 依法则 V,  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ . 导数  $y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}$  (公式 5) 应当对  $u = \sin x$  来取. 这样

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x. \quad (\text{公式 } 6).$$

7)  $y = \sqrt{1+x^2}$ , 即  $y = \sqrt{u}$ , 式中  $u = 1+x^2$ ; 依法则 V,

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (\text{公式 } 3, \text{例 } 1).$$



8)  $y = e^{x^2}$ , 即  $y = e^u$ , 式中  $u = x^2$ ;

$$y'_x = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2}. \quad (\text{V}; 4 \text{ 及 } 3).$$

当然, 把被叠置的函数各别地写出来在事实上没有这种必要.

9)  $y = \sin ax$ ;

$$y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax. \quad (\text{V}; 7, 1, 2).$$

10)  $y = (x^2 + x + 1)^n$ ;

$$y'_x = n(x^2 + x + 1)^{n-1} \cdot (x^2 + x + 1)' = n(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{n-1}. \quad (\text{V}; 3, \text{例} 1).$$

11)  $y = 2^{\sin x}$ ;

$$y'_x = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' = \ln 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x}. \quad (\text{V}; 4, 6)$$

12)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ;

$$y'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1 + x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (\text{V}; 12, 3).$$

碰到几层叠置的复合函数, 就要毫无遗漏地逐次应用法则 V:

13)  $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}$ ; 于是

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x\right)'_x \quad (\text{V}; 3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}} \cdot \sec^2 \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)'_x = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{4\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}}. \quad (\text{V}; 8)$$

14)  $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ ; 在这情形

$$y'_x = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x}\right)'_x \quad (\text{V}; 4)$$

$$= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)'_x \quad (\text{V}; 3)$$

$$= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x \quad (\text{V}; 6)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}}. \quad (\text{V}; 3)$$

再举几个例题来应用一切的法则:

15)  $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ;

$$y' = \frac{1}{2}[(e^x)'_x - (e^{-x})'_x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$



反之, 若  $y = \operatorname{ch} x$ , 则  $y' = \operatorname{sh} x$ . 最后, 同 4) 那样, 很易得出:

$$\text{若 } y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \text{ 则 } y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$\text{又若 } y = \operatorname{cth} x, \text{ 则 } y' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$16) y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})'_x \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

这结果亦可以从别的想法得出. 我们已在 49, 4) 内看到, 函数  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  就是函数  $x = \operatorname{sh} y$  的反函数; 因此 [94; 例 15; 48, 6°]

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$17) y = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}};$$

$$y' = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{(\sqrt{x^2 + a^2})^2} = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

$$18) y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1);$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot (1 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$19) y = \frac{1}{\sqrt{b - ac}} \ln \frac{\sqrt{ax + b} - \sqrt{b - ac}}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{b - ac}}$$

(我们假定:  $b - ac > 0$ );

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b - ac}} \left[ \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}}{\sqrt{ax + b} - \sqrt{b - ac}} - \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{b - ac}} \right] = \frac{1}{(x + c)\sqrt{ax + b}}.$$

$$20) y = \frac{2}{\sqrt{ac - b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax + b}{ac - b}}$$

(此处假定:  $ac - b > 0$ );

$$y' = \frac{2}{\sqrt{ac - b}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{ax + b}{ac - b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ac - b}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{(x + c)\sqrt{ax + b}}.$$

$$21) y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \sin x + b}{a + b \sin x} \quad \left(|b| < a; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a \sin x + b}{a + b \sin x}\right)^2}} \\ &\quad \times \frac{a \cos x \cdot (a + b \sin x) - (a \sin x + b) \cdot b \cos x}{(a + b \sin x)^2} = \frac{1}{a + b \sin x}. \end{aligned}$$



$$22) y = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + a \sin x - \sqrt{b^2 - a^2} \cdot \cos x}{a + b \sin x} \quad (|a| < |b|);$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[ \frac{a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{b + a \sin x - \sqrt{b^2 - a^2} \cos x} - \frac{b \cos x}{a + b \sin x} \right] = \frac{1}{a + b \sin x}.$$

23) 作为一个习题, 我们再来研究关于幂指数式  $y = u^v (u > 0)$  的导数的问题, 式中  $u$  及  $v$  是  $x$  的函数, 并在所给点有导数  $u', v'$ .

把等式  $y = u^v$  取对数, 就得

$$\ln y = v \cdot \ln u. \quad (5)$$

这样,  $y$  的表达式可以改写成为  $y = e^{v \ln u}$ , 由此已经很清楚, 导数  $y'$  存在. 它的求法还可以更简单地做出, 就是使等式 (5) 两边的关于  $x$  的导数相等. 这时我们利用法则 V 及 III (记住  $u, v$  及  $y$  是  $x$  的函数), 就得到

$$\frac{1}{y} y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

由此

$$y' = y \left( \frac{vu'}{u} + v' \ln u \right),$$

或用  $y$  的表达式代换它,

$$y' = u^v \left( \frac{vu'}{u} + v' \ln u \right). \quad (6)$$

这公式是莱布尼茨和 J. 伯努利 (Johann Bernoulli) 首先建立的.

例如, 若  $y = x^{\sin x}$ , 则  $y'_x = x^{\sin x} \left( \frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right)$ .

24) 假定函数  $f(x)$  有导数  $f'(x)$ , 写出下列函数的关于  $x$  的导数式

$$(a) \sin f(x), \quad (б) e^{f(x)}, \quad (в) \ln f(x),$$

并写出下列函数的关于  $t$  的导数式

$$(г) f(\sin t), \quad (д) f(e^t), \quad (е) f(\ln t).$$

答:  $(a) \cos f(x) \cdot f'(x); \quad (б) e^{f(x)} \cdot f'(x); \quad (в) \frac{f'(x)}{f(x)};$

$$(г) f'(\sin t) \cdot \cos t; \quad (д) f'(e^t) \cdot e^t; \quad (е) f'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}.$$

关于最后的三个例题 (г), (д), (е), 请读者注意, 记号  $f'(\dots)$  表示函数  $f(x)$  关于它所依赖的变元  $x$  的导数, 但在这变元的数值各为  $x = \sin t, e^t, \ln t$  时,  $f'(\dots)$  已经依赖于  $t$  了. 参阅 72 目 6° 的脚注.

25) 函数  $f(x)$  是在关于 0 为对称的区间内定义的, 若  $f(-x) = f(x)$ , 它就称为偶函数; 若  $f(-x) = -f(x)$ , 它就称为奇函数 (偶函数的例子, 如偶次幂函数  $x^2, x^4, \dots$ , 以及  $\cos x, \operatorname{ch} x$ ; 奇函数的例子, 如奇次幂函数  $x, x^3, \dots, \sin x, \operatorname{sh} x$ .)

试证明, 偶函数的导数 (假如存在) 为奇函数, 而奇函数的导数为偶函数.

26) 求出函数  $y = \ln |x|$  在  $x \geq 0$  时的导数.

在  $x > 0$  时, 显然  $y' = \frac{1}{x}$ ; 今将指出这公式在  $x < 0$  时仍为适用. 实际上, 把函数

$$y = \ln |x| = \ln(-x)$$



当作复合函数而求其导数, 那么, 在这种情形, 就亦有

$$y' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

27) 考察曲线

$$y = ax^n (n > 0).$$

在其上某一点  $(x, y)$  处的切线的斜率是 [91~92]:

$$\operatorname{tga} = y' = nax^{n-1}.$$

由图 40 看出, 线段  $TP$ (所谓“次切距”) 等于

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tga}} = \frac{ax^n}{nax^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

利用这事实可得到切线的简易作图法(91 的结果的推广).

28) 对于曲线(“悬链线”)

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} (a > 0),$$

用相似的方法, 得

$$\operatorname{tga} = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

在这次定义 (设想  $x > 0$ )

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{a}{y},$$

于是  $y \cdot \cos \alpha = a$ . 若从纵标  $y = DM$  的足  $D$ (图 41) 作切线  $MT$  的垂线  $DS$ , 则线段  $DS$  就等于  $a$ . 由此再推得在所考察的曲线上作切线的简易作图法; 把纵标  $DM$  当作直径作一半圆, 以点  $D$  为中心,  $a$  为半径截取交点  $S$ ; 直线  $MS$  就是切线.

29) 设质点沿着一轴在某一中心点的附近依下列规律而振动:

$$S = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (A, \omega > 0).$$

这种振动称为简谐振动;  $A$  是它的振幅,  $\omega$  是频率,  $\alpha$  是初相.

取路程  $S$  关于时间  $t$  的导数, 求得运动的速度:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

当  $S = 0$ , 即点经过中心时, 速度达到最大的数值  $\pm A\omega$ . 反之, 当点的位置离中心最远时 ( $S = \pm A$ ) 速度  $v = 0$ .

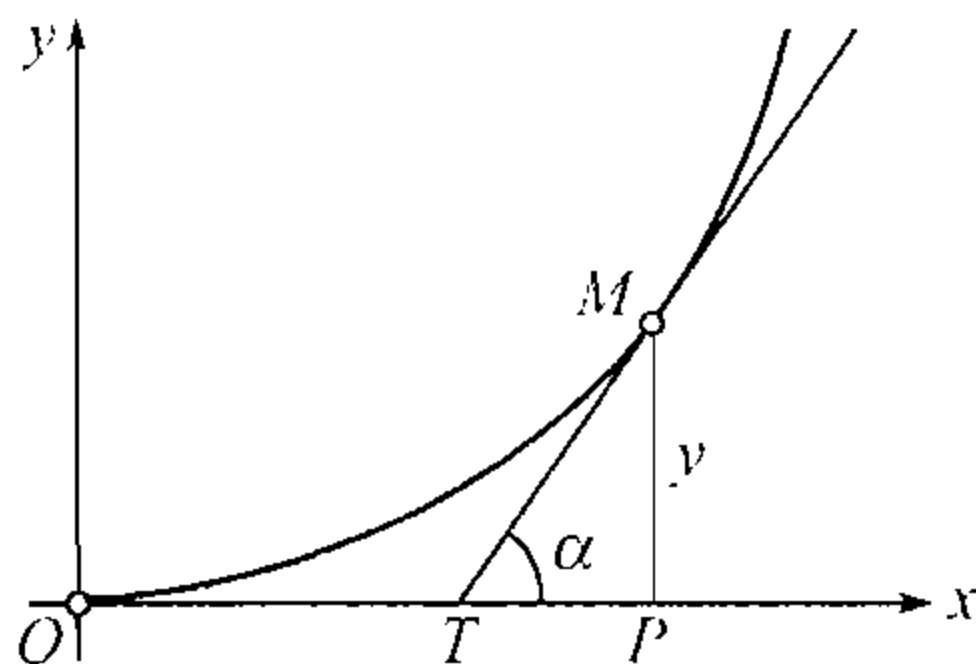


图 40

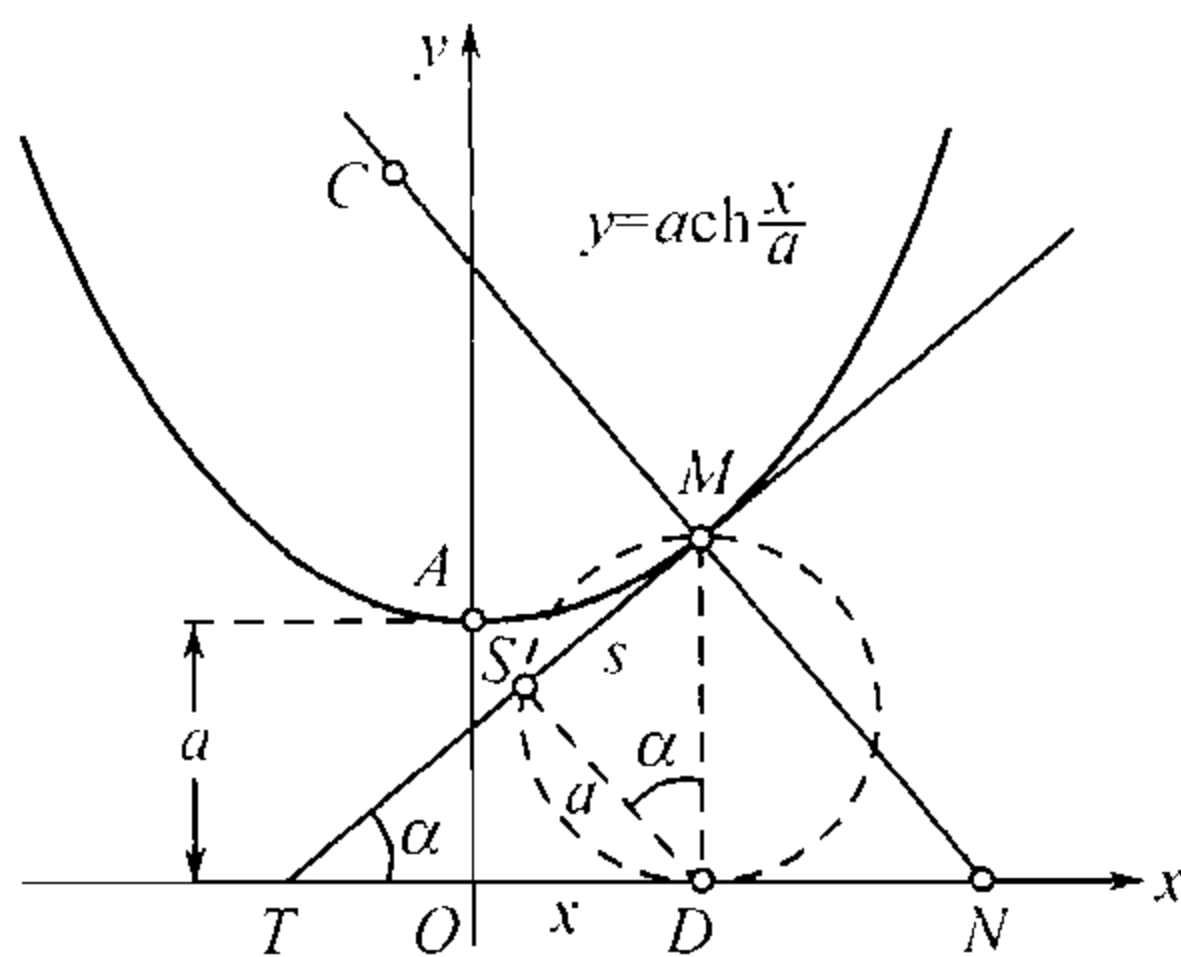


图 41



求  $v$  关于  $t$  的导数:

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

给出点的运动的加速度; 显然

$$a = -\omega^2 \cdot S.$$

由此, 引入动点的质量  $m$ , 依牛顿定律, 若简谐振动是由于力  $F$  的作用而发生, 则这力  $F$  可表示为:

$$F = -m\omega^2 \cdot S.$$

由此看出, 它永远指向着中心 (因为有与  $S$  相反的符号), 并与点离中心的距离成比例.

30) 依规律

$$S = Ae^{-kt} \sin \omega t \quad (A, k, \omega > 0)$$

而发生的运动称为阻尼振动, 因为有因式  $e^{-kt}$  存在, 虽则质点也在中心点附近作振动, 但总是逐渐趋向于和中心点重合:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0.$$

在这种情形

$$v = S'_t = Ae^{-kt}(\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t)$$

又

$$a = v'_t = -Ae^{-kt}(\omega^2 \sin \omega t + 2\omega k \cdot \cos \omega t - k^2 \cdot \sin \omega t).$$

再在括号内引入  $\pm k^2 \cdot \sin \omega t$ , 在明显的变形以后, 就得

$$\begin{aligned} a &= -Ae^{-kt}[(\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k(\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t)] \\ &= -(\omega^2 + k^2) \cdot S - 2k \cdot v. \end{aligned}$$

若这种振动是由于力  $F$  的作用而发生, 则  $F$  等于

$$F = -(\omega^2 + k^2)m \cdot S - 2km \cdot v.$$

我们看出, 它是由两种力: 1) 与质点离中心的距离成正比且指向着这中心的力 (同在调和振动的情形一样), 及 2) 与速度成正比且与速度方向相反的阻挠运动的力, 相加而成的.

**100. 单侧导数** 在结束这一节时, 我们来考察一些关于导数可能产生的特殊情形. 先从建立单侧导数的概念开始. 若所考察的数值  $x$  就是函数  $y = f(x)$  的定义区间  $\mathcal{X}$  的端点之一, 则在求比式  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  的极限时,  $\Delta x$  接近于零就仅限于从右 (当讲到区间的左端点时) 或从左 (右端点时). 在这种情形若极限存在, 就称为右导数或左导数. 函数的图像在对应点处就有单侧切线.



也可能碰到, 在内点  $x$  处比式  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  仅各有单侧极限存在 (在  $\Delta x \rightarrow +0$  或  $\Delta x \rightarrow -0$  时), 且并不相等; 它们也称为单侧导数. 函数的图像在对应点处将仅有两单侧切线存在, 它们组成一角; 该点就是**角点**(图 42).

考察函数  $y = f(x) = |x|$  作为一例. 从数值  $x = 0$  出发, 将有

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

若  $\Delta x > 0$ , 则

$$\Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

又若  $\Delta x < 0$ , 则

$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

这函数的图像由第一及第二象限角的分角线所组成, 原点就成为角点.

**101. 无穷导数** 若增量的比式  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  在  $\Delta x \rightarrow 0$  时趋于  $+\infty(-\infty)$ , 则这一广义的数也称为导数 (且像通常那样表示着). 单侧无穷导数的概念也可类似地建立起来. 导数的几何说明 (作为是切线的斜率) 也可推广到这一情形; 但在此处, 切线是平行于  $y$  轴的 (图 43, a, б, в, г).

在 (a) 及 (б) 的情形, 这导数各等于  $+\infty$  及  $-\infty$  (两个单侧导数符号相同); 而在 (в) 及 (г) 的情形两个单侧导数符号相异.

例如, 设  $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; 在  $x \neq 0$  时, 95 的公式 3 给出

$$f'_1(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

但它在  $x = 0$  时是不能用的. 我们要求在这点处的导数, 就应直接从导数的定义出发; 作比式

$$\frac{f_1(0 + \Delta x) - f_1(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}},$$

我们看出, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时它的极限就是  $+\infty$ . 同样可以相信, 对于函数  $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , 在  $x = 0$  时, 左导数等于  $-\infty$ , 而右导数等于  $+\infty$ .

应用导数概念的推广, 可以补充 94 中关于反函数的导数的定理, 指出即使在那种情形, 即当  $f'(x_0)$  等于 0 或  $\infty$  时, 反函数的导数  $g'(y_0)$  仍存在, 而且各等于  $\infty$  或 0. 例如, 因为函数  $\sin x$  在  $x = +\frac{\pi}{2}$  时有导数  $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 故反函数  $\arcsin y$  在  $y = \pm 1$  时有无穷导数 (就是  $+\infty$ ) 存在.

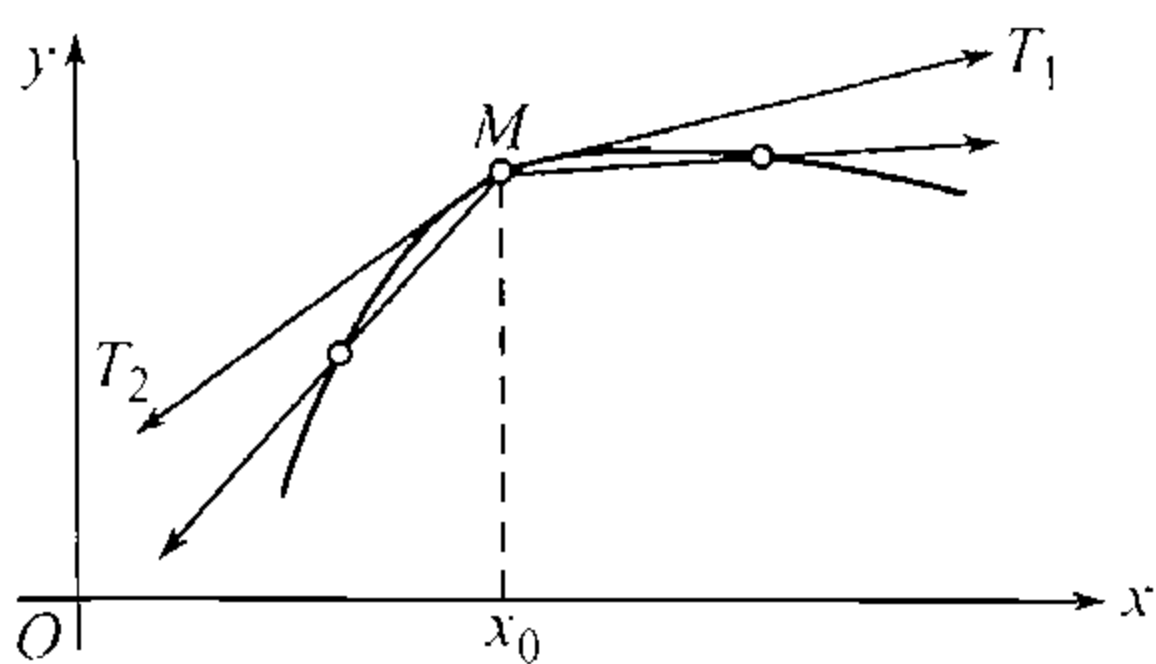


图 42

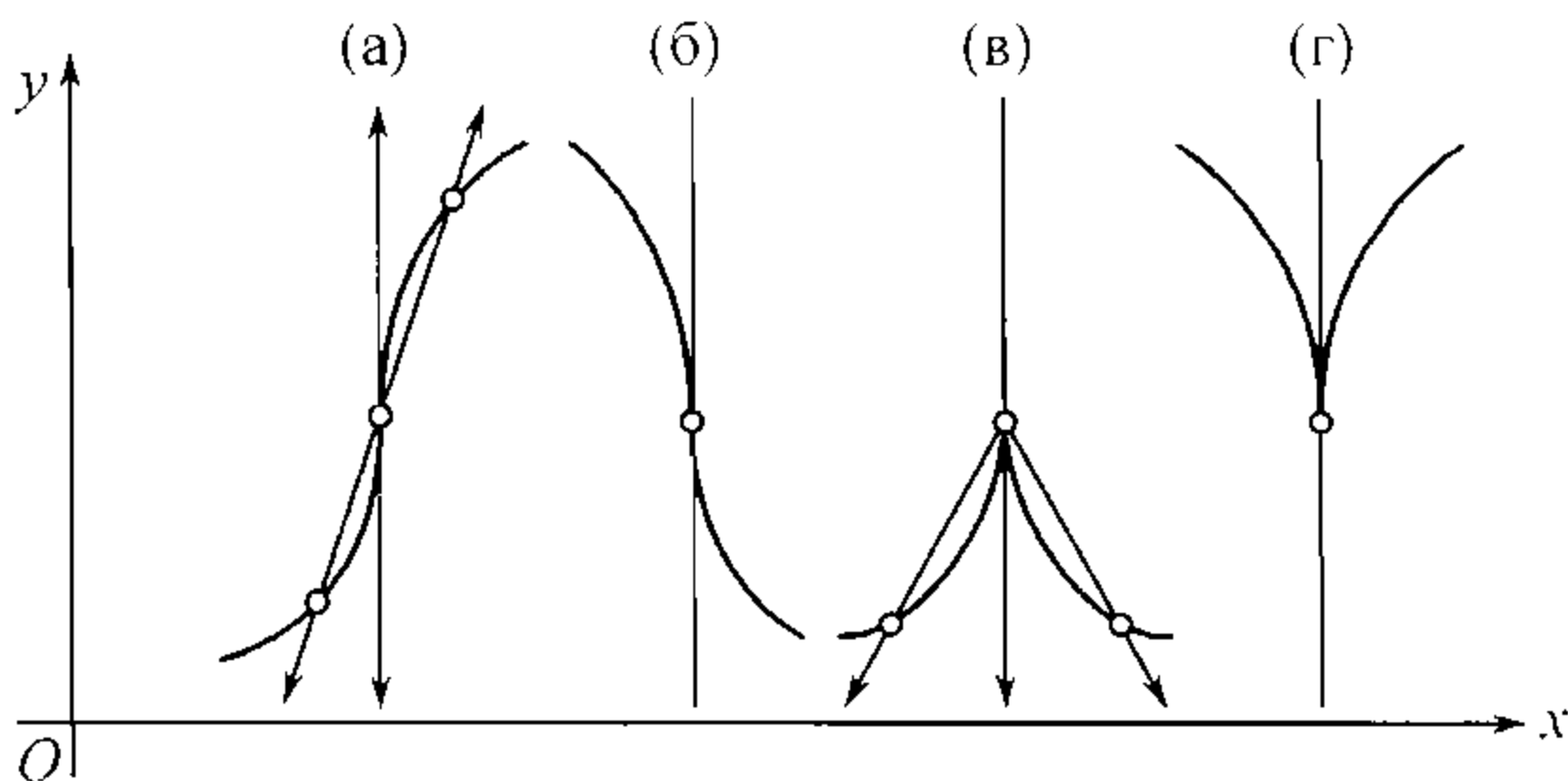


图 43



**102. 特殊情形的例题** 1° 导数不存在的例题 已经说过函数  $y = |x|$  在点  $x = 0$  处 [参阅 100] 并无通常的双侧导数. 但更有趣的是这样的例题, 函数

$$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} (x \neq 0 \text{ 时}), \quad f(0) = 0,$$

在  $x = 0$  时也是连续的 [70,5)], 但在这点却连单侧导数都没有. 事实上, 比式

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

在  $\Delta x \rightarrow \pm 0$  时不趋于任何极限.

由这函数的图像 (图 24) 很容易看出, 从原点  $O$  引出的割线  $OM_1$ , 在  $M_1$  趋于  $O$  时并无极限位置, 因此曲线在原点处没有切线 (即使是单侧的也没有).

在以后 [第二卷] 我们将再举一个值得注意的例题, 一函数在变元的一切数值时是连续的, 但在其中任何数值时都没有导数.

2° 导数间断的例题 若所给函数  $y = f(x)$  在某一区间  $\mathcal{X}$  内的每一点处有有限导数  $y' = f'(x)$  存在, 则这导数本身就也是  $\mathcal{X}$  内的  $x$  的函数. 到现在为止, 我们所碰到的例子内, 函数  $f'(x)$  都是连续的. 然而, 这也可能并不如此. 例如, 考察函数

$$f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} (x \neq 0 \text{ 时}), \quad f(0) = 0.$$

若  $x \neq 0$ , 则用通常的方法就求出它导数

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

但所得的结果在  $x = 0$  是不能用的. 在这种情形, 直接用导数概念的定义来讨论, 就有

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

同时, 清楚地,  $f'(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时并不趋于任何极限, 因此在  $x = 0$  时函数  $f'(x)$  有间断.

这对于任意的函数

$$f(x) = x^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x} (x \neq 0 \text{ 时}), \quad f(0) = 0,$$

只要  $2 > \alpha > 1$ , 也同样是真实的.

在这些例题内, 导数的间断都是属于第二类的. 这并非偶然的事件: 下面 [113] 我们将看到, 导数不能有第一类的间断, 即跃度.

## §2. 微分

**103. 微分的定义** 设函数  $y = f(x)$  是在某一区间  $\mathcal{X}$  内定义, 并且在所考察的点  $x_0$  处是连续的. 于是对应于变元的增量  $\Delta x$ , 函数的增量

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



就随着  $\Delta x$  一同成为无穷小. 现在提出一个非常重要的问题: 对于  $\Delta y$  是否存在着一个关于  $\Delta x$  为线性的无穷小  $A \cdot \Delta x$  ( $A = \text{常数}$ ), 使它与  $\Delta y$  的差是较  $\Delta x$  更高阶的无穷小:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \quad (1)$$

等式 (1) 在  $A \neq 0$  时成立就表明, 无穷小  $A \cdot \Delta x$  等价于无穷小  $\Delta y$ , 也就是说, 若取  $\Delta x$  作为基本无穷小时 [62, 63],  $A \cdot \Delta x$  就可当作  $\Delta y$  的主部.

若等式 (1) 成立, 则函数  $y = f(x)$  称为 (在所给数值  $x = x_0$  时) 可微的, 表达式  $A \cdot \Delta x$  就称为函数的微分, 用记号  $dy$  或  $df(x_0)$  表示.

(在后一种记号中, 括号内的  $x_0$  表示  $x$  的初值<sup>①</sup>.)

再重复一遍, 函数的微分有两个特性: (a) 它是变元的增量  $\Delta x$  的线性 (齐次) 函数, 并且 (b) 它与函数的增量相差一个数量, 这数量在  $\Delta x \rightarrow 0$  时是较  $\Delta x$  更高阶的无穷小<sup>16)</sup>.

考察几个例子.

1) 半径为  $r$  的圆的面积  $Q$  由公式  $Q = \pi r^2$  所给定. 若半径  $r$  增大  $\Delta r$ , 则数量  $Q$  的对应增量  $\Delta Q$  就是在半径为  $r$  与  $r + \Delta r$  的两个同心圆之间的圆环的面积. 由表达式

$$\Delta Q = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

立刻看出, 在  $\Delta r \rightarrow 0$  时  $\Delta Q$  的主部是  $2\pi r \cdot \Delta r$ ; 而这就是微分  $dQ$ . 在几何意义上它表示底等于圆周的长  $2\pi r$  而高为  $\Delta r$  的矩形的面积 (好像是把圆环“拉直”所得出的矩形).

2) 类似地, 半径为  $r$  的球的体积  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  在半径增大  $\Delta r$  时获得增量

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \cdot \Delta r + 4\pi r \cdot (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3.$$

在  $\Delta r \rightarrow 0$  时它的主部显然是  $dV = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$ . 这是底等于球的表面积  $4\pi r^2$  而高为  $\Delta r$  的一块薄片的体积; 它好像是由半径为  $r$  与  $r + \Delta r$  的两个同心球面之间的部分所展开的一般.

3) 最后, 考察质点依定律  $s = \frac{gt^2}{2}$  的自由降落. 在由时刻  $t$  至  $t + \Delta t$  的一段时间  $\Delta t$  内, 动点经过路程

$$\Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt \cdot \Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

<sup>①</sup> 此处  $df$  是一整个的记号, 表示函数  $f(x)$  的微分.

<sup>16)</sup> 用斜体字 (中译本是用楷体字) 印出的 (a) 与 (b) 两点一起构成了函数  $f$  在固定点  $x_0$  微分的定义的拆开形式. 我们要强调的是函数  $dy = df(x_0)$  的定义域 (如同所有的线性函数一样) 是整个实直线  $\mathcal{R}$ . 这意味着每一个实数  $\Delta x$  都对应着微分  $dy$  的确定的值; 这个值通过  $\Delta x$  用公式  $dy = A \cdot \Delta x$  表示, 其中数  $A$  是线性函数  $dy$  的斜率.



当  $\Delta t \rightarrow 0$  时它的主部是  $ds = gt \cdot \Delta t$ . 回想在时刻  $t$  的速度是  $v = gt$ [90], 就看出, 路程的微分 (近似地代替着路程的增量) 好像是质点在全部时间  $\Delta t$  内就是用这速度  $v$  移动着所经过的路程.

**104. 可微性与导数存在之间的关系** 现在很易建立下列命题的正确性:

要使函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处是可微的, 其充要条件是它在这点处有有限的导数  $y' = f'(x_0)$  存在. 当这条件获得满足时, 等式 (1) 就在常数  $A$  刚好等于这导数时成立:

$$\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x). \quad (1a)$$

**必要性** 若 (1) 成立, 则由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

于是使  $\Delta x$  趋于 0, 实际上就得出

$$A = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

**充分性** 立刻可从 96.1°[参阅那里的 (3a)] 内推得.

因此, 函数  $y = f(x)$  的微分永远等于

$$dy = y'_x \cdot \Delta x^{①}. \quad (2)$$

在这里还需着重指出, 表达式内的  $\Delta x$  被我们理解为自变量的任意增量, 就是一个任意数 (把它当作并不依赖于  $x$  常常更为方便). 在这时完全不必假定  $\Delta x$  是无穷小, 但假如  $\Delta x \rightarrow 0$ , 则微分  $dy$  也是无穷小, 也 (在  $y'_x \neq 0$  时) 就是函数的无穷小增量  $\Delta y$  的主部. 这就使近似等式

$$\Delta y \doteq dy \quad (3)$$

获得根据,  $\Delta x$  愈小则近似的准确度愈大. 我们将在 [107] 内再回头考察近似等式 (3).

为着要用几何图形说明函数  $y = f(x)$  的微分  $dy$  及它与增量  $\Delta y$  的关系, 试考察这函数的图像 (图 44). 变元的数值  $x$  及函数的数值  $y$  确定着曲线上的一点  $M$ . 在曲线上的这一点处引切线  $MT$ ; 正如我们已看到过的 [92], 它的斜率  $\operatorname{tg} \alpha$  等于导数  $y'_x$ . 若给横标  $x$  以增量  $\Delta x$ , 则曲线的纵标  $y$  就得增量  $\Delta y = NM_1$ . 同时切线的纵标就得增量  $NK$ . 把  $NK$  看作直角三角形  $MNK$  的一直角边而计算其长度, 就得出

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

①很易验证, 在前段内所考察的一切情形就都是这样组成微分的. 例如, 在情形 1) . 就有

$$Q = \pi r^2, \quad Q'_r = 2\pi r, \quad dQ = 2\pi r \cdot \Delta r.$$



因此, 当  $\Delta y$  是曲线的纵标的增量时,  $dy$  就是切线的纵标的对应增量.

最后再讨论到自变量  $x$  本身: 称为它的微分的就是增量  $\Delta x$ , 即约定

$$dx = \Delta x^{17}). \quad (4)$$

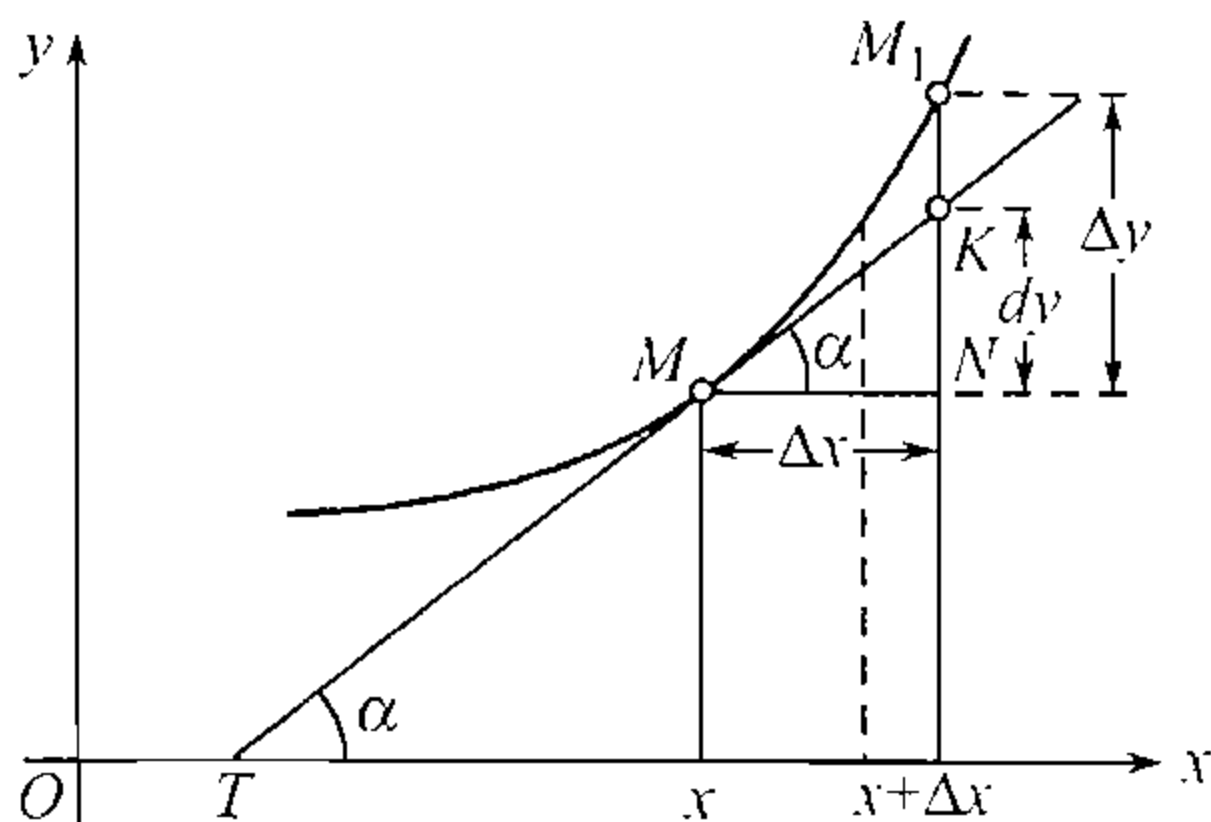


图 44

假如把自变量  $x$  的微分认为就是函数  $y = x$  的微分 (这同样也是一种约定), 则公式 (4) 也可以证明, 根据 (2):  $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ .

利用约定式 (4), 现在就可以把给出微分定义的公式 (2) 改写成为

$$dy = y'_x \cdot dx, \quad (5)$$

我们通常都把它写成这种形式<sup>18)</sup>.

由此得

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad (6)$$

于是, 我们以前把它看作整个记号的那个表达式, 现在就可以当作分数来处理了. 读者不要因为在等式左边放着完全确定的数, 而同时在右边却有着两个不确定数  $dy$  及  $dx$  (因为  $dx = \Delta x$  是任意的) 的比式这一情况感到困惑: 要知道  $dx$  及  $dy$  本是比例地变动着的, 而导数  $y'_x$  刚好就是比例系数.

微分这一概念及“微分”<sup>①</sup>这个术语源于莱布尼茨, 虽然他并不曾给出这概念的准确的定义. 莱布尼茨在考察微分时, 同时亦曾考察“微商”, 即两个微分的商, 那就相当于我们的导数; 然而对于莱布尼茨, 微分却是原始的概念. 从柯西用自己的极限理论创立一切分析的基础, 并且首先明确地定义导数是一极限以后, 分析的研究通常就从导数出发, 而微分的概念已经是从导数的基础上建立起来的了.

**105. 微分法的基本公式及法则** 函数的微分的求法称为微分法<sup>②</sup>. 因为微分  $dy$  与导数  $y'_x$  只相差一个因子  $dx$ , 故由初等函数的导数表 [95] 很易做出它们的微分

<sup>①</sup>由拉丁文 differentia 得来, 表示“差”.

<sup>②</sup>而且通常亦用这术语表示导数的求法, 这在俄语上并无特殊的术语. 在多数的外国语中, 对于这两种运算的表示法存在着两种不同的术语; 例如, 法文中就分别为 derivation 及 differentiation.

<sup>17)</sup>公式 (4) 意味着  $dx$  是自变量  $\Delta x$  的函数, 更确切地说是  $\Delta x$  的线性函数, 其斜率为 1.

<sup>18)</sup>这里请读者注意  $dy$  的表示法的某些特点. 这个 (传统的与方便的) 表示有某些缺陷: 它没有指出函数的微分是在哪一点取的. 与此相应,  $dy$  的值实际上依赖于两个参数: 在其处考虑微分的点  $x$ , 以及增量  $\Delta x$ , 即  $dy = dy(x, \Delta x)$ . 当这两个参数之一固定时,  $dy$  变成另一参数的函数, 到目前为止, 仅仅利用了符号  $dy$  的一个解释——作为  $\Delta x$  的函数, 然而同一符号的第二个解释——当  $\Delta x$  固定时作为  $x$  的函数——同样重要 (例如, 当定义高阶微分时, 它有重要的应用).



表:

1.	$y = c$	$dy = 0$
2.	$y = x^\mu$	$dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$
	$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$y = a^x$	$dy = a^x \cdot \lg a \cdot dx$
	$y = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
4.	$y = \log_a x$	$dy = \frac{\log_a e \cdot dx}{x}$
	$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$
5.	$y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
6.	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
7.	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \sec^2 x \cdot dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$
8.	$y = \operatorname{ctg} x$	$dy = -\operatorname{csc}^2 x dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
9.	$y = \arcsin x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$y = \arccos x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \operatorname{arctg} x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
12.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

微分法则<sup>①</sup>就是:

$$\text{I. } d(cu) = c \cdot du,$$

$$\text{II. } d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$\text{III. } d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

$$\text{IV. } d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

<sup>①</sup>若说及的正是微分的求法.



它们都能从对应的求导数法则容易地推出, 例如, 我们证明后面的两式:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= (u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v') dx \\ &= v \cdot (u' \cdot dx) + u \cdot (v' \cdot dx) = v \cdot du + u \cdot dv. \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx \\ &= \frac{v \cdot (u' \cdot dx) - u \cdot (v' \cdot dx)}{v^2} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}. \end{aligned}$$

**106. 微分的形式不变性** 复合函数的微分法则, 使我们得出微分的一个显著而重要的性质.

假设  $y = f(x)$  及  $x = \varphi(t)$  是这样的两个函数, 从它们能组成复合函数;  $y = f(\varphi(t))$ . 若导数  $y'_x$  及  $x'_t$  存在, 则依法则 V[98], 亦存在着导数

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \quad (7)$$

若把  $x$  当作自变量, 则微分  $dy$  可由公式 (5) 表示. 现在改用  $t$  作自变量; 这样假定之后, 就有微分的另一表达式

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

然而, 若用表达式 (7) 代换导数  $y'_t$ , 并注意到  $x'_t \cdot dt$  是  $x$  当作  $t$  的函数时的微分, 最后就得出:

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x \cdot dx,$$

即又回到微分的原来形式!

这样, 我们看出, 微分的形式即使在原来的自变量换成新的自变量以后仍然可以保持着. 我们永远可以把  $y$  的微分写成 (5) 的形式, 不管  $x$  是否自变量; 其差别仅在于, 若选取  $t$  作为自变量, 则  $dx$  并不表示任意增量  $\Delta x$ , 而是表示  $x$  作为  $t$  的函数时的微分. 这性质就称为微分的形式不变性.

因为由公式 (5) 直接得出用微分  $dx$  及  $dy$  表示导数  $y'_x$  的公式 (6). 所以不论那些微分是依着怎样的自变量而求出的 (当然, 在第一种情形都是依着同一的自变量), 后一公式亦仍有效.

例如, 设  $y = \sqrt{1-x^2} (-1 < x < 1)$ . 则

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

今假定  $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ . 则  $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$  而我们就有:  $dx = \cos t \cdot dt$ ,  $dy = -\sin t \cdot dt$ . 很易检验, 公式

$$y'_x = \frac{-\sin t \cdot dt}{\cos t \cdot dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$



不过给出上面已经求出的导数的另一个式子罢了.

当  $y$  对于  $x$  的关系不是直接给定, 而是由  $x$  及  $y$  两者对于第三辅助变量 (称为参变量) 的关系所给定时:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (8)$$

应用上述论点以求  $y'_x$  最为便利, 今假定这两函数都有导数, 而且第一个又存在反函数  $t = \theta(x)$ , 它也有导数 [83, 94], 很易看出, 那时  $y$  亦成为  $x$  的函数:

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x), \quad (9)$$

它也有导数存在. 这导数的计算可以由上述的法则完成:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad (10)$$

而不必重新建立  $y$  对于  $x$  的直接关系.

例如, 若  $x = \sin t, y = \cos t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ , 则导数  $y'_x$  可以依前法确定, 完全不必应用关系式  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

若把  $x$  及  $y$  看作平面上点的直角坐标, 则对于参变量  $t$  的每一数值, 方程 (8) 就对应地给放上一. 点, 这点随着  $t$  的变动在平面上画出一曲线. 方程 (8) 就称为这曲线的参变量方程.

当曲线由参变量方程给定时, 用公式 (10) 就可以直接依方程组 (8) 确定切线的斜率, 而不必把 (8) 先转换成方程 (9); 就是

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (11)$$

**附注** 依任意变量而取的微分可以表示导数, 这一可能性, 在特殊情形, 就引出下面的事实: 就是公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

原来依次表示在莱布尼茨记法下的反函数及复合函数的微分法则, 而现在却已成为简单的代数恒等式了 (由于在此处一切微分都可依同一变量取之). 可是不要以为这就给反函数及复合函数微分公式的新的推导法. 首先, 在此处并没有证明等式左边的导数的存在, 而且主要的是: 我们基本上已应用了微分形式的不变性, 而它本身却是法则 V 的推论.

**107. 微分是近似公式的来源** 我们已看到, 在  $\Delta x \rightarrow 0$  时函数  $y$  的微分  $dy$  (只要  $y'_x \neq 0$ ) 是函数的无穷小增量  $\Delta y$  的主部. 这样  $\Delta y \sim dy$ , 于是

$$\Delta y \doteq dy, \quad (3)$$



或更详细些

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (3a)$$

其不准确度是较  $\Delta x$  更高阶的无穷小. 就是说 [62], 这等式的相对误差可以小到任意程度, 只要  $\Delta x$  充分小.

考察一个简单的例子: 设  $y = x^3$ . 则

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

而成为  $\Delta y$  的线性部分的 (像我们在前面曾用普遍形式所确定的那样) 实际上就是微分  $dy = 3x_0^2 \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$ . 具体地假定  $x_0 = 2.3$ ; 若取  $\Delta x = 0.1$ , 那么就有  $\Delta y = 2.4^3 - 2.3^3 = 1.657$  及  $dy = 3 \cdot 2.3^2 \cdot 0.1 = 1.587$ , 于是由第一数换成第二数时的误差是 0.070, 而相对误差超过 4%. 在  $\Delta x = 0.01$  时得  $\Delta y = 0.159391$  及  $dy = 0.1587$ , 所得相对误差已小于 0.5%; 在  $\Delta x = 0.001$  时, 相对误差小于 0.05%, 余依此类推.

类似的状况亦可从图 44 中微分的几何说明直接看出. 在图像上很明显地可以看出, 若我们把曲线的纵标的增量换成切线的纵标的增量, 则在  $\Delta x$  愈小时这种替换的相对准确度就愈大.

读者自能明了, 把函数的增量  $\Delta y$  换成它的微分  $dy$  时, 其好处在于  $dy$  对于  $\Delta x$  是线性关系, 而  $\Delta y$  通常却是  $\Delta x$  的很繁复的函数.

若假定  $\Delta x = x - x_0$ , 而  $x_0 + \Delta x = x$ , 则等式 (3a) 的形式就成为

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

或

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

依这公式, 在接近于  $x_0$  的  $x$  的数值, 函数  $f(x)$  可以用一线性函数近似地来代换. 在几何上, 这对应于将邻接于点  $(x_0, f(x_0))$  的曲线  $y = f(x)$  的小段改以曲线在这点的切线的小段来代换, 这切线表示为

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)^{\textcircled{1}}$$

(参阅图 44). 为简单起见, 取  $x_0 = 0$ , 并限于  $x$  的微小数值, 就有近似公式:

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0) \cdot x.$$

<sup>①</sup>实际上, 经过点  $(x_0, y_0)$  而有斜率  $k$  的直线方程是

$$y = y_0 + k(x - x_0);$$

在切线的情形, 应置  $y_0 = f(x_0), k = f'(x_0)$ .



由此, 用各种初等函数代换这里的  $f(x)$ , 很易获得一系列的公式:

$$(1+x)^\mu \doteq 1 + \mu x, \text{ 特别情形 } \sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x, \\ e^x \doteq 1+x, \quad \ln(1+x) \doteq x, \quad \sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x, \quad \text{余类推}$$

(它们之中有很多是我们已经知道的).

再引入一些其他类型的近似公式的例子, 它们也是根据等式 (3) 得来的.

1) 设有两端悬挂着的有重量的线 (电线, 锚索, 皮带), 用  $2s$  表示其长度, 用  $2l$  表示跨度, 用  $f$  表示垂度 (图 45), 则在求  $s$  时经常应用着 (近似的公式)

$$s = l \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2}{l^2} \right).$$

现在把数量  $f$  当作自变量, 而把  $s$  当作  $f$  的函数. 要求建立长度  $s$  的改变量  $\Delta s$  与垂度  $f$  的改变量  $\Delta f$  之间的关系.

把  $\Delta s$  换成  $ds$ , 就得

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3} \frac{f}{l} \cdot \Delta f, \text{ 由此, } \Delta f \doteq \frac{3}{4} \frac{l}{f} \cdot \Delta s.$$

例如, 若能估计到电线由于温度或负荷所引起的长度的变动, 就可以由此而预见到垂度的变动.

2) 已知圆形电路 (图 46) 作用于其轴上与中心  $O$  距离  $x$  的单位磁极的力是:

$$\frac{k}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

此处  $k$  是常系数,  $a$  是半径. 试求此圆形电路作用于沿轴放置的长度为  $\Delta x$  的磁铁  $NS$  的力. 这时算作在  $N$  极集中着正磁量  $m$ , 而在  $S$  极集中着与它相等的负磁量  $-m$ .

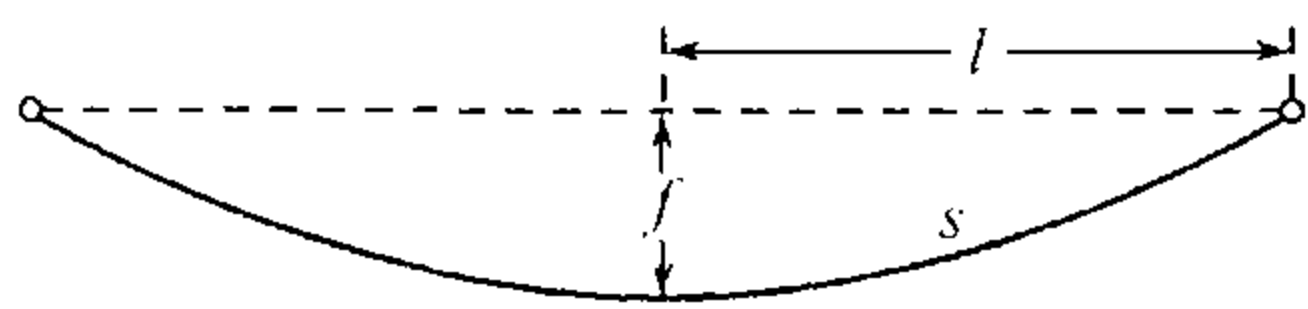


图 45

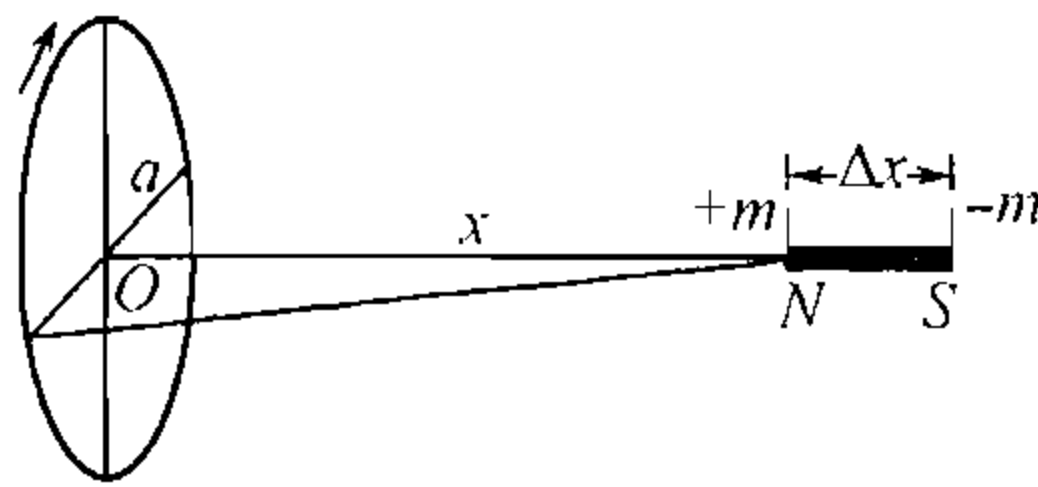


图 46

电流作用于磁铁的总力  $F$  可表示为:

$$F = \frac{km}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{[a^2 + (x + \Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} = -km \cdot \Delta \left[ \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

用函数的微分代换它的增量 (假定  $\Delta x$  很微小), 就得

$$F \doteq -kmd \left[ \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 3k \cdot m \Delta x \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$



**108. 应用微分来估计误差** 应用微分概念于近似算法中的估计误差, 是特别方便而且自然的. 例如, 设数量  $x$  可以直接地度量或计算, 而依赖着它的数量  $y$  则依公式  $y = f(x)$  来决定. 在度量数量  $x$  时通常发生误差  $\Delta x$ , 它就引起数量  $y$  的误差  $\Delta y$ . 由于这些误差是微小数量, 可以假定

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

即用微分代替增量. 设  $\delta x$  是  $x$  的最大绝对误差;  $|\Delta x| \leq \delta x$  (在通常的条件下, 此类度量时的误差限度是可以知道的). 那时显然可以采用

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x. \quad (12)$$

作为  $y$  的最大绝对误差 (误差的限度).

1) 例如, 设要确定球的体积, 首先 (用游标测径器, 公差仪, 螺旋测径器等) 直接来量球的直径  $D$ , 再依公式

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

计算体积  $V$ .

因为  $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$ , 所以在这情形, 根据 (12),

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

用前式除这等式, 就得

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

因此由计算得来的体积的 (最大的) 相对误差比由量度得来的直径的 (最大的) 相对误差大了两倍.

2) 设得到  $x$  时有一误差, 则由  $x$  而求它的以十为底的对数  $y = \lg x$  时, 亦就造成  $y$  的误差. 在此处  $y'_x = \frac{M}{x}$  ( $M \doteq 0.4343$ ), 于是依公式 (12),

$$\delta y = 0.4343 \cdot \frac{\delta x}{x}.$$

这样,  $x$  的对数  $y$  的 (最大) 绝对误差就单纯地依数  $x$  本身的 (最大) 相对误差而确定. 反过来说亦正确.

这结果有各种各样的应用. 例如, 借此可以获得关于常用的 25 厘米 = 250 毫米对数尺的准确度的概念. 在放置瞄准器或读数时可能发生错误, 例如在这一方或另一方错误 0.1 毫米, 则在对数上对应着误差

$$\delta y = \frac{0.1}{250} = 0.0004.$$

由此, 依我们的公式

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0.0004}{0.4343} = 0.00092 \dots \doteq 0.001.$$

读数的相对准确度在算尺的任何部分是相同的!

3) 在依三角函数的对数表而求角  $\varphi$  时发生这样一个问题, 用正弦表或正切表那一种更为有利, 假定

$$y_1 = \lg \sin \varphi \quad \text{及} \quad y_2 = \lg \operatorname{tg} \varphi,$$



并且假定最大误差  $\delta y_1$  及  $\delta y_2$  是相等的 (就说是, 等于数标的末位数字的一半). 若用  $\delta_1 \varphi$  及  $\delta_2 \varphi$  表示角  $\varphi$  的对应的最大误差, 则同上面一样, 就得

$$\delta y_1 = \frac{M}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \delta_1 \varphi, \quad \delta y_2 = \frac{M}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \sec^2 \varphi \cdot \delta_2 \varphi.$$

于是

$$\delta_2 \varphi = \delta_1 \varphi \cdot \cos^2 \varphi < \delta_1 \varphi.$$

由此可见, 在对数值有同等的错误时, 正切对数表所给出的角比正弦对数表所给出的角有较小的误差, 因此用前者就是更有利的<sup>①</sup>.

4) 作为最后一个例题, 考察用惠司登电桥 (图 47) 量未知电阻  $y$  的准确度的问题. 在这时, 把接触器  $D$  沿着刻度尺  $AC$  移动, 直至电流计指出没有电流通过为止. 确定电阻  $y$  的公式是

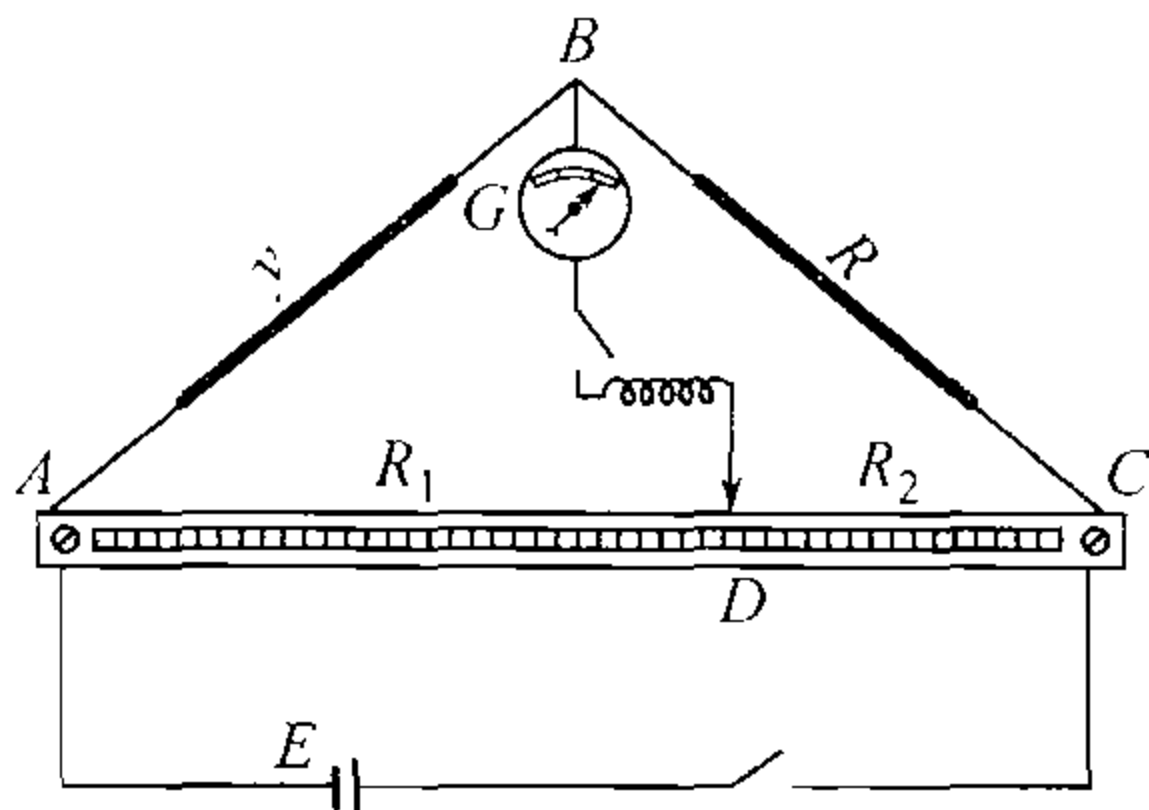


图 47

$$y = \frac{Rx}{a-x}. \quad (13)$$

此处  $a = AC$ ,  $x = AD$ ,  $R$  是支线  $BC$  上的已知电阻.

依公式 (12), 就得出:

$$\delta y = \left( \frac{Rx}{a-x} \right)'_x \cdot \delta x = \frac{aR}{(a-x)^2} \cdot \delta x;$$

若在这等式两端各用等式 (13) 两端来除, 就得  $y$  的 (最大) 相对误差的表达式:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{a \cdot \delta x}{x(a-x)}.$$

因为分母  $x(a-x)$  在  $x = \frac{a}{2}$  时达到自己的最大数值<sup>②</sup>, 而在度量长度时误差  $\delta x$  可以当作是并不依赖于  $x$ , 所以正是在  $x = \frac{a}{2}$  时相对误差达到最小数值. 因此, 为着获得尽可能准确的结果, 设置电阻  $R$  时 (用电阻箱) 总要想办法使得当电流消失时接触器  $D$  的位置尽可能地更接近于尺  $AC$  的中点.

<sup>①</sup> 在这种算法时, 我们假定角是用弧度表示着的. 但是显然, 不论量角度时用哪一种单位, 结果总是正确的.

<sup>②</sup> 由明显的不等式

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \geq 0$$

直接可得

$$x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}.$$

这就证明了我们的命题.



### §3. 微分学的基本定理

**109. 费马定理** 知道了某一函数  $f(x)$  的导数  $f'(x)$ , 往往就能作出关于函数  $f(x)$  本身的性态的结论. 在一目及下一目就将讲述这一类的问题.

先证明一个简单的引理:

**引理** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有有限导数. 若这导数  $f'(x_0) > 0$  [ $f'(x_0) < 0$ ], 则当  $x$  取右方充分接近于  $x_0$  的数值时就有  $f(x) > f(x_0)$  [ $f(x) < f(x_0)$ ], 而当  $x$  取左方充分接近于  $x_0$  的数值时就有  $f(x) < f(x_0)$  [ $f(x) > f(x_0)$ ].

换言之, 这事实表示: 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处增大 (减小). 若所考虑的是单侧导数, 例如右导数, 则只有对于  $x_0$  右方的  $x$  的数值时, 命题方才有效.

**证明** 依导数的定义.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

若  $f'(x_0) > 0$  (限于这情形), 则根据 [55, 2°], 能求出点  $x_0$  的邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使在其中 (当  $x \neq x_0$  时) 成立

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

首先设  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , 于是  $x - x_0 > 0$ ; 由上面的不等式推得  $f(x) - f(x_0) > 0$ , 即  $f(x) > f(x_0)$ . 又若  $x_0 - \delta < x < x_0$  而  $x - x_0 < 0$ , 则显然亦有  $f(x) - f(x_0) < 0$ , 即  $f(x) < f(x_0)$ . 证明已完毕.

**费马 (P.Férmat) 定理** 设函数  $f(x)$  是在某一区间  $\mathcal{X}$  内定义的, 并且在这区间的内点  $c$  取最大 (最小) 值. 若在这点处存在着有限导数  $f'(c)$ , 则必须  $f'(c) = 0$ <sup>①</sup>.

**证明** 为了明确起见, 设  $f(x)$  在点  $c$  处有最大值. 假定  $f'(c) \neq 0$ , 就可引出矛盾: 设  $f'(c) > 0$ , 则当  $x > c$  而且充分接近于  $c$  时 (依引理) 就有  $f(x) > f(c)$ , 又若是  $f'(c) < 0$ , 则当  $x < c$  而且充分接近于  $c$  时亦有  $f(x) > f(c)$ . 在这两种情形,  $f(c)$  都不能是函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内的最大值. 所得的矛盾就证明了定理.

回想 [91, 92] 导数  $y' = f'(x)$  的几何说明是曲线  $y = f(x)$  的切线的斜率. 导数  $f'(c)$  等于零, 在几何上表示在这曲线上的对应点处切线平行于  $x$  轴. 图 48 使这情况显得十分清楚.

证明内所应用的假定:  $c$  是区间的内点, 是很重要的, 因为它使我们不得不同时考察在  $c$  右方的点和在  $c$  左方的点. 没有这一假定, 定理就不成立: 若函数  $f(x)$  是

<sup>①</sup>这命题当然仅是根据费马用来求函数的最大值及最小值的方法的要点而重新产生的 (费马并不曾有导数的概念).



在闭区间内定义的, 并且在这区间的一端, 达到它的最大 (最小) 值, 则在这端点的导数  $f'(x)$  (若存在着) 也可以不是零. 建议读者去找寻适当的例题, 这事实的几何说明见图 49.

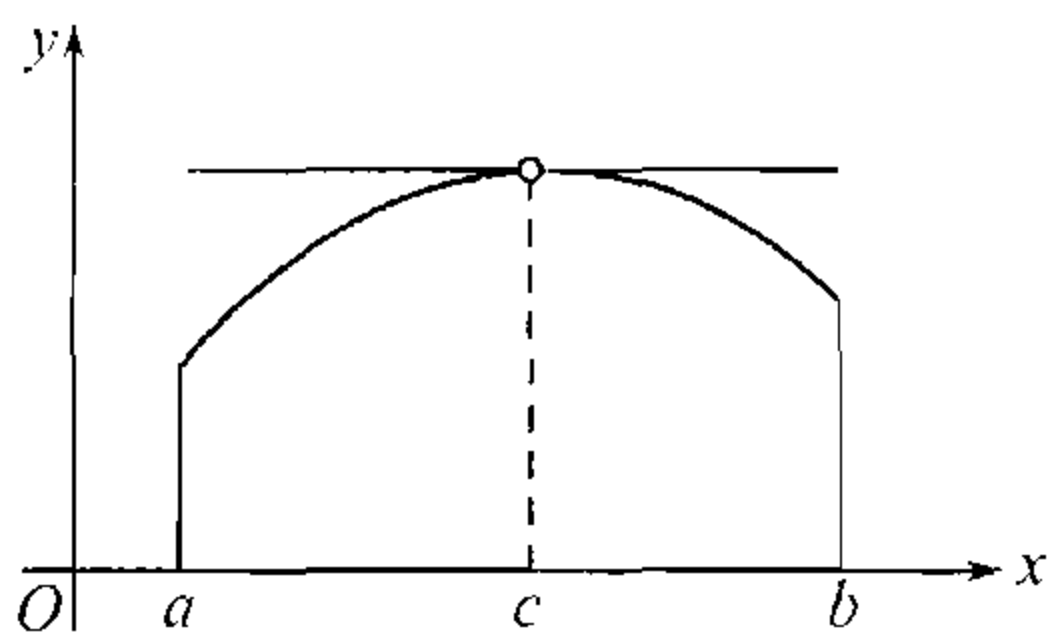


图 48

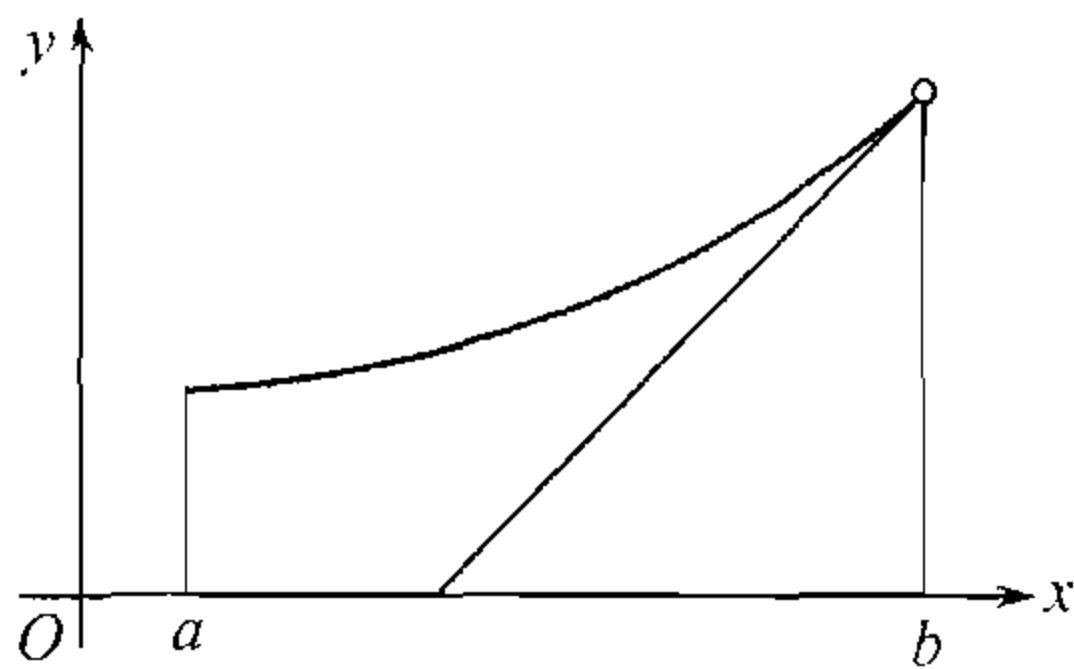


图 49

作为费马定理的应用, 我们将证明一个关于连续函数的导数的有趣的定理.

**110. 达布 (G.Darboux) 定理** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内有有限导数<sup>①</sup>, 则函数  $f'(x)$  必至少有一次取得介于  $f'(a)$  及  $f'(b)$  之间的每一个值.

**证明** 首先假定  $f'(a)$  及  $f'(b)$  有不同的符号, 例如  $f'(a) > 0$  而  $f'(b) < 0$ , 要证明在  $a$  与  $b$  之间存在着一一点  $c$ , 在这点处导数等于零. 实际上, 从有限导数  $f'(x)$  的存在可以推得函数  $f(x)$  的连续性 [96, 2°], 于是依魏尔斯特拉斯第二定理 [85],  $f(x)$  在某一点  $c$  处取得最大值. 这点  $c$  不能重合于  $a$ , 也不能重合于  $b$ , 因为根据预备定理, 在  $a$  点的近处 (右方)  $f(x)$  大于  $f(a)$ , 而在  $b$  点的近处 (左方)  $f(x)$  也大于  $f(b)$ . 因此  $a < c < b$ , 然后依费马定理, 就得  $f'(c) = 0$ .

转到普遍的情形, 取位于  $f'(a)$  及  $f'(b)$  之间的任意数  $C$ ; 为了确定起见, 设  $f'(a) > C > f'(b)$ . 考察辅助函数  $\varphi(x) = f(x) - Cx$ , 它在区间  $[a, b]$  内是连续的并且有导数  $\varphi'(x) = f'(x) - C$ .

因为  $\varphi'(a) = f'(a) - C > 0$ , 而  $\varphi'(b) = f'(b) - C < 0$ , 故依已证明的定理, 有一点  $c$  存在 ( $a < c < b$ ), 在这点处

$$\varphi'(c) = f'(c) - C = 0, \text{ 即 } f'(c) = C.$$

所证明的定理与柯西第二定理 [82] 很相似, 根据柯西第二定理任一连续函数从一个数值变到另一数值时, 必须经过全部中间数值. 然而达布定理决不就是柯西定理的推论, 因为连续函数的导数  $f'(x)$  也可以不是连续函数.

**111. 罗尔定理** 作为微分学的许多定理与公式及其应用之基石的, 有着下面的简单而重要的以罗尔 (M.Rolle) 命名的定理<sup>②</sup>.

<sup>①</sup>这时我们设想在点  $a$  处存在着右导数, 而在点  $b$  处有左导数. 它们在以后简单地表示为  $f'(a)$  及  $f'(b)$ .

<sup>②</sup>在实际上, 罗尔说出这命题时, 仅是对多项式而言.



**罗尔定理** 设 1) 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  内定义着而且是连续的; 2) 至少在开区间  $(a, b)$  内, 存在着有限导数  $f'(x)$ ; 3) 在区间的两端点处函数值相等:  $f(a) = f(b)$ . 那么在  $a$  与  $b$  之间必能求出一点  $c(a < c < b)$ , 使  $f'(c) = 0$ ①.

**证明**  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  内是连续的, 因此, 依魏尔斯特拉斯第二定理 [85],  $f(x)$  在这区间内必有最大值  $M$  亦必有最小值  $m$ .

考察两种情形:

1.  $M = m$ , 这时  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内保持为常数: 事实上, 这时不等式  $m \leq f(x) \leq M$  对于一切  $x$  都变成  $f(x) = M$ ; 因此在全区间内  $f'(x) = 0$ , 于是可以取  $(a, b)$  内的任意一点作为  $c$ .

2.  $M > m$ , 我们知道函数必能达到这两个数值的, 但因为  $f(a) = f(b)$ , 所以至少会在  $a$  与  $b$  之间的某一点  $c$  处达到其中一个数值. 这时, 从费马定理就推得, 在这点的导数  $f'(c) = 0$ . 定理就已证明.

用几何的语言, 罗尔定理表示为: 若曲线  $y = f(x)$  的两端纵标相等, 则在曲线上必能求出一点, 此处的切线平行于  $x$  轴 (图 50).

注意, 函数  $f(x)$  须在闭区间  $[a, b]$  内连续, 且在全部开区间  $(a, b)$  内须有导数存在, 这对于定理结论的成立是很要紧的. 函数  $f(x) = x - E(x)$  在区间  $[0, 1]$  内除去在  $x = 1$  时有间断以外满足定理的一切条件, 但在  $(0, 1)$  内处处都是  $f'(x) = 1$ . 由等式  $f(x) = x \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$  及  $f(x) = 1 - x \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right)$

所定义的函数, 在这区间内除去当  $x = \frac{1}{2}$  时 (双侧的) 导数不存在以外它也满足定理的一切条件; 可是导数  $f'(x)$  在左半区间内等于  $+1$  而在右半区间内等于  $-1$ .

定理的条件 3) 也是很要紧的: 函数  $f(x) = x$  在区间  $[0, 1]$  内除去条件 3) 以外满足定理的一切条件, 而它的导数到处是  $f'(x) = 1$ .

这些函数的图留给读者自己去画.

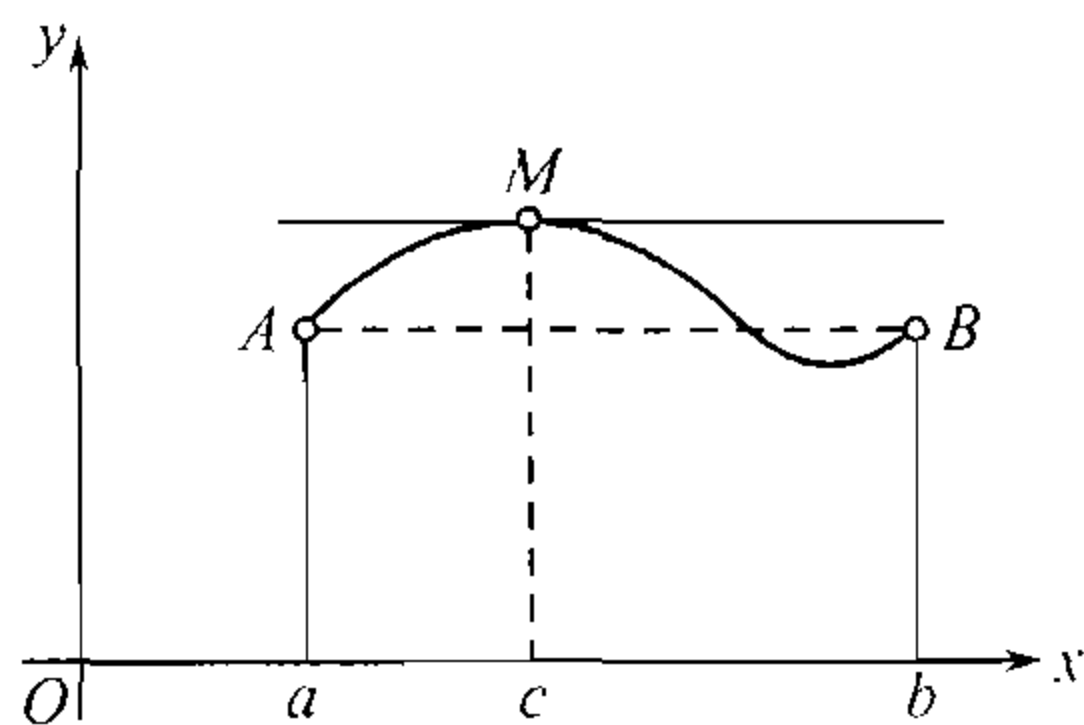


图 50

### 112. 拉格朗日公式 转而讨论罗尔定理的直接的推论.

**拉格朗日定理** 设 1)  $f(x)$  是在闭区间  $[a, b]$  内定义着的而且是连续的, 2) 至少在开区间  $(a, b)$  内有有限导数  $f'(x)$  存在. 那么在  $a$  与  $b$  之间必能求得一点  $c(a < c < b)$ , 它满足等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (1)$$

①当然, 在 1) 内所假定的函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的连续性, 已可从 2) 推得, 但我们不论在此处或以后都不拟把定理的条件分解成互不相关的假定.



**证明** 引入辅助函数, 它在区间  $[a, b]$  内用等式

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

定义. 这函数满足罗尔定理的一切条件. 事实上, 它在  $[a, b]$  内是连续的, 因为它是连续函数  $f(x)$  与一线性函数的差. 在区间  $(a, b)$  内它有确定的有限导数, 等于

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

最后, 用  $a$  和  $b$  直接代入, 证实  $F(a) = F(b) = 0$ , 即  $F(x)$  在区间的两 endpoint 处具有相等的数值.

因此, 可以把罗尔定理应用于函数  $F(x)$ , 并肯定在  $(a, b)$  内有点  $c$  存在, 使  $F'(c) = 0$ . 这样

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

由此

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

此即所要证的.

已证明的定理也称为 (微分学中的) **中值定理**.

罗尔定理是拉格朗日定理的特别情形; 前面所作关于罗尔定理的条件 1) 及 2) 的附注在此处仍为有效.

转而讨论拉格朗日定理的几何说明 (图 51), 须指出, 比式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

是割线  $AB$  的斜率, 而  $f'(c)$  是曲线  $y = f(x)$  上横标  $x = c$  的点的切线的斜率. 这样, 拉格朗日定理的论断就相当于: 在弧  $AB$  上恒能求出至少一点  $M$ , 在这点处切线平行于弦  $AB$ .

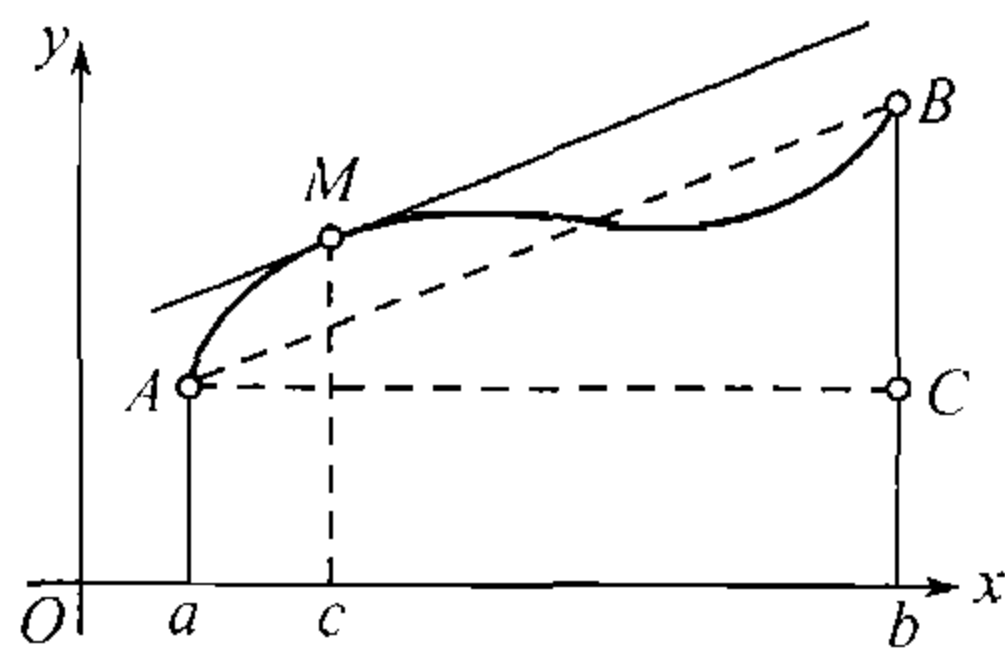


图 51

已证明的公式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{或} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

称为**拉格朗日公式**或**有限增量公式**. 它显然在  $a > b$  时仍为有效.

取在区间  $[a, b]$  内的任意数值  $x_0$ , 并给以增量  $\Delta x \geq 0$ , 以不致使它超出区间的范围者为限. 当  $\Delta x > 0$  时应用拉格朗日公式于区间  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , 当  $\Delta x < 0$  时应用这公式于区间  $[x_0 + \Delta x, x_0]$ . 这时介于  $x_0$  与  $x_0 + \Delta x$  之间的数  $c$  可以表示为

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \quad \text{此处 } 0 < \theta < 1^{①}.$$

①有时说,  $\theta$  是“真分数”; 但不要以为它一定就是有理分数, 数  $\theta$  亦可以为无理数.



从而拉格朗日公式就可写成:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x). \quad (1a)$$

或

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (2)$$

这等式给出在变元的任意有限增量  $\Delta x$  时的函数增量的准确表达式. 它自然是与近似等式 [107, (3a)]:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x$$

相对立着的, 在近似等式里, 只有当  $\Delta x$  无限小时相对误差方才趋于零. 由此就产生“有限增量公式”这名称.

拉格朗日公式的缺点是在公式内有我们所不知道的数  $\theta$ <sup>①</sup> (或  $c$ ). 但这并不妨碍这公式在分析学内的各种各样的应用.

**113. 导数的极限** 下面的附注就给出这种应用的有用处的例子. 假定函数  $f(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + H]$  ( $H > 0$ ) 内是连续的, 并且当  $x > x_0$  时有有限导数  $f'(x)$ . 若存在着 (有限或无穷) 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = K,$$

则在点  $x_0$  处  $f(x)$  的右方导数也等于  $K$ . 事实上, 在  $0 < \Delta x \leq H$  时 (1a) 成立. 若  $\Delta x \rightarrow 0$ , 则由于数量  $\theta$  的有界性导数的变元  $x_0 + \theta \Delta x$  趋于  $x_0$  于是等式的右端, 随之而左端, 就趋于极限  $K$ , 此即所要证的. 对于点  $x_0$  的左方邻域也可建立类似的论断.

作为例子, 考察在区间  $[-1, 1]$  内的函数

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

若  $-1 < x < 1$ , 则依微分学的普通法则, 很易求出:

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$$

当  $x \rightarrow 1 - 0$  ( $x \rightarrow -1 + 0$ ) 时这导数显然趋于极限  $\frac{\pi}{2}$  ( $-\frac{\pi}{2}$ ); 就是在  $x = \pm 1$  时也有着 (单侧的) 导数:

$$f'(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

上述的附注最常应用于下面的情况: 由所求的导数式当  $x$  由这一方或另一方趋于  $x_0$  时而趋于  $+\infty$  ( $-\infty$ ) 这一事实, 就可作出结论, 在点  $x_0$  本身的对应的单侧导数等于  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

<sup>①</sup> 仅在少数的情形中我们可以确定它; 例如, 对于二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 很易验证  $\theta = \frac{1}{2}$ .



例如, 若回顾 101 中考察过的函数  $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$  及  $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , 则得

$$f_1'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \quad f_2'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

因为第一式在  $x \rightarrow \pm 0$  时趋于  $+\infty$ , 而第二式在  $x \rightarrow +0$  与  $x \rightarrow -0$  时分别趋于  $+\infty$  与  $-\infty$ , 故知  $f_1(x)$  在点  $x = 0$  处有双侧的导数:  $+\infty$ , 而  $f_2(x)$  在该点处只有单侧的导数: 右方的导数  $+\infty$ , 左方的导数  $-\infty$ .

由上述的论断就可推得, 若有限导数  $f'(x)$  在某一区间内存在, 则它本身也必为  $x$  的函数, 且这函数不能有通常的间断或跃度: 在每一点处, 它或是连续, 或是有第二类间断 [比较 102, 2°].

**114. 柯西公式** 有限增量的公式将依下列方式来推广:

**柯西定理** 设 1) 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在闭区间  $[a, b]$  内连续; 2) 至少在开区间  $(a, b)$  内有有限导数  $f'(x)$  及  $g'(x)$ ; 3) 在区间  $(a, b)$  内  $g'(x) \neq 0$ .

那么在  $a$  与  $b$  之间必能求出一点  $c(a < c < b)$ , 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3)$$

这公式称为柯西公式.

**证明** 首先将确定, 等式左端的分母不等于零, 因为否则, 这表达式就没有意义. 假若  $g(b) = g(a)$ , 则依罗尔定理, 导数  $g'(x)$  在区间内的某一点处就要等于零, 这是违反条件 3) 的; 因此  $g(b) \neq g(a)$ .

现在考察辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

这函数满足罗尔定理的一切条件. 实际上,  $F(x)$  在  $[a, b]$  内是连续的, 因为  $f(x)$  及  $g(x)$  都是连续的; 导数  $F'(x)$  在  $(a, b)$  内存在, 就是, 它等于

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

最后, 用  $a$  和  $b$  直接代入, 得知  $F(a) = F(b) = 0$ . 由于这样, 在区间  $(a, b)$  内存在着一点  $c$ , 使  $F'(c) = 0$ . 即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

或

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$



用  $g'(c)$  去除 (这是可以的, 因为  $g'(c) \neq 0$ ), 就得出所求的等式.

很明显地, 拉格朗日定理是柯西定理的特别情形. 要从柯西公式得出有限增量公式, 只需令  $g(x) = x$ . 柯西定理常称为 (微分学中的) **广义中值定理**.

柯西定理的几何说明亦同拉格朗日定理的一样. 要使读者很容易地看出这点, 换成另一种表示法: 把  $x$  换成  $t$ , 而函数改记为  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$ . 若  $t$  在区间  $[\alpha, \beta]$  内变动, 则柯西公式就写成:

$$\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)} (\alpha < \gamma < \beta). \quad (4)$$

今考察用参变量方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (5)$$

所给定的曲线. 于是公式的左边在这里就表示着连接曲线两端的弦的斜率, 而右端则表示弧上对应于  $t = \gamma$  的那一点处的切线的斜率 [106, (11)].

**附注** 这些想法暗示着由拉格朗日公式导出柯西公式的可能性. 推导的要点在于: 如果不用参变关系式 (5) 而改用直接关系式;  $y = f(x)$ , 则公式 (4) 显出是与 (1) 有同等意义的.

## §4. 高阶导数及高阶微分

**115. 高阶导数的定义** 若函数  $y = f(x)$  在某一区间  $\mathcal{X}$  内有有限导数  $y' = f'(x)$ , 则后者本身就代表  $x$  的另一函数, 于是可能遇到这函数在  $\mathcal{X}$  内的某一点  $x_0$  处也有有限或无穷导数. 它就称为函数  $y = f(x)$  在该点处的**二阶导数**, 并以下列记号之一来表示:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y'', \quad D^2 y; \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \quad f''(x_0), \quad D^2 f(x_0).$$

例如, 我们已在 92 内看到过, 动点的速度  $v$  是它所经过的路程  $s$  关于时间  $t$  的导数:  $v = \frac{ds}{dt}$ , 加速度  $a$  是速度  $v$  关于时间  $t$  的导数:  $a = \frac{dv}{dt}$ . 这就是说, 加速度是路程关于时间的二阶导数:  $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ .

类似地, 若函数  $y = f(x)$  在整个区间  $\mathcal{X}$  内 (即在这区间内的每一点) 有有限二阶导数, 则它在  $\mathcal{X}$  内任意点  $x_0$  处的有限或无穷导数就称为函数  $y = f(x)$  在这点处的**三阶导数**, 并记成:

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \quad y''', \quad D^3 y; \quad \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}, \quad f'''(x_0), \quad D^3 f(x_0).$$



用相似的方法由三阶导数可得出**四阶导数**, 等等. 若假定  $(n-1)$  阶导数的概念已定义过, 且  $(n-1)$  阶导数在区间  $\mathcal{X}$  内存在而且是有限的, 则它在这区间内某一点  $x_0$  处的导数称为原来函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶导数; 它的表示法, 采用记号

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad y^{(n)}, \quad D^n y; \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0).$$

有时在应用拉格朗日或柯西的表示法时, 可能需要指出依那种变量而取导数; 那时它就写成下标的形式:

$$y''_{x^2}, \quad D^3_{x^3} y, \quad f^{(n)}_{x^n}(x_0), \quad \text{余类推.}$$

其中  $x^2, x^3, \dots$  是代替  $xx, xxx, \dots$  的约定简写法. 例如, 可以写成  $a = s''_{t^2}$ .

(读者明白, 此处的整个记号

$$\frac{d^n f}{dx^n}, \quad f^{(n)} \quad \text{或} \quad f^{(n)}_{x^n}, \quad D^n f \quad \text{或} \quad D^n_{x^n} f$$

可以看成是函数记号.)

用这种方法, 从一阶导数依次推到后一导数, 我们就“归纳地”定义了  $n$  阶导数的概念. 确定  $n$  阶导数的关系式:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

也称为递推关系式, 由于它可以使我们从  $n$  阶导数还原到  $(n-1)$  阶导数.

$n$  阶导数的求法, 在已给定  $n$  时, 就依读者所已经知道的法则及公式去进行. 例如, 若

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2},$$

则

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3}, \quad y'' = 6x^2 - x + 4, \quad y''' = 12x - 1, \quad y^{IV} = 12,$$

于是以后的各阶导数都恒等于 0.

或设

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

则

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad y''' = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}, \quad \text{等等.}$$

须指出, 关于高阶导数亦可以归纳地建立单侧导数的概念 [参阅 100]. 若函数  $y = f(x)$  仅在某一区间  $\mathcal{X}$  内定义着, 则当说及它在区间的端点的任意阶导数时, 总是指的单侧导数.



**116. 任意阶导数的普遍公式** 一般说来, 要计算任何函数的  $n$  阶导数, 必须预先求出前面一切阶的导数. 然而在有许多情形, 却能顺利地建立  $n$  阶导数的普遍式, 它直接依赖着  $n$ , 而不再包含前面各阶导数的记号.

在推导这种普遍式时, 下列公式有时是有用处的:

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

它们是读者所已经知道的 97 中法则 I 及 II 推广到高阶导数时的结果. 逐次地应用这些法则, 就很容易得出它们.

1) 首先考察幂函数  $y = x^\mu$ , 其中  $\mu$  是任何实数. 我们依次有

$$\begin{aligned} y' &= \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}, \\ y''' &= \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \dots \end{aligned}$$

由此也很易看出普遍的规律:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1) \cdots (\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

但严格说来, 它必须再加证明. 为此, 可利用数学归纳法. 假设在  $n$  的某一数值时这公式是对的, 再微分它一次, 我们就得到:

$$\begin{aligned} [y^{(n)}]' &= y^{(n+1)} = \mu(\mu-1) \cdots (\mu-n+1)[x^{\mu-n}]' \\ &= \mu(\mu-1) \cdots (\mu-n+1)(\mu-n)x^{\mu-(n+1)}, \end{aligned}$$

因此, 如果我们的公式对于  $n$  阶导数时是对的, 则对于  $(n+1)$  阶导数也是对的. 由此也就推得它对于一切自然数  $n$  的数值是正确的.

例如, 若取  $\mu = -1$ , 则得

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2) \cdots (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

而在  $\mu = -\frac{1}{2}$  时,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2x)^{n\sqrt{x}}} \textcircled{1}$$

余依次类推.

<sup>①</sup>记号  $n!!$  表示自然数的连乘积, 这些自然数不超过  $n$  并且每两数间的差都是二, 例如

$$7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10.$$



当  $\mu$  本身是自然数  $m$  时, 则  $x^m$  的  $m$  阶导数已经就是常数  $m!$ , 而一切以后的导数就都是零. 由此, 明显可知, 对于  $m$  次整多项式亦有相似的情况.

2) 对于略为普遍的一些式子

$$y = (a + bx)^\mu \quad (a, b = \text{常量})$$

仍旧很容易求出:

$$y^{(n)} = \mu(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1) \cdot b^n \cdot (a + bx)^{\mu - n}.$$

特别情形, 同上面那样, 得出

$$\left(\frac{1}{a + bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a + bx)^{n+1}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{a + bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n - 1)!! b^n}{2^n (a + bx)^n \sqrt{a + bx}}.$$

3) 今设  $y = \ln x$ . 首先有

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

由此式依 1) 内的对应公式取  $(n - 1)$  阶导数, 在它里面把  $n$  换成  $n - 1$ ; 那时我们亦就得出

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n - 1)!}{x^n}.$$

4) 若  $y = a^x$ , 则

$$y' = a^x \cdot \ln a, \quad y'' = a^x \cdot (\ln a)^2, \dots$$

普遍公式

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

很容易用数学归纳法证明.

特别情形, 显然有

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

5) 假定  $y = \sin x$ ; 则

$$\begin{aligned} y' &= \cos x, & y'' &= -\sin x, & y''' &= -\cos x, \\ y^{\text{IV}} &= \sin x, & y^{\text{V}} &= \cos x, & \dots \end{aligned}$$

由这一途径去求  $n$  阶导数的普遍式是比较困难的. 但若把一阶导数的公式改写成  $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , 事情就立刻简单化了; 很清楚的, 每微分一次以后, 就只要在变元上加一个  $\frac{\pi}{2}$ , 于是

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$



类似地又可得出公式

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

6) 考察函数  $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$ . 把它表示成为

$$y = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right),$$

我们就有利用例 2) (以及在开始时已经就指出的一般法则) 的可能性. 最后,

$$\left( \frac{1}{x^2 - a^2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a} \left[ \frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right].$$

7) 在函数  $y = e^{ax} \sin bx$  的情形, 我们将利用更巧妙的方法. 就是, 有

$$y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx;$$

若引入由下列条件所定义的辅助角  $\varphi$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

则一阶导数的表达式就可以改写成

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} \cdot (\sin bx \cdot \cos \varphi + \cos bx \cdot \sin \varphi) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx + \varphi). \end{aligned}$$

重复地微分, 很易根据数学归纳法而建立普遍的规律

$$y^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx + n\varphi).$$

8) 再讨论函数  $y = \operatorname{arctg} x$ . 首先让我们设法用  $y$  表示  $y^{(n)}$ . 因为  $x = \operatorname{tg} y$ , 故

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin \left( y + \frac{\pi}{2} \right).$$

再关于  $x$  而微分它 (并记住  $y$  是  $x$  的函数), 则得

$$\begin{aligned} y'' &= \left[ -\sin y \cdot \sin \left( y + \frac{\pi}{2} \right) + \cos y \cdot \cos \left( y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot y' \\ &= \cos^2 y \cdot \cos \left( 2y + \frac{\pi}{2} \right) = \cos^2 y \cdot \sin 2 \left( y + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

又一次的微分给出

$$\begin{aligned} y''' &= \left[ -2 \sin y \cdot \cos y \cdot \sin 2 \left( y + \frac{\pi}{2} \right) + 2 \cos^2 y \cdot \cos 2 \left( y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot y' \\ &= 2 \cos^3 y \cdot \cos \left( 3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos^3 y \cdot \sin 3 \left( y + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

普遍的公式

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left( y + \frac{\pi}{2} \right)$$

可由数学归纳法证明.



若 (在  $x > 0$  时) 引入角

$$z = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y,$$

则这公式可以改写成

$$y^{(n)} = (n-1)! \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin n(\pi - z),$$

或最后,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

9) 最后, 可作为一个练习题来建立公式

$$D^n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

它在  $n = 1$  及  $n = 2$  时的正确性可以直接验证. 现在假设, 它对于  $n$  的一切数值, 直到  $n \geq 2$  的某一数值为止都是对的, 要证明它当  $n$  换成  $n+1$  时仍旧也对<sup>①</sup>. 为这目的, 考察表达式

$$\begin{aligned} D^{n+1}(x^n e^{\frac{1}{x}}) &= D^n[D(x^n e^{\frac{1}{x}})] \\ &= D^n[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}] \\ &= n \cdot D^n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}) - D[D^{n-1}(x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})]. \end{aligned}$$

应用我们的假设, 可以改写这表达式为

$$D^{n+1}(x^n e^{\frac{1}{x}}) = n \cdot (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - D[(-1)^{n-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}] = (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}},$$

这就是我们所要证明的.

因此, 这公式对于一切自然数值  $n$  时都是对的.

**117. 莱布尼茨公式** 我们在前一目开始时曾指出 97 的法则 I 及 II 可以直接移用到任意阶导数的情形. 但处理关于乘积的导数的法则 III 却较为费事.

假定  $u, v$  是  $x$  的函数, 且各自有直到  $n$  阶为止的各阶导数; 我们将证明这时它们的乘积  $y = uv$  亦有  $n$  阶导数, 并将求出它的表达式.

应用法则 III 逐次微分这乘积; 我们就求出:

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \dots$$

很易看出导出一切这些公式的规律: 它们的右边使我们想起二项式的各次幂  $u + v, (u + v)^2, (u + v)^3, \dots$  的展开式, 只把  $u, v$  的各次幂换成对应阶的导数罢了. 若在所得的公式内把  $u, v$  写成  $u^{(0)}, v^{(0)}$ , 其间的相似性就更为完全. 推广这一规律到

<sup>①</sup>请读者注意数学归纳法在应用上的这一独特的形式; 实际上 (参阅下面的课文), 我们将利用这公式在  $n$  及  $n-1$  时的正确性.



任意的  $n$  的情形, 即得普遍的公式<sup>①</sup>:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} \\ &= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdots i} u^{(n-i)} v^{(i)} + \cdots + u v^{(n)}. \end{aligned} \quad (1)$$

要证明它的正确性, 可再运用数学归纳法. 假设对于某一  $n$  值上式是对的. 若函数  $u, v$  的  $(n+1)$  阶导数也存在, 则可以依  $x$  将上式再微分一次; 我们就得:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^n C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}. \end{aligned}$$

今将合并在最后两个总和内含函数  $u, v$  的同阶导数的各个乘积 (很易看出, 在每一乘积内, 导数的阶的总和始终是等于  $n+1$ ). 乘积  $u^{(n+1)} v^{(0)}$  仅包含在第一个总和内 (在  $i=0$  时); 在这总和内, 它的系数是  $C_n^0 = 1$ . 完全与此相同,  $u^{(0)} v^{(n+1)}$  仅包含在第二个总和内 (有序号  $i=n$  的项), 它的系数是  $C_n^n = 1$ . 包含在这两个总和内的其他的一切乘积, 它们的形式是  $u^{(n+1-k)} v^{(k)}$ , 并且  $1 \leq k \leq n$ . 每一个这样的乘积, 在第一个总和内能遇到 (有序号  $i=k$  的项), 在第二个总和内亦能遇到 (有序号  $i=k-1$  的项). 对应的系数的和是  $C_n^k + C_n^{k-1}$ . 大家都已经知道,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

这样, 最后求出:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]} v^{(k)}, \end{aligned}$$

<sup>①</sup>记号  $\Sigma$  表示同一类型的诸项的总和. 当这些项都依赖着一个标数, 而这个标数是在确定界限内变动着时, 这些界限就必须 (在下面及在上面) 指示出来. 例如

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}, \text{ 等等.}$$



因为  $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ .

我们已得到  $y^{(n+1)}$  的表达式, 它完全类似于表达式 (1) (仅  $n$  换成  $n+1$ ); 这样就证明了公式 (1) 对于一切自然数值  $n$  的正确性.

已建立的公式 (1), 称为莱布尼茨公式. 在推求  $n$  阶导数的普遍式时, 它经常是有用处的.

须指出对于许多因子的连乘积  $y = uv \cdots t$  的  $n$  阶导数, 也可建立这样的公式; 它与多项式的幂  $(u + v + \cdots + t)^n$  的展开式相类似.

118. 例题 1) 用莱布尼茨公式 (1) 求

$$(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}$$

的导数. 令  $v = x^2, u = \cos ax$ . 那时

$$u^{(k)} = a^k \cdot \cos \left( ax + k \frac{\pi}{2} \right), \quad v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{IV} = \cdots = 0.$$

这样, 在公式 (1) 内除去首三项外, 其余各项都等于零, 于是我们就得到

$$\begin{aligned} (uv)^{(50)} &= x^2 \cdot a^{50} \cdot \cos \left( ax + 50 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{50}{1} \cdot 2x \cdot a^{49} \cdot \cos \left( ax + 49 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot a^{48} \cdot \cos \left( ax + 48 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a^{48} [(2450 - a^2 x^2) \cos ax - 100ax \cdot \sin ax]. \end{aligned}$$

2) 回到 116, 7), 现在我们就能够由莱布尼茨公式直接得出函数

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

的  $n$  阶导数的普遍式:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= e^{ax} \left[ \sin bx \left( a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos bx \left( na^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \cdots \right) \right]. \end{aligned}$$

3) 求函数  $y = \arcsin x$  的  $(n+1)$  阶导数的表达式.

首先, 我们有

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

于是依莱布尼茨公式,

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)^{(n)} = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^{(n)} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ &\quad + n \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^{(n-1)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)' \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^{(n-2)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)'' \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^{(n-3)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)''' + \cdots \end{aligned}$$



今若应用在 116, 2) 内所得的公式去求  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  及  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  的各阶导数, 就得结果

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{2^n \sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(1+x)^n} - n \frac{(2n-3)!!1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-5)!!3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2} + \cdots \right\}.$$

4) 求函数  $y = \operatorname{arctg} x$  在  $x = 0$  时的各阶导数的数值.

因为  $y' = \frac{1}{1+x^2}$ , 故  $y' \cdot (1+x^2) = 1$ . 在这等式两端取  $n$  阶导数 (应用莱布尼茨公式):

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nx \cdot y^{(n)} + n(n-1) \cdot y^{(n-1)} = 0.$$

在此处令  $x = 0$ ; 若以添加下标 0 来表示在  $x = 0$  时的导数值, 则得

$$y_0^{(n+1)} = -n(n-1) \cdot y_0^{(n-1)}.$$

在  $x = 0$  时, 导数  $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$  等于 0;  $y_0'' = 0$ . 由已求出的关系式易见恒有  $y_0^{(2m)} = 0$ . 至于奇阶导数, 就有递推公式:

$$y_0^{(2m+1)} = -(2m-1) \cdot 2m \cdot y_0^{(2m-1)}.$$

注意  $y_0' = 1$ , 由此就得:

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m (2m)!.$$

这一结果也可以从 116 例 8) 的普遍公式内得出.

5) 对函数  $y = \arcsin x$  也一样.

提示 应用莱布尼茨公式于关系式:

$$(1-x^2) \cdot y'' - x \cdot y' = 0.$$

答案:

$$y_0^{(2m)} = 0, y_0^{(2m-1)} = 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2m-1)^2 = [(2m-1)!!]^2.$$

要从 3) 的普遍式内得出这一结果, 却没有这样简单.

⑥ 勒让德多项式 最后, 我们来考察以勒让德 (A.M.Legendre) 命名的重要多项式, 它由下列等式

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

来定义, 其中常系数  $C_n$  的值可看情形根据怎样能够方便的原则而给定.

首先要证明:  $(n$  次) 多项式  $X_n(x)$  有  $n$  个不同的实根, 这些根都在  $-1$  与  $+1$  之间. 为简便起见, 暂设  $C_n = 1$ .

不难看出, 多项式  $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$  和它的  $n-1$  个相继各阶导数在  $x = \pm 1$  时变为零. 于是根据罗尔定理 [111], 它的一阶导数也将有根在  $-1$  与  $+1$  之间; 依同一定理, 二阶导数将有两个根在  $-1$  与  $+1$  之间, 这样一直到  $n-1$  阶导数, 它除了有根  $-1$  与  $+1$  外, 还有  $n-1$  个根介于其间. 再对这导数应用一次罗尔定理, 便得到所要证的结论.

仍令系数  $C_n = 1$ , 我们来确定多项式  $X_n(x)$  在  $x = \pm 1$  时的数值.



把幂  $(x^2 - 1)^n$  看成  $(x + 1)^n$  乘  $(x - 1)^n$  的积, 依莱布尼茨公式可以写成:

$$X_n(x) = (x + 1)^n \cdot \frac{d^n(x - 1)^n}{dx^n} + C_n^1 \cdot \frac{d(x + 1)^n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x - 1)^n}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{d^n(x + 1)^n}{dx^n} \cdot (x - 1)^n.$$

因为从第二项起的各项都含因式  $x - 1$ , 它们在  $x = 1$  时都等于 0, 所以显然有:

$$X_n(1) = 2^n \cdot n!.$$

类似地可得:

$$X_n(-1) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n!.$$

若在定义勒让德多项式  $X_n(x)$  的一般公式中设  $c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}$ , 则得到特别常见的多项式, 今后我们将把这多项式记为  $P_n(x)$ , 其特征是在点  $x = 1$  和  $x = -1$  处取值  $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$ .

用莱布尼茨公式很易进一步证明勒让德多项式  $X_n(x)$  满足下列关系式:

$$(x^2 - 1)X_n'' + 2x \cdot X_n' - n(n + 1)X_n = 0,$$

它在这类多项式的理论中担任着重要的角色.

实际上, 令  $y = (x^2 - 1)^n$ , 就有

$$y' = 2nx \cdot (x^2 - 1)^{n-1}, \text{ 于是 } (x^2 - 1) \cdot y' = 2nx \cdot y.$$

今在最后的等式的两端各取  $(n + 1)$  阶导数; 依莱布尼茨公式,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)y^{(n+2)} + (n + 1) \cdot 2x \cdot y^{(n+1)} + \frac{n(n + 1)}{2} \cdot 2 \cdot y^{(n)} \\ = 2nx \cdot y^{(n+1)} + (n + 1) \cdot 2n \cdot y^{(n)}, \end{aligned}$$

由此

$$(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n + 1)y^{(n)} = 0,$$

再以  $c_n$  乘之, 就得到所要证明的关系式.

**119. 高阶微分** 今转而讨论高阶微分; 它们也是归纳地来定义的. 函数  $y = f(x)$  的 (一阶) 微分在某一点处的微分称为函数在这一点处的二阶微分; 记为:

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分称为三阶微分:

$$d^3y = d(d^2y).$$



一般地说, 函数  $y = f(x)$  的  $(n-1)$  阶微分的微分称为函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶微分:

$$d^n y = d(d^{n-1} y)^{19)}.$$

若应用函数记号, 则各阶微分可以表示为:

$$d^2 f(x_0), d^3 f(x_0), \dots, d^n f(x_0), \dots,$$

在这里我们还可以指出这些微分是在  $x$  的特别值  $x = x_0$  处取值的.

在求高阶微分时很重要的一件事, 是要记住  $dx$  是不依赖于  $x$  的任意的数, 关于  $x$  而微分时必须把它看成常数因子. 在这种情形, 将有 (始终假定对应的导数是存在的):

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2, \\ d^3 y &= d(d^2 y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3 \textcircled{1} \end{aligned}$$

等等. 很易猜出普遍规律是

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n, \quad (2)$$

这可以用数学归纳法来证明. 由它就推得

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

于是从今以后, 这记号就可以看成分数了.

利用等式 (2), 现在很容易改造莱布尼茨公式使适用于微分. 只要在它的两边各乘以  $d(x^n)$ , 就可得出

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i} u d^i v \quad (d^0 u = u, d^0 v = v).$$

莱布尼茨当初所建立的公式, 原来就是关于微分的.

**120. 高阶微分的形式不变性的破坏** 回想起函数的 (一阶) 微分具有形式不变的性质, 自然就要问高阶微分是否也具有相似的性质. 今将指出, 即使二阶微分已不具有这种性质了.

<sup>①</sup>  $dx^2, dx^3, \dots$  等等恒理解为微分的幂:  $(dx)^2, (dx)^3, \dots$ . 幂的微分则记成:  $d(x^2), d(x^3), \dots$ .

<sup>19)</sup> 我们强调指出: 在公式  $d^2 y = d(dy)$  与  $d^n y = d(d^{n-1} y)$  中, 当  $\Delta x$  固定时所有的微分都看成  $x$  的函数. 为了使微分能重复施行, 这是必要的. 我们发现 [参看 104 目的脚注 18)], 当  $\Delta x$  固定时,  $dy$  是  $x$  的函数, 而  $dx$  是常数; 同时  $dy = y'_x dx$ . 这样就可以谈函数  $dy$  作为  $x$  的函数的可微性, 并且利用最简单的微分法则  $(dy)' = (y'_x dx)' = y''_x dx$ ;  $d(dy) = (dy)'_x \cdot dx = y''_x \cdot (dx)^2$  等等, 由微分求导数与 (对应于值  $\Delta x$  的) 微分值.



因此, 设  $y = f(x)$  而  $x = \varphi(t)$ , 于是  $y$  可以看成  $t$  的复合函数:  $y = f(\varphi(t))$ . 它关于  $t$  的 (一阶) 微分可以写成:  $dy = y'_x \cdot dx$ , 此处  $dx = x'_t \cdot dt$  是  $t$  的函数. 再求关于  $t$  的二阶微分  $d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)$ . 微分  $dy'_x$  可以再应用 (一阶) 微分形式的不变性, 化为  $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$ , 于是最后得

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \quad (3)$$

然而当  $x$  是自变量时, 二阶微分的形式却是  $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$ . 当然, 表达式 (3) 是  $d^2y$  的更普遍的表达式: 若在特别情形,  $x$  是自变量, 则  $d^2x = 0$ , 于是仅留下第一项了.

且举一例. 设  $y = x^2$ , 于是当  $x$  是自变量时:

$$dy = 2x dx, \quad d^2y = 2dx^2.$$

今令  $x = t^2$ , 则  $y = t^4$ , 而

$$dy = 4t^3 dt, \quad d^2y = 12t^2 dt^2.$$

$dy$  的新表达式可以从原式得出, 只要把  $x = t^2, dx = 2t dt$  代入即得. 但对于  $d^2y$  却并不如此: 作同样的代换后, 我们得到的是  $8t^2 dt^2$  而不是  $12t^2 dt^2$ . 但若依  $t$  微分等式  $dy = 2x dx$ , 设想  $x$  是  $t$  的函数, 则与 (3) 相似, 得公式

$$d^2y = 2dx^2 + 2xd^2x.$$

在此处代入  $x = t^2, dx = 2t dt, d^2x = 2dt^2$ , 这才得出正确的结果:  $12t^2 dt^2$ .

因此, 若  $x$  不再是自变量时, 二阶微分  $d^2y$  就要用  $x$  的微分的二项式 (3) 来表示. 对于三阶以后各阶微分 (在转变成新变量时) 附加的项数还要增加. 因此, 在用微分表示高阶导数  $y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \dots$  的表达式

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots \quad (4)$$

内, 已不能依任意变量取微分, 而仅能依变量  $x$  了.

**121. 参变量微分法** 虽然如此, 我们仍可以把关于  $x$  的导数用依任意变量  $t$  而取的微分写出来, 只是它们将繁复得多. 就是, 设想一切下面所写的微分是依  $t$  而取的, 则依次地有

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)'_x = \frac{d \left( \frac{dy}{dx} \right)}{dx} = \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^2},$$

即

$$y''_{x^2} = \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}; \quad (5)$$



以后,

$$y_{x^3}''' = \left( \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3} \right)'_x = \frac{d \left( \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3} \right)}{dx}$$

$$= \frac{dx^3(dx d^3y - d^3x dy) - 3dx^2 d^2x(dx d^2y - d^2x dy)}{dx^6},$$

而最后有:

$$y_{x^3}''' = \frac{dx(dx d^3y - d^3x dy) - 3d^2x(dx d^2y - d^2x dy)}{dx^5}, \quad (6)$$

等等. 公式 (5), (6), ... 是最普遍的公式; 若在它里面设想  $x$  是自变量, 则  $d^2x, d^3x, \dots$  等于零, 而我们就回到公式 (4).

我们所得的  $y$  关于  $x$  的导数公式就实现了所谓参变量微分法. 若  $x$  及  $y$  给定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

则如同我们在 106 内已看见过的, 在已知条件下, 由此定义  $y$  为  $x$  的函数:  $y = f(x)$ . 当  $x$  及  $y$  关于  $t$  的各阶导数存在时,  $y$  关于  $x$  的对应的导数亦都存在, 而且可用前述诸公式来表示.

有时  $y$  关于  $x$  的导数式用  $x$  及  $y$  关于  $t$  的导数 (不是微分) 来表示更为方便. 它们可以很容易地从微分表达式内得出, 只需分子及分母各除以  $dt, dt^3, dt^5, \dots$ . 用这方法就得到公式:

$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3};$$

类似地有  $y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{(x'_t)^5}$  等等.

**122. 有限差分** 设函数  $f(x)$  定义在某区间  $\mathcal{X}$  上, 并设以后所讲的  $x$  值都是属于这区间的. 将自变量  $x$  的某增量  $\Delta x$  固定下来 (为确定起见可设  $\Delta x > 0$ , 但是设  $\Delta x < 0$  也毫无关系) 之后, 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

并把此式称为函数  $f(x)$  的一阶差分. 一阶差分的一阶差分称为二阶差分:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$



高阶差分可归纳地定义如下:

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)].$$

且可对  $n$  阶差分建立以下公式

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f(x + (n-i)\Delta x) \\ &= f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + (n-1)\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(x + (n-2)\Delta x) - \cdots + (-1)^n f(x),\end{aligned}$$

它直接用函数本身在等距分点

$$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, \cdots, x + n\Delta x$$

表示出  $n$  阶差分. 这公式容易用数学归纳法来证明, 读者可以自己求证.

现在把这些有限差分跟导数和微分比较一下.

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[x_0', x_0 + n\Delta x]$  上有  $n-1$  阶连续导数

$$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x),$$

且至少在开区间  $(x_0, x_0 + n\Delta x)$  上有有限的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x)$ . 于是我们有公式

$$\Delta^n f(x_0) = f^{(n)}(\xi_n) \cdot \Delta x^n, \text{ 其中 } x_0 < \xi_n < x_0 + n\Delta x. \quad (7)$$

当  $n=1$  时, 这就是有限差分的公式, 故有限差分公式是公式 (7) 的最简单情形. 为了要用数学归纳法来证明我们的论断, 先假定公式 (7) 的变形, 即将  $n$  换为  $n-1$  且对假设作相应改变后所得的公式成立, 然后证明在所作假定下, 公式 (7) 成立. 依这假定, 可知函数  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + (n-1)\Delta x]$  上满足使 (7) 的变形公式得以成立的更多的条件, 因此可写出

$$\Delta^{n-1}[\Delta f(x_0)] = \Delta^n f(x_0) = [f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(\xi_{n-1})]\Delta x^{n-1}, \quad (8)$$

其中  $x_0 < \xi_{n-1} < x_0 + (n-1)\Delta x$ . 对这公式的右边应用有限增量公式<sup>①</sup>, 便立即得到公式 (7), 且

$$x_0 < \xi_{n-1} < \xi_n < \xi_{n-1} + \Delta x < x_0 + n\Delta x.$$

要注意的是, 若导数  $f^{(n)}(x)$  在点  $x_0$  也存在而且在该点连续, 则自 (7) 式让  $\Delta x \rightarrow 0$  (其中  $\xi_n \rightarrow x_0$ ), 得

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}. \quad (9)$$

这个有趣的公式给出了用一次极限步骤求得  $n$  阶导数的可能性, 同时这公式是  $n$  阶导数在点  $x_0$  本身存在这个唯一的假定下成立的. 就是说, 在点  $x_0$  的某邻域内存在导数

$$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x),$$

<sup>①</sup>因函数  $f^{(n-1)}(x)$  在区间  $[\xi_{n-1}, \xi_{n-1} + \Delta x]$  上连续且在其内有有限导数  $f^{(n)}(x)$ , 故可应用有限增量公式.



于是在  $\Delta x$  足够小时, 可应用公式 (8). 由于导数  $f^{(n)}(x_0)$  存在, 应用 [96 目的公式 (2)], 可写出

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (\xi_{n-1} - x_0) + \alpha(\xi_{n-1} - x_0)$$

与

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (\xi_{n-1} + \Delta x - x_0) + \beta(\xi_{n-1} + \Delta x - x_0),$$

其中  $\alpha$  与  $\beta$  依赖于  $\Delta x$  且随  $\Delta x$  而趋于零. 由上式以及 (8) 可推出<sup>①</sup>:

$$\Delta^n f(x_0) = [f^{(n)}(x_0) + \gamma] \cdot \Delta x^n,$$

其中  $\gamma$  是新的无穷小. 最后, 用  $\Delta x^n$  除这等式的两边, 并取  $\Delta x \rightarrow 0$  的极限, 便得公式 (9).

但必须指出 (9) 只有在导数  $f^{(n)}(x_0)$  存在时才成立. 但在这导数不存在时, 右边的极限也可能存在<sup>②</sup>. 例如, 我们考察如下定义的函数:

$$f(x) = x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

而取  $x_0 = 0$ . 这函数有一阶导数

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad f'(0) = 0,$$

但在点 0 没有二阶导数, 因此式

$$\frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 3\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - \cos \frac{1}{\Delta x},$$

在  $\Delta x \rightarrow 0$  时无极限. 但

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 f(0)}{\Delta x^2} &= \frac{f(0 + 2\Delta x) - 2f(0 + \Delta x) + f(0)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{8\Delta x^3 \sin \frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x^3 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x^2} = 8\Delta x \sin \frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## §5. 泰勒公式

**123. 多项式的泰勒公式** 若  $p(x)$  是  $n$  次整多项式:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n, \quad (1)$$

<sup>①</sup>利用  $0 < \xi_{n-1} - x_0 < (n-1)\Delta x (\Delta x > 0)$ .

<sup>②</sup>因而 (9) 式根本不是  $n$  阶导数这一概念的新的, 与老概念等价的定义.



则逐次将它微分  $n$  次:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1}, \\ p''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \cdots + (n-1)n \cdot a_n x^{n-2}, \\ p'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3}, \\ &\dots\dots\dots \\ p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n \end{aligned}$$

并且在一切这些式子内令  $x = 0$ , 就得出用多项式本身及其导数在  $x = 0$  时的数值去表达这多项式的系数的式子:

$$\begin{aligned} a_0 &= p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \\ a_3 &= \frac{p'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}. \end{aligned}$$

把这些系数的数值代入 (1):

$$\begin{aligned} p(x) &= p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned} \quad (2)$$

这公式与 (1) 的区别只在于系数的写法不同.

可以用它依  $(x - x_0)$  的幂展开

$$\begin{aligned} p(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 \\ &\quad + A_3(x - x_0)^3 + \cdots + A_n(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (3)$$

来代替它依  $x$  的幂展开的多项式, 这里的  $x_0$  是  $x$  的某一特殊常数值. 令  $x - x_0 = \xi$ ,  $p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$ , 对于多项式

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \cdots + A_n\xi^n$$

的系数, 依已证明的式子, 可得:

$$\begin{aligned} A_0 &= P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \\ A_3 &= \frac{P'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \end{aligned}$$

但

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0 + \xi), \quad P''(\xi) = p''(x_0 + \xi), \quad \dots,$$



于是

$$P(0) = p(x_0), \quad P'(0) = p'(x_0), \quad P''(0) = p''(x_0), \quad \dots$$

而

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= p(x_0), & A_1 &= \frac{p'(x_0)}{1!}, & A_2 &= \frac{p''(x_0)}{2!}, \\ A_3 &= \frac{p'''(x_0)}{3!}, & \dots, & & A_n &= \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

就是说, 展开式 (3) 的系数可用多项式本身及其导数在  $x = x_0$  时的数值来表达.

把表达式 (4) 代入 (3):

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

公式 (5) 以及它的特别情形 (在  $x_0 = 0$  时) (2) 都称为**泰勒(B. Taylor)公式**<sup>①</sup>. 它在代数上有什么重要的用处, 这是大家都知道的.

我们作一条 (对以后有用处的) 明显的附注, 若多项式  $p(x)$  可表示为下面的形式

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{c_3}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

则必有

$$p(x_0) = c_0, \quad p'(x_0) = c_1, \quad p''(x_0) = c_2, \dots, \quad p^{(n)}(x_0) = c_n.$$

**124. 任意函数的展开式 · 余项的佩亚诺式** 今转而考察一般并不是多项式的任意函数  $f(x)$ . 假定它在某一点  $x_0$  处存在着直至  $n$  阶为止的各阶导数. 准确些说, 这意思就是, 函数在含有点  $x_0$  的某一区间  $[a, b]$  内是有定义的, 并且有直至  $(n - 1)$  阶为止的各阶导数:

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x),$$

除此以外, 在这点  $x_0$  处还有  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x_0)$ <sup>②</sup>. 那么依 (5) 的形式, 对于函数  $f(x)$  也可以作出多项式

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (6)$$

<sup>①</sup>可是公式 (2) 常称为**麦克劳林(C. Maclaurin)公式**.

<sup>②</sup>若点  $x_0$  是区间  $[a, b]$  的端点之一, 则谈及在这点处的导数时, 我们就是指单侧导数而言.



根据前面一目的附注, 这多项式及其导数 (直至  $n$  阶为止) 在点  $x_0$  处与函数  $f(x)$  及其导数各有相同的数值.

但在这次, 只要  $f(x)$  不是  $n$  次多项式, 就已经不能肯定等式  $f(x) = p(x)$ . 多项式  $p(x)$  仅给出函数  $f(x)$  的某一近似式. 因此, 研究差

$$r(x) = f(x) - p(x) \quad (7)$$

就成为特别有趣的事情.

首先要证明, 在  $x \rightarrow x_0$  时这差是高于  $n$  阶的无穷小 (与  $x - x_0$  比较):

$$r(x) = o((x - x_0)^n). \quad (8)$$

依多项式  $p(x)$  的性质, 对于  $r(x)$  显然将成立等式

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0. \quad (9)$$

现在确立以下的一般命题: 对任何函数  $r(x)$ , 在点  $x_0$  有直到  $n$  阶导数的, 如果满足条件 (9), 则关系式 (8) 成立.

用数学归纳法来证明. 当  $n = 1$  时, 这一命题的形式是: 若在点  $x_0$  具有 (一阶) 导数的函数  $r(x)$  满足条件

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

则

$$r(x) = o(x - x_0).$$

这个命题就可以直接证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0.$$

今假定上述命题对某一  $n \geq 1$  成立, 而来证明当  $n$  换成  $(n + 1)$  时命题也成立, 即: 若在点  $x_0$  具有直到  $n + 1$  阶导数的函数  $r(x)$  满足条件

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^n(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0 \quad (9^*)$$

则

$$r(x) = o((x - x_0)^{n+1}). \quad (8^*)$$

自 (9\*) 可看出函数  $r'(x)$  满足 (9) 这种形式的条件, 故依假设对  $r'(x)$  就有

$$r'(x) = o((x - x_0)^n).$$

但依有限增量公式 [112],

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c)(x - x_0),$$



其中  $c$  在  $x_0$  与  $x$  之间; 故  $|c - x_0| < |x - x_0|$ , 于是

$$r'(c) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_0)^n),$$

我们就得到 (8\*), 这就是要证明的.

于是我们的命题对任何自然数  $n$  是成立的, 而差式 (7) 确实满足关系式 (8). 注意 (6), 便得公式

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \end{aligned} \quad (10)$$

这与公式 (5) 只相差余项 (8). 以上述形式来给出余项的是佩亚诺 (G. Peano). 公式 (10) 也称为带有佩亚诺式余项的泰勒公式.

已证明的公式是 96 公式 (3) 的自然的推广, 该式可以写成:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0);$$

它对应于  $n = 1$ . 在那里除了高于一阶无穷小的误差以外, 函数  $f(x)$  可以表示为线性函数的形式, 在这里除了高于  $n$  阶无穷小的误差以外, 我们同样可以把  $f(x)$  表示为  $n$  次多项式的形式.

很易指出, 函数  $f(x)$  的这种表示式是唯一的, 即若在  $x_0$  的近处同时有

$$\begin{aligned} f(x) = & A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots \\ & + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} f(x) = & A'_0 + A'_1(x - x_0) + A'_2(x - x_0)^2 + \cdots \\ & + A'_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \end{aligned}$$

则必有

$$A_0 = A'_0, \quad A_1 = A'_1, \quad \cdots, \quad A_n = A'_n.$$

事实上, 由恒等式

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n \\ & = A'_0 + A'_1(x - x_0) + A'_2(x - x_0)^2 + \cdots + A'_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

在  $x \rightarrow x_0$  时立刻得出  $A_0 = A'_0$ . 约去这两项, 并用  $x - x_0$  除它们, 得出:

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^{n-1} \\ & = A'_1 + A'_2(x - x_0) + \cdots + A'_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}), \end{aligned}$$



由此类似地可得  $A_1 = A'_1$ , 余类推.

有时应用公式 (10) 的另一形式更为方便. 余项  $r(x)$  可以表示为:

$$r(x) = \frac{\alpha}{n!}(x - x_0)^n.$$

其中  $\alpha$  依赖于  $x$ , 而且随着  $x - x_0$  同时趋向于 0. 把这表达式代入 (10), 就得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \left[ \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x - x_0)^n \right] \quad (10a)$$

更进一步, 在公式 (10) 内把  $f(x_0)$  移到左边去, 并且令  $x - x_0 = \Delta x$ . 就可以将它改写成

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot \Delta x^n + o(\Delta x^n). \quad (10b)$$

在这种形式下, 它就更接近于 96 的公式 (3):

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

上式在函数的无穷小增量  $\Delta f(x_0)$  内仅分出一个主项——这里, 照常以  $\Delta x$  作为基本无穷小——可是在公式 (10b) 内直至含  $\Delta x$  的  $n$  次幂为止的各项却都写出来了, 并且它们都是在 63 的意义下最简单的无穷小.

这样, 除了余项所生的误差以外, 函数的增量就展开成为自变量的增量的幂了.  
最后, 回想起

$$f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0), \quad f''(x_0) \cdot \Delta x^2 = d^2 f(x_0), \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x_0) \cdot \Delta x^n = d^n f(x_0),$$

我们可以把 (10b) 改写成这样的形式:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + o(\Delta x^n).$$

由此可见 (当  $\Delta x \rightarrow 0$  时) 在函数的无穷小增量的展开式中, 除去各项分母中的阶乘因子不论, 逐次的微分就表示对应阶的最简单的无穷小项.

**125. 例题** 若  $x_0 = 0$ , 泰勒公式看来是最简单的<sup>①</sup>:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (11)$$

在取  $x - x_0$  作为新的自变量之后, 一般的泰勒公式总归可以化为这个特别情形的.

现以例题的形式来考察某些初等函数依这公式的具体展开式.

<sup>①</sup>这公式也被冠以麦克劳林的名字 (参阅第 123 目的脚注).



1) 设  $f(x) = e^x$ , 则  $f^{(k)}(x) = e^x (k = 1, 2, \dots)$ . 因为在这时  $f(0) = 1, f^{(k)}(0) = 1$ , 故依公式 (11),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2) 若  $f(x) = \sin x$ , 则  $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ , 于是

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0, \\ f^{(2m-1)}(0) &= \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此, 在公式 (11) 内令  $n = 2m$ , 就有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

3) 类似地. 在  $f(x) = \cos x$  时:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right); \\ f(0) &= 1, \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m, \quad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

这样 (若取  $n = 2m + 1$ ):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

4) 今考察幂函数  $x^m$ , 此处  $m$  非自然数也非零. 在这情形, 当  $x \rightarrow 0$  时, 或则函数本身 (若  $m < 0$ ), 或则它的导数 (从某一个  $n > m$  阶开始) 无限地增大. 因此, 在此处已不能取  $x_0 = 0$ .

取  $x_0 = 1$ , 即依  $(x-1)$  的幂而展开  $x^m$ . 如前所述, 我们可以把  $x-1$  当作新的变量, 但若我们仍旧用  $x$  来记这新的变量, 则问题就成为依  $x$  的幂而展开函数  $(1+x)^m$  了.

我们知道 [116, 2)]

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

因此

$$f(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

展开式的形式就是

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + o(x^n).$$



特别情形, 例如在  $n = 2$  及  $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  时, 就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + o(x^2), \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2), \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

在这些展开式中, 第一式很容易由初等方法得出; 此处的余项实即  $\frac{x^3}{1+x}$ . 至于第二式及第三式就需要更长的计算 [比较 63].

5) 若转而讨论对数函数  $\ln x$ , 它在  $x \rightarrow +0$  时趋向于  $-\infty$ , 所以仿照前例, 我们只能考察函数  $f(x) = \ln(1+x)$ , 并且依  $x$  的幂展开它.

那时 [116, 3)]

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \textcircled{1} \\ f(0) &= 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!\end{aligned}$$

由此

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

6) 今设  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . 我们在 118, 4) 内已得到它的导数在  $x = 0$  时的数值:

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

于是它的展开式可表示为

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m}).$$

7) 对于函数  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , 泰勒公式的系数构成的规律是较繁复的. 但要写出它的为首几项并不困难. 例如, 因为

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x) = 2 \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^4 x}, \\ f^{\text{IV}}(x) &= 8 \sin x \frac{2 + \sin^2 x}{\cos^5 x},\end{aligned}$$

故

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{\text{IV}}(0) = 0,$$

于是

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

<sup>①</sup>记号  $0!$  我们永远理解为 1.



利用已知的展开式, 就已经可以不用求导数而直接写出较繁复的函数的展开式. 例如, 前一公式就可以从  $\sin x$  及  $\cos x$  的展开式而求得. 举几个新的例子, 在这时一切  $x$  的幂直到指定的幂包括在内为止, 我们都要精确地计算出来, 而更高的幂 (没有写出来的) 自然是包括在余项内.

8) 写出函数  $e^{\sin x}$  的展开式至  $x^3$ . 根据 1),

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3); \textcircled{1}$$

但依 2)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

于是

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

含  $x^3$  的项互相消去, 故最后得

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

类似地

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

9) 写出函数  $\ln \cos x$  的展开式至  $x^6$  的项. 根据 5),

$$\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6) \textcircled{2}.$$

在这时, 由于 3),

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7);$$

由此

$$\ln \cos x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right) + o(x^6),$$

或在化简后,

$$\ln \cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$$

类似地

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

而

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6).$$

一切这些不直接利用泰勒公式而得出的展开式, 当然也可以由泰勒公式求得, 并且由于函数的这种展开式的唯一性, 也就恰好有着同样的系数.

**附注** 因为在这里所考察的函数在点  $x = 0$  的邻域内都有着任何阶的导数, 所以我们在公式 (11) 内对于  $n$  的选取不受拘束, 就是可以继续展开这些函数直至  $x$  的任意次幂.

①原来应该写成  $o(\sin^3 x)$ , 但由于  $x$  与  $\sin x$  是等价无穷小, 所以写成  $o(x^3)$  是完全一样的.

②因为  $1 - \cos x$  与  $x^2$  同阶 [61], 故  $o((\cos x - 1)^3)$  同时就是  $o(x^6)$ .



**126. 余项的其他形式** 带有佩亚诺式余项的泰勒公式有各种各样的应用 (参阅下一章); 但它们总是属于所谓“局部”性质的, 即关于该点  $x_0$  的性质的. 若另外也讲及其他数值  $x$ , 则这些数值就必假定是“十分接近”于  $x_0$ , 而不能预先任意选取的.

与此同时, 自然地企图利用多项式  $p(x)$  作为函数  $f(x)$  的近似式, 用了它就可以计算  $f(x)$  的数值至所需的准确度.

要多项式  $p(x)$  能胜任这一任务, 就必须有可能对已给的  $x$  值去估计 (7) 式中的差. 在这情形, 佩亚诺形式的余项仅表明当  $x \rightarrow 0$  时  $r(x)$  也趋于 0 的性质, 不能有什么用处. 我们不能由此确定, 对于怎样的  $x$  的数值多项式  $p(x)$  可以表达函数  $f(x)$  至预先指定的准确度; 它也没有说到对于已给的  $x$ , 由于  $n$  的增大, 余项  $r(x) = r_n(x)$  的数值受到什么样的影响<sup>①</sup>, 等等.

因此我们转而推导余项  $r_n(x)$  的其他形式. 为着明确起见, 我们将考察在点  $x_0$  右方的区间  $[x_0, x_0 + H]$  ( $H > 0$ ), 并且设想函数  $f(x)$  是在这区间内定义着的; 至于函数被给定在区间  $[x_0 - H, x_0]$  内时的情形, 就可类似地加以说明了.

在这一次要作更多的假定, 就是假设在全区间  $[x_0, x_0 + H]$  内前  $n$  个导数:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

都存在着而且都是连续的, 此外, 至少在开区间  $(x_0, x_0 + H)$  内  $(n+1)$  阶导数  $f^{(n+1)}(x)$  存在着而且是有限的.

注意, 由于 (6) 及 (7),

$$\begin{aligned} r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \\ - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (12)$$

今将  $x$  固定于区间  $[x_0, x_0 + H]$  内的任一数值, 并且依照公式 (12) 右端的式样, 把常数  $x_0$  换成变量  $z$ , 做一个新的辅助函数:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) \\ - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n, \end{aligned}$$

其中自变量  $z$  算作是在区间  $[x_0, x]$  内变动的. 在这区间内, 函数  $\varphi(z)$  是连续的, 并且在它的端点处取得数值 [参阅 (12)]:

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0.$$

<sup>①</sup>必须记住, 一般地说来, 余项  $r(x)$  依赖于  $n$ ; 为了着重指出这一点, 我们以后将用  $r_n(x)$  来表示它.



此外, 在区间  $(x_0, x)$  内存在着导数

$$\begin{aligned}\varphi'(z) = & -f'(z) - \left[ \frac{f''(z)}{1!}(x-z) - f'(z) \right] \\ & - \left[ \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z) \right] \\ & - \left[ \frac{f^{IV}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 \right] - \dots \\ & - \left[ \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} \right],\end{aligned}$$

或在化简以后,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

今取任意函数  $\psi(z)$ , 它在区间  $[x_0, x]$  内是连续的, 并且至少在开区间  $(x_0, x)$  内有不等于零的导数  $\psi'(z)$ .

对函数  $\varphi(z)$  及  $\psi(z)$  应用柯西公式 [114]:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

此处

$$x_0 < c < x \text{ 或 } c = x_0 + \theta(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1).$$

因为

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

故

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

今若把函数  $\psi(z)$  换成满足所设条件的任意函数, 我们就可得出余项  $r_n(x)$  的各种不同的形式. 设  $\psi(z) = (x-z)^p$ , 此处  $p > 0$ . 就有:

$$\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1} \quad (x_0 < z < x).$$

显然, 这函数满足所设条件. 因此

$$\begin{aligned}r_n(x) &= \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.\end{aligned}$$

因为  $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ , 所以  $x - c = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (1 - \theta)(x - x_0)$ , 因而最后

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p} \cdot (1 - \theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$



这表达式称为余项的施勒米希-洛希(O.Schlömilch-Roche)式.

由上式给  $p$  以具体的数值, 就可以得出余项的更特殊的形式. 令  $p = n + 1$ , 就得特别简单的拉格朗日余项:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (x_0 \leq c \leq x),$$

它使人想起泰勒公式的紧接着  $n$  阶导数下面的一项, 只是其中的  $(n+1)$  阶导数不取在  $x_0$  处的数值, 而是取在某一中值  $c$  (在  $x_0$  与  $x$  之间) 处的数值.

这样, 具拉格朗日余项式的泰勒公式就有如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ & (x_0 \leq c \leq x). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

若在式内把  $f(x_0)$  移至左端, 就很易看出, 它是有限增量公式 [112]

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

的直接推广.

虽然由于简单方便大家最乐意应用拉格朗日余项式, 但在个别情形, 这形式对于估计余项是不适用的, 因而不得不改用其他略繁的形式. 我们将在这里讲及其中之一, 即柯西余项式, 它是在施勒米希-洛希的普遍式内令  $p = 1$  而得到的:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

**127. 近似公式** 为简单起见, 在公式 (13) 内令  $x_0 = 0$ , 而  $c$  就改写成  $\theta x$ , 此处  $0 < \theta < 1$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (14)$$

若弃去这里的余项, 则得近似公式:

$$f(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

它用多项式来代替原来性质繁复的函数. 但在这一次我们已有可能估计这公式的误差, 因为它 (依绝对值) 刚好等于所弃去的那一项. 例如, 若  $(n+1)$  阶导数 (至少当变元在 0 与  $x$  之间变动时) 的绝对值是以  $M$  为界限的, 则

$$|r_n(x)| \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$



转而讨论初等函数作为例子. 我们不再重复 125 的计算, 只是把余项写成新的形式.

1) 令  $f(x) = e^x$ . 近似公式为:

$$e^x \doteq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

因为在这里的余项是

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

所以, 例如在  $x > 0$  时, 可估计误差如下:

$$|r_n(x)| < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

特别情形, 若  $x = 1$ , 则

$$e \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad |r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

我们在 37 内计算数  $e$  的近似值时已经应用过与此类似的公式, 但余项的估计系由另一方法得出, 那里的结果比较精确些.

2) 取  $f(x) = \sin x$ , 则得

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

在这情形余项为:

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

并且误差很容易估计为:

$$|r_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

特别情形, 若我们只取一项而令

$$\sin x \doteq x,$$

则为着要使误差小于 0.001, 就只要取 (算作  $x > 0$ )

$$\frac{x^3}{6} < 0.001,$$

或

$$x < 0.1817,$$



这大约等于  $10^\circ$ . 在应用二项的近似公式

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6}$$

时, 要达到同一的准确度, 就只要取

$$\frac{x^5}{120} < 0.001,$$

或

$$x < 0.6544 \quad (\doteq 37.5^\circ);$$

若限制角  $x < 0.4129 (\doteq 23.5^\circ)$ , 则误差甚至可  $< 0.0001$ , 余类推.

我们看到, 泰勒多项式的项数愈多时, 它就以愈大的准确度及在更长的距离内表达原来的函数. 图 52, a 明显地表明这事实, 在图中与函数  $y = \sin x$  的图像并列的是各多项式的图像, 这些多项式是:

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^3}{6}, \quad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \text{等等}.$$

3) 类似地, 对于  $f(x) = \cos x$  就有

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

并且

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

因此

$$|r_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

例如, 对于公式

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

误差

$$|r_3(x)| \leq \frac{x^4}{24},$$

就说是, 在  $x < 0.2213 (\doteq 13^\circ)$  时误差  $< 0.0001$ , 余类推. 在图 52, 6 中有着函数  $y = \cos x$  的图像及下面诸多项式

$$y = 1, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \text{ 等等}$$

的图像以便比较.

请读者注意, 这与 62, 63, 107 诸目的公式比较起来已有很重大的进步: 现在我们已能确定误差的界限, 并且能够得到具任何准确度的展开式.



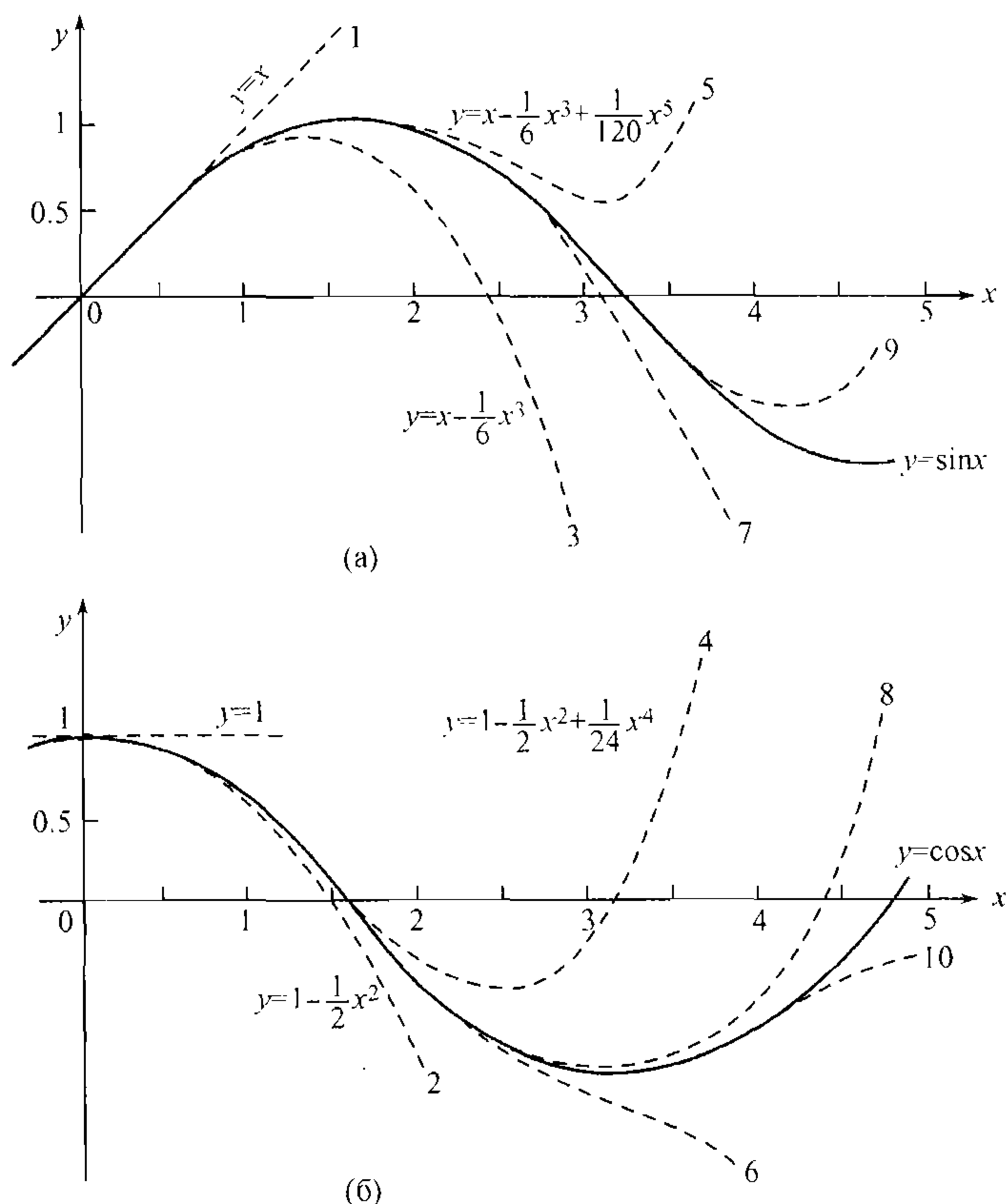


图 52

还将指出, 泰勒公式是构成完全另一种类型的近似公式的来源.

4) 作为例题, 讨论与半径相较是很微小的圆弧被近似地引直时的惠更斯(Ch. Huygens)公式.

设  $s$  是弧长,  $d$  是对应于它的弦, 而  $\delta$  是对应于半弧的弦 (图 53). 问题是要尽可能准确地用近似公式

$$s \doteq Ad + B\delta$$

来表示弧长  $s$ , 此处  $A, B$  是待定系数.

若  $r$  是圆的半径, 而  $2x$  是对应于弧  $s$  的圆心角, 则有

$$d = 2r \cdot \sin x = 2r \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta'}{120}x^5 \right) \quad (0 < \theta' < 1).$$

类似地, 把  $x$  换成  $\frac{x}{2}$ , 就又有

$$\delta = 2r \cdot \sin \frac{x}{2} = 2r \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \frac{\theta''}{3840}x^5 \right) \quad (0 < \theta'' < 1).$$

由此

$$Ad + B\delta = 2r \left[ \left( A + \frac{1}{2}B \right) \cdot x - \left( \frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B \right) \cdot x^3 + \left( \frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3840}B \right) \cdot x^5 \right],$$



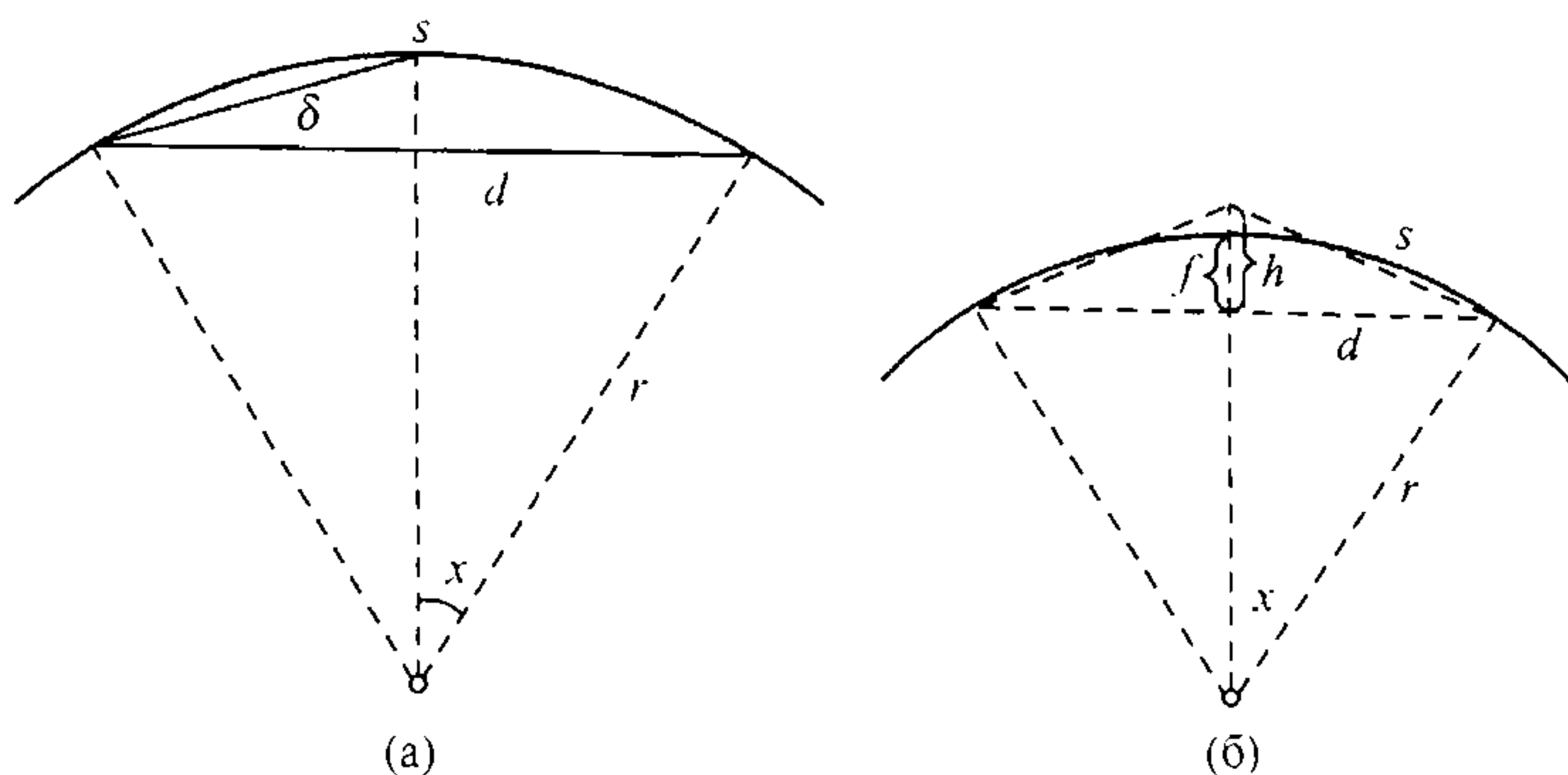


图 53

可是  $s = 2rx$ , 自然必须选取  $A$  及  $B$  使

$$A + \frac{1}{2}B = 1, \quad \frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B = 0,$$

因为这样一来, 在所考察的公式中, 左端与右端的差将仅只有含有  $x^5$  的项了. 由上二式解得  $A$  及  $B$  的数值为  $A = -\frac{1}{3}, B = \frac{8}{3}$ , 而公式成为

$$s = \frac{8\delta - d}{3} = 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}.$$

很易看出, 其误差  $\Delta$  可估计为:

$$|\Delta| < r \cdot \frac{x^5}{180}.$$

例如, 在圆心角为  $30^\circ$ , 即  $x = \frac{\pi}{12}$  时, 根据这一估计, 就有  $|\Delta| < r \cdot 0.000\ 007$ ; 实际上  $s = r \cdot 0.523\ 599 \dots$ , 而依惠更斯公式得  $s = r \cdot 0.523\ 593 \dots$ , 所以误差并未超出规定的限度.

5) 为着同一目的, 切比雪夫(Chebyshev)曾给出下面的法则: 弧长近似地等于作在弦上而高为矢的  $\sqrt{\frac{4}{3}}$  倍的等腰三角形两腰之和(图 53, 6).

暂设  $h = \gamma f$ ; 下面就要说明: 若设  $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}}$ , 则确能得 (某种意义上的) 最佳近似.

以上我们知道

$$\frac{1}{2}d = r \cdot \sin x = r \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta_1}{120}x^5 \right) \quad (0 < \theta_1 < 1);$$

相仿地,

$$h = \gamma f = \gamma r(1 - \cos x) = \gamma r \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{\theta_2}{24}x^4 \right) \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

用  $s^*$  记上述切比雪夫法则中等腰三角形的两腰之和, 即有

$$\begin{aligned} s^* &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2} = 2rx\sqrt{\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{\theta_1}{120}x^4\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\theta_2}{24}x^3\right)^2} \\ &= 2rx\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{3}\right)x^2 + ax^4 + bx^6 + cx^8}. \end{aligned}$$



现在, 为使根式中消去  $x^2$  项, 设它的系数等于 0, 于是便得  $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}}$ .

为估计误差, 把  $s^*$  式改写成

$$s^* = 2rx\sqrt{1 + Ax^4}, \quad (15)$$

而  $A$  的表达式中则含有  $x$  的二次项与四次项. 设  $x < \frac{\pi}{2}$ , 则有  $x^2 < 2.5, x^4 < 6.5$ , 而  $A$  的估计式为  $|A| < 0.06$ , 因而  $|A|x^4 < 0.4$ .

为简便起见, 把  $Ax^4$  设为  $y$ , 依有限增量公式 [112] 有

$$\sqrt{1 + Ax^4} = \sqrt{1 + y} = 1 + \frac{y}{2\sqrt{1 + \theta y}} \quad (0 < \theta < 1).$$

最后的分式可估计如下:

$$\left| \frac{y}{2\sqrt{1 + \theta y}} \right| < \frac{|y|}{2\sqrt{1 - |y|}} = \frac{|A|x^4}{2\sqrt{1 - |A|x^4}} < \frac{0.06x^4}{2\sqrt{0.6}} < \frac{1}{2}0.1x^4.$$

把表达  $s^*$  的 (15) 式与刚才所得结果比较一下, 则见

$$s^* = s + \rho, \text{ 其中 } |\rho| < 0.1rx^5.$$

误差的阶跟惠更斯公式的一样.

在第二卷十一章讲无穷级数的时候, 我们还要再讨论带余项的泰勒公式; 在那里这公式将有很大的作用.

## §6. 插值法

**128. 插值法的最简单问题 · 拉格朗日公式** 设有定义在区间  $[a, b]$  上的某函数  $f(x)$ , 已算出它在区间内点  $x_0, x_1, \dots, x_m$  处的  $m+1$  个值.

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m), \quad (1)$$

而要从这些值来算出  $x$  为任一新值处的函数值  $f(x)$ .

这就是插值法的最简单问题. 这样来提问题, 有许多地方是不确定的. 平常, 我们这样来理解这一问题: 求一次数最小的多项式  $L(x)$ , 使它在所给点  $x_i (i = 0, 1, \dots, m)$  (所谓插值法的基点) 与  $f(x)$  取相同的数值  $f(x_i)$  而在  $[a, b]$  的任何  $x$ , 近似地设

$$f(x) = L(x). \quad (2)$$

这一类的近似等叫做插值公式. 因此, 第一步是要找出近似公式, 然后在对函数  $f(x)$  的一定假设下估计近似公式 (2) 的误差.

为求满足条件

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, m) \quad (3)$$



的多项式  $L(x)$ , 可引用  $m$  次多项式

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m)}, \quad (k = 0, 1, \cdots, m).$$

相应于下标为  $k$  的每一这种多项式, 在  $x = x_k$  时取值 1, 而在  $x = x_i (i \neq k)$  时取值 0. 这样, 显然可知多项式

$$L(x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) l_k(x) \quad (4)$$

满足 (3) 中的一切条件. 这多项式的次数不高于  $m$ , 因此它可为条件 (3) 所唯一确定; 它叫做拉格朗日插值多项式, 而近似等式 (2) 叫做拉格朗日插值公式.

注意, 若引用如在插值基点  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  处等于 0 的下面表达式

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m),$$

则多项式  $l_k(x)$  可以写得更加紧凑些. 即, 我们显然有

$$(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} \quad (x \neq x_k),$$

而

$$\begin{aligned} & (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega(x)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega(x) - \omega(x_k)}{x - x_k} = \omega'(x_k). \end{aligned}$$

于是

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \quad L(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \cdot f(x_k).$$

**129. 拉格朗日公式的余项** 现在来估计差式  $f(x) - L(x)$ , 其中  $x$  是区间  $[a, b]$  上任何固定的值, 但异于插值基点. 设  $f(z)$  在这区间上具有到  $(m+1)$  阶的导数.

不管  $K$  是什么样的常数, 函数

$$\varphi(z) = f(z) - L(z) - K \cdot \omega(z)$$

也有  $m+1$  阶导数而且也在基点  $x_i (i = 0, 1, \cdots, m)$  等于 0. 现在我们这样选择常数  $K$ , 使  $z = x$  时还有  $\varphi(x) = 0$ , 即设

$$K = \frac{f(x) - L(x)}{\omega(x)} \quad (5)$$

(因  $x \neq x_i$ , 故  $\omega(x) \neq 0$ ). 依罗尔定理 [111], 在函数  $\varphi(z)$  的  $m+2$  个根  $x, x_0, x_1, \cdots, x_m$  之间的  $m+1$  个区间上, 可有其导数  $\varphi'(z)$  的  $m+1$  个不同的根. 对函数  $\varphi'(z)$  及







其中  $n_0, n_1, \dots, n_m$  是非负的整数. 这些条件的总数是

$$(n_0 + 1) + (n_1 + 1) + \dots + (n_m + 1) = N.$$

利用 (8) 中所有条件, 来计算函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  中异于任何基点的  $x$  处的值, 这一问题, 也像以前一样, 应这样来理解: 求次数最低的多项式  $H(x)$ , 它以及它的直到  $n_i$  阶的导数, 在每一基点  $x_i$  处, 与函数  $f(x)$  本身及其相应各阶导数, 取同样的一些数值, 然后近似地设

$$f(x) = H(x) \quad (9)$$

基点  $x_i$  分别叫做  $n_i + 1$  重的插值基点.

可以证明, 不高于  $N - 1$  次的, 且满足一切所设条件的多项式  $H(x)$  是存在的而且是唯一的. 这叫埃尔米特插值多项式, 而公式 (9) 叫做埃尔米特(Ch.Hermite)插值公式.

若设所有的  $n_i$  等于零, 我们就又回到拉格朗日公式 (2), 但埃尔米特公式还有别的特殊情形: 只取一个基点  $x_0$ , 然而  $n + 1$  重的; 就是说, 要求不高于  $n$  次的多项式  $T(x)$ , 使它以及它的  $n$  个导数在点  $x_0$  的值, 各与函数  $f(x)$  及其各阶导数的值相同. 我们知道, 满足这些条件的是泰勒多项式 [124(6)].

$$T(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

所以近似公式

$$f(x) = T(x)$$

[比较 127]也是埃尔米特插值公式的特例.

使公式 (9) 成为准确等式的余项, 也可用相似于上段中的步骤推导出来. 试考察  $N$  次多项式

$$\Omega(z) = (z - x_0)^{n_0+1}(z - x_1)^{n_1+1} \dots (z - x_m)^{n_m+1},$$

并在  $a \leq z \leq b$  上设

$$\Phi(z) = f(z) - H(z) - K \cdot \Omega(z), \text{ 而 } K = \text{常数}.$$

若设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有相继的  $n$  阶导数, 则  $\Phi(z)$  也是这样的. 固定异于基点的值  $z = x$ , 而取常数  $K$  为:

$$K = \frac{f(x) - H(x)}{\Omega(x)} \quad (\Omega(x) \neq 0!); \quad (10)$$

这样选取  $K$  之后, 函数  $\Phi(z)$  在  $z = x$  也等于 0. 如果每个几重根<sup>①</sup>算几个, 那么  $\Phi(z)$  总共就有  $N + 1$  个根. 像以前一样依次应用罗尔定理 (只不过函数  $\Phi(z)$  的每一

<sup>①</sup>读者熟知的关于多项式的重根这一概念, 现在推广到任意函数  $\Phi(z)$  上来: 若  $\alpha$  使  $\Phi(z)$  及其  $p - 1$  个导数等于零, 则说  $\alpha$  是  $\Phi(z)$  的  $p$  重根.



重根在做了几步之后就要固定下来而作为其相继各阶导数的根), 最后便可断定导数  $\Phi^{(N)}(z)$  在某点  $\xi$  等于零. 由此得

$$K = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!},$$

依 (10)

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \Omega(x). \quad (11)$$

这就是带余项的埃尔米特公式.

带余项的拉格朗日公式 [(7)] 是上式的特殊情形. 同样, 若只取一个  $n+1$  重的基点  $x_0$ , 便得到公式 (11) 的一个特例, 即带拉格朗日式余项的泰勒公式 [126(13)].



## 第四章 利用导数研究函数

### §1. 函数的动态的研究

**131. 函数为常数的条件** 在研究函数的动态时, 首先出现的问题是, 在哪些条件之下函数在所给区间内保持为常数或单调地变动着 [57].

**定理 1** 设函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内<sup>①</sup> 有定义而且连续, 并且在其内部有有限导数  $f'(x)$ . 要使  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内是常数, 必要而且充分的条件是:

$$\text{对于 } \mathcal{X} \text{ 内部的 } x, f'(x) = 0.$$

条件的必要性是很明显的: 由  $f(x) = \text{常数}$ , 推得  $f'(x) = 0$ .

今将证明其逆.

**充分性** 假定在  $\mathcal{X}$  内部  $f'(x) = 0$ . 固定  $\mathcal{X}$  内部的某点  $x_0$  并取另一任意的点  $x$ , 而考察区间  $[x_0, x]$  或  $[x, x_0]$ ; 在这里面, 拉格朗奇定理的一切条件 [112] 对于  $f(x)$  是满足的, 因此可以写成:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0).$$

其中  $c$  在  $x_0$  与  $x$  之间, 故必在  $\mathcal{X}$  的内部. 但依假定,  $f'(c) = 0$ ; 于是对于  $\mathcal{X}$  内的一切  $x$  都有:

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数},$$

我们的命题便已证明.

由此推得的简单推论, 将在积分学内有着极重要的应用.

<sup>①</sup>  $\mathcal{X}$  可以是闭区间或开区间, 有限的或无穷的.



**推论** 若二函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有定义而且连续, 又在其内部有有限导数  $f'(x)$  与  $g'(x)$ , 并且

$$f'(x) = g'(x) \text{ (在 } \mathcal{X} \text{ 内)},$$

则在全区间  $\mathcal{X}$  内, 这二函数仅相差一个常数:

$$f(x) = g(x) + C \quad (C = \text{常数}).$$

要证明它, 只要把定理应用于差  $f(x) - g(x)$  就已够了: 因为它的导数  $f'(x) - g'(x)$  在  $\mathcal{X}$  的内部处处为 0, 所以这差本身就是常数.

举例来说明这定理的特殊应用.

### 1) 考察二函数

$$\operatorname{arctg} x \text{ 及 } \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

因为第二函数的导数

$$D \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

与第一函数的导数相等, 所以这两个函数, 在由  $-\infty$  至  $+\infty$  的全区间内, 相差一个常数:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

要确定这常数的数值, 可以令  $x = 0$ ; 因为在这时反正切及反正弦两者都等于 0, 故  $C$  亦应该是零. 如此, 我们就证明了恒等式

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

虽然, 在 [50] 内它已经由初等的方法导出过了.

### 2) 建议读者仿此证明

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

### 3) 今考察函数

$$\operatorname{arctg} x \text{ 及 } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

很易验证, 它们的导数在除去  $x = \pm 1$  (在此处第二个函数失去意义) 以外的一切点  $x$  处都是相等的. 因此, 恒等式

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

仅个别地在区间

$$(-1, +1), (-\infty, -1), (+1, +\infty)$$



中之每一个内成立. 很奇怪的, 在各区间内的常数  $C$  也是互不相同的. 在第一个区间内  $C = 0$  (令  $x = 0$  即能证实), 而在其他两个区间内, 各有  $C = \frac{\pi}{2}$  或  $C = -\frac{\pi}{2}$  (若使  $x$  趋向于  $-\infty$  或  $+\infty$ , 就很容易看出).

所有这些关系, 也都能用初等方法来证明.

**附注** 在作理论的研究时, 以及一般地当所给函数不能从它的定义直接看出是常数时, 定理 1 的价值就显现出来了. 类似于此的情形, 在以后还会常常碰到.

**132. 函数为单调的条件** 今将阐明怎样能由函数的导数去判断这函数本身在所给区间内是增大 (减小) 着. 首先讨论函数是广义的单调增大, 即不减小 (或广义的单调减小, 即不增大) 的情形 [57].

**定理 2** 设函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有定义且连续, 并且在其内部有有限导数  $f'(x)$ . 要使  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内是广义的单调增大 (减小), 充分必要条件是:

$$\text{对于 } \mathcal{X} \text{ 内部的 } x, f'(x) \geq 0 (\leq 0) \text{ ①.}$$

**必要性** 若  $f(x)$  单调增大, 即使是广义的也可以, 则在  $\mathcal{X}$  的内部取  $x$ , 并给以增量  $\Delta x > 0$ , 将有:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x), \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

而在  $\Delta x \rightarrow 0$  时取其极限, 就得  $f'(x) \geq 0$ .

**充分性** 反之, 今设已知在  $\mathcal{X}$  的内部  $f'(x) \geq 0$ . 从区间  $\mathcal{X}$  内取二值  $x'$  及  $x'' (x' < x'')$ , 并应用拉格朗日公式于区间  $[x', x'']$  内的函数  $f(x)$ :

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \quad (x' < c < x'').$$

因为  $f'(c) \geq 0$ , 故

$$f(x'') \geq f(x'),$$

从而函数  $f(x)$  至少是广义的增大.

迄今为止并未除去函数  $f(x)$  在某些区间内保持为常数而它的导数在这些区间内恒等于 0 的可能性. 若我们除去这可能性, 就变成狭义的增大 (减小) 的情形.

**定理 3** 保留那些关于函数  $f(x)$  的连续性及其导数  $f'(x)$  的存在性的同一假定, 要使  $f(x)$  是狭义的单调增大 (减小), 必要而且充分的条件是:

- 1) 对于  $\mathcal{X}$  的内部的  $x$ , 有  $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ ,
- 2)  $f'(x)$  在  $\mathcal{X}$  的任一部分区间内不恒等于 0.

①虽然我们平行地叙述增函数及减函数的定理, 但在证明时则限于增函数的情形.



**必要性** 若  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内增大, 则依定理 2 就有  $f'(x) \geq 0$ , 于是条件 1) 满足. 条件 2) 亦必满足, 因为假使导数在某一区间内到处为 0, 则依定理 1,  $f(x)$  在这区间内就是常数, 而这是违反假定的.

**充分性** 设定理的条件 1), 2) 都已满足. 那么, 根据定理 2, 函数  $f(x)$  无论如何总不是减函数. 若在  $[a, b]$  内取二数值  $x'$  及  $x'' (x' < x'')$ , 则不仅有

$$f(x') \leq f(x''), \quad (1)$$

且又有对于  $[x', x'']$  内的  $x$ ,

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x''). \quad (2)$$

今将证明, 在 (1) 内的等号实际上是不可能实现的. 因为假使  $f(x') = f(x'')$ , 则根据 (2), 就要得出对于  $[x', x'']$  内的  $x$ ,

$$f(x') = f(x) = f(x''),$$

即函数  $f(x)$  在区间  $[x', x'']$  内是常数, 于是在这区间内就要处处成立  $f'(x) = 0$ , 违反了条件 2). 因此,

$$\text{在 } x' < x'' \text{ 时, } f(x') < f(x''),$$

即函数  $f(x)$  是狭义的增大. 定理由此得以证明.

上面所建立的导数的符号与函数变动的方向之间的关系, 在几何上是十分明显的, 只要记住 [91, 92] 导数就是函数的图像上的切线的斜率就成了. 这斜率的符号, 指出切线是向上或向下倾斜的, 而曲线本身亦就随着它向上行或向下行 (图 54).

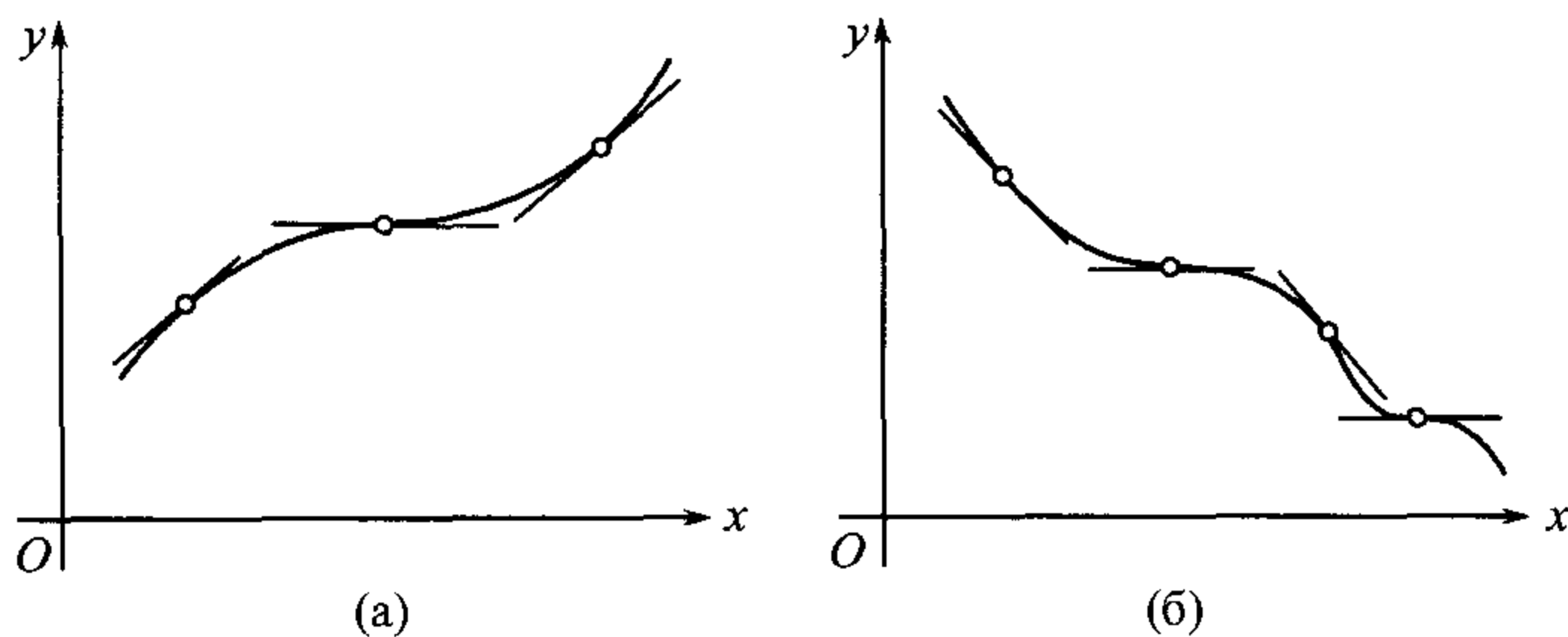


图 54

然而在个别的点处, 切线亦可能为水平的, 即增 (减) 函数 —— 甚至是狭义的 —— 的导数可以在个别的  $x$  值时等于 0.

**例题** 1) 函数  $f(x) = x^3$  就是最后一种情况的最简单的例子. 它是增函数, 然而它的导数  $f'(x) = 3x^2$  却在  $x = 0$  这点等于 0.



2) 类似于此, 函数

$$f(x) = x - \sin x$$

亦是增函数, 因为它的导数

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

不为负数, 虽然它在数值  $x = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时等于 0.

3) 最后, 为要证明增函数的导数甚至可以在有限区间内无穷多次等于 0, 试考察函数

$$\begin{cases} f(x) = e^{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}, & x > 0 \text{ 时}, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

显然,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0,$$

于是我们的函数在  $x = 0$  时亦是连续的.  $x > 0$  时我们有:

$$f'(x) = e^{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \geq 0,$$

并且这导数在  $x = \frac{1}{2k\pi} (k = 1, 2, \dots)$  时等于 0.

注意,

$$0 \leq f'(x) < 2e \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow 0, \text{ 在 } x \rightarrow +0 \text{ 时},$$

由此 [113] 亦有  $f'(0) = 0$ .

还可以做出一些增 (减) 函数的例子, 其导数等于 0 的点分布方式更为复杂. 然而特殊的情形究竟少见, 为着实用的目的, 通常使用这一充分的判别法. 若只要除去有限个  $x$  值, 就到处都有  $f'(x) > 0 (< 0)$ , 则函数  $f(x)$  是增 (减) 函数.

这个判别法是非常便于应用的.

例如, 考察  $x > 0$  时的函数  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , 并证明它是增函数. 现只要证明它的对数

$$g(x) = \ln f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$$

是增函数. 我们有

$$g'(x) = [\ln(x+1) - \ln x] - \frac{1}{x+1}.$$

因依有限增量公式 [112],

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}, \text{ 而 } x < \xi < x+1,$$

故  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  是增函数, 即所欲证.



**133. 不等式的证明** 上述单调性的简便判别法可用来证明不等式.

1) 求证  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时有

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

设  $f(x) = \frac{\sin x}{x} \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ . 导数

$$f'(x) = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

是负的, 因  $x < \operatorname{tg} x$ . 故  $f(x)$  是减函数, 而  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时  $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ .

2) 函数  $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$  在  $x = 0$  处为零. 在  $x > 0$  时它的导数

$$f'(x) = -\sin x + x > 0 \quad (\text{因 } \sin x < x).$$

故  $x \geq 0$  时  $f(x)$  是增函数, 而当  $x > 0$  时有  $f(x) > f(0) = 0$ , 即

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

由此, 相仿地, 当  $x > 0$  时得

$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3,$$

等等.

3) 求证  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时有

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3.$$

为此, 只要证明对所说的  $x$  值, 函数  $\operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3$  的导数  $\sec^2 x - 1 - x^2$  是正的, 即证  $\operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0$ ; 但这可归结为熟知的不等式  $\operatorname{tg} x > x$  [54(9)].

4) 因函数  $\ln x - x (x > 0)$  有导数

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \begin{cases} > 0 (0 < x < 1), \\ < 0 (x > 1), \end{cases}$$

故当  $x$  在区间  $(0, 1]$  上变动时它是增函数, 当  $x$  在  $[1, +\infty)$  上变动时它是减函数. 由此显见  $f(1) = -1$  是函数的最大值, 故当  $x > 0$  时

$$\ln x \leq x - 1.$$

5) 再考察  $x \geq 0$  时的函数  $f(x) = x^\alpha - \alpha x$  (设  $0 < \alpha < 1$ ). 我们有

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \begin{cases} > 0 (0 < x < 1), \\ < 0 (x > 1), \end{cases}$$

于是像 4) 那样可知  $x > 0$  时

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha. \quad (3)$$

从这个不等式可以导出一些古典的不等式. 为此, 最好还把它写成别种形式.



设  $x = \frac{a}{b}$ , 其中  $a, b$  是任意正数, 并把  $1 - \alpha$  记为  $\beta$ , 便把 (3) 化为下式

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \quad (3a)$$

$$(a, b, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1).$$

有时引入数  $k = \frac{1}{\alpha} > 1$  及  $k' = \frac{1}{\beta} > 1$ , 而  $k' = \frac{k}{k-1}$ . 把上一不等式中的  $a$  与  $b$  分别换为  $a^k$  与  $b^{k'}$ , 得

$$ab \leq \frac{1}{k} a^k + \frac{1}{k'} b^{k'} \quad (3b)$$

$$(a, b > 0; k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1).$$

6) 首先, 不等式 (3a) 可推广到任意个幂相乘的情形. 从两个幂相乘可以这样推广到三个相乘的情形 (应用不等式 (3a) 两次):

$$\begin{aligned} a^\alpha b^\beta c^\gamma &= a^\alpha \left( b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \right)^{\beta+\gamma} \leq \alpha a + (\beta + \gamma) b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \\ &\leq \alpha a + (\beta + \gamma) \left( \frac{\beta}{\beta + \gamma} b + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} c \right) = \alpha a + \beta b + \gamma c, \end{aligned}$$

故最后得

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \leq \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1).$$

相仿地可从  $n$  推到  $n+1$  并证明 (用数学归纳法) 如下的一般不等式 (记号略有改变):

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n} \leq q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n.$$

$$(a_1, \cdots, a_n, q_1, \cdots, q_n > 0; q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1).$$

也可以引入任意数  $p_i > 0$ , 使  $q_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j}$  而  $\sum_i q_i = 1$ , 来代替  $q_i$ . 这样不等式可写为

$$(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{\sum_j p_j}} \leq \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \quad (4)$$

当  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$  时, 便得熟知的不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad (4a)$$

这个不等式说明一些正数的几何平均数不会大于其算术平均数. 于是, 不等式 (4) 乃是这个古典命题的自然的推广.

7) 现在来证明所谓柯西—赫尔德 (A.L. Cauchy-O. Hölder) 不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}} \quad (5)$$

$$(a_i, b_i > 0; k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1).$$



柯西证明了这个不等式在  $k = k' = 2$  时的特殊情形:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (5a)$$

先设

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^n b_i^{k'} = 1, \quad (6)$$

故要证明的不等式取如下形式

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1.$$

在不等式 (36) 中依次设  $a = a_i, b = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 并把所得不等式都加起来; 再利用 (6), 便得要证的不等式.

一般情形可化为上述的特殊情形, 只要引入以下的数来代替  $a_i$  与  $b_i$ :

$$a'_i = \frac{a_i}{\left\{ \sum_{j=1}^n a_j^k \right\}^{\frac{1}{k}}}, \quad b'_i = \frac{b_i}{\left\{ \sum_{j=1}^n b_j^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}}},$$

对于这些数, (6) 这种条件已能满足. 根据刚才证明的,

$$\sum_{i=1}^n a'_i b'_i \leq 1,$$

而这是与 (5) 等价的.

8) 从柯西—赫尔德不等式, 还可立即得一个重要的不等式, 即闵可夫斯基(H. Minkowski) 不等式

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \quad (a_i, b_i > 0, k > 1) \quad (7)$$

显然,

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{k-1},$$

若对右边两个和分别应用不等式 (5), 则得<sup>①</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k &\leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(k-1)k'} \right\}^{\frac{1}{k'}} \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(k-1)k'} \right\}^{\frac{1}{k'}} \\ &= \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k'}}. \end{aligned}$$

消去后面的因子, 便得 (7).

<sup>①</sup>要记得  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ !



**134. 极大值及极小值 · 必要条件** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内是有定义的而且是连续的, 并且在这区间内不是单调函数, 则必能在区间  $[a, b]$  内求出部分区间  $[\alpha, \beta]$ , 在它的内点处, 即在  $\alpha$  与  $\beta$  之间, 函数达到最大值或最小值. 在函数的图像上 (图 55) 的峰及谷, 就对应于这种区间.

常说函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有极大值 (或极小值) ①, 若这点可以有一个邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 完全包含于函数  $f(x)$  的定义域之内, 并且对这邻域中的一切  $x$ , 成立不等式

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)).$$

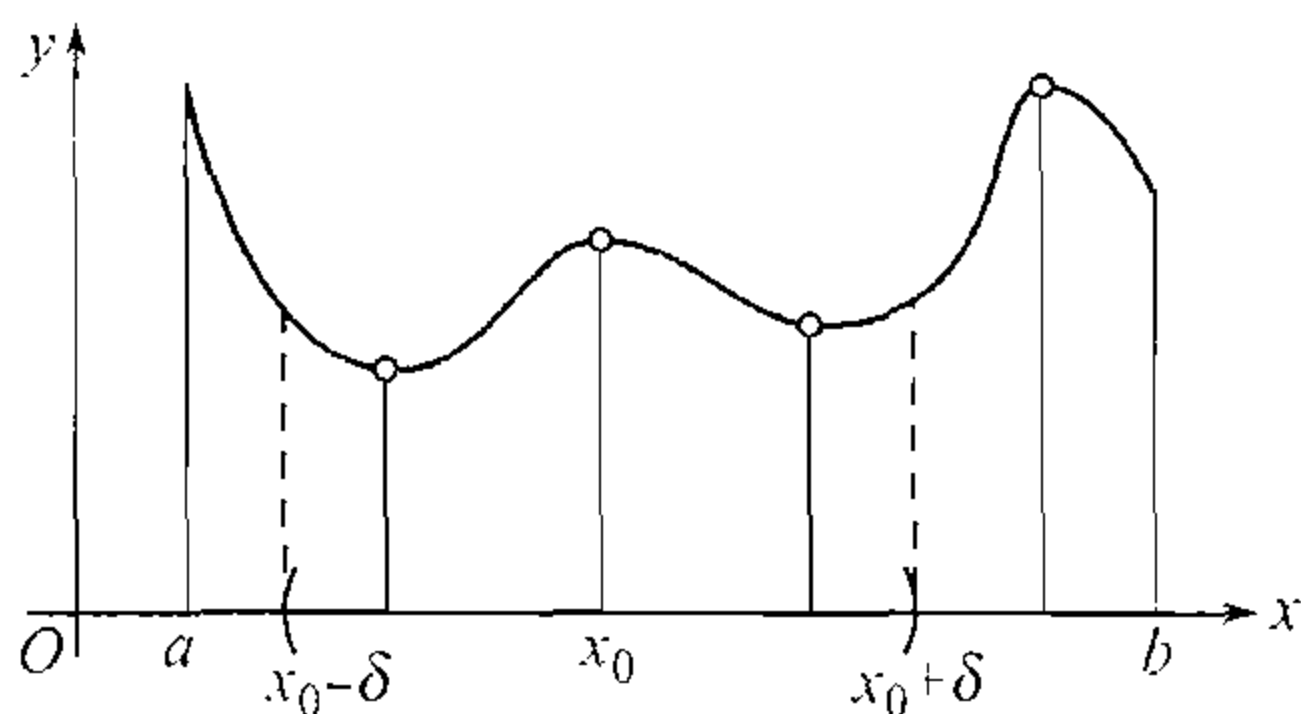


图 55

换句话说, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  达到极大值 (极小值), 如果  $f(x_0)$  是点  $x_0$  的某一邻域 (即使是很小) 内的一切函数值中的最大值 (最小值). 注意, 在极大值 (极小值) 的定义中已预先假定函数在点  $x_0$  的两方都是有定义的.

若有这样的邻域存在, 在它的范围内 (当  $x \neq x_0$  时) 成立着严格的不等式

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

就说函数在点  $x_0$  处有真正的极大值 (极小值), 在相反的情形, 有广义的极大值 (极小值).

若函数在点  $x_0$  及  $x_1$  处都有极大值, 则把魏尔斯特拉斯第二定理 [85] 应用于区间  $[x_0, x_1]$ , 就看出, 函数必在  $x_0$  与  $x_1$  之间的某一点  $x_2$  处达到在这区间内的最小值, 而在那一点处就有极小值, 类似地, 在二极小值之间一定能求出极大值. 在那种最简单的 (而在实用上是最重要的) 情形, 当函数总共只有有限个极大值及极小值时, 它们总是交迭地出现的.

注意, 极大值或极小值总称为极值②.

现在要问, 如何去求出使函数获得极值的一切变元的数值. 在解决这问题时, 导数起着主要的作用.

首先假定, 函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有有限导数. 若在点  $x_0$  处函数有极值, 应用以前讲过的费马定理 [109] 于区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 就得结论  $f'(x_0) = 0$ : 这是极值的必要条件. 极值只能在使导数等于零的点 (这种点称为静止点③) 中去找.

可是不要以为每一个静止点都能使函数获得极值: 刚才所指出的只是必要条件, 并不是充分条件. 例如在  $[132, 1)$  内, 我们曾看到, 函数  $x^3$  的导数  $3x^2$  在  $x = 0$  时等于零, 但在这点处函数并无极值: 它总是增大着.

①由拉丁文 maximum 及 minimum 而来, 表示“最大的”及“最小的”(数值).

②拉丁文的 extremum 表示着“极端的”(数值).

③在这些点处函数的变动似乎“暂停了”: 这时变动的速度 [92] 等于零.



若扩大所考察的函数  $f(x)$  的范围, 并假设在个别的点处导数可以等于无穷或全然不存在, 则  $f(x)$  亦并非就不可能在某些这种点处取得极值(本来费马定理只是在有限导数存在的假定下, 证明了  $f'(x) = 0$ ). 例如, 函数  $x^{\frac{2}{3}}$  在  $x = 0$  时显然有极小值, 可是它在这点处的左导数等于  $-\infty$  而右导数等于  $+\infty$  [101]; 完全同样, 函数  $|x|$  也是在点  $x = 0$  处有极小值, 可是它在这点处的导数却全然不存在 [100]. 因此, 即使在有限的双侧导数不存在的点处函数亦同样能获得极值. 但在这种情形, 自然亦同样不能保证在这种点处就有极值存在. 可以用函数  $y = x^{\frac{1}{3}}$  及  $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$  (附有补充条件: 在  $x = 0$  时  $y = 0$ ) 作为例子. 第一个函数在点  $x = 0$  处有无穷导数 [101], 第二个在这点处则根本没有导数 [102, 1°], 但在点  $x = 0$  处两个函数并没有获得极值 (因为在这点的任一邻域内, 两个函数都是既有正值又有负值).

**135. 充分条件 · 第一法则** 因此, 若点  $x_0$  是函数  $f(x)$  的静止点或假如在这点处  $f(x)$  没有有限导数, 则点  $x_0$  仅是所谓“有极值嫌疑的”点, 还应该对它再作进一步的考查.

这考查就在于检查下面就要说到的极值存在的充分条件是否满足.

假定在点  $x_0$  的某一邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内 (至少对于  $x \neq x_0$ ) 存在有限导数  $f'(x)$ , 而且它在  $x_0$  的左方及右方 (各别的) 保持着确定符号. 那么就可能有以下列三种情形:

I. 在  $x < x_0$  时  $f'(x) > 0$ , 而在  $x > x_0$  时  $f'(x) < 0$ , 即导数  $f'(x)$  在经过点  $x_0$  时由正的变成负的. 在这情形, 函数  $f(x)$  在区间  $[x_0 - \delta, x_0]$  内渐增, 而在区间  $[x_0, x_0 + \delta]$  内渐减 [132], 于是  $f(x_0)$  就是  $f(x)$  在区间  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  内的最大值, 即在点  $x_0$  处函数有极大值.

II. 在  $x < x_0$  时  $f'(x) < 0$  而在  $x > x_0$  时  $f'(x) > 0$ , 即导数  $f'(x)$  在经过点  $x_0$  时由负的变成正的. 在这情形, 类似地可证, 在点  $x_0$  处函数有极小值.

III. 在  $x < x_0$  及  $x > x_0$  时都有  $f'(x) > 0$  或是在  $x_0$  的左方和右方都有  $f'(x) < 0$ , 即  $f'(x)$  在经过  $x_0$  时并不变换符号. 那时函数或总是渐增, 或总是渐减; 在  $x_0$  的某一方的任意近处总能找到点  $x$ , 使  $f(x) < f(x_0)$ , 而在另一方又有点  $x$ , 使  $f(x) > f(x_0)$ , 于是在点  $x_0$  处无极值.

在图 56, a, б, в 中, 给出各种最简单的情形的图示.

因此, 我们得出考验“有嫌疑的”数值  $x_0$  的第一法则: 先用  $x < x_0$ , 后用  $x > x_0$  代入导数  $f'(x)$ , 以确定导数在点  $x_0$  的左方及右方近处的符号; 若这时导数  $f'(x)$  的符号由正变负, 则有极大值, 若由负变正, 则有极小值; 又若符号不变, 则无极值.

当在区间  $(a, b)$  内像通常那样只有有限个静止点或有限个导数不存在的点:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n < b, \quad (8)$$

在这种情形之下, 这法则完全可以解决问题. 就是, 首先在任一区间

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_k, x_{k+1}), \cdots, (x_n, b)$$



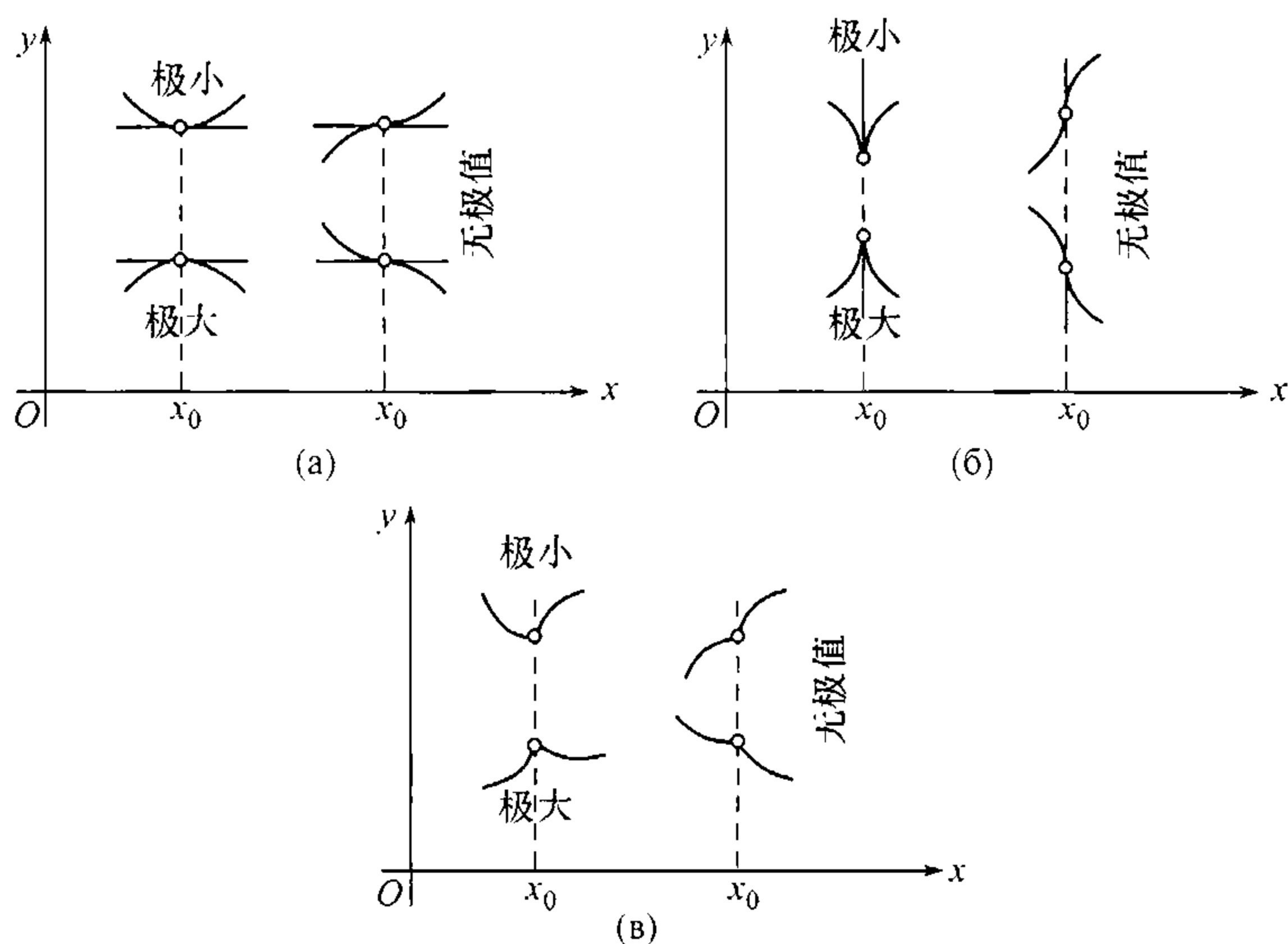


图 56

内存在着有限导数  $f'(x)$ ，此外，在每一个这样的区间内  $f'(x)$  都保持不变号。事实上，假若  $f'(x)$  例如在区间  $(x_k, x_{k+1})$  内变号，则依达布定理 [110]，它就要在  $x_k$  及  $x_{k+1}$  之间的某一点处等于零，但这是不可能的，因为导数的一切的零点都已包括在点列 (8) 之内了。

在实用上，后面的附注在某些情形之下是有用处的：要确定导数  $f'(x)$  在全区间  $(x_k, x_{k+1})$  内的符号，只要算出它在其中任何一点处的数值（或甚至只要确定其符号）就行了。

### 136. 例题

1) 求函数  $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$  的极值。

它的导数恒存在而且是有限的：

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

导数的零点<sup>①</sup>（静止点）是：

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -\frac{4}{5} = -0.8, \quad x_3 = 1.$$

这些数值把全区间  $(-\infty, +\infty)$  分成下列部分：

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -0.8), \quad (-0.8, 1), \quad (1, +\infty).$$

要确定导数在这些区间内的符号，可以利用前段最后的附注，确定在具体数值时的符号，例如

<sup>①</sup>就是使导数等于零的点，亦即  $f'(x) = 0$  的实根 —— 译者。



在  $-3, -1, 0$  及  $2$  时的符号. 先确定各个因式的符号, 然后就可得出整个导数的符号:

在区间  $(-\infty, -2)$  内  $(-)(+)(-) = +$

在区间  $(-2, -0.8)$  内  $(+)(+)(-) = -$

在区间  $(-0.8, 1)$  内  $(+)(+)(+) = +$

在区间  $(1, +\infty)$  内  $(+)(+)(+) = +$

由此, 清楚地, 函数  $f(x)$  在  $x = -2$  时有极大值, 在  $x = -0.8$  时有极小值, 而在  $x = 1$  时无极值.

然而通常都用另外的办法, 而不在导数内代入具体数值. 从  $x = -2$  开始来讨论. 导数的最后两个因式  $(x-1)^2$  及  $5x+4$  的乘积在  $x = -2$  时有负号, 因此 (由于连续性) 在这点 (左方及右方) 的近处保持同一的符号. 至于因式  $(x+2)$  当  $x$  增大而经过数值  $-2$  时由负的变成正的, 于是导数的符号由正变负, 而函数有极大值. 在  $x = -\frac{4}{5}$  时 (及接近这数值时) 导数的首二因式有正号; 至于最后的因式  $5x+4$  (随之而整个导数) 在经过这数值时则由负的变成正的, 故函数在此处有极小值. 最后, 在经过数值  $x = 1$  时, 不仅第一第三因式保持着原有符号, 而且第二因式亦是如此, 因为平方总是正的; 故在此处无极值.

已知使函数获得极值的点  $x$ , 现在就很容易算出这些极值: 极大值  $f(-2) = 0$  而极小值  $f(-0.8) \doteq -8.40$ .

在图 57 中给出说明这函数的变动的图像<sup>①</sup>.

2) 求函数  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  的极值.

由于函数有周期  $2\pi$ , 我们只要讨论包含在区间  $[0, 2\pi]$  内的  $x$  值就已够了. 这函数的导数到处存在:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 x \sin x \\ &= 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

在这情形导数的零点 (静止点) 是:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, (2\pi).$$

在经过  $x = 0$  时, 因式  $\sin x$  由负变正, 因为最后两个因式在  $x = 0$  的附近保持负号, 所以整个导数的符号由正变负, 故有极大值. 因式  $\sin x - \cos x$ , 在  $x = \frac{\pi}{4}$  时等于零, 在经过这点时符号由负变正. 导数的符号亦是如此, 因为前面两个因式是正的, 因此, 在该点有极小值. 仿此考察其余的静止点: 它们全部交迭地使函数获得极大值及极小值.

把它们代入函数内, 就得到极大及极小的数值:

极大值:

$$f(0) = f(2\pi) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq -0.71,$$

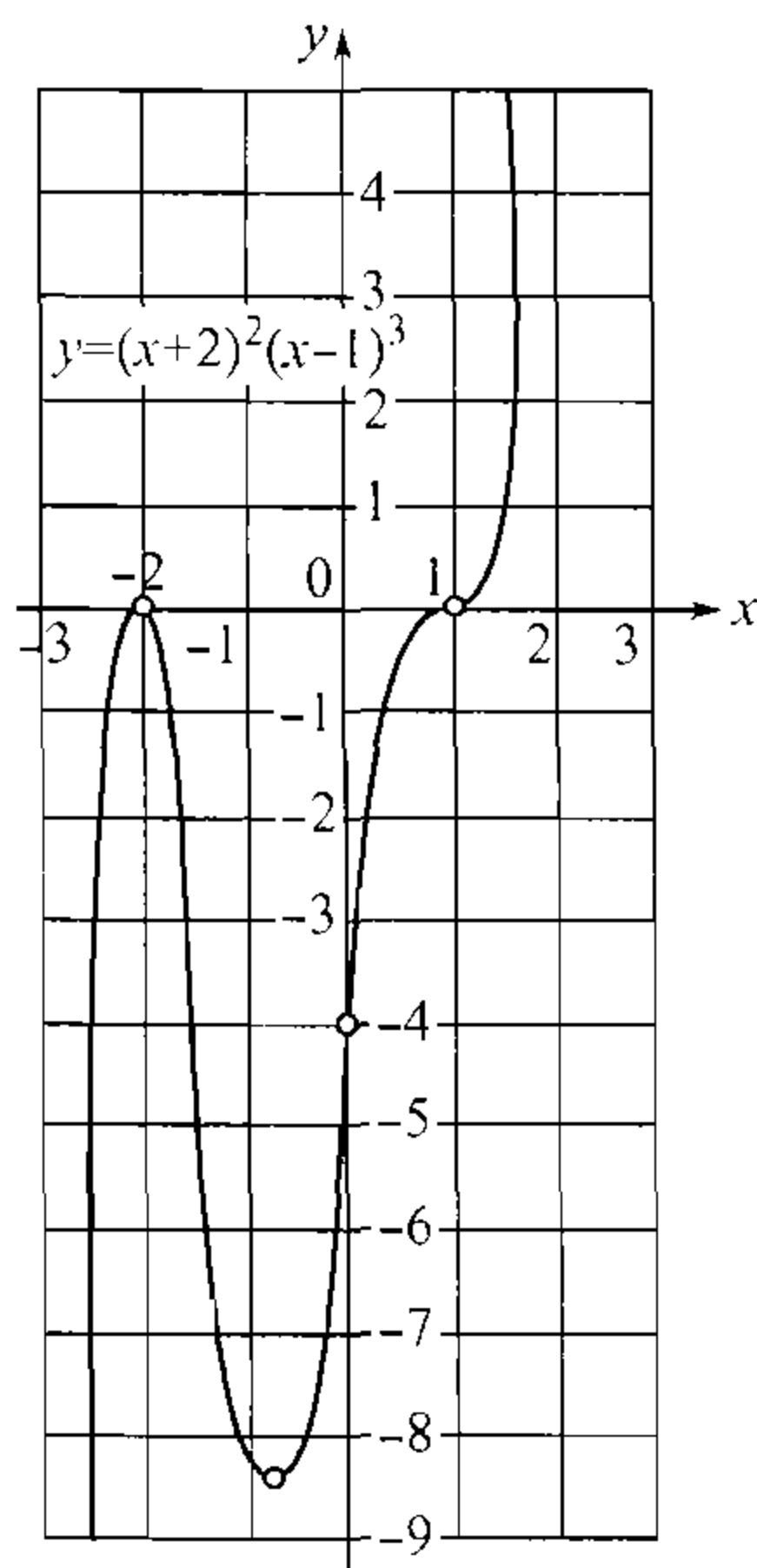


图 57

<sup>①</sup>在此处及在下列各例题内, 我们用图像来说明函数的变动, 但关于作图问题本身, 只能在 §3 内再详细地考察. 特别是参阅 149, 3).



极小值:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.71, \quad f(\pi) = -1, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

函数的图像表示在图 58 中 [参阅 147, 1)].

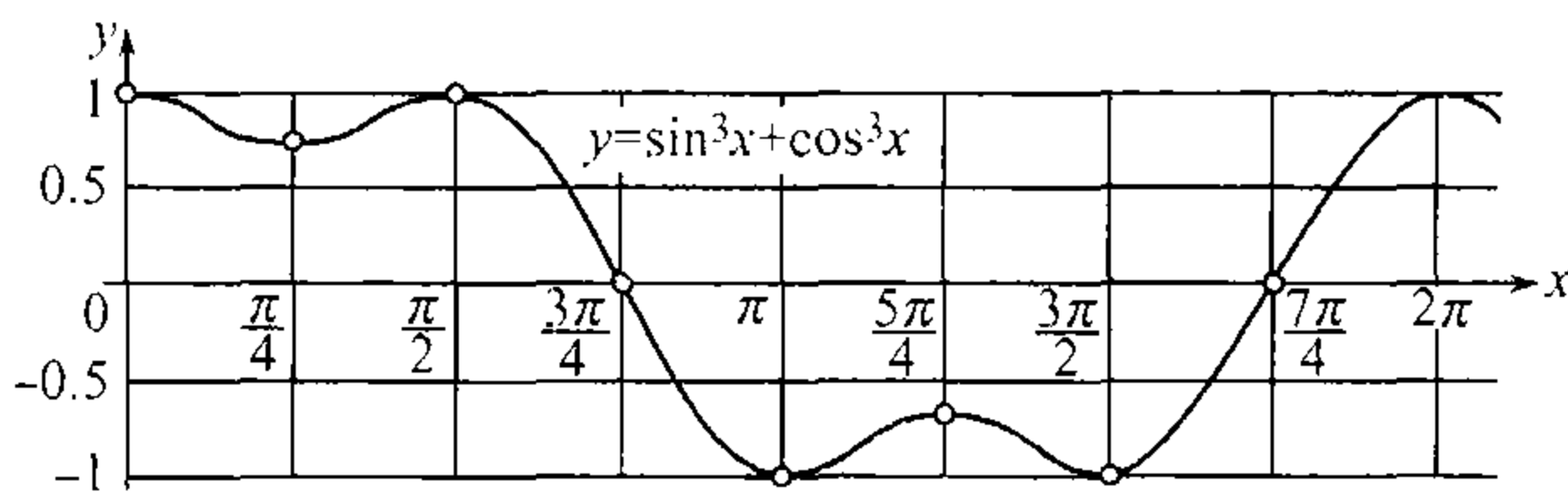


图 58

3) 求函数  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$  的极值.

在这一次, 有限导数

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

除去在点  $x = 0$  及  $x = \pm 1$  以外到处存在.

当  $x$ (从两边) 接近于这些数值时, 导数趋向于  $\pm\infty$ .

要确定导数的零点, 可使它的分子等于零; 我们就求得:  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . 因此, “有极值嫌疑的”点就是:

$$-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, +1.$$

在  $x = 0$  时 (及在这点的附近) 分母的第二因式及分子都是正的. 至于分母的另一因式  $x^{\frac{1}{3}}$  的符号却由负变正, 导数亦是如此, 故有极小值. 在  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (及在其附近) 时分母保持着正号. 至于分子, 在考虑接近于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  的  $x$  值时改写成  $(1 - x^2)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$ ; 它在  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时等于零, 且随  $x$  的减少而增加, 随  $x$  的增加而减少, 于是符号由正变负, 故有极大值. 在  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  时亦然. 在经过  $x = 1$  时, 分母内的因式  $(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$  (它在这点处等于零) 不变号; 同样导数亦不变号, 于是在  $x = 1$  时无极值. 在  $x = -1$  时亦然.

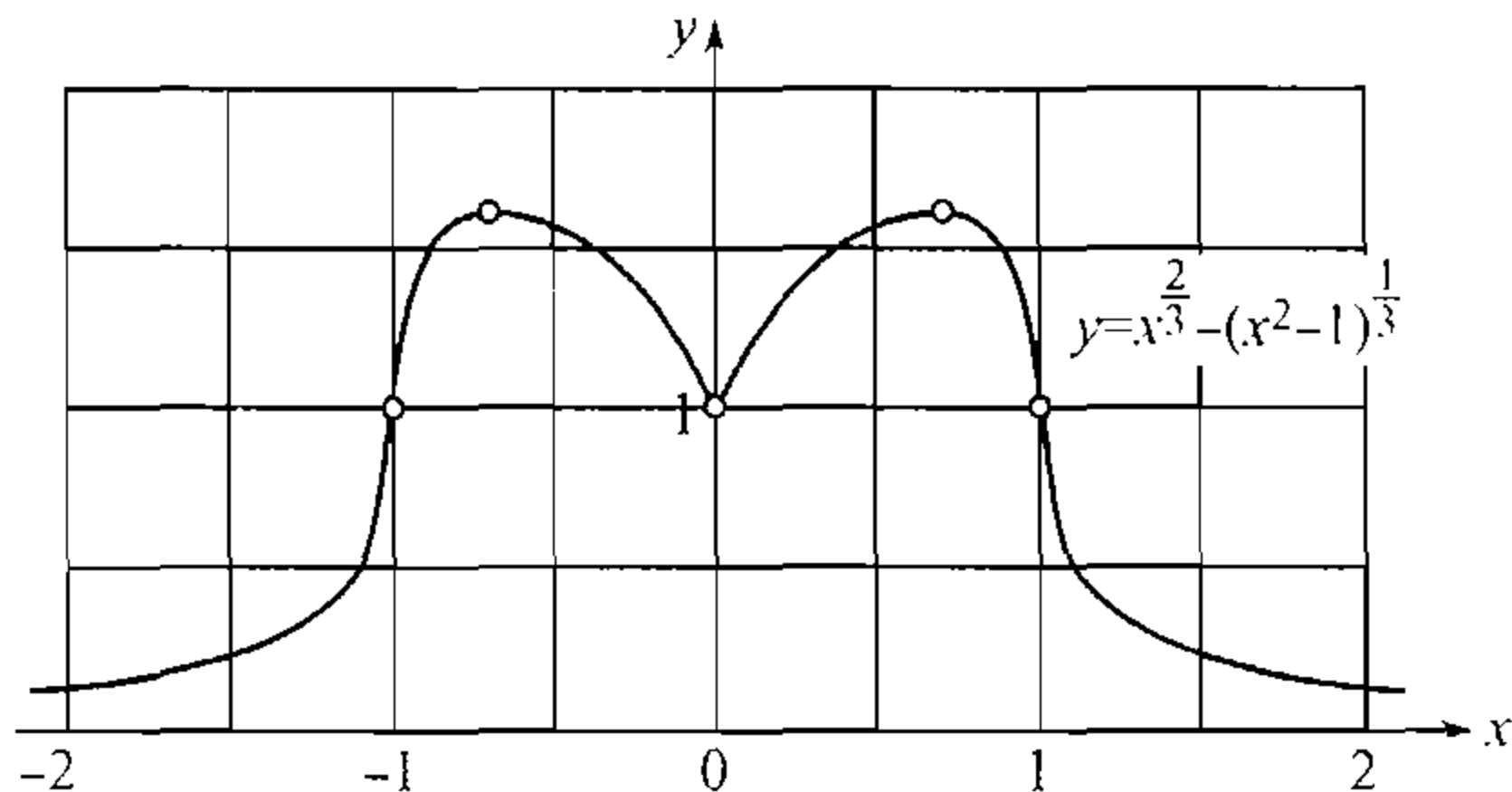


图 59



因此, 极大值是  $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[3]{4} \doteq 1.59$ , 而极小值是  $f(0) = 1$ .

图像画在图 59 中 [参阅 149, 4)].

4) 阻尼振动 设动点依定律:

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t$$

而运动, 式中  $s$  是经过的路程 (从开始的位置算起), 而  $t$  是时间 (从开始的时刻算起). 一切常量  $A, k, \omega$  以及变量  $t$ , 都算是正的. 现在来说明这一函数关系的图形; 把它同我们所已经熟悉的正弦曲线  $s = A \sin \omega t$  相对照是很有趣的. 因为  $e^{-kt} > 0$ , 显然, 两条曲线都交  $x$  轴于相同的各点  $t = n\frac{\pi}{\omega} (n = 1, 2, \dots)$ . 须注意, 函数  $s = A \sin \omega t$  在诸点  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$  处交迭地有极大值及极小值, 在此等点处它的导数  $s' = A\omega \cos \omega t$  等于零. 现求给定函数的导数 [参阅 99, 30)]:

$$\begin{aligned} s' &= Ae^{-kt}(\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t) \\ &= A \cdot \sqrt{\omega^2 + k^2} e^{-kt} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos \omega t - \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

依条件:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \sin \varphi,$$

引入辅助角  $\varphi$ , 便可改写导数式为

$$s' = A \cdot \sqrt{\omega^2 + k^2} e^{-kt} \cos(\omega t + \varphi).$$

它在诸点

$$t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$$

处等于零. 又因为余弦在经过零时要变号, 所以容易看出我们的函数在这些数值时有极值, 实际上在  $n$  为偶数时有极大值而在  $n$  为奇数时有极小值. 与正弦曲线相比较, 发现极值点向左移动  $\frac{\varphi}{\omega}$ .

不难检验, 一切极大值都是正的而极小值都是负的. 若用  $A_n$  表示第  $n$  个极值的数量, 则

$$\left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| = e^{\frac{k\pi}{\omega}},$$

于是振幅依几何序列而渐减.

它的图像 (取简单的特例) 表示在图 60 中. 这种类型的运动称为阻尼振动.

**附注** 在实际遇到的大多数情形之下, 前段所述的法则, 对于探究“有嫌疑的”数值是完全够用的. 然而必须注意, 可能在有些情形, 它是不适用的: 即当在被考查的点的任意近处包含着无穷个其他类似的点时, 于是在这点的这一方或那一方, 导数就不保持确定的符号了.

例如考察由等式

$$f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (\text{在 } x \neq 0 \text{ 时}) \quad \text{及} \quad f(0) = 0$$

所定义的函数. 我们已经知道, 它在  $x = 0$  时有导数  $f'(0) = 0$  [102, 2°]. 可是在静止点  $x = 0$  的左方以及右方的任意近处, 导数

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$



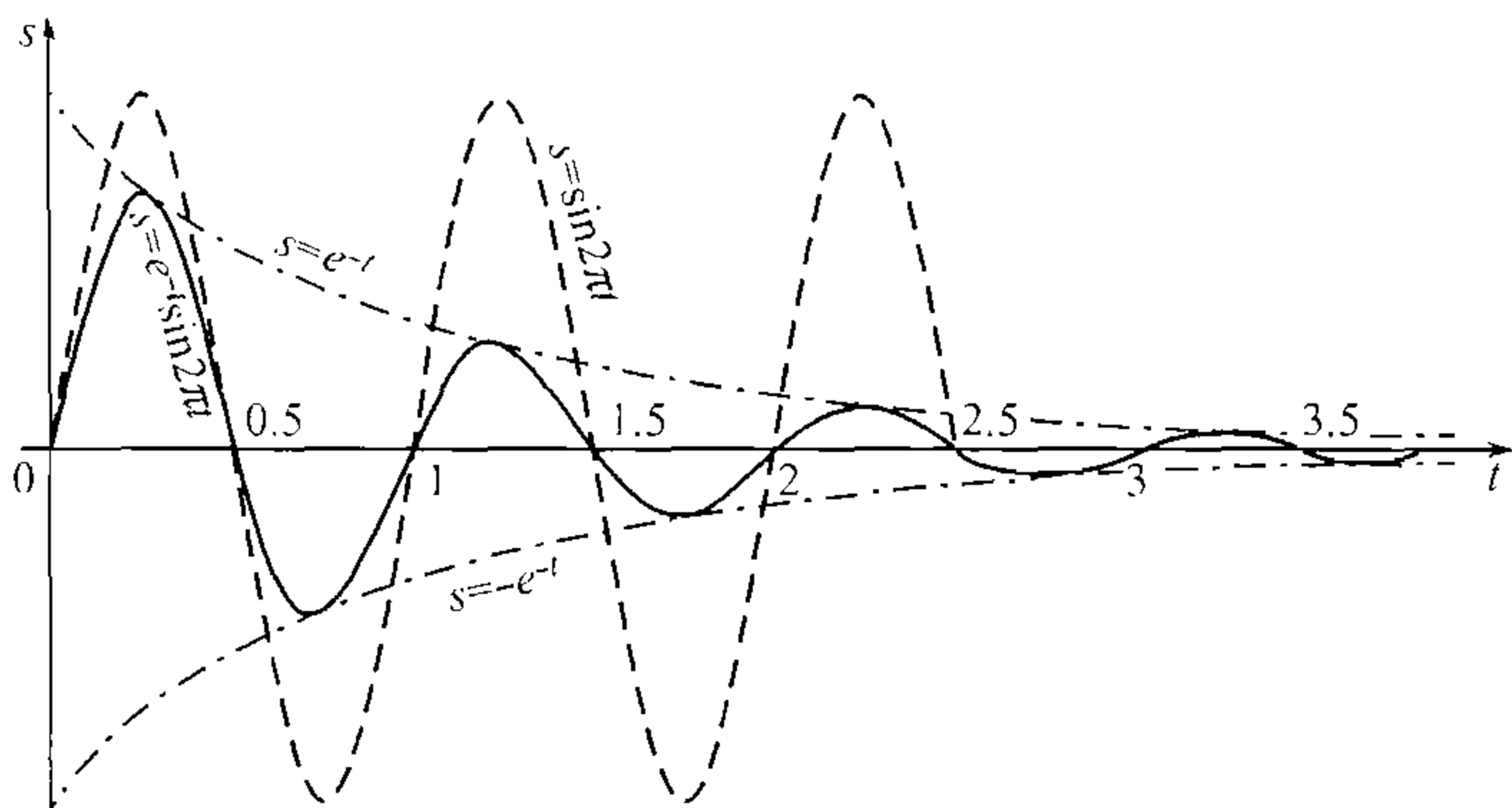


图 60

无穷多次地变号. 这函数在点  $x = 0$  处无极值. 但若把函数定义为:

$$f(x) = x^2 \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right) \text{ 在 } x \neq 0 \text{ 时}, f(0) = 0,$$

则它亦显示着同样的特性, 但在这次,  $f(x)$  在  $x = 0$  时显然有极小值. 前述的法则在两种情形都不能应用.

**137. 第二法则** 在探求函数的极值时, 研究在静止点附近的导数符号, 可以换成研究在这点处二阶导数的符号; 下面将说明这事.

为此, 设函数  $f(x)$  不仅在点  $x_0$  的邻域内有导数  $f'(x)$ , 并且在点  $x_0$  处有二阶导数  $f''(x_0)$ . 点  $x_0$  是静止点, 即  $f'(x_0) = 0$ . 若  $f''(x_0) > 0$ , 则依 109 的引理, 函数  $f'(x)$  在点  $x = x_0$  处渐增, 即在点  $x_0$  的左方近处  $f'(x) < f'(x_0) = 0$ , 而在点  $x_0$  的右方近处  $f'(x) > f'(x_0) = 0$ . 这样, 导数  $f'(x)$  在经过点  $x = x_0$  时符号由负变正, 因此  $f(x)$  在这点处有极小值. 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $f'(x)$  在点  $x = x_0$  处渐减, 它的符号由正变负. 于是  $f(x)$  有极大值.

这样, 可以叙述考查“有嫌疑的”数值  $x_0$  的第二法则如下: 把  $x_0$  代入二阶导数  $f''(x)$  内. 若  $f''(x_0) > 0$ , 则函数有极小值; 若  $f''(x_0) < 0$ , 则函数有极大值.

一般说来, 这法则的应用范围较为狭窄; 例如, 它显然不能应用于不存在有限一阶导数的点 (因为那里就谈不上二阶导数). 当二阶导数等于零的那些情形, 这法则亦没有给出什么结果. 那时, 问题的解决就得依赖于高阶导数的性态了 [参阅下一目].

若希望把这法则应用于例 2), 则须算出二阶导数:

$$f''(x) = 6 \sin x \cos x (\cos x + \sin x) - 3(\sin^3 x + \cos^3 x).$$

在  $x = 0(2\pi), \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  时, 第一项等于零而  $f''(x)$  的符号与  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  的符号相反; 它在  $x = 0(2\pi), \frac{\pi}{2}$  时有负号 (在此处有极大值) 而在  $x = \pi$  及  $\frac{3\pi}{2}$  时有正号 (在此处有极小值). 在  $x = \frac{\pi}{4}$  及  $\frac{5\pi}{4}$  时, 由于等式  $\sin x = \cos x$ ,  $f''(x)$  就变成  $6 \sin^3 x$ , 于是在前一点处二阶导数为正 (有极小值), 而在后一点处为负 (有极大值).



再举一例子: 求函数  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$  的极值.

导数  $f'(x) = 5 \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$  与其分子有相同的零点, 即  $x_1 = 1 - \sqrt{2} \doteq -0.41$  及  $x_2 = 1 + \sqrt{2} \doteq 2.41$ . 把导数当作乘积而再微分它:

$$f''(x) = \frac{5}{(x^2 + 1)^2} (2x - 2) + \cdots$$

等式右边用省略号来代替的是包含着因式  $x^2 - 2x - 1$  的项, 它是我们所不需要详细知道的, 因为对于我们准备代入的  $x$  值, 它早已明知是零.

很易看出  $f''(x_1) < 0$ , 而  $f''(x_2) > 0$ , 因此  $f(x_1) \doteq 7.04$  是极大值, 而  $f(x_2) \doteq -0.03$  是极小值.

函数的图像画在图 61 中 [参阅 149, 5)].

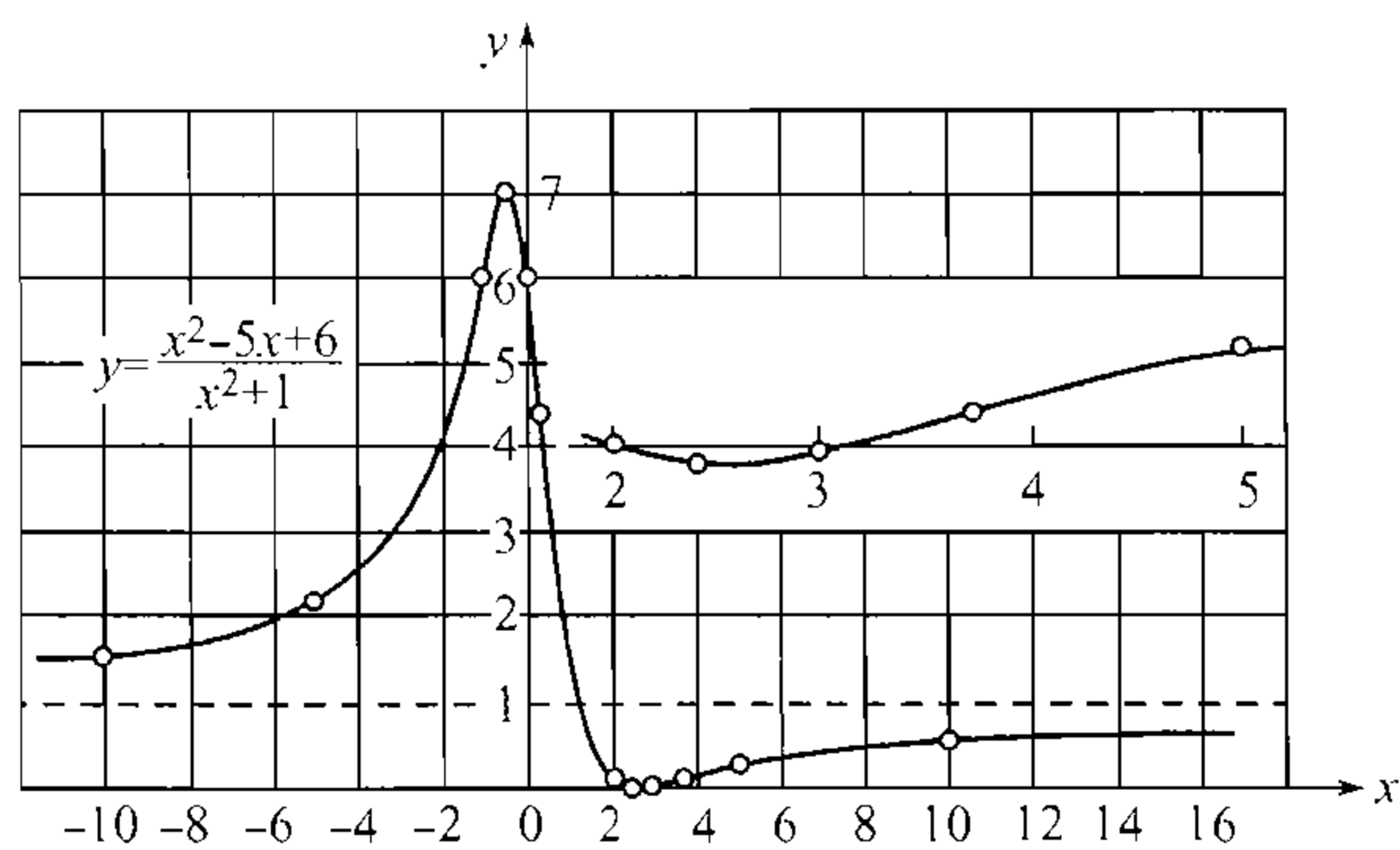


图 61

最后, 再考察这样一个有着几何内容的应用题:

求 (在平面上) 一已知点  $P(\xi, \eta)$  至由方程  $y = f(x)$  所给定的曲线  $(K)$  上一点  $M(x, y)$  的距离  $r$  的极值 (图 62).

代替考察函数  $r$ , 可以考察函数

$$u = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2],$$

式中  $y = f(x)$ . 使导数

$$u'_x = x - \xi + (y - \eta) \cdot y'_x$$

等于零, 就看到, 要曲线  $(K)$  上的点  $M(x, y)$  能使距离  $r$  获得极值, 必须满足条件:

$$\xi - x + y'_x(\eta - y) = 0.$$

换句话说, 点  $P(\xi, \eta)$  应当位于直线

$$X - x + y'_x(Y - y) = 0$$

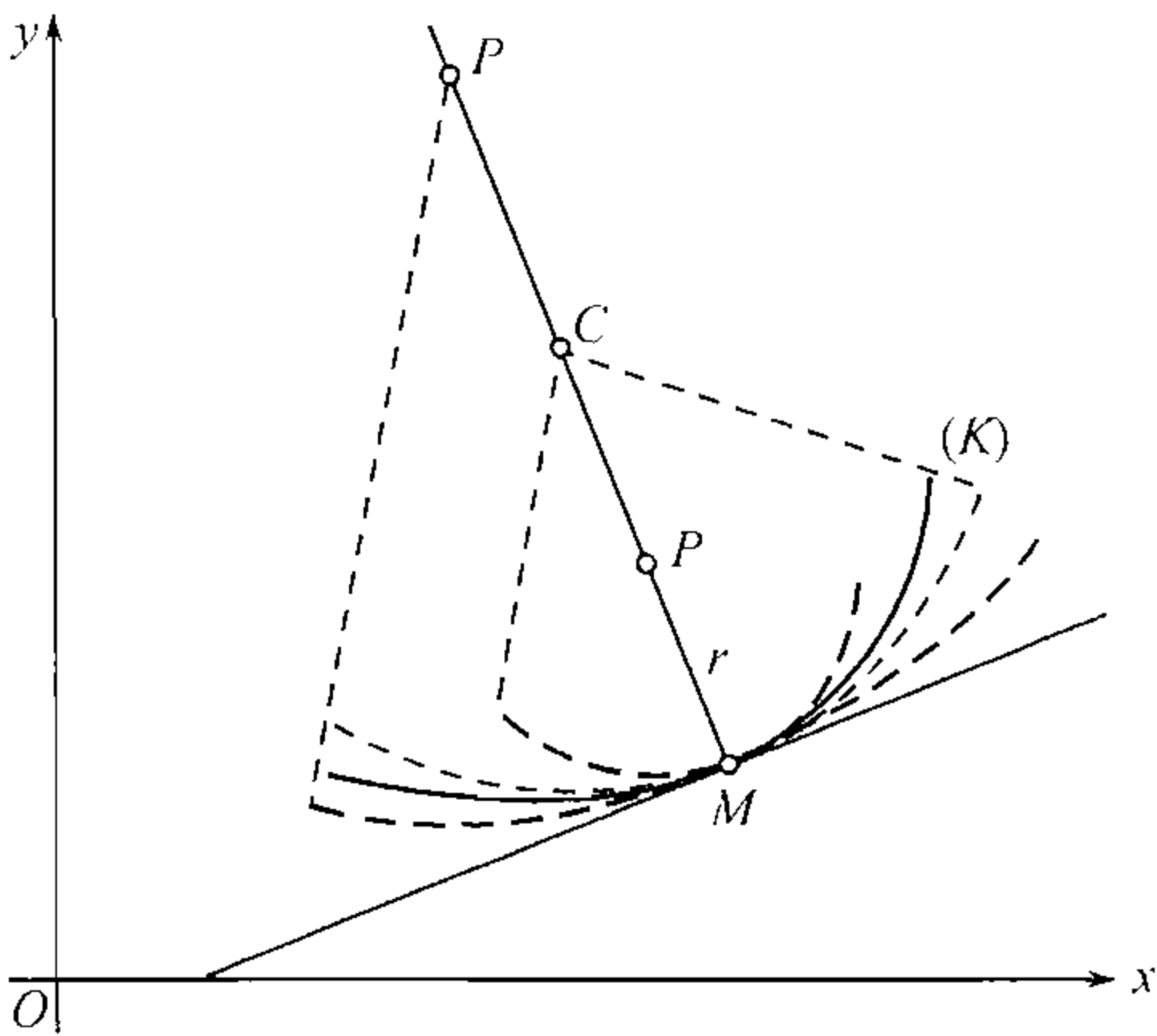


图 62



上. 这直线经过曲线上的点  $M(x, y)$  而垂直于在这点的切线<sup>①</sup>, 它称为曲线的法线.

现在假定点  $P(\xi, \eta)$  已经位于曲线  $(K)$  上点  $M(x, y)$  处的法线上了, 则距离  $PM$  是否极值呢? 这问题的解决, 依赖于二阶导数

$$u_x''^2 = 1 + y_x'^2 + (y - \eta) \cdot y_x''^2$$

的符号. 这式子仅在坐标为

$$\xi = x - y_x' \cdot \frac{1 + y_x'^2}{y_x''^2}, \quad \eta = y + \frac{1 + y_x'^2}{y_x''^2}$$

的点  $C$  处才等于零 (假定  $y_x''^2 \neq 0$ ; 对于  $C$  点, 问题仍然没有解决. 点  $C$  把法线上的那些点  $P$  分成两部分, 当点  $P$  使  $u'' < 0$  时, 距离  $PM$  就是极大值, 当点  $P$  使  $u'' > 0$  时, 距离  $PM$  就是极小值.

以后 [243, 253] 我们将看到, 这一法线上的界点, 在好多方面是值得注意的.

**138. 高阶导数的应用** 我们已经看到, 若  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) > 0$ , 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处达到极小值; 若  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) < 0$  则函数在这点处有极大值. 至于当  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) = 0$  的情形, 我们还未加研究.

今假定函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处有顺次至  $n$  阶的导数, 而且直至  $(n-1)$  阶导数为止全都在这点处等于零:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0,$$

同时却有  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . 把函数  $f(x)$  的增量  $f(x) - f(x_0)$  依  $x - x_0$  的幂用余项为佩亚诺式的泰勒公式展开 [124, (10a)]. 因为所有低于  $n$  阶的一切导数在点  $x_0$  处都等于零, 故

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

由于当  $x \rightarrow x_0$  时  $\alpha \rightarrow 0$ , 所以当  $x$  十分接近于  $x_0$  时, 上式右边分数的分子与  $f^{(n)}(x_0)$  就将有相同的符号, 在  $x < x_0$  时如此, 在  $x > x_0$  时亦如此. 且考察两种情形.

1°  $n$  是奇数:  $n = 2k + 1$ . 当  $x$  的数值由小于  $x_0$  变成大于  $x_0$  时, 因式  $(x - x_0)^n$  就变换符号, 但因为第一个因式这时不变号, 所以差  $f(x) - f(x_0)$  也变号. 这样, 在点  $x_0$  处, 函数  $f(x)$  就不能有极值, 因为在这点的近处, 函数值有小于  $f(x_0)$  的, 也有大于  $f(x_0)$  的.

2°  $n$  是偶数:  $n = 2k$ . 在这情形, 当  $x$  由小于  $x_0$  变成大于  $x_0$  时  $f(x) - f(x_0)$  并不变号, 因为对一切  $x$ ,  $(x - x_0)^n > 0$ . 显然, 在  $x_0$  的左方及右方近处, 差  $f(x) - f(x_0)$

<sup>①</sup>因它的斜率  $-\frac{1}{y_x'}$  是切线的斜率  $y_x'$  的负倒数.



的符号都与数值  $f^{(n)}(x_0)$  的符号相同. 这就是说, 若  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则在点  $x_0$  的近处  $f(x) > f(x_0)$ , 而在点  $x_0$  处函数  $f(x)$  有极小值; 若  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则函数有极大值.

由此即得这样的法则:

若在各阶导数中, 第一个在点  $x_0$  处不等于零的导数是奇数阶的, 则函数在点  $x_0$  处既无极大值亦无极小值. 若这种导数是偶数阶的, 则函数在点  $x_0$  处有极大值或极小值, 就看这导数是负的或是正的.

例如, 对于函数  $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ ,  $x = 0$  是静止点, 因为在这点处导数

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$$

等于零.

其次:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2 \cos x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2 \sin x, & f'''(0) &= 0; \\ f^{IV}(x) &= e^x + e^{-x} + 2 \cos x, & f^{IV}(0) &= 4. \end{aligned}$$

因为第一个不等于零的导数是偶数阶的, 故有极值; 又因  $f^{IV}(0) > 0$ , 故有极小值.

**附注** 虽然上面所说的检定法, 解决了在许多情形下的极值问题, 但在理论上说来, 它总还不是万能的: 一个并不恒等于常数的函数, 可以在所考查的点的邻域内具有一切阶的导数, 然而在这一点处, 各阶导数却都等于零.

举一例, 考察下面 (柯西的) 函数:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{在 } x \neq 0 \text{ 时}), f(0) = 0.$$

在  $x \neq 0$  时, 它有一切阶的导数:

$$f(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left( -\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \dots$$

而且一般地有

$$f^{(n)}(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (9)$$

式中的  $P_n(z)$  是  $(3n)$  次整多项式. 这定律的一般性很容易由数学归纳法证明.

今再验证在点  $x = 0$  处我们的函数的各阶导数都存在, 而且都等于零. 实际上, 首先,

$$\text{在 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 0^{①},$$

①回忆当  $z \rightarrow +\infty$  时  $e^z$  是较  $z$  的任何次幂  $z^k$  更高阶的无穷大, 即

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^k}{e^z} = 0$$

[65]. 在此处是  $\frac{1}{x^2}$  (在  $x \rightarrow 0$  时) 担任着  $z$  的角色.



于是  $f'(0) = 0$  再假设, 所要证明的命题对于直至  $n$  阶为止的一切导数都是正确的. 则 [参阅 (9)]

$$\text{在 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 0,$$

因为分子总是形如  $\frac{c}{x^m}$  的各项的和. 这就是说, 亦有  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . 由数学归纳法, 命题已完全证毕.

虽然直接明了, 所给函数在  $x = 0$  时有极小值, 但要用考察它在这点处的各阶导数的方法来验证这事实却不成.

**139. 最大值及最小值的求法** 设函数  $f(x)$  在有限闭区间  $[a, b]$  内有定义而且连续. 迄今为止我们仅注意它的极大值及极小值, 现在再提出关于它在这区间内所取的一切数值中如何求其最大值及最小值的问题<sup>①</sup>, 依魏尔斯特拉斯第二定理 [85], 这种最大值及最小值必定存在. 为确定起见, 就讨论最大值.

若函数在  $a$  与  $b$  之间的某一点处达到最大值, 则它同时将是极大值之一 (显然, 是最大的极大值); 但最大值, 亦可以在区间的一端点  $a$  或  $b$  处达到 (参阅图 63). 这样, 就需要把函数的一切极大值互相比, 并需与边界数值  $f(a)$  及  $f(b)$  相比; 这些数中的最大者就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  内的一切函数值中的最大值. 仿此可求出函数的最小值.

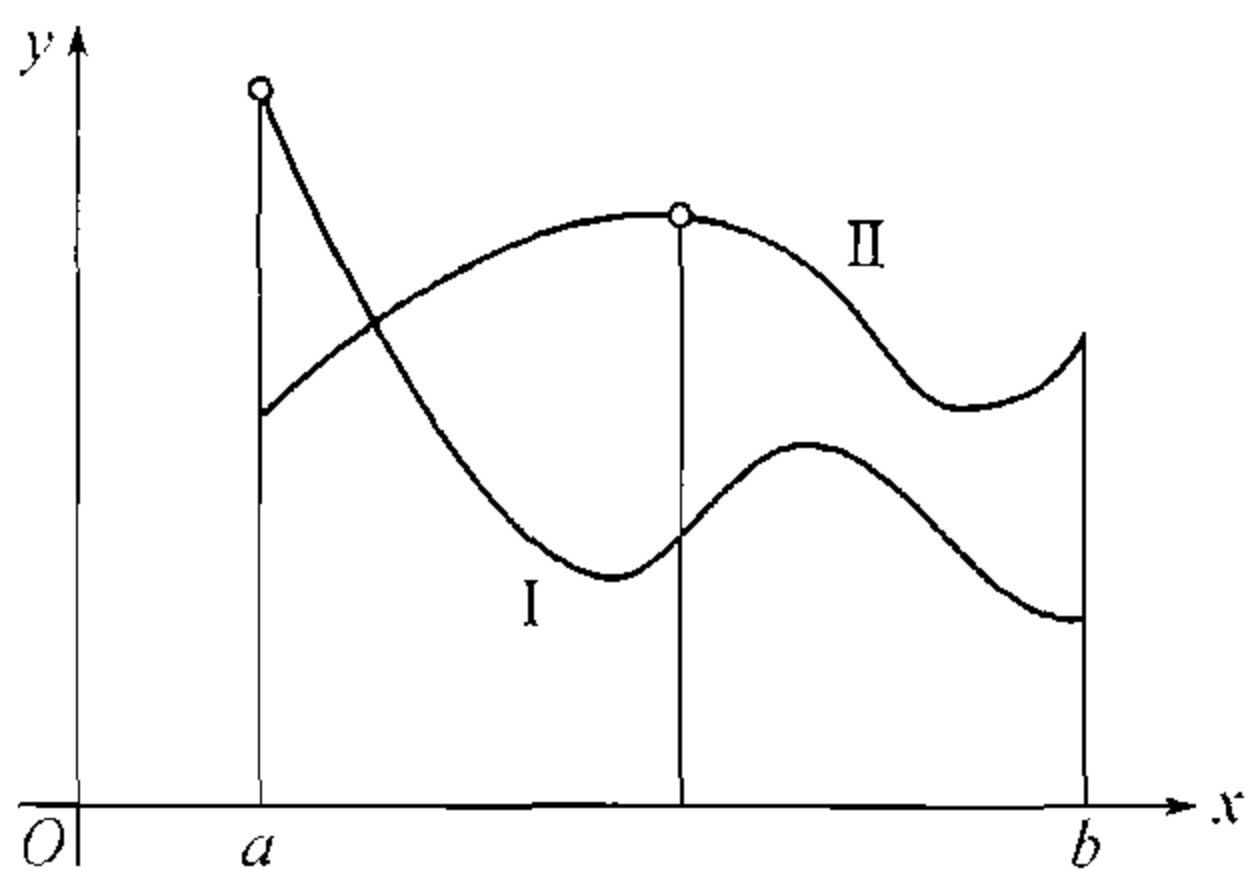


图 63

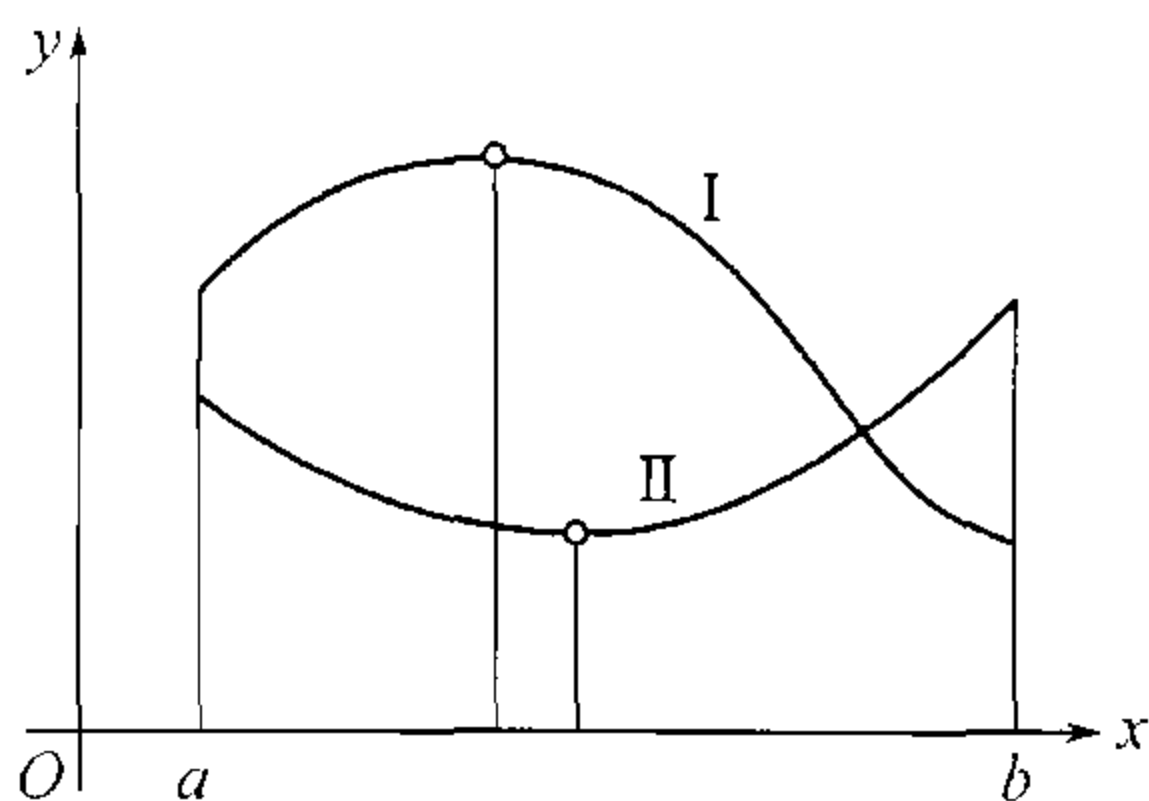


图 64

例如, 要判定函数  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  内的最大值及最小值; 两个极大值等于 1, 且大于边界数值  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ , 因此, 1 是函数在所述区间内的最大值. 极小值等于  $0.7\cdots$ , 大于边界数值, 于是最小值就是 0. 对于区间  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$  而言, 则须取在  $x = \frac{\pi}{2}$  及  $\frac{5\pi}{4}$  时所达到的两个极大值 1 及  $-0.7\cdots$  之较大者作为最大值, 因为在端点处的函数值是  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.7\cdots$  及  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ , 都小于 1. 函数在右端点处达到最小值同时, 在  $x = \pi$  时, 极小值即最小值.

<sup>①</sup>这样, 我们给术语极大值保留着它的“局部”的意义 (在对应点的直接邻域内的最大值), 并把它和在所考察的全区间内函数的最大值区别开来.

关于函数的极小值及最小值亦是如此.



若希望避免探究极大值或极小值, 则用别的办法. 仅需计算在一切“有极值嫌疑的”点处的函数值, 并且使它们与边界数  $f(a)$  及  $f(b)$  相比较; 在这些数中的最大数及最小数, 显然就是一切函数值中的最大值及最小值.

例如, 对区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ , 我们就把  $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.7\cdots, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  等数值与边界值  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$  相比较, 而对于区间  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , 我们就把  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f(\pi) = -1, f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -0.7\cdots$  等数值与边界值  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.7\cdots$  及  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$  相比较.

**附注** 在应用题内最常碰到  $a$  与  $b$  之间只出现一个“有嫌疑的”点  $x_0$  的简单情形. 若在这点处函数有极大值 (极小值), 则不用与边界值相比较, 就能明白这就是函数在所给区间内的最大值 (最小值) (参阅图 64). 在这类情形, 进行探究极大值及极小值, 经常显得比计算及比较函数的特别值更为简单 (特别是, 若在函数的表达式内有文字常数时).

着重声明, 上面所讲的完全可以应用于开区间  $(a, b)$  以及应用于无穷区间.

**140. 应用题** 今将用例题的形式叙述一系列各方面的问题. 这些问题的解答归结于求函数的最大值及最小值. 可是, 更值得注意的往往还不是这些数值的本身, 而是那些使函数获得极值的点 (变元的数值).

1) 从一块边长为  $a$  的正方形铁皮的各角上截去相等的方块, 把各边折转 (图 65) 作成无盖的匣子. 怎样才能得出有最大容量的匣子?

若用  $x$  表示截去的方块的边长, 则匣子的体积  $y$  可表示为:  $y = x(a - 2x)^2$ , 而且  $x$  是在区间  $\left[0, \frac{a}{2}\right]$  内变动着. 问题已变成求函数  $y$  在这区间内的最大值.

因为导数  $y' = (a - 2x)(a - 6x)$  在  $0$  与  $\frac{a}{2}$  之间只有唯一的零点  $x = \frac{a}{6}$ , 所以立即可知这数值使函数获得极大值, 同时它也就是所求的最大值. 或用另一种说法: 在  $x = \frac{a}{6}$  时有  $y = \frac{2a^3}{27}$ , 同时  $y$  的边界值却等于  $0$ . 因此, 在  $x = \frac{a}{6}$  时实际上就得出  $y$  的最大值.

2) 已知一木料有直径为  $d$  的圆截面. 如何把它削成最坚牢的具有矩形截面的横梁.

**提示** 由材料力学证明, 有矩形截面的横梁的强度与积  $bh^2$  成比例, 此处的  $b$  是矩形截面的底, 而  $h$  是它的高.

因为  $h^2 = d^2 - b^2$ , 所以要求的就是  $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$  的最大值, 其中“自变量” $b$  在区间  $(0, d)$  内变动着.

导数  $y' = d^2 - 3b^2$  在这区间内只有一次等于零, 即在点  $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$  处. 二阶导数  $y'' = -6b < 0$ , 因此, 在所指出的点处达到极大值, 这也就是最大值.

在  $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$  时  $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ , 于是  $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ . 从图 66 内可以看到怎样去作所求的矩形 (把直径分成三等分, 在各分点处立垂线即得). 我们的操作规程上规定比值  $h : b = 7 : 5$ ; 这就是  $\sqrt{2} \doteq 1.4\cdots$  的近似值.

3) 试在半径为  $r$  的半球外面作一体积最小的外切正圆锥体; 但假定半球的底与圆锥体的底是在同一平面上的同心圆 (图 67).

在此处尚需合理地选择自变量; 设圆锥的顶角  $\varphi$  是自变量. 依附图的记法, 就有  $R =$



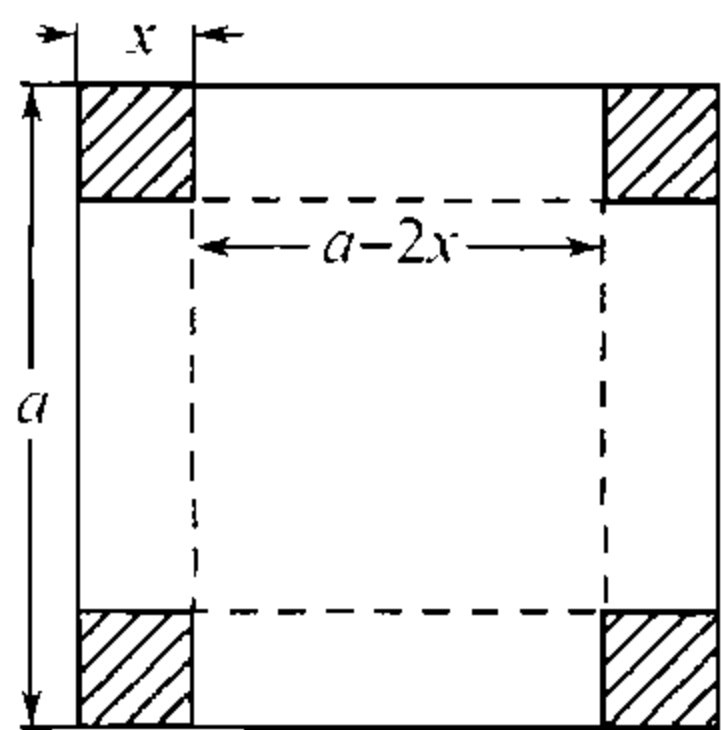


图 65

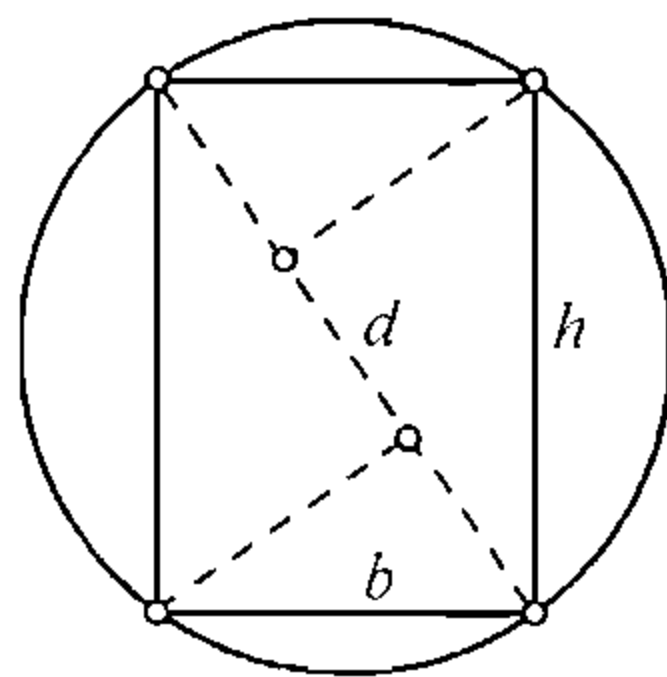


图 66

$\frac{r}{\cos \varphi}$ ,  $h = \frac{r}{\sin \varphi}$ , 于是体积

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\frac{1}{3} \pi r^3}{\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}.$$

要使体积  $V$  有最小值, 显然需要使分母中的  $y = \cos^2 \varphi \sin \varphi$  当  $\varphi$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内变动时获得其最大值. 今有

$$y'_{\varphi} = -2 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi = 2 \cos^3 \varphi \left( \frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2 \varphi \right);$$

在  $0$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间导数仅在  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  即  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$  (约相当于  $35^{\circ}15'52''$ ) 时等于零, 这时其符号由正变负, 这角使  $y$  获得最大值, 而使体积  $V$  获得最小值.

4) 重量为  $G$  的货物放在一水平面上, 要加上一力使它移动 (图 68). 当摩擦存在时, 要使这力的数量  $F$  是最小, 问它应该与水平面作成什么角度? 已知摩擦系数是  $\mu$ .

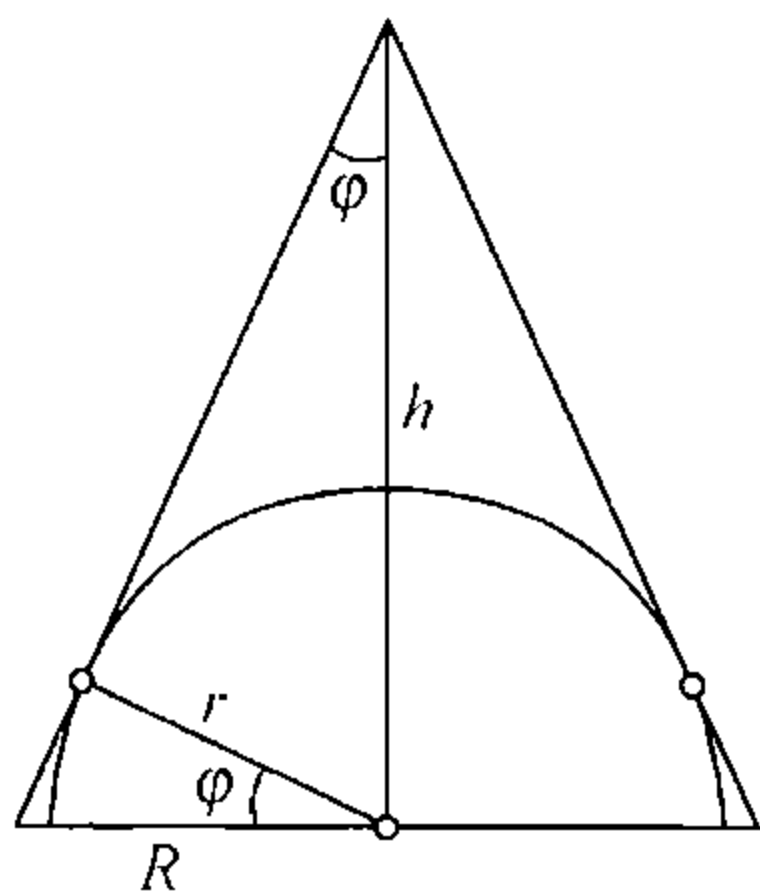


图 67

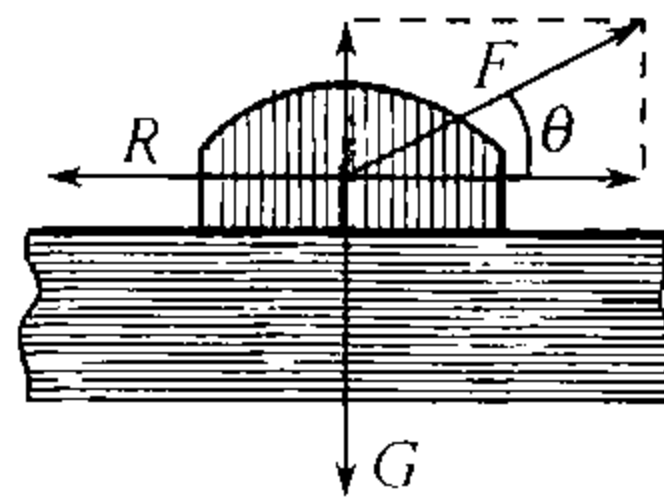


图 68

**提示** 摩擦力当作与物体对于平面的压力成正比例 (库伦定律), 其方向与运动的方向相反. 比例因子就是“摩擦系数” $\mu$ .

设作用力  $F$  与水平面作成一角度  $\theta$ , 沿水平方向及垂直方向分解这力, 得出分力  $F \cdot \cos \theta$  及  $F \cdot \sin \theta$ . 物体对于平面的压力是  $G - F \cdot \sin \theta$ , 于是, 依库伦定律, 摩擦力  $R = \mu(G - F \cdot \sin \theta)$ ; 曳引力  $F$  的水平分力  $F \cdot \cos \theta$  应该刚好平衡于这摩擦力:

$$F \cdot \cos \theta = \mu \cdot (G - F \cdot \sin \theta),$$



由此

$$F = \frac{\mu G}{\cos \theta + \mu \sin \theta}.$$

现在要求的是当  $\theta$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  内变动时这函数的最小值, 或函数  $y = \cos \theta + \mu \sin \theta$  的最大值. 导数  $y'_\theta = \mu \cos \theta - \sin \theta$  只当  $\operatorname{tg} \theta = \mu$  或  $\theta = \operatorname{arctg} \mu$  时等于零; 这角  $\theta$  称为“摩擦角”. 因为  $y''_{\theta 2} = -\mu \sin \theta - \cos \theta < 0$ , 所以当曳引力与水平面作成摩擦角时最为有利. 例如, 若要使石块在木板上移动, 即  $\mu = 0.4$  而  $\theta \doteq 22^\circ$ .

5) 已知船舶每航行一小时的费用 (卢布) 表示为经验公式  $a + bv^3$ , 此处  $a$  及  $b$  是常量, 它们应当对于每一船舶各别地确定, 而  $v$  是船舶的速度, 单位为浬/小时 ( $1 \text{ 浬} = 1.85 \text{ 公里}$ )<sup>①</sup>. 问在怎样的 (“经济的”) 速度之下, 船舶以最小的费用驶行任何的距离?

驶行 1 公里需要  $\frac{1}{1.85v}$  小时, 对应的费用表示为公式

$$\frac{1}{1.85v}(a + bv^3) = \frac{1}{1.85} \left( bv^2 + \frac{a}{v} \right).$$

使式子  $y = bv^2 + \frac{a}{v}$  的导数等于零, 得  $y'_v = 2bv - \frac{a}{v^2} = 0$ , 由此  $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ . 因为  $y''_{v2} = 2b + \frac{2a}{v^3} > 0$ , 故在已求得的数值  $v$  时, 费用最省.

数字例子:  $a = 40, b = 0.01, v = \sqrt[3]{2000} \doteq 12.6$  浬/小时.

6) 设一电灯可以沿着铅垂线  $OB$  (图 69) 移动 (例如, 装着滑车). 它与水平面  $OA$  必须有怎样的距离, 方才能使在水平面上的一点  $A$  处获得最大的照度?

**提示** 照度  $J$  与  $\sin \varphi$  成正比例, 与距离  $r = AB$  的平方成反比例, 即

$$J = c \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

式中的  $c$  依赖于灯光的强度.

若选  $h = OB$  作为自变量, 则

$$\sin \varphi = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}$$

而

$$J = c \cdot \frac{h}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \quad (0 < h < +\infty).$$

其次, 导数

$$J'_h = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}}$$

在  $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \doteq 0.7a$  时等于零, 而且在  $h$  经过这数值时, 符号由正变负. 这  $h$  就是最适当的距离.

亦可以选取角  $\varphi$  作为自变量; 那时

$$f = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{c}{a^2} \cdot \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

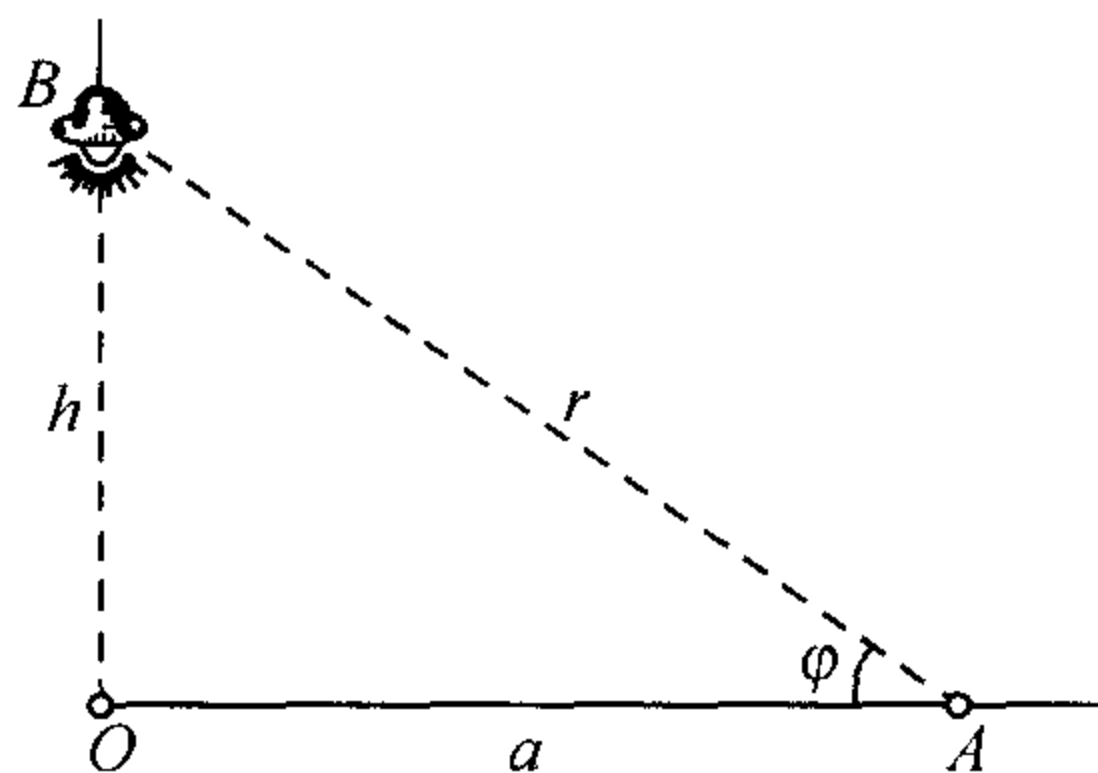


图 69

<sup>①</sup>在这公式内, 费用的常量部分  $a$  代表折旧及船员的薪金, 而第二项  $bv^3$  代表燃料费.



而问题就变成求函数  $y = \cos^2 \varphi \sin \varphi$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的最大值. 但我们已经知道 [参阅应用题 3)], 它在有  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  的角度  $\varphi_0$  时达到最大值. 这时距离  $h$  仍得原值  $a \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

7) 由铁路干线  $AB$  上的一点  $A$  处 (图 70) 要把货物运往与铁路线相距为  $CB = l$  的一点  $C$ . 运送单位重量经过单位距离的运费在铁路线上为  $\alpha$ , 用马车时为  $\beta$ . 问应该从铁路线上怎样的一点  $M$  起始修筑公路  $MC$ , 使由  $A$  至  $C$  (依路线  $AMC$ ) 的货运价格最为低廉?

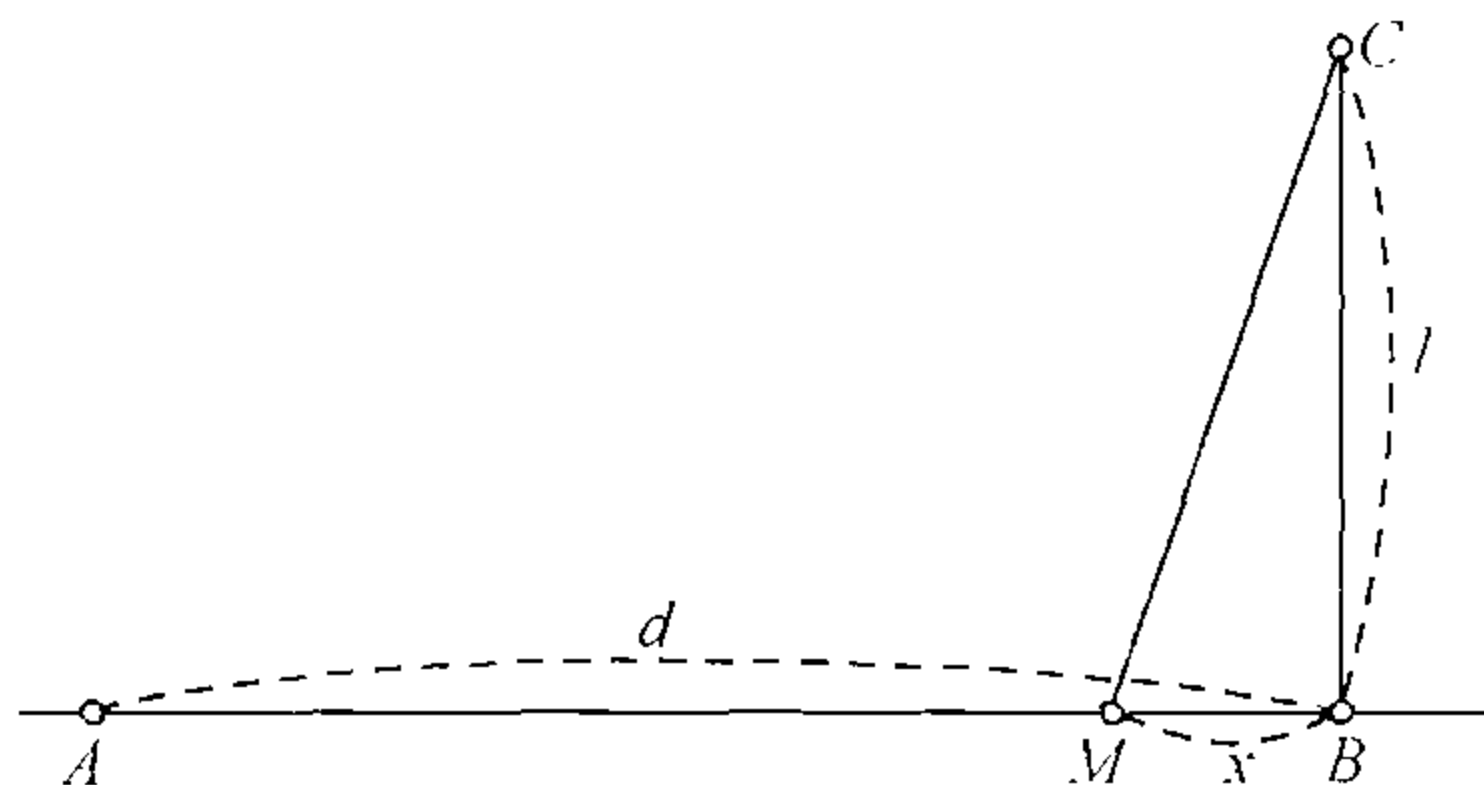


图 70

依附图的记法, 单位重量的货物的运费 —— 对于点  $M$  的任意位置 —— 为

$$y = \alpha(d - x) + \beta\sqrt{x^2 + l^2} \quad (0 \leq x \leq d).$$

故

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - \alpha = \beta \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - k \right) \quad \left( k = \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

若  $k \geq 1 (\alpha \geq \beta)$ , 则这式子永远是负的, 始终不等于零. 函数  $y$  随着  $x$  由 0 渐增至  $d$  而渐减, 显然, 在  $x = d$  时达到函数的最小值. 在这种情形, 直接把点  $A$  作为公路的起点, 最为有利.

在  $k < 1$  时, 只要同时有

$$\frac{kl}{\sqrt{1 - k^2}} \geq d,$$

则前述的一切仍是正确的. 这是因为, 在  $k < 1$  时式子

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - k$$

有唯一的零点

$$\frac{kl}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

而在上述假定时, 这零点显然位于  $x$  的变动区间之外 (或在它的端点上), 于是在区间之内部导数  $y'_x$  仍是负的.

仅在所说的零点  $< d$  时, 这  $x$  的数值方才确定着  $A$  与  $B$  之间使运费为最小的一点  $M$  的位置.

**附注** 利用这机会请读者注意下面的情况. 寻求函数在变元的确定变动区间内的最大值或最小值时, 可能很容易碰到, 在这区间内全然没有导数的零点 (或其他“有嫌疑的”数值). 这就说明在所考察的区间内函数是单调增加或单调减少, 因此, 必在区间的两端点上达到其最大值及最小值.

在最后的應用題中, 當題內引入的數量滿足一定的關係時, 類似的情況便立刻出現了.



## §2. 凸 (与凹) 函数

**141. 凸 (与凹) 函数的定义** 除了单调 (增或减) 函数类以外, 还可以提出一类所谓凸或凹函数.

在区间  $\mathcal{X}$  上<sup>①</sup> 有定义而且连续的函数  $f(x)$  叫做是凸函数(向下凸), 如果对  $\mathcal{X}$  中的任何两点  $x_1$  与  $x_2 (x_1 \leq x_2)$  有不等式

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2), \quad (1)$$

而  $q_1$  与  $q_2$  为相加等于 1 的任何正数. 函数叫做凹函数, 如果成立的不是 (1) 而是

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2). \quad (1a)$$

显然, 若函数  $f(x)$  是凸 (凹) 的, 则函数  $-f(x)$  是凹 (凸) 的, 反过来说也对. 这一简单的说明, 可使以后在许多情形下只要讨论凸函数就够了.

凸函数的上述定义有简单的几何意义. 首先要指出, 在所作对  $q_1$  与  $q_2$  的假定下,

$$x = q_1x_1 + q_2x_2 \quad (x_1 < x_2) \quad (2)$$

应在  $x_1$  与  $x_2$  之间; 反之,  $x_1$  与  $x_2$  间的每一数  $x$ , 都可用上述形式来唯一表出, 其系数为

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{与} \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2a)$$

若考察函数  $f(x)$  的图形 (图 71) 及其在点

$$A_1(x_1, y_1) \quad \text{与} \quad A_2(x_2, y_2)$$

[其中  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ] 间的弧, 则不等式 (1) 左边——以 (2a) 为系数——便是弧  $A_1A_2$  上横标为  $x$  的点  $A$  的纵标, 而在该不等式的右边则是弦  $A_1A_2$  上 (具同一横标的) 点  $B$  的纵标

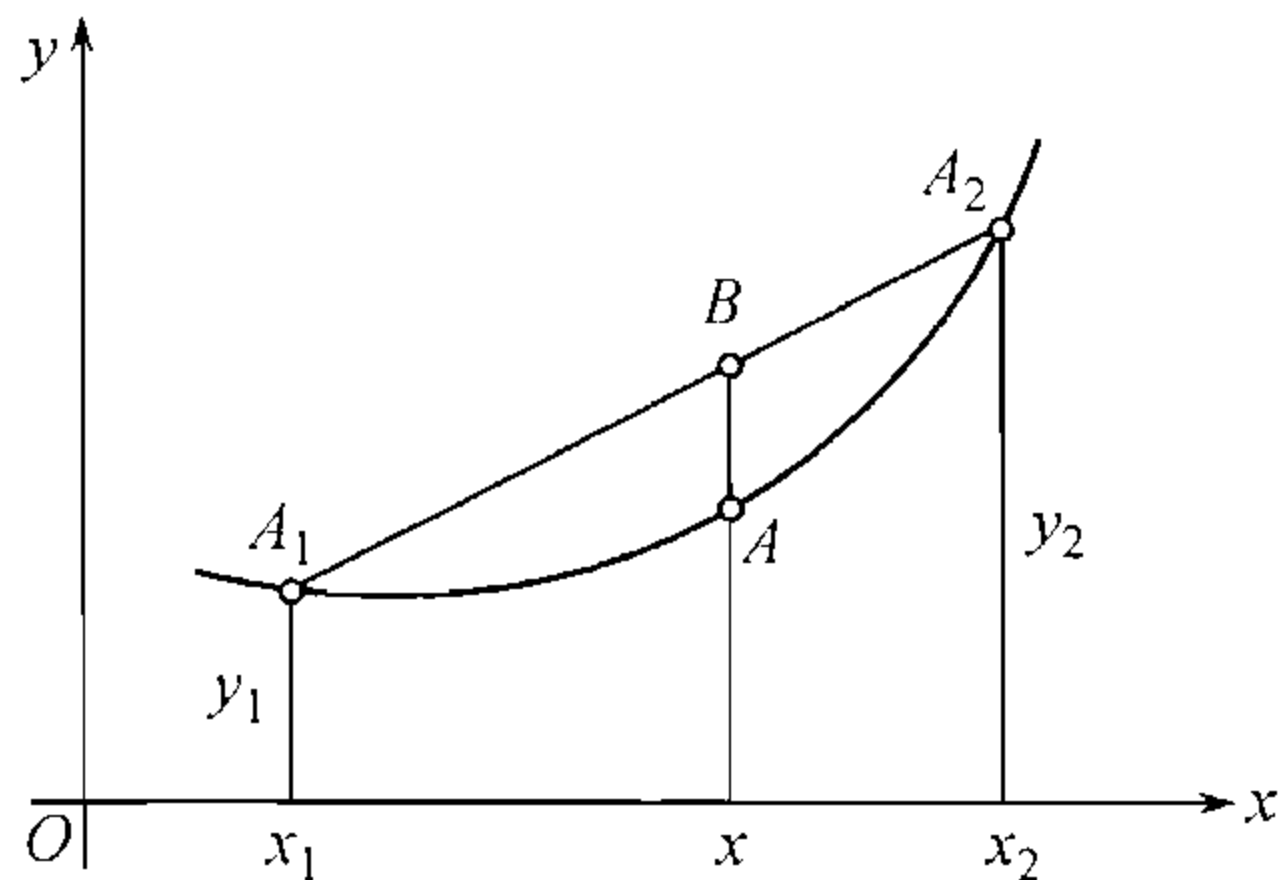


图 71

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2, \quad (3)$$

<sup>①</sup>这里  $\mathcal{X}$  可以是开的或闭的, 有限的或无穷的.

<sup>②</sup>凸 (凹) 函数的概念是由詹森 (J.L.W.V.Jensen) 引入的, 但他是从比 (1) [或 (1a)] 还要特殊的关系式出发的, 即:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2};$$

这相当于  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$  的情形. 对于我们所限定的连续函数来讲, 这两个定义是一致的.



于是凸函数可描述为这样的函数, 其图形 (弧) 上所有的点都在相应弦的下面, 或位于弦本身上(在凹函数的情形, “下面” 须改为“上面”). 曲线  $y = f(x)$  也随着函数  $f(x)$  本身而称为凸(或凹) 的.

凸函数的明显例子 (同时也是凹函数) 是线性函数  $f(x) = ax + b$ . 对它来说, 带等号的 (1) 式总成立.  $f(x) = x^2$  也是凸的, 这可直接据定义证明:

$$(q_1x_1 + q_2x_2)^2 = q_1x_1^2 + q_2x_2^2 - q_1q_2(x_1 - x_2)^2 < q_1x_1^2 + q_2x_2^2,$$

只要  $q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1$ . 底下还有凸函数的其他例子.

### 142. 关于凸函数的简单命题

1° 凸函数与正的常数相乘, 仍得凸函数.

2° 两个或几个凸函数之和是凸函数.

这两种情形的证明可自定义立即得出.

附注 两个凸函数的乘积可能不是凸函数. 后面要举出这样的例子 (143 的第二个脚注).

3° 若是  $\varphi(u)$  是常增的凸函数, 而  $u = f(x)$  也是凸函数, 则复合函数  $\varphi(f(x))$  也是凸函数.

事实上, 由于  $f$  是凸函数 [见 (1)] 而  $\varphi$  是常增的, 故有

$$\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leq \varphi(q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2)),$$

而由于  $\varphi$  是凸函数, 右式又不大于  $q_1\varphi(f(x_1)) + q_2\varphi(f(x_2))$ , 故最后得不等式

$$\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leq q_1 \cdot \varphi(f(x_1)) + q_2 \cdot \varphi(f(x_2)),$$

而这是函数  $\varphi(f(x))$  的 (1) 型的关系式.

读者可自己证明下表内所列的类似的命题:

$\varphi(u)$	$u = f(x)$	$\varphi(f(x))$
凸, 常减	凹	凸
凹, 常增	凹	凹
凹, 常减	凸	凹

4° 如果  $y = f(x)$  和  $x = g(y)$  是单值互反的函数 (在相对应的区间内), 那么下面表中表示的性质同时成立:

$f(x)$	$g(y)$
凸, 常增	凹, 常增
凸, 常减	凸, 常减
凹, 常减	凹, 常减



例如, 在第一行中, 假定我们要由关于  $f(x)$  的假设推出关于  $g(y)$  的判断. 令

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \quad \text{故} \quad x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2).$$

根据不等式 (1), 我们有

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) = q_1y_1 + q_2y_2.$$

因为依据反函数定理 [83], 函数  $g(y)$  也是常增的, 所以

$$f(q_1y_1 + q_2y_2) \geq g(f(q_1x_1 + q_2x_2)) = q_1 \cdot g(y_1) + q_2 \cdot g(y_2),$$

这就证明了函数  $g$  的凹性 [参看 (1a)]<sup>①</sup>.

5° 在区间  $\mathcal{X}$  内的凸函数  $f(x)$ , 如果不是常数, 不可能在这区间内部达到最大值.

设若不然, 假定函数在区间某一内点  $x_0$  处达到最大值. 因为这个函数不是常数, 所以可把这点包括在这样一个区间  $(x_1, x_2)$  内:

$$x_1 < x_0 < x_2,$$

使得至少在一个端点处函数值的确小于在  $x_0$  处的函数值. 例如设

$$f(x_1) < f(x_0), \quad f(x_2) \leq f(x_0).$$

令  $x_0 = q_1x_1 + q_2x_2$ , 用  $q_1$  乘第一个不等式的两边, 用  $q_2$  乘第二个并且相加. 我们得到

$$q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) < f(x_0) = f(q_1x_1 + q_2x_2),$$

这和函数  $f$  的凸性矛盾. 由此我们的论断得证.

6° 如果区间  $[x_1, x_2]$  (其中  $x_1 < x_2$ ) 包含在使函数  $f(x)$  为凸的区间  $\mathcal{X}$  内, 那么关系式 (1) 或者总是带等号成立, 或者总是带不等号成立.

仍旧用图 71 的记号, 这个命题可用几何方式表示成: 弧  $A_1A_2$  或者和弦  $A_1A_2$  粘合, 或者 (除了端点以外) 整个落在弦的下面.

为了证明, 我们考察线性函数 (3), 它在  $x_1, x_2$  两点处和函数  $f(x)$  取同样的值; 为简短计我们把这函数记成  $l(x)$ . 由于函数  $f$  和  $-l$  的凸性, 差

$$\varphi(x) = f(x) - l(x) = f(x) + [-l(x)]$$

也是凸的 [2°]. 这时在区间  $[x_1, x_2]$  内或者是  $\varphi(x) \equiv 0$ , 或者不是. 在第一种情形, 在这个区间内  $f(x) \equiv l(x)$  就是说弧和弦粘合, 而关系式 (1) 永远带等号成立. 在第二

<sup>①</sup>表中列出的所有论断从图上来看都是显然的.



种情形, 在整个区间  $(x_1, x_2)$  内都应该有  $\varphi(x) < 0$ , 因为, 设若函数  $\varphi$  在这个区间内也能取得非负值, 那么它势将在区间  $[x_1, x_2]$  的内部取得在  $[x_1, x_2]$  上的最大值, 而这对于不是常数的凸函数是不可能的 [5°]. 所以, 在这区间的内部  $f(x) < l(x)$ , 曲线落在弦的下面, 而关系式永远带不等号成立.

如果对于包含在  $\mathcal{X}$  内部的任何区间  $[x_1, x_2], x_1 < x_2$ , 关系式 (1) 带不等号成立, 我们就说函数  $f(x)$  是狭义凸函数. 类似地可确立狭义凹函数的概念. 这个名称同时也适用于曲线  $y = f(x)$ .

**143. 函数凸性的条件** 利用 (2) 和 (2a), 可将基本不等式 (1) 改写成:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

或者更加对称些,

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0. \quad (4)$$

最后, 这个条件可利用行列式写成:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0. \quad (5)$$

在所有情形都假定  $x$  包含在  $x_1$  和  $x_2$  之间; 为确定起见以后并将假定  $x_1 < x_2$ .

顺便指出, 把函数凸性条件写成 (5) 的形式, 它就获得一个直接的几何解释, 只要记得, 上面写出的行列式表示  $\triangle A_1 A A_2$  (图 72) 的面积的二倍, 它取得正值的必要而且充分的条件, 乃是三角形是正定向的, 就是说它的周界  $A_1-A-A_2$  依逆时针方向划过.

我们特别指出, 如果指的是狭义凸性, 那么在所有这些条件中都应该把等号除去.

如果引用函数  $f(x)$  的导数, 就可以得出关于它的凸性的便于检验的条件.

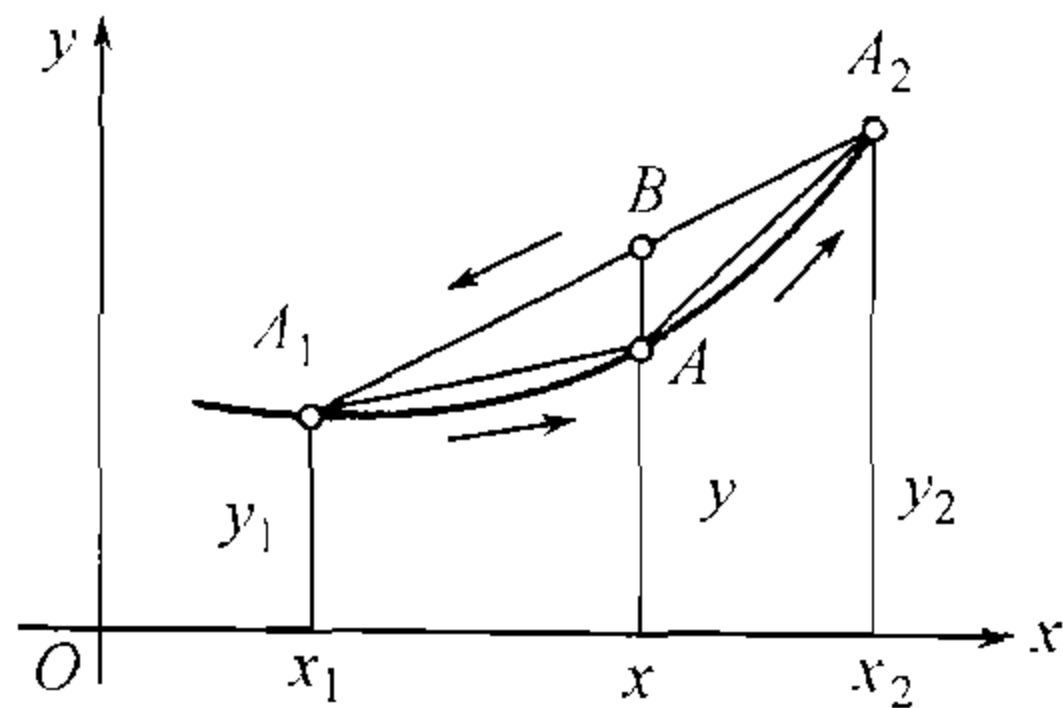


图 72

**定理 1** 假定函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有定义而且连续, 并且在  $\mathcal{X}$  内有有限导数  $f'(x)$ . 要使  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内是凸函数, 必要而且充分的条件是, 它的导数  $f'(x)$  是常增的 (按照广义理解).

**必要性** 假定函数  $f(x)$  是凸的. 设  $x_1 < x < x_2$ , 将条件 (4) 改写成:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (6)$$



如果令  $x$  趋向  $x_1$  或  $x_2$  并且求极限, 我们将分别得到

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (7a)$$

和

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \textcircled{1}, \quad (7b)$$

由此  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ , 因而函数  $f'(x)$  实际上是增长的 (按照广义理解).

**充分性** 现在假定后面的条件被满足即  $f'(x)$  常增. 为了证明不等式 (6) 我们对它的两边应用有限增量公式 [112]

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

其中  $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ . 因为依照假定  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ , 所以关系式 (6) 真正成立, 而由它就可得出确定函数  $f(x)$  的凸性的关系式 (4).

**定理 2** 假定函数  $f(x)$  和它的导数  $f'(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有定义并且连续, 而且  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  的内部有有限的二阶导数. 要使  $f(x)$  是在  $\mathcal{X}$  内的凸函数, 必要而且充分的条件是在  $\mathcal{X}$  的内部

$$f''(x) \geq 0. \quad (8)$$

由于前一定理, 只需把 132 目的定理 2 应用到函数  $f'(x)$  就够了.

同样可得函数的凹性的条件

$$f''(x) \leq 0, \quad (8^*)$$

所以, 条件

$$f''(x) > 0 \quad (< 0) \quad (9)$$

的成立显然保证了狭义的凸性 (凹性), 因为它排除了函数  $f(x)$  在任何区间成为线性的可能性 [142, 6°].

现在要作出任意多少凸函数或凹函数的例子就很容易了:

- 1) 函数  $a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是凸的, 因为  $(a^x)'' = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0$ ;
- 2) 函数  $\ln x$  在区间  $(0, +\infty)$  内是凹的, 因为  $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$  [比较 142, 4°];
- 3) 对于函数  $x \cdot \ln x$  (仍在上述区间内), 二阶导数  $\frac{1}{x} > 0$ , 因而函数是凸的;
- 4) 对于函数  $x^r$  (仍在上述区间内), 二阶导数等于  $r(r-1)x^{r-2}$ ; 由此可知, 当  $r > 1$  和  $r < 0$  时函数是凸的, 而当  $0 < r < 1$  时函数是凹的<sup>②</sup>, 等等.

在所有这些例子中狭义凸性或狭义凹性都实际发生了.

<sup>①</sup>由于后面有用, 我们着重指出, 在推导不等式 (7a) 和 (7b) 时, 我们仅仅相应地利用了导数在点  $x_1$  或  $x_2$  处的存在性.

<sup>②</sup>这个例子使我们可能顺便表明, 两个凸函数的乘积也可以不是凸函数; 例如, 函数  $-x^{\frac{1}{3}}$  是凸的, 可是它的平方, 即函数  $x^{\frac{2}{3}}$  是凹的.



作为结束, 我们再指出凸函数  $f(x)$  的一个重要的几何特征. 这里, 我们不像 [141] 目一样考察函数  $f(x)$  的图像的弦, 而考察图像上任意点处的切线 (图 73).

**定理 3** 假定函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有定义而且连续, 并有有限导数  $f'(x)$ . 要使函数  $f(x)$  是凸的, 必要而且充分的条件是, 它的图像上的一切点落在它的任意切线上面 (或落在切线上).

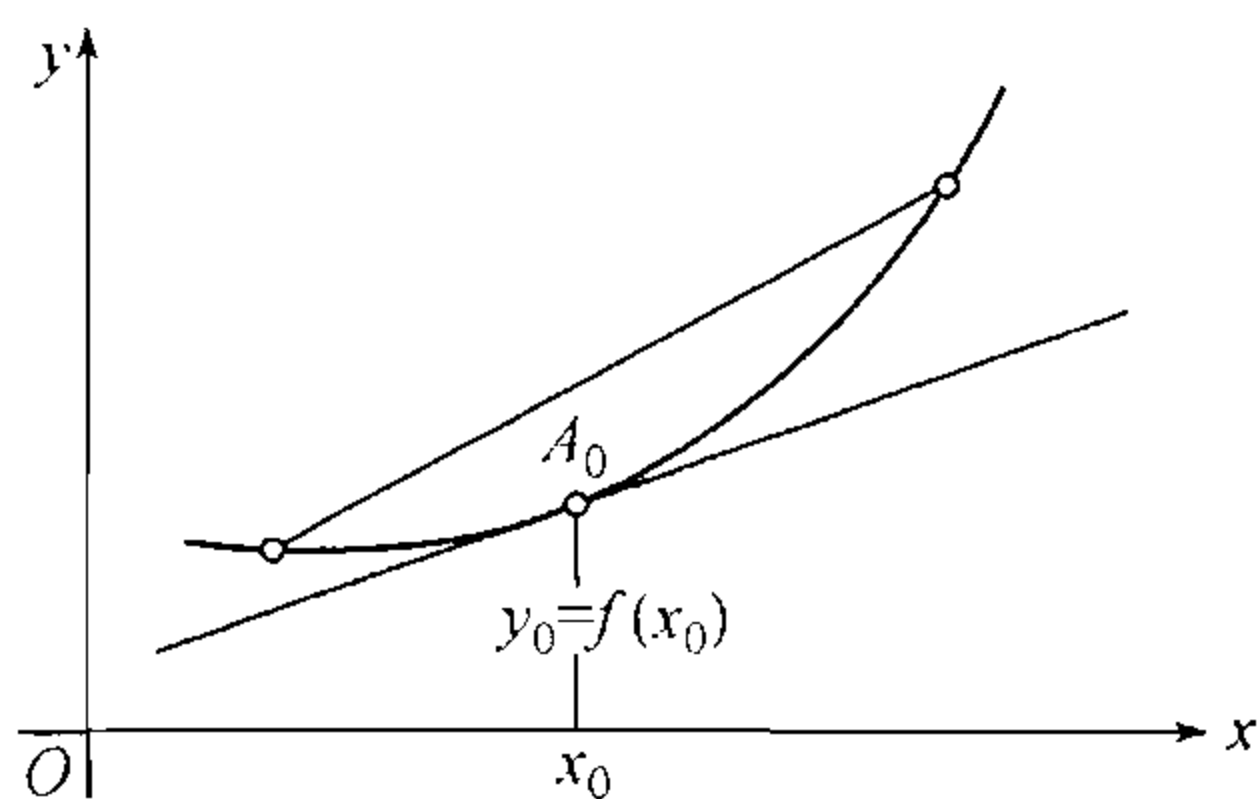


图 73

**必要性** 曲线  $y = f(x)$  在点  $A_0(x_0, f(x_0))$  处的切线有斜率  $f'(x_0)$ . 切线的方程是:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

需要证明, 由函数  $f(x)$  的凸性可得出, 对于  $\mathcal{X}$  中的任意二点  $x_0$  和  $x$ , 成立不等式

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (10)$$

它等价于两个不等式:

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{对于 } x > x_0 \quad (11a)$$

和

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{对于 } x < x_0, \quad (11b)$$

但是这两个不等式分别和在定理 1 的证明中已得的 (恰恰在函数是凸的这一假定下) 不等式 (7a) 和 (7b) 符合, 只要在它们的第一个中令  $x_2 = x, x_1 = x_0$ , 而在第二个中令  $x_2 = x_0, x_1 = x$ .

**充分性** 反过来, 假定不等式 (10) 也就是不等式 (11a) 和 (11b) 成立. 那么, 由它们就可确立不等式 (7a) 和 (7b), 由此可得:  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ , 因而导数  $f'(x)$  是一个增函数. 而我们知道, 这就表示了函数  $f(x)$  是凸的 (定理 1).

**附注** 请读者注意, 不等式 (10) —— 对于给定的  $x_0$  和任意的  $x \neq x_0$  —— 的必要性的证明实际只需假定导数  $f'(x)$  在点  $x_0$  本身处存在 (参看第 253 页的脚注).

**144. 詹森不等式及其应用** 依照凸函数的定义 [参看 (1)], 我们有

$$\begin{aligned} f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) \\ (q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 &= 1). \end{aligned}$$

可以证明, 对于凸函数还成立更一般的不等式 (它和詹森这个名字相关连):

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n) \leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) + \cdots + q_n \cdot f(x_n) \quad (12)$$



$$(q_1, \dots, q_n > 0, q_1 + \dots + q_n = 1),$$

这里  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是基本区间  $\mathcal{X}$  内的任意数值. 当  $n = 2$  时, 我们知道它是对的; 现在假定, 对于任意某个自然数  $n \geq 2$  它能成立, 我们要证明对于  $n + 1$  它也成立, 就是说, 由  $\mathcal{X}$  内取  $n + 1$  个值  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , 并取总和等于 1 的  $n + 1$  个正数  $q_1, \dots, q_n, q_{n+1}$ , 我们将有

$$\begin{aligned} & f(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n + q_{n+1} x_{n+1}) \\ & \leq q_1 \cdot f(x_1) + \dots + q_n \cdot f(x_n) + q_{n+1} \cdot f(x_{n+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

为此目的, 将左边最后二项之和  $q_n x_n + q_{n+1} x_{n+1}$  用单独的一项

$$(q_n + q_{n+1}) \left( \frac{q_n}{q_n + q_{n+1}} x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} x_{n+1} \right)$$

来代替; 这使我们可能利用不等式 (12) 来肯定: (13) 中左边的表达式不超过下面的和数:

$$q_1 \cdot f(x_1) + \dots + (q_n + q_{n+1}) \cdot f \left( \frac{q_n}{q_n + q_{n+1}} x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} x_{n+1} \right).$$

剩下只需把基本不等式 (1) 应用到最后一项的函数值上去, 就可得到 (13). 如此, 依照数学归纳法, 不等式 (12) 完全证明了.

常常不用总和为 1 的诸因子  $q_i$ , 而引用一些任意的正数  $p_i$ . 在不等式 (12) 中令

$$q_i = \frac{p_i}{p_1 + \dots + p_n},$$

就把它化成如下形式:

$$f \left( \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \right) \leq \frac{\sum p_i \cdot f(x_i)}{\sum p_i}. \quad (12^*)$$

显然, 在  $f$  是凹函数的情形, 不等号需要倒转过来.

选择不同的函数  $f$ , 可以由上式得出一些具体的重要不等式——而它们的来源却都是同样的, 举几个例子.

1) 设  $f(x) = x^k$ , 这里  $x > 0, k > 1$  (凸函数). 我们有

$$\left( \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \right)^k \leq \frac{\sum p_i x_i^k}{\sum p_i}$$

即

$$(\sum p_i x_i)^k \leq (\sum p_i)^{k-1} \cdot \sum p_i x_i^k.$$

将这里的  $p_i$  换成  $b_i^{\frac{k}{k-1}}$ ,  $x_i$  换成  $\frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$ , 我们得到已知的柯西—赫尔德不等式:

$$\sum a_i b_i \leq \left\{ \sum a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum b_i^{\frac{k}{k-1}} \right\}^{\frac{k-1}{k}}$$



[比较 133(5)].

2) 令  $f(x) = \ln x$ , 这里  $x > 0$  (凹函数), 就有

$$\frac{\sum p_i \cdot \ln x_i}{\sum p_i} \leq \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}.$$

由此, 取指数函数, 也得到已经遇见过的不等式

$$\left\{ \prod x_i^{p_i} \right\}^{\frac{1}{\sum p_i}} \leq \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \quad ①$$

[比较 133(4)].

3) 最后, 取  $f(x) = x \cdot \ln x$ , 这里  $x > 0$  (凸函数). 这时

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leq \frac{\sum p_i x_i \ln x_i}{\sum p_i}$$

用  $\sum p_i$  乘并取指数函数, 得到不等式

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leq \left\{ \prod x_i^{p_i x_i} \right\}^{\frac{1}{\sum p_i x_i}}.$$

特例, 在这里令  $p_i = \frac{1}{x_i}$ , 就有

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod x_i}.$$

如果将调和中项<sup>②</sup>的概念推广到几个数的情形, 那么这个不等式可以表述成: 一系列正数的调和中项不超过它们的几何中项.

**145. 拐点** 在描绘函数的图形时 (这个将在下一节中讲), 所谓曲线  $y = f(x)$  的拐点是值得注意的.

曲线上一点  $M(x_0, f(x_0))$  叫做曲线的拐点, 如果它把使函数  $f(x)$  为凸的那部分曲线 (向下凸) 和使这函数为凹的那部分 (向上凸) 分开的话 (图 74).

如果假定在所考察的区间内函数  $f(x)$  有有限导数, 那么依照定理 2, 这个导数在  $x_0$  的左边某邻域  $[x_0 - \delta, x_0]$  内常增, 而在右边的邻域  $[x_0, x_0 + \delta]$  内常减, 或者相反, 在左边常减而在右边常增. 在第一种情形,  $f'(x)$  当  $x = x_0$  时有极大值, 而在第二情形, 则有极小值. 如果再假定存在有限二阶导数  $f''(x)$ , 即使只在  $x = x_0$  一点处也好, 那么必定  $f''(x_0) = 0$  [比较 134].

$f''(x_0) = 0$  这个条件对于求拐点的作用就像条件  $f'(x_0) = 0$  对于求函数  $f(x)$  的极值的作用一样: 它是必要的, 但不是充分的. 后者容易用例子来证实. 设  $f(x) = x^4$ ,

①就像  $\sum$  表示和数一样, 记号  $\prod$  表示乘积.

②参看第 35 目 5) 的脚注.



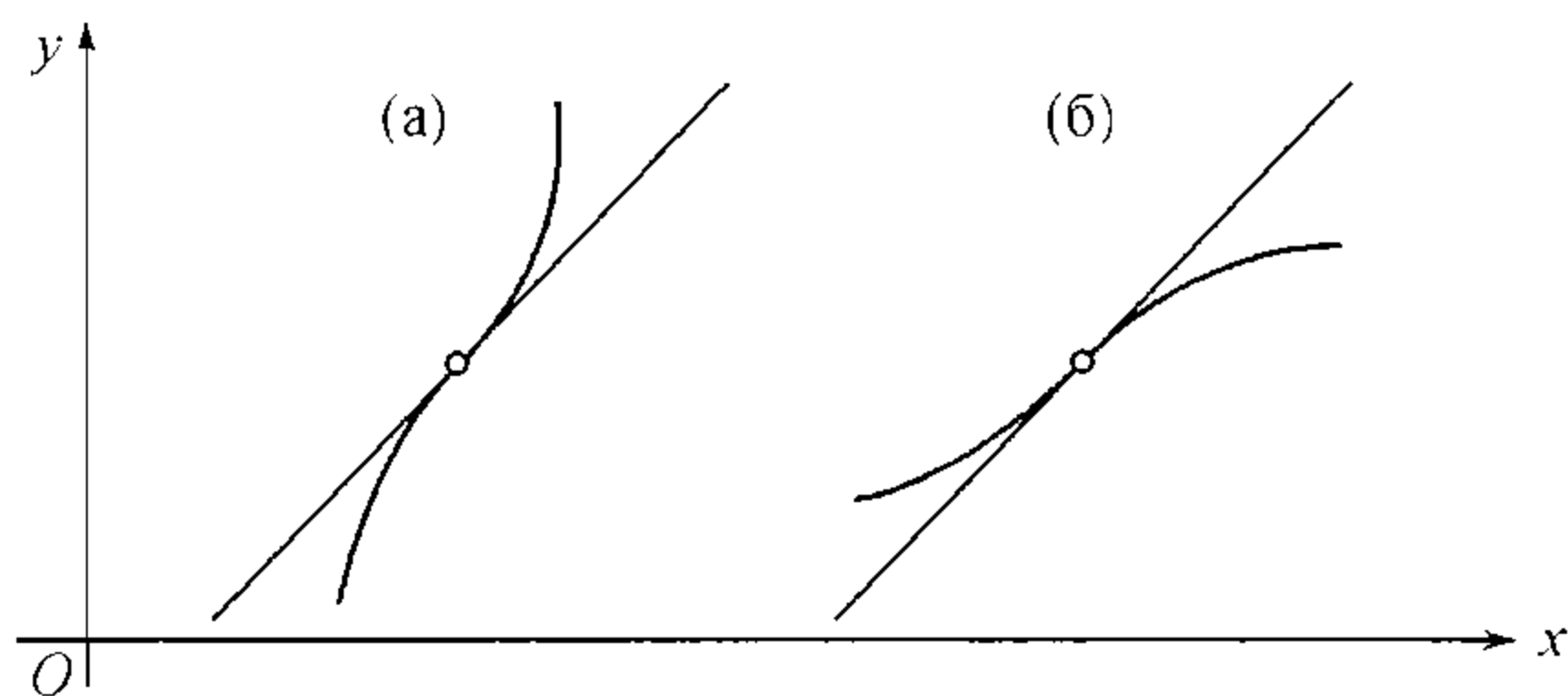


图 74

则在区间  $(-\infty, +\infty)$  内  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ , 所以, 依照定理 2, 函数  $f(x)$  在这个整个区间内是凸的, 虽然  $f''(x)$  在点  $x = 0$  成为零.

如果二阶导数  $f''(x)$  在所研究的区间的内部处处存在, 那么拐点的横坐标应该在这个导数的根中去找. 不过每个根  $x_0$  都须加以考查. 假设在  $x_0$  的左右两边的某两个邻域  $[x_0 - \delta, x_0)$  和  $(x_0, x_0 + \delta]$  内, 导致  $f''(x)$  保持确定符号. 这时为了辨认拐点可以给出这样的规则: 如果在通过数值  $x = x_0$  时导数  $f''(x)$  变号, 那么就有拐点, 如果不变号, 就没有拐点[比较 135].

我们指出, 这时拐点  $(x_0, f(x_0))$  将曲线分成两部分, 一部分是狭义凸曲线, 一部分是狭义凹曲线.

例如, 考察函数  $f(x) = \sin x$ . 对于它,  $f''(x) = -\sin x$  在  $x = k\pi$  ( $k$  是整数) 处成为零, 同时变更符号. 所以, 正弦曲线的落在  $x$  轴上的一切点都是拐点; 容易看出, 在  $((2m-1)\pi, 2m\pi)$  这样的区间内, 正弦曲线是凸的 (向下凸), 而在  $(2m\pi, (2m+1)\pi)$  这样的区间内它是凹的 (向上凸).

像在 138 目中求函数极值时一样, 还可以引用在所考查的点  $x_0$ ——它是  $f''(x)$  的根——处更高各阶的导数. 如此得出规则: 如果在点  $x_0$  处第一个不为零的 (高于二阶的) 导数是奇数阶导数, 那么有拐点, 如果是偶数阶导数, 那么没有拐点.

作为结束, 我们指出曲线  $y = f(x)$  的一个值得注意的性质, 这个性质和它在拐点处的切线有关 (假如这切线存在的话): 曲线在这点由切线的一侧进入另一侧, 就是说, 曲线和切线相交 (参看图 74).

如果切线是铅垂的, 这个情况是显然的 (比较图 43, a 和 б). 再看斜切线和水平切线的情形, 也就是假定存在有限导数  $f'(x_0)$ . 为了确定起见, 假定在拐点左边, 即对于  $x_0 - \delta \leq x < x_0$ , 曲线是凸的, 而在右边, 即对于  $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ , 曲线是凹的 (这相当于图 74, б). 在这种情形下, 我们将确立, 对于  $x < x_0$ , 曲线落在切线以上 (或在切线上), 而对于  $x > x_0$ , 曲线落在切线以下 (或在切线上), 即

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ 如果 } x < x_0,$$

以及

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ 如果 } x > x_0.$$



但第一个不等式就是 143 目的不等式 (10) (请注意该目的附注). 第二个不等式是不等式 (10) 在凹函数的情形类推.

**附注** 这个性质常常被简单地取作拐点的定义. 这个定义和前面给出的绝不是等价的. 首先, 曲线在拐点处可能没有切线, 因而第二定义不能应用. 也可能发生相反的情形: 在某点处切线和曲线相交, 可是该点却不是曲线的凸部和凹部的分界点, 因而第一个定义不能应用. 图 43, B 和 r 的曲线就是如此; 但更有趣的是曲线

$$y = x^5 \left( 1 + \sin^2 \frac{1}{x} \right) \text{ 当 } x \neq 0, \quad y = 0 \text{ 当 } x = 0,$$

这条曲线在原点处和  $x$  轴相切并和它相交; 这里甚至存在连续二阶导数, 但是曲线在点  $x = 0$  的附近, 左边也好, 右边也好, 都无限次变更符号.

### §3. 函数的作图

**146. 问题的提出** 掌握了微分学的方法, 我们可以回到函数的作图的问题 [参阅 47]. 假设首先要作在有限区间  $[a, b]$  内的连续函数  $y = f(x)$  的图像. 现在我们的主要目的是尽可能地准确描述函数的动态; 至于个别纵标的准确度却还在其次.

通常所使用的“按点”作图法 [47], 所取的点或较密或较疏, 但都是偶然的, 而且与 (事先尚未知道的) 图像的特性无关. 因此是不适用的. 首先, 它要计算较多个数的坐标, 这在实用上是不方便的. 但主要的还是它在原则上就是不适用的, 因为所计算的纵标的任意性, 所以它完全不能保证达到所希望的目标.

今假定函数  $y = f(x)$  一般都有有限导数  $y' = f'(x)$ ; 导数为无穷的例外情形仅可能在个别点处发生. 则微分学的方法使我们有可能决定一定个数的“基点”, 它们就是当前的图像的特性点, 按照这些点所作出的图像已经可以达到充分的准确度.

首先, 我们考虑图像的转向点, 即对应于函数极值的图像的峰顶及谷底 [134 ~ 138]. 此外, 还必须普遍地把一切有水平切线及铅直切线的点, 即使它们并不对应于函数的极值, 都一并予以考虑. 自然, 还应当注意到图像的端点.

当刚才所讲过的那些点已经记入图内时 (虽然它们的个数通常并不多), 其实要作图已经够条件了.

若能再研究图像各个部分的凸性 (向下凸) 或凹性 (向上凸) 以及将各个部分分开的拐点的位置, 则可以使图像进一步地精确化 [143, 145].

这时, 我们已可正确地指出函数的增大及减小的区间, 还可正确地指出函数的变率下降至零 ( $y' = 0$ ) 或增大至无穷 ( $y' = \pm\infty$ ) 的那些点, 因此, 所作出的图也就已经可以相当完善地反映出函数的动态了.

**147. 作图的步骤 · 例题** 现在假设函数  $y = f(x)$  在所考察的区间  $[a, b]$  内, 除去在个别的点处导数  $y' = f'(x)$  为无穷之外, 可以二次微分.



这时, 要作函数  $y = f(x)$  的图像, 应该进行如下:

- 1) 确定使导数  $y' = f'(x)$  等于零或无穷的  $x$  值, 并检查它们是否对应于函数的极值;
- 2) 确定使二阶导数  $y'' = f''(x)$  等于零的  $x$  值, 并检定它们是否对应于拐点;
- 3) 算出与所有这些  $x$  值对应的  $y = f(x)$  的函数值. 再算出与所考察的区间的两端点  $a$  及  $b$  对应的函数值.

把所得结果列成一表, 并须注明所求出的图像上的点的特性: 如极大点, 极小点,  $y' = 0, y' = +\infty$  或  $-\infty, y' = \pm\infty$ , 拐点等等 [参阅下面的例题].

有时, 在上述那些点之外还须再加上一些其他的点, 例如图像与两轴的交点等.

在把所求出的一切点记入图内并且认清了它们的特性以后, 就可以经过它们而作出函数的图像了.

我们所考虑的, 当然是作图练习中的通常情形, 就是仅在有限个点处一阶导数等于 0(或成为  $\pm\infty$ ) 或二阶导数等于 0. 这时在这些点之间的各区间内, 图像总是一直上升或一直下降并且也总是向一方凹曲.

若当  $x$  变号时函数值不变 (偶函数), 则图像是关于铅垂轴对称的, 曲线的作图法就可以简化. 当图像是关于原点对称时, 它的解析式的表示是: 当  $x$  变号时函数值仅变其号 (奇函数), 这时作图同样也可简化.

**例题** 1) 在 136, 2) 内, 我们已经考察过函数

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

的性态; 用它的导数我们曾确定使函数获得极值的  $x$  的数值, 并且亦曾算出过函数的极值. 由于函数的周期性, 我们曾限于考察  $x$  的变动区间  $[0, 2\pi]$ . 至于函数的图像也只要作出在这区间内的部分就够了.

现在我们需要求出二阶导数的零点. 若把它表示为

$$y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x) \left( \sin 2x - \frac{2}{3} \right),$$

就很易看出, 第一个括号内的因式在  $x = \frac{3\pi}{4} \doteq 2.36$  及  $\frac{7\pi}{4} \doteq 5.50$  时等于 0, 而第二个因式在  $x \doteq 0.36(21^\circ), 1.21(69^\circ), 3.51(201^\circ)$ , 及  $4.35(249^\circ)$  时等于 0; 在一切这些点处,  $y''$  都要变号, 因此它们都对应于拐点.

列成表:

$x$	0	0.36	0.78	1.21	1.57	2.36	3.14
$y$	1	0.86	0.71	0.86	1	0	-1
	$(y' = 0)$ 极大点	拐点	$(y' = 0)$ 极小点	拐点	$(y' = 0)$ 极大点	拐点	$(y' = 0)$ 极小点

$x$	3.51	3.94	4.35	4.71	5.50	6.28
$y$	-0.86	-0.71	-0.86	-1	0	1
	拐点	$(y' = 0)$ 极大点	拐点	$(y' = 0)$ 极小点	拐点	$(y' = 0)$ 极大点



依这表就作出了画在图 58 中的图像.

附注 读者应该已经注意到, 书中的附图由于尺度太小, 没有能够完善地利用这些由计算而求得的精确的数据. 建议读者用较大的尺度来重画这些附图.

2) 考察函数

$y = \sin x + \sin 2x.$

它不仅是周期函数, 而且还是奇函数. 这使我们还能缩短  $x$  的变动区间成为  $[0, \pi]$ .

在这区间内, 导数

$y' = \cos x + 2 \cos 2x = 4 \cos^2 x + \cos x - 2$

在  $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$  时等于零, 即在  $x \doteq 0.94(54^\circ)$  及  $2.57(147^\circ)$  时. 因为二阶导数

$y'' = -\sin x - 4 \sin 2x = -\sin x(1 + 8 \cos x)$

在上面的第一数值时, 显然是负的, 所以它使函数获得极大值; 仿此, 在第二数值时函数有极小值.

二阶导数本身随着  $\sin x$  而在  $x = 0$  或  $x = \pi \doteq 3.14$  时等于 0, 它又随着括号内的因式而在  $x \doteq 1.70(97^\circ)$  时等于 0; —— 在一切这些点它都变号 (拐点).

列成表:

$x$	0	0.94	1.70	2.09	2.57	3.14
$y$	0	1.76	0.74	0	-0.37	0
	拐点	$(y' = 0)$ 极大点	拐点		$(y' = 0)$ 极小点	拐点

在上面指出的  $x$  值以外, 再加上  $x = \frac{2}{3}\pi \doteq 2.09(120^\circ)$ , 这时  $y = 0$  (图像与  $x$  轴相交). 依这些点而作出的图像, 画在图 75 中; 它在区间  $[-\pi, 0]$  内的图像可以由  $[0, \pi]$  中的图像经过二次旋转; 先绕  $y$  轴, 再绕  $x$  轴旋转而得出.

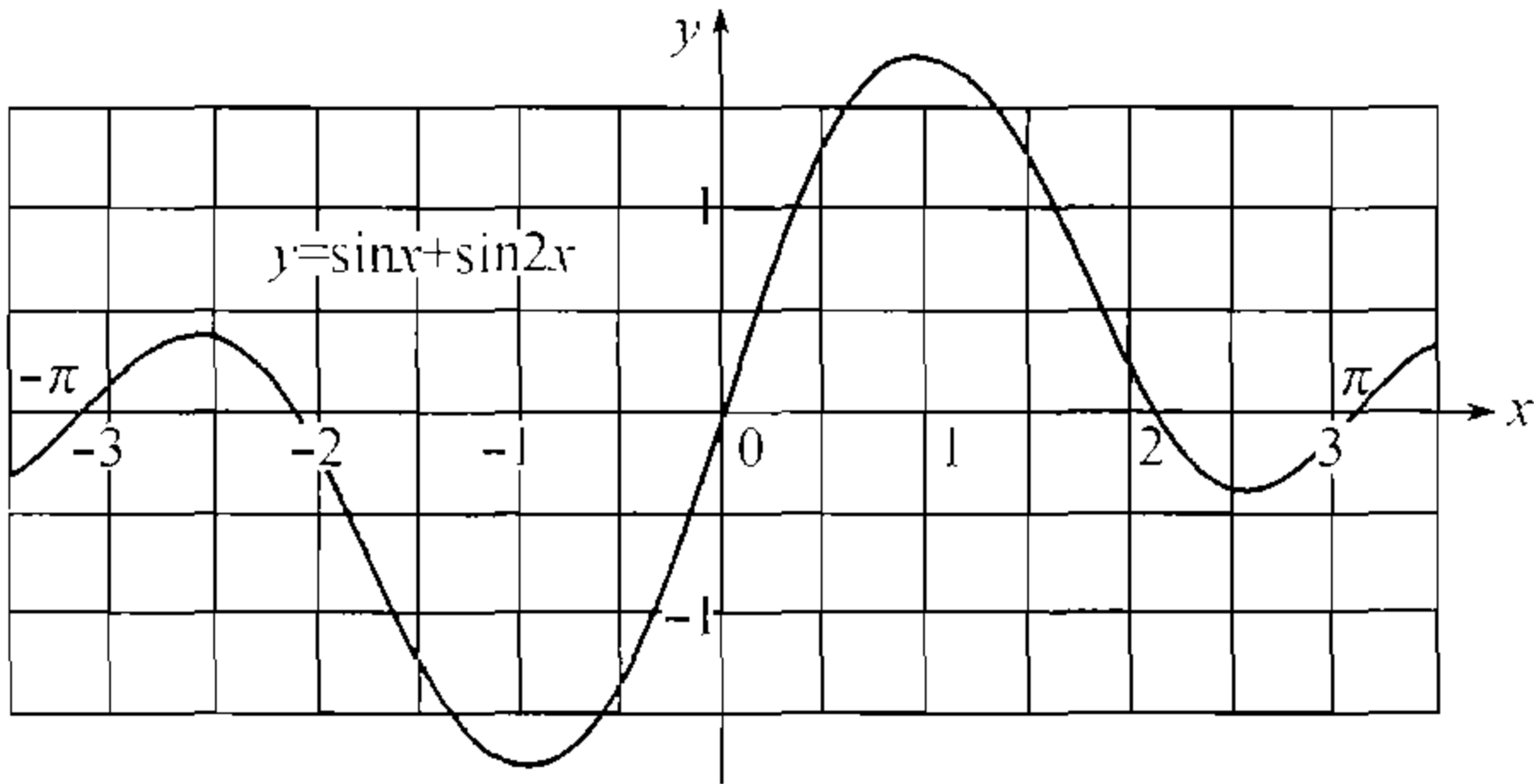


图 75



**148. 无穷间断 · 无穷区间 · 渐近线** 向两个方向来扩大前已考察过的那种函数的范围是有用处的. 第一, 我们现在将假设函数  $y = f(x)$  在个别的  $x$  值时有成为无穷的可能. 这就是说,  $x_0$  是这种数值之一, 当  $x$  趋于  $x_0$  时  $f(x)$  趋于  $+\infty$  或  $-\infty$ . 第二, 我们可以研究在无穷区间内的函数的性态.

因为附图的大小自然是有限的, 所以在这两种情形我们都只能画出全图像的一部分. 但总尽量设法使得未画出那一部分图像的情况, 可以由已画出的部分很容易地想像出来.

今将讨论, 在点  $x = x_0$  处, 函数有无穷间断的情形. 如果在区间的有限部分导数  $y' = f'(x)$  最多只有限次变更符号, 那么当  $x$  由一方接近于  $x_0$  时, 函数必单调地趋向于无穷 (正的或负的). 这样图像在伸展至无穷时将无限制地接近于铅垂线  $x = x_0$ , 至于接近它的上部或下部, 则要看无穷极限的符号而定. 这直线可以使清楚地想像出在附图范围以外的图像的形狀 (图 76). 可以用我们已经很熟悉的函数的图像作为例子, 如  $y = \frac{a}{x}$  在  $x = 0$  时 (图 10),  $y = \operatorname{tg} x$  在  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  时 (图 16),  $y = \log_a x$  在  $x = 0$  时 (图 14).

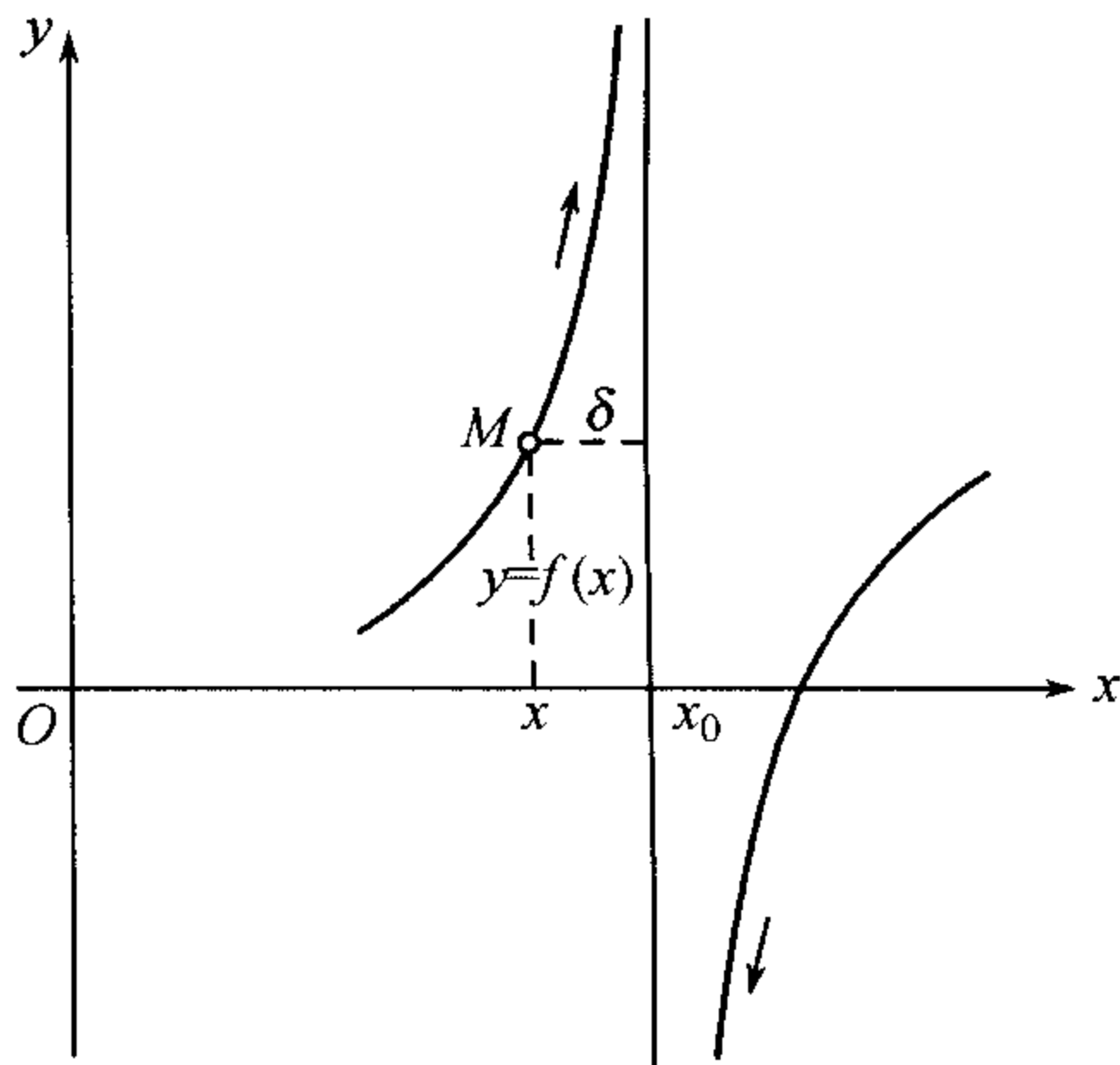


图 76

在无穷 (一侧或双侧都可) 区间的情形, 某些水平线或斜的直线有时也有相似的性质, 就是函数的图像总是无限制地接近于它们. 有鉴于此, 我们给出下列的普遍定义.

设有一曲线, 它的一支沿某一方向伸展至于无穷远处. 若由曲线上的点至某一固定直线的距离  $\delta$ , 当点逐渐趋向无穷远时, 能逐渐趋向于零, 则这直线称为曲线的渐近线.

刚才我们所说过的是铅垂渐近线; 现在要研究水平渐近线及斜渐近线, 但都是对于已知其方程  $y = f(x)$  的曲线而言的.

水平渐近线的例子, 我们已经遇见过: 对于曲线  $y = \frac{a}{x}$ , 在  $x \rightarrow \pm\infty$  时渐近线是  $y = 0$  (图 10), 对于曲线  $y = \operatorname{arctg} x$ , 在  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时, 渐近线各为  $y = \frac{\pi}{2}$  及  $y = -\frac{\pi}{2}$  (图 21), 对于曲线  $y = a^x$ , 若  $a > 1$  则在  $x \rightarrow -\infty$  时, 若  $a < 1$  则在  $x \rightarrow +\infty$  时, 以直线  $y = 0$  为渐近线 (图 13).

要使直线  $Y = b$ , 例如在  $x \rightarrow +\infty$  时, 能作为曲线  $y = f(x)$  的渐近线, 显然 (图 77), 必要而且充分的条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} |y - b| = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$



这样, 水平渐近线的问题, 就简单地变成关于这一极限的问题了.

还需另外去求在  $x \rightarrow -\infty$  时的类似的极限; 这时 (例如在曲线  $y = \operatorname{arctg} x$  的场合) 可能会得出另一渐近线.

转而讨论斜渐近线, 可以用读者在解析几何内已熟悉的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{或} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (1)$$

的渐近线  $y = \pm \frac{b}{a} x$  作为它们的例子 (同时参阅图 7).

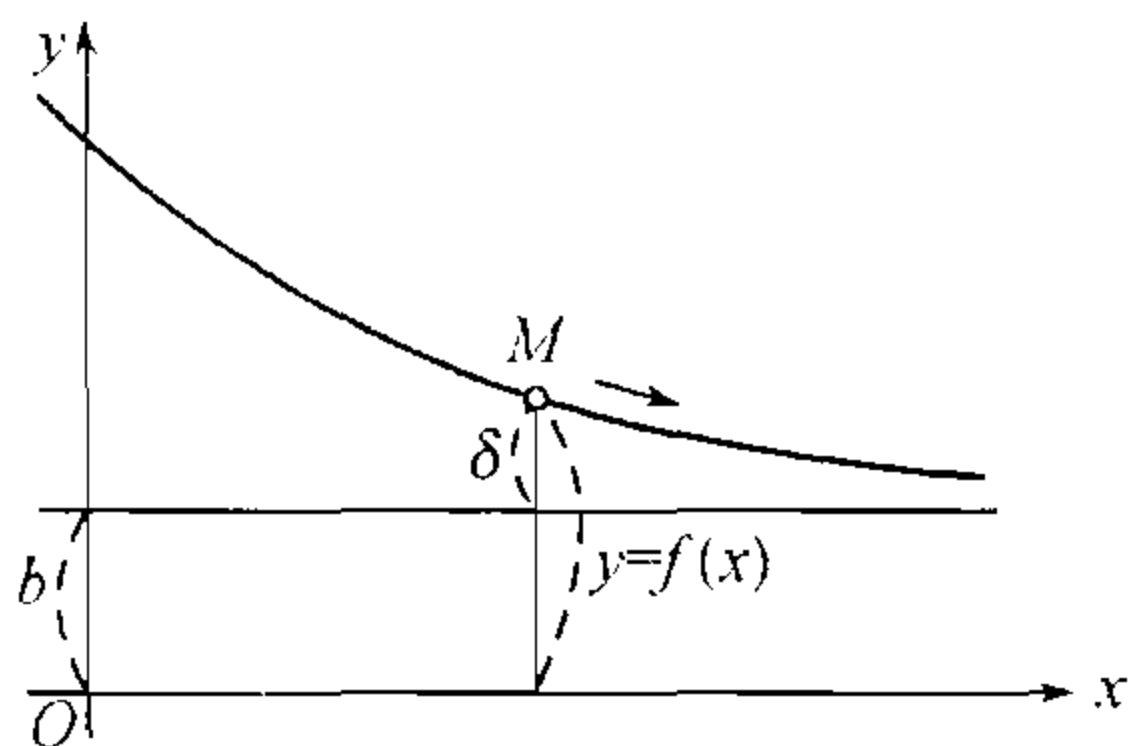


图 77

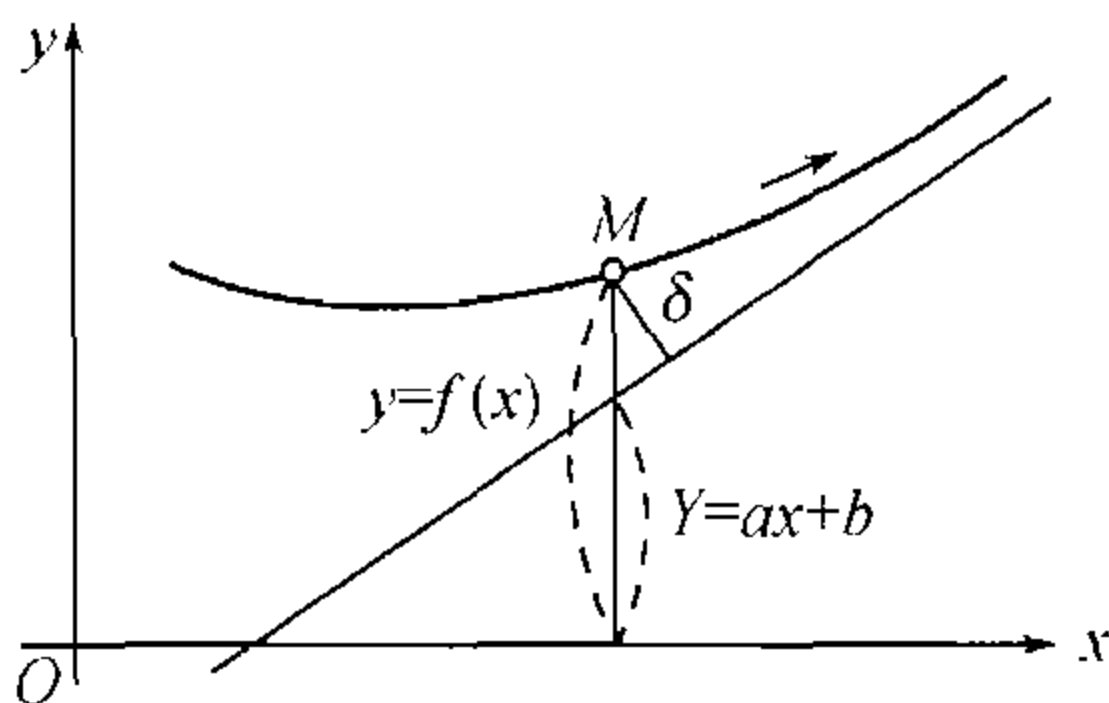


图 78

今假定曲线  $y = f(x)$ , 在正  $x$  轴这一边有斜渐近线

$$Y = ax + b \quad (2)$$

(图 78). 因为纵标的差  $|y - Y|$  与距离  $\delta$  的区别仅是一个常因数 (等于渐近线与  $x$  轴之间的夹角的余弦), 故在  $x \rightarrow +\infty$  时, 这差应随  $\delta$  而趋向于零:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax - b) = 0, \quad (3)$$

除以  $x$ , 就由此得:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = a; \quad (4)$$

此外, 等式 (3) 立刻给出

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = b. \quad (5)$$

因此, 要使直线 (2) 是所给曲线的渐近线, 条件 (4) 及 (5) 的成立是必要的, 相反的论证亦很易指出它们的充分性. 问题在此处已变成求 (4) 及 (5) 的极限了, 得到这些极限值, 直线方程 (2) 的系数也就确定了.

自然, 在  $x \rightarrow -\infty$  时, 需要另外再求其他的渐近线.

例如, 在双曲线 (1) 的场合, 设  $x \rightarrow +\infty$ , 就有

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \rightarrow \pm \frac{b}{a};$$



其次有  $y \mp \frac{b}{a}x = \pm \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \mp \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \rightarrow 0$ , 而我们就得出大家知道的渐近线:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

回到函数的作图问题, 我们在前一目所曾讲过的 1) 、2) 、3) 点之后, 再加上下列两点:

4) 确定使函数  $y = f(x)$  成为无穷 (附有符号) 的  $x$  值, 并作出对应的铅直渐近线;

5) 求出图像的水平渐近线及斜渐近线 (若区间的两方都趋于无穷, 就要各别地求在  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时的渐近线).

再讨论一些例题.

149. 例题

3) 回到函数

$$y = (x + 2)^2(x - 1)^3,$$

在 136, 1) 内我们已求出它的极值. 这函数在  $-\infty < x < +\infty$  时永远为连续. 在  $x \rightarrow \pm\infty$  时, 不仅  $y$  趋向于  $\infty$ , 就是  $\frac{y}{x}$  亦趋向于  $\infty$ , 故无渐近线.

再考察二阶导数

$$y'' = 2(x - 1)(10x^2 + 16x + 1).$$

它在  $x = 1, -0.07, -1.53$  时等于零, 并且在这些点处变号 (有拐点).

列成表:

$x$	-2	-1.53	-0.8	-0.07	0	1
$y$	0	-3.58	-8.40	-4.56	-4	0
	$(y' = 0)$ 极大点	拐点	$(y' = 0)$ 极小点	拐点		$(y' = 0)$ 拐点

图像已画在图 57 中.

4) 设

$$y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$$

[参阅 136, 3) ]. 函数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内永远为连续. 把它表示为

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} + (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}},$$

易证在  $x \rightarrow \pm\infty$  时  $y \rightarrow 0$ , 因此这函数的图像以  $x$  轴为渐近线 (向右及向左都是). 二阶导数没有零点; 拐点只能在导数  $y' = \infty$  的点处. 由于函数是偶函数, 故关于  $y$  轴为对称.

列成表:

$x$	$-\infty$	-1	-0.71	0	0.71	1	$+\infty$
$y$	0	1	1.59	1	1.59	1	0
		$y' = +\infty$	$(y' = 0)$ 极大点	$(y' = \infty)$ 极小点	$(y' = 0)$ 极大点	$y' = -\infty$	



图像画在图 59 中.

5)  $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$  [参阅 137].

它在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的, 在  $x \rightarrow \pm\infty$  时, 显然  $\lim y = 1$ . 故有水平渐近线. 二阶导数

$$y'' = -10 \frac{(x + 1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

在  $x = -1, 2 + \sqrt{3} \doteq 3.73, 2 - \sqrt{3} \doteq 0.27$  时等于零, 并在这些点处变号 (有拐点).

列成表

$x$	$-\infty$	-10	-5	-1	-0.41	0	0.27
$y$	1	1.55	2.15	6	7.04	6	4.40
				拐点	$(y' = 0)$ 极大点		拐点

$x$	2	2.41	3	3.73	5	10	$+\infty$
$y$	0	-0.03	0	0.08	0.23	0.55	1
		$(y' = 0)$ 极小点		拐点			

图像在图 61 中. 附图的尺度太小, 以致不很清晰, 特别是当  $x$  在由 2 至 5 的区间内变动时为尤甚; 故这部分的图像, 另用放大的尺度表示着.

现在再举一些新的例题.

6)  $y = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$ .

这函数在  $x = -1$  时成为无穷  $(-\infty)$ , 故有铅直渐近线  $x = -1$ . 又因在  $x \rightarrow \pm\infty$  时有

$$\frac{y}{x} \rightarrow 1, \quad y - x = \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} \rightarrow -5,$$

故曲线有斜渐近线:  $y = x - 5$ .

求出导数:

$$y' = \frac{(x - 1)^2(x + 5)}{(x + 1)^3}, \quad y'' = \frac{24(x - 1)}{(x + 1)^4}.$$

前一式在  $x = 1$  时 (拐点) 及在  $x = -5$  时 (极大点) 等于零; 没有其他拐点. 依下表:

$x$	-10	-5	-3	-1	0	1	5	10
$y$	-16.4	-13.5	-16	$-\infty$	-1	0	1.78	6.05
		$(y' = 0)$ 极大点				$(y' = 0)$ 拐点		

作图, 并作出渐近线 (图 79).

7)  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - a}} (a > 0)$ .

依这公式, 函数仅只在  $x \leq 0$  或  $x > a$  时有实值; 在  $x = a$  时函数成为无穷.

设想  $x > a$  在  $x \rightarrow +\infty$  时有

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{x - a}} \rightarrow 1, \quad y - x = \frac{x}{\sqrt{x - a}} \times \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x - a}} \rightarrow \frac{a}{2},$$

于是, 在正  $x$  轴的一方曲线接近于渐近线  $y = x + \frac{a}{2}$ . 仿此, 在负  $x$  轴的一方得另一渐近线  $y = -x - \frac{a}{2}$ .



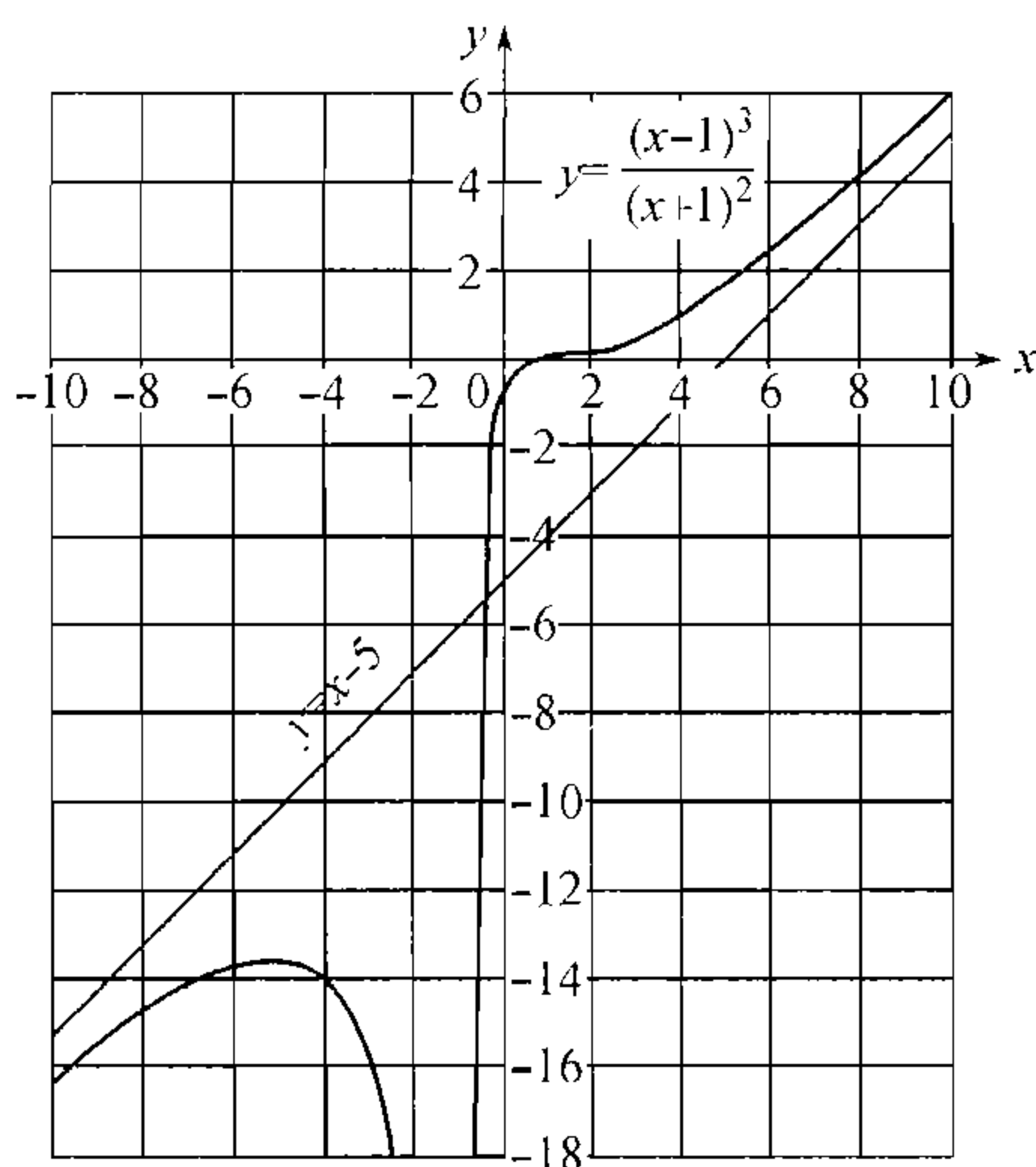


图 79

导数

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{x^2 \left( x - \frac{3}{2}a \right)}{(x-a)^2} = \left( x - \frac{3}{2}a \right) \sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}}$$

在  $x = \frac{3}{2}a$  时等于零, 符号由负变正 (有极小值). 它在  $x = 0$  时亦等于零, 但这点是函数的变动区间之一  $(-\infty, 0]$  的端点, 在这里是谈不上极值的.

二阶导数

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \frac{\frac{3}{4}a^2x}{(x-a)^3};$$

在  $x < 0$  时以及在  $x > a$  时它都  $> 0$ , 所以曲线永远是向上凹的. 再算出与  $x = \frac{3}{2}a$  对应的纵标  $y = 2.60a$ , 我们就已经有足够的数据来作图了 (图 80).

$$8) y = \sqrt{\frac{a^3 - x^3}{3x}} (a > 0).$$

变量  $x$  只能在区间  $(0, a)$  内变动; 在  $x = 0$  时函数成为无穷.

导数

$$y' = -\frac{a^3 + 2x^3}{6x^2y} = -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

永远是负的, 因此函数总是减小着. 在  $x = a$  时导数  $y' = -\infty$ .

二阶导数

$$y'' = \frac{1}{2}(y - xy') \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right)$$

只在  $y = x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \doteq 0.63a$  时等于零且变号 (有拐点); 这时, 显然  $y' = -1$ . 图像表示在图 81 中.



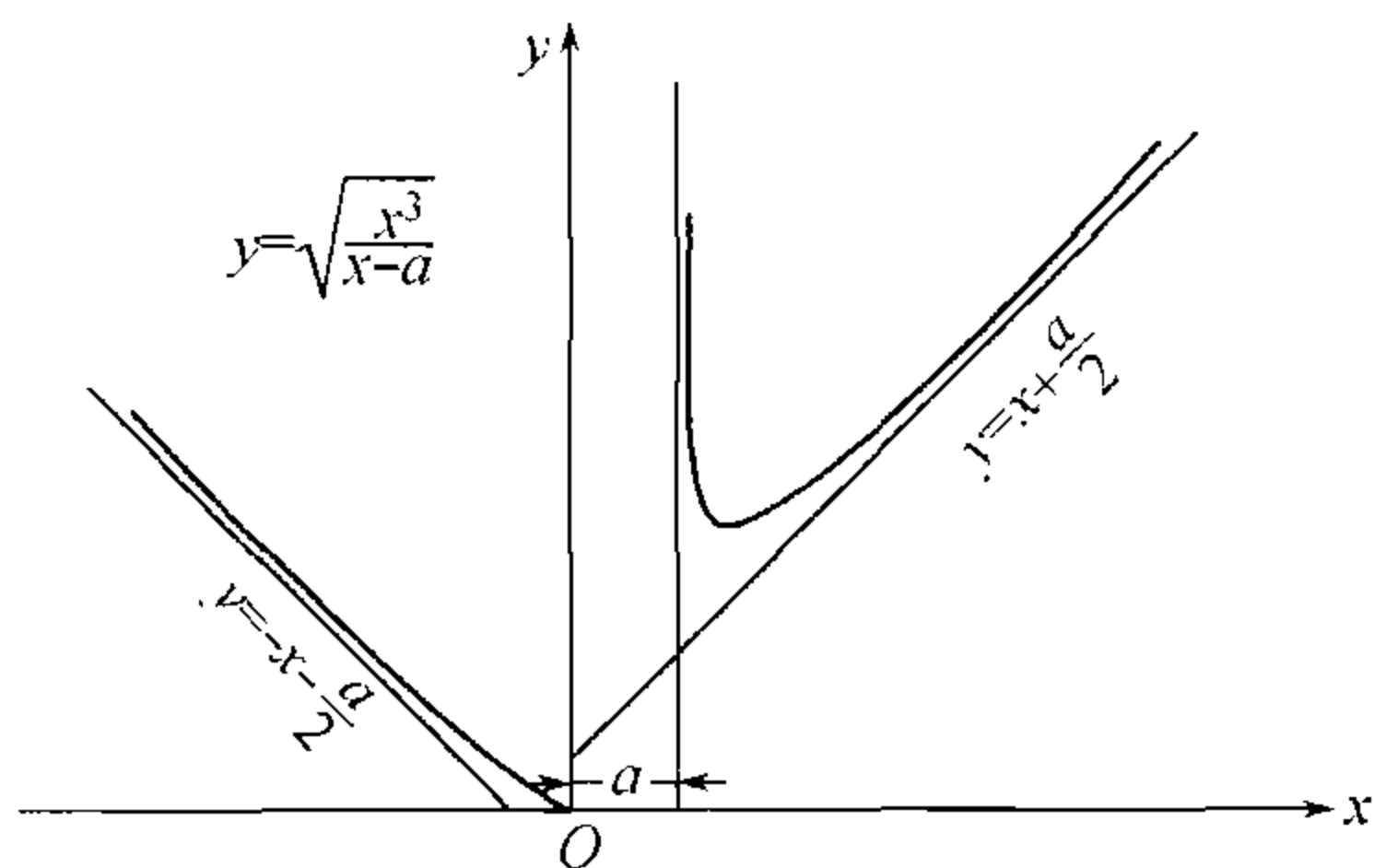


图 80

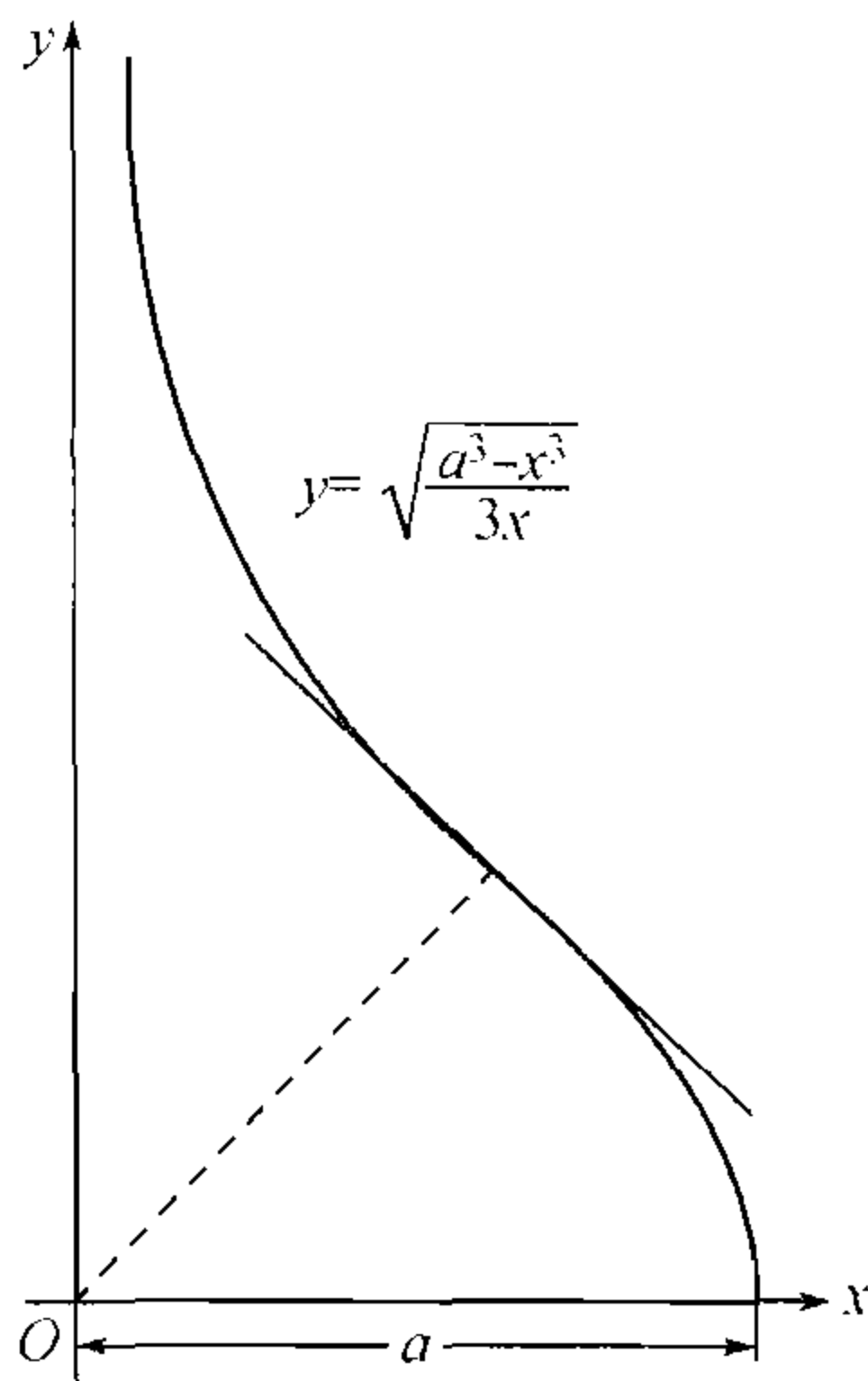


图 81

#### §4. 不定式的定值法

**150.  $\frac{0}{0}$  型不定式** 我们现在应用导数概念及前一章第三、五节中所已证明的定理来定不定式的值. 下面的定理 1 ~ 4 基本上应归功于洛必达 (G.F.de l'Hospitale) 及伯努利 (Joh. Bernoulli). 在定理内所说的法则, 通常称为洛必达法则. 我们先研究基本情形:  $\frac{0}{0}$  型不定式, 即研究两个趋向于零的函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的比式的极限问题 (在一定的极限过程  $x \rightarrow a$  之下).

从直接应用导数概念的简单定理开始.

**定理 1** 设: 1) 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  内有定义, 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 3) 存在有限导数  $f'(a)$  及  $g'(a)$  而且  $g'(a) \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

**证明** 有限导数  $f'(a)$  及  $g'(a)$  的存在保证了函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在点  $a$  处的连续性. 根据 2) 有:  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  及  $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . 由于  $g'(a) \neq 0$ , 依 109 的引理, 在充分接近于  $a$  的  $x$  值时  $g(x) \neq 0$ ; 我们若限于讨论这些  $x$  值时, 则比式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  是有意义的.



现在这比式可以改写成

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}.$$

使  $x \rightarrow a$  而求上式两边的极限, 就得到所需要的结果.

例题 1) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}.$$

依定理, 它等于二函数的导数在  $x = 0$  时的比值

$$\left. \frac{e^x + e^{-x}}{1 - \frac{1}{e - x}} \right|_{x=0} = \frac{2}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2e}{e - 1}.$$

2) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}.$$

它等于

$$\left. \frac{\frac{1 - 2x^3}{\sqrt{2x - x^4}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}}\right|_{x=1} = \frac{16}{9}.$$

当  $f'(a) = 0, g'(a) = 0$  同时成立的情形, 可以应用下面的定理 1 的推广, 但需要考察高阶导数:

**定理 2** 设: 1) 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  内有定义, 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 3) 在区间  $[a, b]$  内存在直至  $(n - 1)$  阶为止的各阶有限导数  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ ,  $g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-1)}(x)$ , 4) 在  $x = a$  时它们全部等于 0, 5) 存在有限导数  $f^{(n)}(a)$  及  $g^{(n)}(a)$  而且  $g^{(n)}(a) \neq 0$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

**证明** 在区间  $[a, x] (a < x \leq b)$  内对于每一个函数  $f(x), g(x)$  应用余项为佩亚诺式的泰勒公式 [参阅 124, (10a)]. 由于 2) 及 4), 得

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{n!} (x - a)^n,$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(a) + \beta}{n!} (x - a)^n,$$



在  $x \rightarrow a$  时, 式中的  $\alpha$  及  $\beta \rightarrow 0$ .

由于条件  $g^{(n)}(a) \neq 0$ , 第二个等式首先指出  $g(x)$  异于零, 至少对于充分接近于  $a$  的  $x$  值是如此. 若限于在这些  $x$  值的范围内, 则比式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  是有意义的.

由前两等式立刻得出所需要的结果:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{g^{(n)}(a) + \beta} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

例题 3) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

在此处有:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - e^{-x} - 2x, & f(0) &= 0; & g(x) &= x - \sin x, & g(0) &= 0; \\ f'(x) &= e^x + e^{-x} - 2, & f'(0) &= 0; & g'(x) &= 1 - \cos x, & g'(0) &= 0; \\ f''(x) &= e^x - e^{-x}, & f''(0) &= 0; & g''(x) &= \sin x, & g''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= e^x + e^{-x}, & f'''(0) &= 2; & g'''(x) &= \cos x, & g'''(0) &= 1. \end{aligned}$$

因此, 所求的极限等于 2.

虽然在大多数的场合, 对于  $\frac{0}{0}$  型不定式的定值法, 用已证明的定理已经够了, 但在实用上, 下面的定理通常更为方便.

**定理 3** 设: 1) 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $(a, b]$  内有定义, 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 3) 在区间  $(a, b]$  内存在有限导数  $f'(x)$  及  $g'(x)$  而且  $g'(x) \neq 0$ , 最后, 4) 存在 (有穷或无穷) 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

则亦必有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

**证明** 补充函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的定义, 令它们在  $x = a$  时等于零;  $f(a) = g(a) = 0$ <sup>①</sup>. 那时这些函数就在整个闭区间  $[a, b]$  内连续了; 因为它们在  $a$  点的数值与  $x \rightarrow a$  时的极限相重合 [由于 2)], 而在其余点处的连续性可由有限导数的存在 [参阅 3)] 推得. 应用柯西定理 [114], 得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中  $a < c < x$ .  $g(x) \neq 0$  (即  $g(x) \neq g(a)$ ) 可以由  $g'(x) \neq 0$  推出, 这在柯西公式的证明中已经说过了.

<sup>①</sup>当然, 可以简单地预先假定函数在  $x = a$  时亦有定义而且连续; 但是照本定理这样来叙述已知条件, 在应用上有时是更为方便的 (例如参阅定理 3\*).



当  $x \rightarrow a$  时, 显然亦有  $c \rightarrow a$ , 于是根据 4),

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

这就是所要证明的.

这样, 所证明的定理就把函数之比的极限变成导数之比的极限, 假若后者存在的话. 求导数之比的极限往往比较简单些, 而且可以用初等的方法来实现.

**例题 4)** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

把导数之比逐步化简:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x};$$

在  $x \rightarrow 0$  时它显然趋向于 2. 根据定理, 这就是所求的极限.

在这场合定理 1 是不能使用的, 因为在  $x = 0$  时分子分母的导数两者都等于 0. 至于定理 2 呢, 虽然用着它问题是能解决了, 但需求出所给二函数的三个逐次导数 (这点是很易证实的).

请读者注意, 虽然在此处导数之比仍为  $\frac{0}{0}$  型不定式, 但这不定式显然可由初等变换而定其值. 在其他的场合, 可能需要重复地应用这定理. 有必要着重指出, 在这时可用各种方法把所得的式子化简, 如约去公因式, 利用已知的极限等等 (若应用定理 2, 就全都不能这样做). 在下面的例题内接连三次应用定理 3; 在第一次以后我们约去  $e^x$ , 在第二次以后我们弃去分母中的因式  $e^x$  (因为它趋向于 1). 计算就简化了.

**例题 5)**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{2x} + e^{2x} + xe^x + e^x - 4e^{2x} + 2e^x}{3(e^x - 1)^2 \cdot e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x - 3e^x + 3 + x}{3(e^x - 1)^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x + 2e^x - 3e^x + 1}{2(e^x - 1)e^x} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + 2xe^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x + e^x}{e^x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

因为右端的第一个式趋向于  $e$ , 所以只要研究第二因式就够了. 接连二次应用定理 3, 求出它的极限等于  $-\frac{1}{2}$ .

答案:  $-\frac{e}{2}$ .

很易把定理 3 推广到变元趋向于无穷极限:  $a = \pm\infty$  的情形 (这对于定理 1 及 2 自然是做不到的). 就是, 成立:



**定理 3\*** 设: 1) 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在区间  $[c, +\infty)$  内有定义, 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 3) 在区间  $[c, +\infty)$  内存在有限导数  $f'(x)$  及  $g'(x)$ , 而且  $g'(x) \neq 0$  最后, 4) 存在 (有限或无穷) 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

则亦必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

**证明** 依公式  $x = \frac{1}{t}$ ,  $t = \frac{1}{x}$  变换  $x$ . 那么, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $t \rightarrow 0$ , 反之亦然. 由 2), 有

$$\lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

而根据 4),

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

把定理 3 应用于新变量  $t$  的函数  $f\left(\frac{1}{t}\right)$  及  $g\left(\frac{1}{t}\right)$ , 就得出

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K^{①},$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \text{ 此即需证者.}$$

这反以是一回事

**附注** 有时在求上述类型的不定式的值时, 形式上可以不用上述的定理, 而利用函数依泰勒公式的展开式 [124~125]. 今设  $x \rightarrow 0$  (永远可以使问题变成这种情形). 若使用这个展开式后在分子及分母内能顺利地选出主项:

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad g(x) = bx^m + o(x^m),$$

则分式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  的极限立刻就很清楚: 看  $n$  是大于、等于或小于  $m$ , 便知道它是等于零、 $\frac{a}{b}$  或  $\pm\infty$  [参阅 62, 63] ②.

①求函数  $f\left(\frac{1}{t}\right)$  及  $g\left(\frac{1}{t}\right)$  关于  $t$  的导数时, 把它们看做是  $t$  的复合函数.

②在最后一情形,  $\pm\infty$  的符号不难由  $a$  和  $b$  的符号, 以及  $x$  的符号 (当差  $m-n$  是奇数时) 来判断.



如, 在例题 1) 内, 把函数  $e^x, e^{-x}$  及  $\ln(e-x) - 1 = \ln\left(1 - \frac{x}{e}\right)$  换以它们的展开式的开首几项:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x+\cdots) - (1-x+\cdots)}{\left(-\frac{x}{e} + \cdots\right) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cdots}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)x + \cdots} = \frac{2e}{e-1}.$$

仿此, 在例题 4) 内, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) - x}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \cdots}{\frac{x^3}{6} + \cdots} = 2.$$

建议读者用这方法解例题 3) 及 5), 作为习题.

**151.  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式** 现在再来考察  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 就是研究 (在  $x \rightarrow a$  时) 趋向于无穷的函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的比式的极限.

今将证明, 在这情形仍可应用洛必达法则: 下面的定理是定理 3 的简单的类推.

**定理 4** 设: 1) 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在区间  $(a, b]$  内有定义, 2)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = +\infty$ , 3) 在区间  $(a, b]$  内存在有限导数  $f'(x)$  及  $g'(x)$ , 而且  $g'(x) \neq 0$ , 最后, 4) 存在 (有限或无穷) 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

则亦必有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

**证明** 首先考察  $K$  为有限的情形.

因为导数  $g'(x)$  并不等于零, 故依达布定理 [110] 它的符号不变. 例如设  $g'(x) < 0$ , 于是函数  $g(x)$  随着  $x$  的渐减而单调增大, 并且在  $x \rightarrow a$  时趋向于  $+\infty$ . 故可以当作恒有  $g(x) > 0$ .

给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 根据条件 4), 必能求出这样的  $\eta > 0$ , 在  $a < x < a + \eta$  时有

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

为了简便, 令  $a + \eta = x_0$  而  $x$  在  $a$  与  $x_0$  之间. 把柯西公式应用于区间  $[x, x_0]$  ①:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

①与定理 3 的证明的重大区别就在于此: 在这里不能把柯西定理用于区间  $[a, x]$ , 因为不管怎样在点  $a$  处来定义函数  $f(x)$  及  $g(x)$ , 由于 2) 总不能得出在该点为连续的函数.



此处  $x < c < x_0$ , 因此,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

现在写出恒等式 (它很易直接验证):

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - K \cdot g(x_0)}{g(x)} + \left[ 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right],$$

由此

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| \leq \left| \frac{f(x_0) - K \cdot g(x_0)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right|.$$

根据 (1), 右端第二项在  $x < x_0 = a + \eta$  时小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ . 又因在  $x \rightarrow a$  时  $g(x) \rightarrow +\infty$  故第一项在这时趋向于零, 且能找出这样的  $\delta > 0$  (可以当作  $\delta < \eta$ ), 使当  $a < x < a + \delta$  时第一项亦变成小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ . 于是在上述的  $x$  值时就有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon,$$

这就证明了所需要的命题①.

当  $K = +\infty$  的情形 (当然  $f'(x) \neq 0$ , 至少在  $a$  的近处是如此), 就有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0, \text{ 于是亦有 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

由此, 最后有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

因为 (至少在  $a$  的附近) 显然  $f(x)$  和  $g(x)$  都大于零②.

我们注意, 这个证明不需多大改变就能应用到  $a = -\infty$  的情形. 完全同样, 定理也能对区间  $[b, a)$  ( $b < a$ ) 来证明, 而且  $a$  可以是有限的, 也可以是  $+\infty$ . 所以, 定理 4 很容易推广到变元有无穷极限的情形.

作为例题, 很易得出我们所已经知道的极限:

7)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0 \quad (\text{若 } \mu > 0).$$

还有:

8)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \cdot \ln a} \quad (a > 1, \mu > 0).$$

①要着重指出, 在我们的论证中, 实际上并未利用  $\lim f(x) = +\infty$  这一假定 [参阅 33 内的斯托尔茨定理的证明].

②在定理的假设下,  $K = -\infty$  的情形是不可能的.



若  $\mu > 1$ , 则右端仍得  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式; 但继续这一步骤并重复应用定理 4, 最后在分子上必可得出带有负 (或零) 指数的幂. 因此, 在任何情形

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

关于定理 3(3\*) 及 4 再作一个总的附注. 在这此定理内, 都是先假定导数之比的极限存在然后来求函数之比的极限. 但这些定理是不准倒过来用的, 当前一极限不存在时后一极限仍可能存在.

例如, 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

存在, 可是导数之比等于  $1 + \cos x$ , 它在  $x \rightarrow +\infty$  时却并无极限.

**152. 其他型的不定式** 前面的定理都是关于  $\frac{0}{0}$  型及  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式的.

若有  $0 \cdot \infty$  型的不定式, 则可以把它变成  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 而后再应用洛必达法则. 设

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$$

就有

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

其中的第二式在  $x \rightarrow a$  时是  $\frac{0}{0}$  型不定式, 第三式是  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式.

**例题 9)**

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\mu}{-\mu} = 0$$

(我们算作  $\mu > 0$ ).

$\infty - \infty$  型的不定式亦恒能变成  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型. 设有式子  $f(x) - g(x)$ , 而且

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$$

则可以进行下面的变形, 把这式子变成  $\frac{0}{0}$  型不定式:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}.$$

而且为了达到这目的事实上往往还可以简单些.



例题 10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cdot \cos^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x};$$

但

$$\frac{\sin^2 x - x^2 \cdot \cos^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2 \cdot \sin x};$$

前一因式的极限可以用初等的方法求出:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = 2,$$

对第二因式应用定理 3;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2 \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

这样, 所求的极限就等于  $\frac{2}{3}$ .

对于型如  $1^\infty, 0^0, \infty^0$  的不定式, 可以预先把这些表达式取对数.

设  $y = [f(x)]^{g(x)}$ ; 则  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ .  $\ln y$  的极限就是已研究过的  $0 \cdot \infty$  型的不定式. 假使用上述的任一方法能求出  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$ , 若它等于有限数  $k, +\infty$  或  $-\infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} y$  就各为  $e^k, +\infty$  或  $0$ .

例题 11) 设

$$y = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}},$$

需要在  $x \rightarrow 0$  时求  $\lim y$  ( $1^\infty$  型不定式).

设若  $x > 0$  (由于  $y$  是偶函数, 故可限于讨论这个情形), 则

$$\ln y = \frac{\ln \sin x - \ln x}{1 - \cos x}.$$

应用定理 3 (并利用前一例题中已得的结果)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{3},$$

由此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

例题 12)

$$y = \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

在  $x \rightarrow +\infty$  时这表达式表示  $0^0$  型不定式. 我们有

$$\ln y = \frac{\ln \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}{\ln x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right).$$



依洛必达法则:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1,\end{aligned}$$

于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{e}$ .

## §5. 方程的近似解

**153. 导言** 现在将研究求已给函数  $f(x)$  的零点或根, 即方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

的实根的问题. 而且在解决这问题时, 我们将先假定, 所求的根  $\xi$  是孤立的, 即必能求出含有这根的区间  $[a, b]$ :

$$a < \xi < b,$$

在这区间内不再其他的根.

再次, 若在区间的两端点处  $f(x)$  有异号的函数值  $f(a)$  及  $f(b)$ , 则正如在 [81] 内谈到布尔查诺—柯西第一定理的应用时所已阐明的, 可以逐步分割含根区间使成许多部分, 并确定函数  $f(x)$  在分点处的符号, 这样就可以任意地缩小含根区间而实现了根的近似计算. 然而这方法, 尽管它在原理上是简单的, 在实用上却往往是不合用的, 因为这需要太多的计算. 在本节内将使读者熟悉计算方程 (1) 的 (孤立) 根的近似值的最简方法, 它是更有系统而且能更快地达到目的. 在这里我们仍将利用微分学的基本概念与方法.

我们永远要假定下列条件成立:

- 1) 函数  $f(x)$  连同它的导数  $f'(x)$  及  $f''(x)$  在区间  $[a, b]$  内都是连续的;
- 2) 在区间的两端点处的函数值  $f(a)$  及  $f(b)$  有异号:  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
- 3) 两种导数  $f'(x)$  及  $f''(x)$  在区间  $[a, b]$  内都各自保持着一定的符号.

由函数  $f(x)$  的连续性及条件 2), 推得在  $a$  与  $b$  之间含有方程 (1) 的根  $\xi$  [80]. 因为导数  $f'(x)$  保持着一定的符号 [3]), 所以  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内渐增或渐减, 因此, 只有一次等于 0; 故根  $\xi$  是孤立的.

条件 3) 在几何上指出, 曲线  $y = f(x)$  不仅朝一个方向伸展——总是向上或总是向下, 看  $f'(x)$  的符号而定 [132]——而且还永远向下凸或向上凸 (狭义的), 看  $f''(x)$  的符号而定 [143]. 在图 82 上画着四种可能的情形, 对应于  $f'(x)$  及  $f''(x)$  的两种符号的不同结合.

代数学内已证明, 在计算代数方程的 (实) 根时, 总可以设法使条件 1), 2), 3) 成立, 因此这些条件在原则上并不会限制下述方法的效用. 至于超越 (非代数的) 方程就不能这样说, 然而在实用上, 我们所设立的限制很少有妨碍, 因为在绝大多数的场合, 这些条件总是满足的.



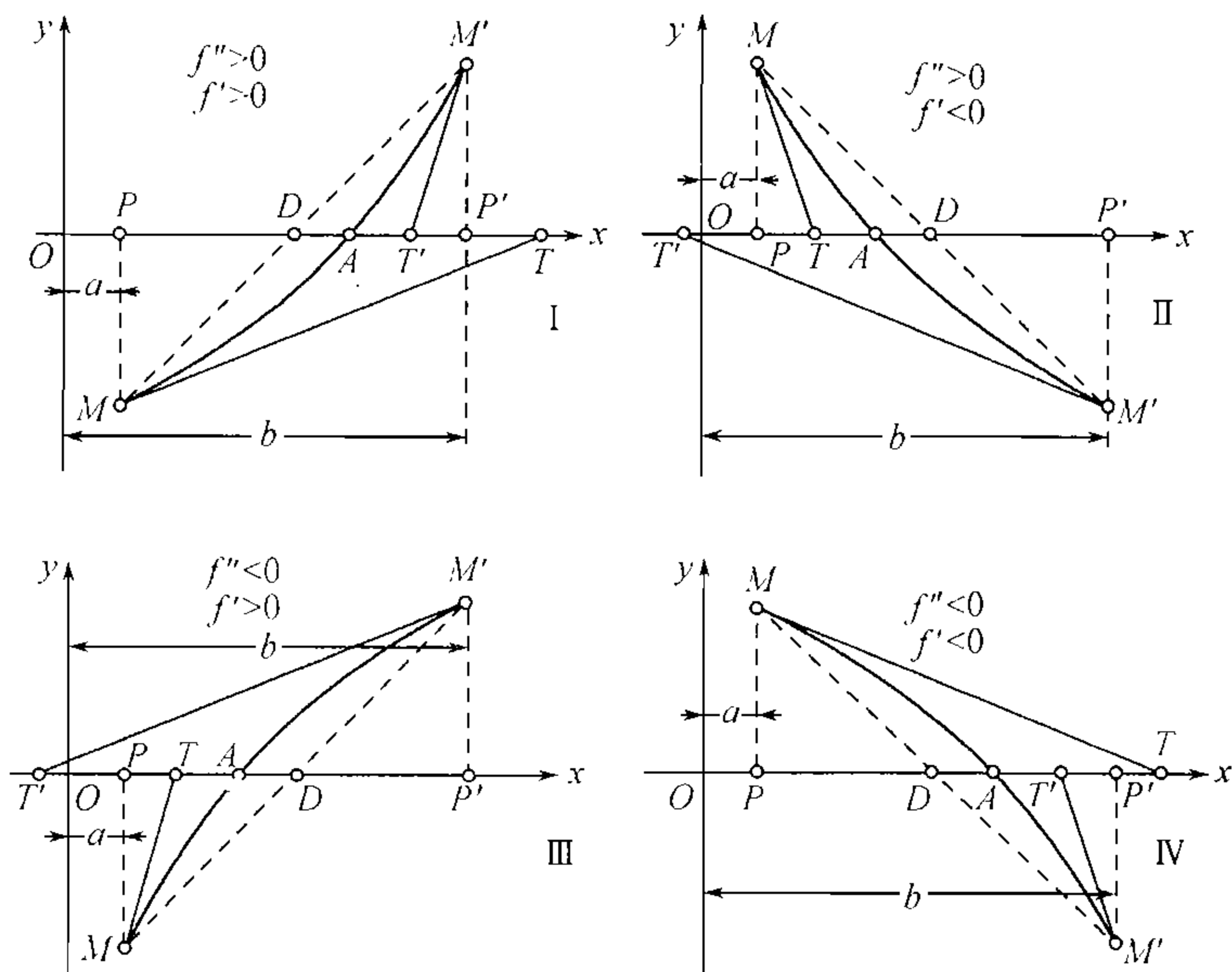


图 82

**154. 比例法则 (弦线法)** 若区间  $[a, b]$  充分小, 则在某种近似程度之下, 可以当作 —— 当  $x$  在它的范围内变动时 —— 函数  $f(x)$  的增量与变元的增量成比例, 用  $\xi$  表示函数的根, 就有

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{f(b) - f(a)} \doteq \frac{\xi - a}{b - a},$$

由此, 因  $f(\xi) = 0$  即得

$$\xi \doteq a - \frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

这样, 在此处可用数  $x_1$  作为根的近似值,

$$x_1 = a - \frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (2)$$

这式子显然又可以表示为这样的形式:

$$x_1 = b - \frac{(b - a) \cdot f(b)}{f(b) - f(a)}. \quad (2^*)$$

上述的求根的近似值的法则也称为比例法则<sup>①</sup>. 它可以有简单的几何说明. 用弦  $MM'$  代换曲线弧  $MM'$  (图 82). 弦的方程可以写成

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (3)$$

我们的法则本质上就变成不去确定曲线与  $x$  轴的交点  $A$ , 而去确定弦与  $x$  轴的交点  $D$ . 事实上, 令 (3) 内的  $y = 0$ , 则解出点  $D$  的横标  $x_1$ , 刚好符合于式子 (2).

<sup>①</sup>在从前, 它被称为“错位法则”, 因为它所根据的假定, 严格说来, 是并不符合于实际的.



因这缘故, 比例法则亦称为弦线法.

今转而探究点  $x_1$  与根  $\xi$  的相互位置. 显然, 点  $x_1$  位于  $a$  和  $b$  之间, 但是在  $\xi$  的哪一边呢? 因为在情形 I 和 II (III 和 IV) 我们遇到的是向下 (向上) 凸的函数, 所以曲线  $MM'$  落在弦  $MM'$  的下面 (上面), 即

$$f(x) < (>) f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad (a < x < b). \quad (4)$$

令这里的  $x = x_1$ , 直接得出

$$f(x_1) < (>) 0,$$

所以  $f(x_1)$  的符号总是和  $f''(x)$  的符号相反. 由此, 我们终于断定, 在情形 I 和 IV, 数值  $x_1$  落在  $a$  和  $\xi$  之间, 而在情形 II 和 III, 则在  $\xi$  和  $b$  之间.

以后讨论以情形 I 及 IV 为限, 再把我们的法则应用于区间  $[x_1, b]$ ; 把 (2) 内的  $a$  换成  $x_1$ , 则得根  $\xi$  的新的近似值:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) \cdot f(x_1)}{f(b) - f(x_1)},$$

按照已证明的论点, 它含在  $x_1$  与  $\xi$  之间. 这一步骤, 可以不断地继续下去, 于是得到总在渐增的近似值的序列

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi.$$

这时, 任何两个相继的数值  $x_n$  与  $x_{n+1}$ , 用类似于 (2) 的公式联结着:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) \cdot f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \quad (5)$$

现证明, 随着  $n$  的渐增,  $x_n \rightarrow \xi$ . 事实上, 单调渐增的但是有界的 (例如, 以数  $\xi$  为上界) 变量  $x_n$  应当趋向于某一有限极限  $a \leq \xi$ . 若对等式 (5) 取极限, 并利用函数  $f(x)$  的连续性, 则得

$$\frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = 0,$$

由此,  $f(a) = 0$ . 因为方程 (1) 在区间  $[a, b]$  内除去  $\xi$  以外再没有别的根, 故必  $a = \xi$ ①.

图 83 说明依次作出的各弦与  $x$  轴的交点  $D_1, D_2, \cdots$  向所求点  $A$  逐渐地接近.

很易理解, 在情形 II 及 III 时重复应用这法则, 会导出渐减的近似值的序列

$$b > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots > \xi,$$

这些近似值从右方趋向于根  $\xi$ .

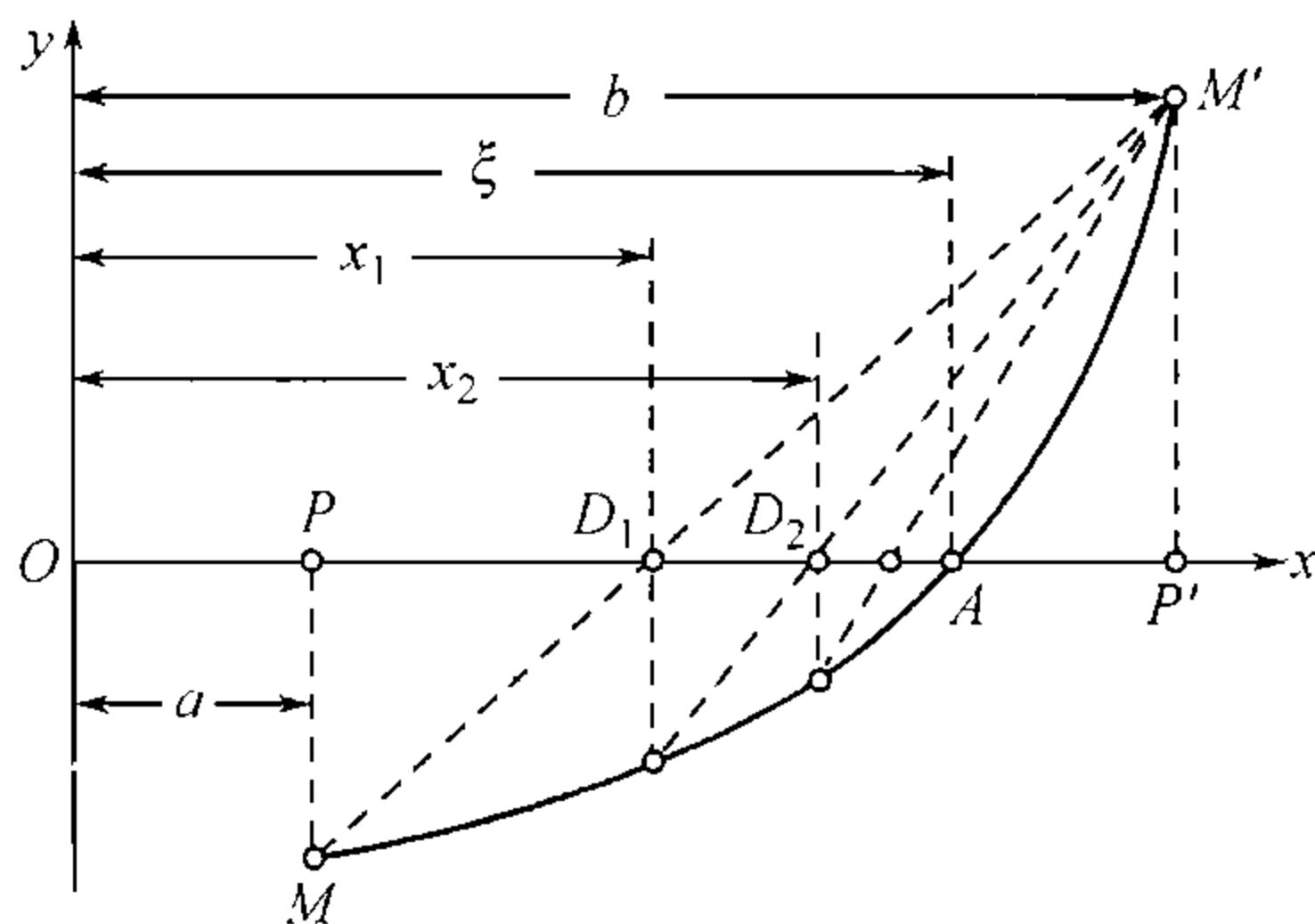


图 83

①不要关于二阶导数的假定, 亦可以证明  $x_n \rightarrow \xi$ , 但那时点  $x_n$  就可能会从根的一方跳到另一方去.



这样, 在一切情形之下, 把上述的法则应用了足够的次数以后, 可以计算根  $\xi$  达到任意的准确度. 可是现在还有一个未解决的问题, 怎样估计已算出的近似值  $x_n$  的准确度.

要解决这问题, 可把有限增量公式 [112] 应用于差  $f(x_n) - f(\xi)$ :

$$f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) \cdot f'(c) \quad (\xi \leq c \leq x_n).$$

由此

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)};$$

若用  $m$  表示  $|f'(x)|$  在所考察的区间内的最小值 (它可以预先算出而且以后不必再算了), 则得估计:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}. \quad (6)$$

这样, 由  $f(x_n)$  的大小, 就可以判断  $x_n$  与根的接近程度了!

**例题 方程**

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

有一根在 3 与 4 之间, 因为若用  $f(x)$  表示式子的左端, 就有

$$f(3) = -10 < 0, \quad f(4) = 9 > 0.$$

兹规定要算出这根使准确度达到 0.01. 在区间  $[3, 4]$  内, 两种导数

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \quad \text{及} \quad f''(x) = 6x - 4$$

都保持着正号 (情形 I); 一阶导数在这区间内的最小值是  $m = 11$ . 就有:

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f(4) - f(3)} = 3 + \frac{10}{19} = 3 + 0.52 \dots;$$

四舍五入, 令  $x_1 = 3.52$ . 因为  $f(3.52) = -2.246\ 592$ , 故依不等式 (6), 还没有达到要求的准确度. 继续计算:

$$x_2 = 3.52 - \frac{0.48 \cdot f(3.52)}{f(4) - f(3.52)} = 3.52 + \frac{1.078\ 364\ 16}{11.246\ 592} = 3.52 + 0.09 \dots$$

或四舍五入,  $x_2 = 3.61$ . 算出  $f(3.61) = -0.458\ 319$  并使用不等式 (6), 仍旧看出还没有达到日的. 最后,

$$x_3 = 3.61 - \frac{0.39 \cdot f(3.61)}{f(4) - f(3.61)} = 3.61 + \frac{0.178\ 744\ 41}{9.458\ 319} = 3.61 + 0.018\ 8 \dots$$

用四舍五入法凑足小数第二位令  $x_3 = 3.63$ . 因为我们是在“向根的一侧”凑足小数第二位, 所以  $x_3$  可能会跳到这根的右边去; 但现在并未发生这种情形, 这可由符号上看到, 因为  $f(3.63) = -0.041\ 653$ . 在这一次, 依不等式 (6),

$$|x_2 - \xi| = \xi - x_3 < \frac{0.041 \dots}{11} < 0.004.$$

这样,

$$3.630 < \xi < 3.634,$$



即  $\xi = 3.63_{+0.004}$ .

我们仅以这一例题为限, 因为像上述形式的弦线法, 效用还是很小的; 通常它总是与切线法联合使用, 我们现在就要讲到.

**155. 牛顿法则 (切线法)** 回到原来的关于函数  $f(x)$  的假定 [153]; 所求的函数的根在区间  $[a, b]$  内是孤立的;  $a < \xi < b$ . 从这区间的任一端点例如  $b$  出发, 写出余项为拉格朗日式的泰勒公式:

$$0 = f(\xi) = f(b) + f'(b) \cdot (\xi - b) + \frac{1}{2} f''(c) \cdot (\xi - b)^2 \quad (\xi < c < b). \quad (7)$$

弃去余项, 可以近似地令

$$f(b) + f'(b) \cdot (\xi - b) \doteq 0,$$

由此

$$\xi \doteq b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

由这种方法, 我们求得根  $\xi$  的近似值

$$x'_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (8)$$

这数值的求法, 亦可以用几何方法直觉地来说明. 考察曲线  $y = f(x)$  上横标为  $b$  的点  $M'$  处的切线. 它的方程是

$$y - f(b) = f'(b) \cdot (x - b).$$

在此处令  $y = 0$ , 求得切线与  $x$  轴的交点  $T'$  的横标  $x$ ; 恰好符合于 (8). 这就是说, 上法实质是用曲线弧  $MM'$  的一端点处的切线来作为弧的近似代换 (参阅图 82).

这法则定名为**牛顿法则**. 亦称为**切线法**.

可是发生这样一个问题, 由公式 (8) 所求得的数值  $x'_1$  位于何处. 事实上, 就在图 82 中亦可以看出, 切线与  $x$  轴的交点甚至可以位于所考察的区间之外! 我们将证明, 若数值  $f(b)$  与  $f''(x)$  同号 (即在情形 I 及 IV), 则  $x'_1$  位于  $\xi$  与  $b$  之间.

实际上, 因为  $f(b)$  与  $f'(b)$  同号, 故由 (8) 立即知道  $x'_1 < b$ . 另一方面, 由 (7) 及 (8) 推得:

$$\xi - x'_1 = \xi - b + \frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(b)} (\xi - b)^2. \quad (9)$$

但我们已假定  $f''(x)$  与  $f'(x)$  同号, 因此  $\xi < x'_1$ . 结果:  $\xi < x'_1 < b$ .

类似地, 若从点  $a$  出发而在端点  $M$  (横标为  $a$ ) 处引曲线的切线, 则代替 (8) 可得近似值

$$x'_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (8^*)$$

关于依这一公式所算出的数值, 可以像上面一样地证明: 若数值  $f(a)$  与  $f''(x)$  同号 (即在情形 II 及 III), 则  $x'_1$  位于  $a$  与  $\xi$  之间.

这样对四种可能情形内的每一种, 都已指出, 应该从哪一端开始才可依牛顿法则得到根的近似值. 重复应用这法则, 在情形 I 及 IV 就得出渐减数值的序列:

$$b > x'_1 > x' > \cdots > x'_n > x'_{n+1} > \cdots > \xi,$$



而在情形 II 及 III, 就得出渐增数值的序列:

$$a < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_n < x'_{n+1} < \cdots < \xi,$$

而且根据前一数值来计算后一数值时总是依照公式

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}. \quad (10)$$

在此处也很易证明  $x'_n \rightarrow \xi$ . 单调而且有界的变量  $x'_n$ , 必有有限极限  $\beta$ ; 在 (10) 内取极限, 并应用函数  $f(x)$  及  $f'(x)$  两者的连续性, 就求出

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0, \text{ 由此 } f(\beta) = 0 \text{ 而 } \beta = \xi.$$

图 84 表明历次的切线与  $x$  轴的交点  $T_1, T_2, \cdots$  从一侧接近于点  $A$ .

这样, 重复应用牛顿法则, 亦可以计算根  $\xi$  达到任意的准确度. 这时, 已经算出的近似值的准确度仍可像上面那样由公式 (6) 来估计.

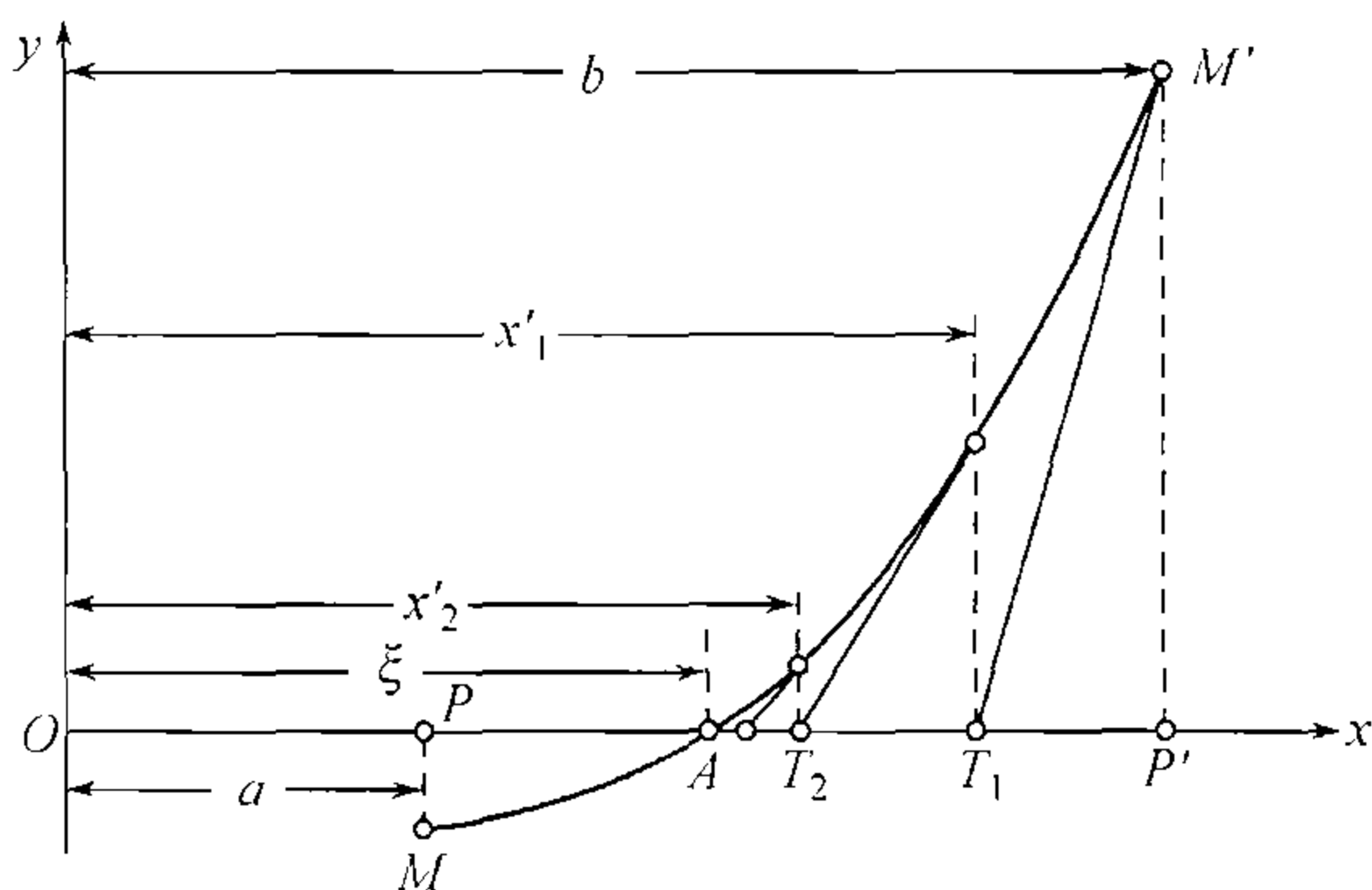


图 84

为了要表达出差  $x_n - \xi$  减小的速度, 我们再来导出另一估计式. 回到公式 (9): 把里面的  $b$  换成  $x'_n$  而  $x'_1$  换成  $x'_{n+1}$ :

$$x'_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} (x'_n - \xi)^2.$$

用  $M$  表示  $|f''(x)|$  在给定区间  $[a, b]$  内的最大值 (并保持  $m$  的原来意义), 由此, 现在很易得出:

$$|x'_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} \cdot |x'_n - \xi|^2. \quad (11)$$

因为右端有一个平方的因子, 这就保证着  $x'_n$  很快地接近于  $\xi$  (至少从某一项开始是如此), 这就使切线法成为根的近似算法中的一种最有效的方法.

不等式 (11) 还有一个作用. 若已算出的数值  $x'_n$  的准确度已经用例如不等式 (6) 估定, 那么不等式 (11) 就使我们预先估计出尚未算出的数值  $x'_{n+1}$  的准确度. 这对于解决应该取  $x'_{n+1}$  至小数点后第几位的问题时是有用处的.

现在举一些例题. 在解题时, 自然要利用手头一切代替笔算的辅助工具, 如: 乘方及开方表, 乘法表, 计算器, 对数表及三角函数对数表, 三角函数真数表, 角度及弧度换算表等等.



**156. 例题及习题** 在这一段内我们将专门使用切线法.

1) 计算方程

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

的根, 使准确度达到 0.01, 已知这根在区间 (3, 4) 内 [参阅 154].

我们有

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7, \quad f(3) = -10 < 0, \quad f(4) = +9 > 0,$$

在  $3 \leq x \leq 4$  时

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 > 0, \quad f''(x) = 6x - 4 > 0 \text{ (情形 I);}$$

$|f'(x)|$  的最小值是  $m = 11$ .

现在由给定区间的右端  $b = 4$  出发, 因为在这端点处函数  $f(x)$  与  $f''(x)$  有相同的符号. 依公式 (8)

$$x'_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} = 4 - 0.32 \cdots;$$

四舍五入, 令  $x'_1 = 4 - 0.3 = 3.7$ . 因为  $f(x'_1) = f(3.7) = 1.473$ , 故依不等式 (6),  $x'_1 - \xi < \frac{1.473}{11} < 0.14$ , 即还不够达到所需的准确度. 再求

$$x'_2 = 3.7 - \frac{f(3.7)}{f'(3.7)} = 3.7 - \frac{1.473}{22.27} = 3.7 - 0.066 \cdots;$$

令  $x'_2 = 3.7 - 0.066 = 3.634$ . 在这一次  $f(x'_2) = f(3.634) = 0.042 \cdots$ , 于是根据 (6),  $x'_2 - \xi < \frac{0.042}{11} < 0.004$ . 因此  $3.630 < \xi < 3.634$  而  $\xi = 3.63$  已达到所求的准确度.

(同是得出这一结果, 在 154 内用弦线法却需要做三次.)

2) 第二个例题是解方程

$$x \cdot \lg x = 1.$$

利用这机会, 给读者说明, 怎样可以用函数的图示法来预测方程的根的位置. 满足于方程

$$\lg x = \frac{1}{x}$$

的  $x$  值, 显然表示两曲线

$$y = \lg x \quad \text{及} \quad y = \frac{1}{x}$$

的交点的横标. 即使由它们的草图 (图 85) 也可立刻看出, 所求的根位于 2 与 3 之间. 这是容易用计算来检验的, 因为令  $f(x) = x \cdot \lg x - 1$ , 就有

$$f(2) = -0.397 \, 93 \cdots < 0,$$

$$f(3) = 0.431 \, 36 \cdots > 0.$$

现在要计算这根使准确度达到 0.000 1.

显然, 在  $2 \leq x \leq 3$  时,

$$f'(x) = \lg x + \lg e > 0,$$

$$f''(x) = \frac{\lg e}{x} > 0 \text{ (情形 I);}$$

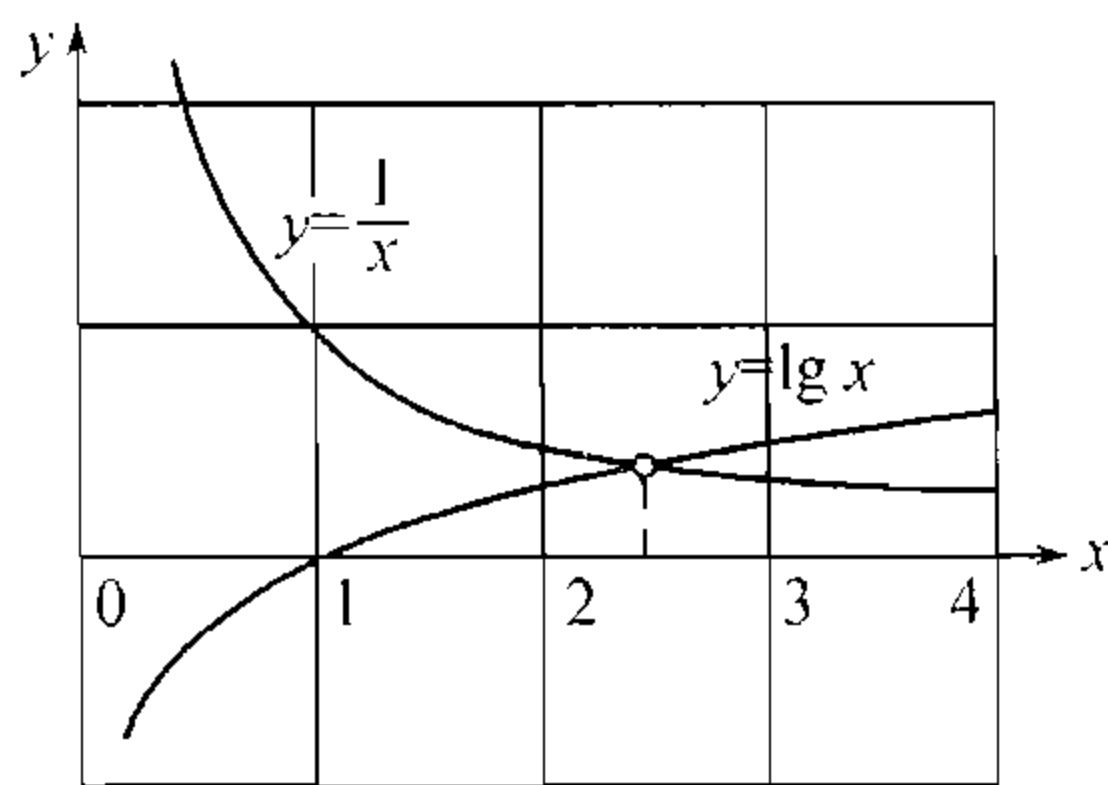


图 85



可以令  $m = 0.7$ .

因为  $f(3)$  刚好与  $f''(x)$  同号, 故依公式 (8)

$$x'_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{0.431\ 36\cdots}{0.911\ 41\cdots} = 3 - 0.473\cdots;$$

令  $x'_1 = 3 - 0.47 = 2.53$ . 就有  $f(x'_1) = f(2.53) = 0.019\ 894\cdots$ ,

于是  $x'_1 - \xi \leq \frac{0.019\ 9}{0.7} < 0.03$ . 再求

$$x'_2 = 2.53 - \frac{f(2.53)}{f'(2.53)} = 2.53 - \frac{0.019\ 894\cdots}{0.837\ 41\cdots} = 2.53 - 0.023\ 75\cdots;$$

取  $x'_2 = 2.53 - 0.023\ 7 = 2.506\ 3$ . 依不等式 (6) 估计误差:

$$\begin{aligned} f(2.506\ 3) &= 0.000\ 096\cdots \\ x'_2 - \xi &< \frac{0.000\ 096\cdots}{0.7} < 0.000\ 2, \end{aligned}$$

即  $2.506\ 1 < \xi < 2.506\ 3$ . 在这种情形, 就有已经达到所求准确度的根

$$\xi = 2.560\ 2_{\pm 0.000\ 1}.$$

(实际上  $2.506\ 2$  是  $\xi$  的盈近似值, 因为  $f(2.506\ 2) > 0$ .)

3) 回到方程

$$2^x = 4x,$$

在 81 内已经讲到过它. 我们在那里曾看出, 这方程的根位于 0 与 0.5 之间. 这种情况, 借助于函数  $y = 2^x$  及  $y = 4x$  的图像, 亦很容易看得出来. 在图 86 中很清楚地看到, 这些曲线除去有横标为 4 的交点以外, 还相交于有横标  $\xi$  在 0 与 0.5 之间的某一点. 要算出这根使准确度达到 0.000 01.

对于  $0 \leq x \leq 0.5$ , 有

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 4 < 0, \quad f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 > 0$$

(情形 II). 在此处  $m = 4 - \sqrt{2} \cdot \ln 2 > 3$ ,  $M = \sqrt{2} \ln^2 2 < 0.7$ ,  $\frac{M}{2m} < 0.12$ . 因为  $f(0) = 1$  与  $f''(x)$  同号, 故应从  $a = 0$  开始. 根据 (6), 这近似值的误差  $< \frac{1}{3}$ , 然后根据 (11), 可以预先估计出误差:

$$\xi - x'_1 < 0.12 \cdot \frac{1}{9} < 0.014.$$

因此依公式 (8\*) 算出的数值

$$x'_1 = -\frac{1}{\ln 2 - 4} = \frac{1}{3.306\ 852\cdots} = 0.30\cdots$$

应取至小数点后第二位:  $x'_1 = 0.30$ . 利用数值  $f(0.30) = 0.031\ 144\cdots$  再依不等式 (6) 更精确地估计误差:

$$\xi - x'_1 < \frac{0.031\ 144\cdots}{3} < 0.011,$$

然后, 再依 (11),

$$\xi - x'_2 < 0.12 \cdot 0.000\ 121 < 0.000\ 015,$$



于是我们就接近于所需要的准确度. 下面一个近似值:

$$x_2' = 0.30 - \frac{0.031\ 144 \cdots}{0.853\ 364\ 3 \cdots - 4} = 0.30 + \frac{0.031\ 144 \cdots}{3.146\ 635\ 6 \cdots} = 0.309\ 897 \cdots$$

在“向根的一侧”凑足小数点后第五位  $x_2' = 0.309\ 90$ . 因为  $f(0.309\ 90) = 0.000\ 021 \cdots > 0$ , 所以这数值还是比根小一些. 至于它的误差, 根据 (6) 是

$$\xi - x_2' < \frac{0.000\ 022}{3} < 0.000\ 01,$$

于是, 最后有

$$\xi = 0.309\ 90_{+0.000\ 01}.$$

4) 方程

$$\operatorname{tg} x = x$$

有无穷多个根. 这可以从图 87 中立刻看出, 由于正切  $y = \operatorname{tg} x$  的图像与直线  $y = x$  的交点有无穷多个. 要算出这方程的最小正根, 它位于  $\frac{5\pi}{4}$  与  $\frac{3\pi}{2}$  之间.

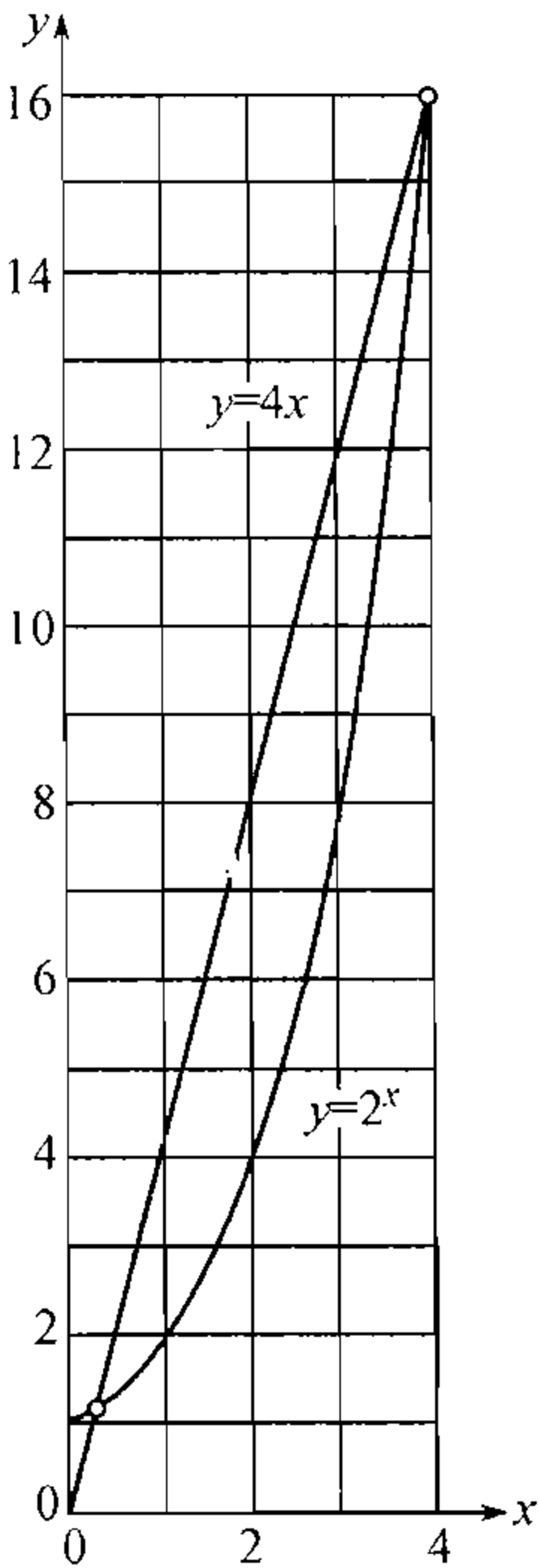


图 86

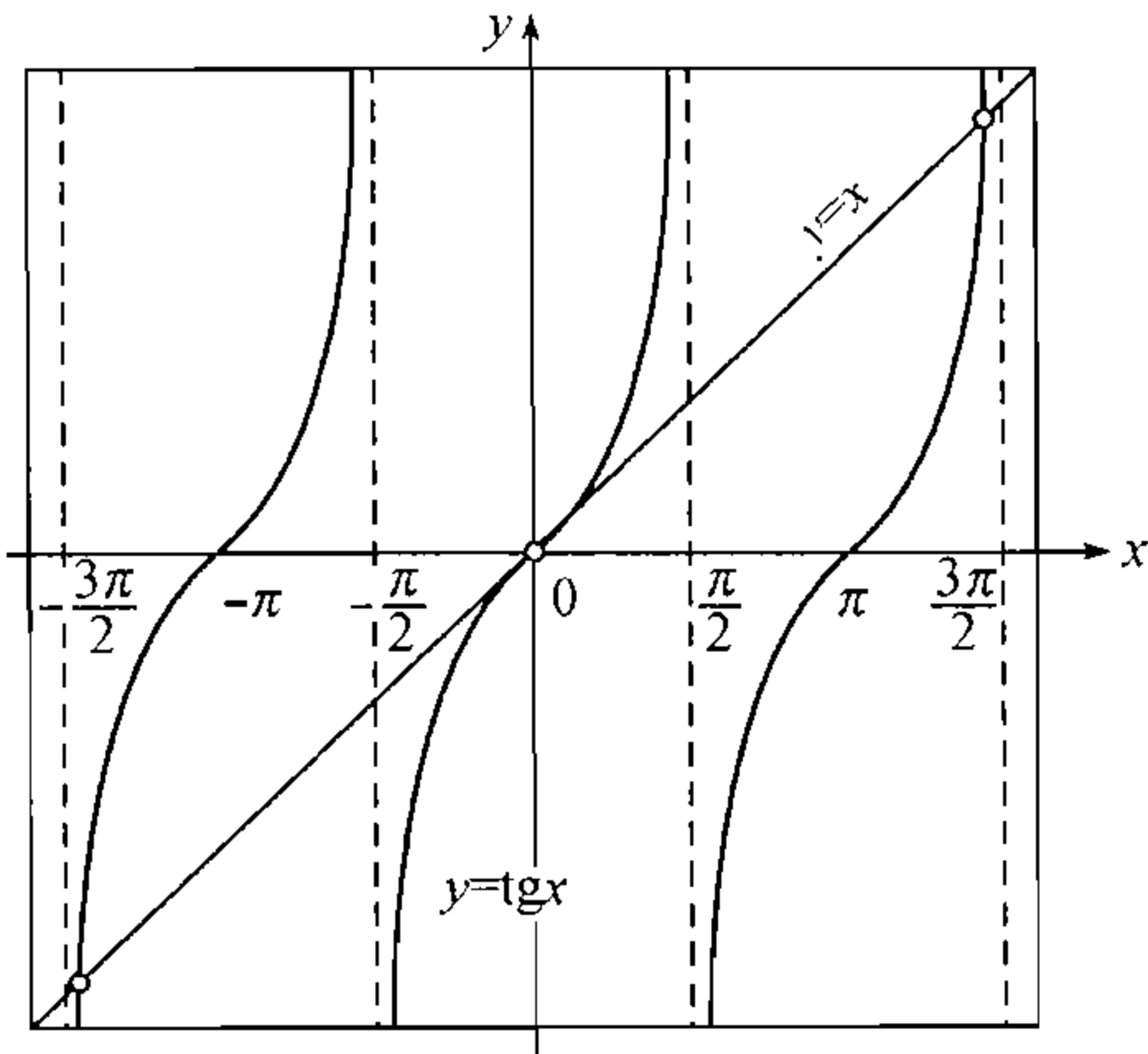


图 87

因为在  $x = \frac{3\pi}{2}$  时正切成为无穷, 将方程表示为

$$f(x) = \sin x - x \cos x = 0$$

更为方便.



我们有

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{5\pi}{4}\right) > 0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0;$$

$f'(x) = x \cdot \sin x < 0, m > 2.7; f''(x) = \sin x + x \cos x < 0$  (情形 IV). 从  $b = \frac{3\pi}{2} = 4.712\,388\,9\cdots$  开始, 得

$$x'_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = 4.712\,388\,9\cdots - 0.212\,206\,6\cdots$$

在此处我们碰到下面的情况: 在三角函数 (及其对数) 表上角度表示为度、分、秒, 因此在这种单位之下来取舍校正数  $0.212\,206\,6\cdots$  的尾数对我们更方便些. 我们就取  $12^\circ 10'$ , 它对应于略大一些的数  $0.212\,234\,84\cdots$  (在“向根的一侧”凑成分, 于是  $x'_1 = 4.500\,040\,6\cdots (257^\circ 50')$ ).

再次,  $f(x'_1) = -\cos 12^\circ 10' + 4.500\,040\,6\cdots \sin 12^\circ 10' = -0.029\,127\,4\cdots$ ,

$$f'(x'_1) = -4.398\,962\cdots; \quad x'_1 - \xi < \frac{0.03}{2.7} < 0.012.$$

继续求得:

$$x'_2 = 4.500\,040\,6\cdots - \frac{0.029\,127\,4\cdots}{4.398\,962\cdots} = 4.500\,040\,6\cdots - 0.006\,621\,4\cdots,$$

弃去校正数的尾数使成为  $0.006\,617\,7\cdots (22'45'')$  并取

$$x'_2 = 4.493\,422\,9\cdots (257^\circ 27'15'').$$

因为  $f(x'_2) = -0.000\,059\cdots$ , 故

$$x'_2 - \xi < \frac{0.000\,06}{2.7} < 0.000\,022\,3.$$

这样,

$$4.493\,400\,6\cdots < \xi < 4.493\,422\,9\cdots,$$

故可令

$$\xi = 4.493\,4_{+0.000\,03}.$$

5) 当含有根的区间充分缩小时, 牛顿法则的效力特别显著. 今要算出方程  $x^3 - 2x - 5 = 0$  的根, 从含有它的区间  $(2, 2.1)$  出发, 最后要达到高度的准确度, 就说是  $\frac{1}{10^{10}}$ .

在此处:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad f(2) = -1 < 0, \quad f(2.1) = 0.061 > 0,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \quad f''(x) = 6x > 0 \quad (\text{当 } 2 \leq x \leq 2.1) \text{ (情形 I)}.$$

很易算出,  $m = 10, M < 12.6$ , 于是

$$\frac{M}{2m} < 0.63.$$



从  $b = 2.1$  开始. 依公式 (6):  $b - \xi < \frac{0.061}{10} = 0.0061$ . 现在利用不等式 (11), 来预先算出可以期望  $x'_1$  达到怎样的准确度:

$$x'_1 - \xi < 0.63 \cdot 0.0061^2 < 0.000024.$$

因此, 我们将

$$x'_1 = 2.1 - \frac{f(2.1)}{f'(2.1)} = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} = 2.1 - 0.00543 \dots$$

在“向根的一侧”凑足小数点后第五位:  $x'_1 = 2.1 - 0.00544 = 2.09456$ . 因为  $f(x'_1) = f(2.09456) = 0.000095078690816$ , 所以现在依公式 (6) 可以更精确地估计误差:

$$x'_1 - \xi < \frac{0.000095 \dots}{10} < 0.00001.$$

转向  $x'_2$ , 再应用公式 (11), 预先算出:

$$x'_2 - \xi < 0.63 \cdot 0.00001^2 = 0.00000000063.$$

因此, 取

$$x'_2 = 2.09456 - \frac{0.000095078690816}{11.1615447808} = 2.09456 - 0.000008518416 \dots$$

至小数点后第十一位:  $x'_2 = 2.09456 - 0.00000851841 = 2.09455148159$ , 它与所求根相差仍是小于  $0.00000000007$ . 因此,

$$2.09455148152 < \xi < 2.09455148159,$$

$$\text{即 } \xi = 2.0945514815 + \frac{1}{10^{10}}.$$

**157. 联合法** 这方法是同时利用切线法及弦线法.

为着明确起见, 假定我们碰到的是情形 I. 如前, 利用公式 (2) 及 (8) 可算出近似值  $x_1$  及  $x'_1$ :

$$x_1 = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad x'_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

依照已证明的论点,

$$a < x_1 < \xi < x'_1 < b.$$

在下一步内, 我们干脆用  $x_1$  及  $x'_1$  代换公式内的  $a$  及  $b$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{(x'_1 - x_1) \cdot f(x_1)}{f(x'_1) - f(x_1)}, \quad x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

这步骤可以无限地继续下去; 只要有二个近似值  $x_n$  及  $x'_n$ , 在它们之间含有根  $\xi$ , 我们就能依下列公式得出再下面的一对近似值:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x'_n - x_n) \cdot f(x_n)}{f(x'_n) - f(x_n)}, \quad x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}.$$

第二公式和 (10) 相同; 第一公式却和 (5) 大有区别, 因为, 这里点  $x'_n$  代替了点  $b$ , 而  $x'_n$  是越来越接近于  $\xi$  的. 如果将不等式 (4) —— 对应于所考察的情形 —— 改写成

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)} > \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$



并令其中  $a = x_n, x = x'_n$ , 那么容易看出, 上面说的把  $b$  换成  $x'_n$  的结果只能是使  $x_n$  更快地逼近所求的根(几何上这是显然的!).

这样, 在用联合法时, 我们可以同时求得根的亏近似值及盈近似值, 它们从根的两侧趋近于它. 在情形 I 及 IV,  $x_n$  从左而  $x'_n$  从右趋近于  $\xi$ ; 至于在 II 及 III, 显然情形刚刚相反. 数量  $|x'_n - x_n|$  使我们能直接判断所达到的近似程度, 用联合法的好处就在于此.

用例题来说明它的应用.

**158. 例题及习题** 在这里假定只应用联合法.

1) 求方程

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

的三实根使准确度达到 0.001.

函数  $y = f(x)$  的草图帮助我们求得含有这些根的区域:

$$-2 < \xi_1 < -1, \quad 0 < \xi_2 < 1, \quad 1 < \xi_3 < 2;$$

由函数的符号的变化, 很易验证这事的正确性.

a) 在区间  $[-2, -1]$  内

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 7 > 0, \quad f''(x) = 12x - 2 < 0$$

(情形 III). 因为  $f(-2) = -1 < 0, f(-1) = 9 > 0$ , 故牛顿法则必须应用于区间的左端. 今有:  $f'(-2) = 21$  及

$$\begin{aligned} x'_1 &= -2 - \frac{-1}{21} = -1.952 \dots, \\ x_1 &= -1 - \frac{9}{9 - (-1)} = -1.9. \end{aligned}$$

把数值  $x'_1$  在减小的一侧凑足小数第二位, 得数字  $-1.96 < \xi_1$ . 若把它在增大的一侧, 即向根的一侧舍去尾数, 则得数字  $-1.95$ ; 但  $f(-1.95) = 0.01775 > 0$ , 即这时已跳到根的另一边去. 这情况对我们是有利的, 因为它给出了缩小含根区间的可能性. 弃去以前的数值  $x_1$ , 令

$$x'_1 = -1.96, \quad x_1 = -1.95.$$

再次, 就有

$$\begin{aligned} f(-1.96) &= -0.180672, \quad f'(-1.96) = 19.9696, \\ x'_2 &= -1.96 + \frac{0.180672}{19.9696} = -1.96 + 0.00904 \dots = -1.95095 \dots, \\ x_2 &= -1.95 - \frac{0.01 \cdot 0.01775}{0.01775 + 0.180672} = -1.95 - 0.00089 \dots = -1.95089 \dots \end{aligned}$$

因为  $\xi_1$  应当包含在这两限界之间, 显然有:

$$\xi_1 = -1.9509_{\pm 0.0001}$$

(已超过所需要的准确度).



6) 在区间  $[0, 1]$  内, 一阶导数保持着负号, 但二阶导数变号, 在点  $x = \frac{1}{6}$  处等于零. 这情况迫使我们还要预先将区间缩小. 试验数值  $x = 0.5$ , 求得:  $f(0.5) = 1.5 > 0$ ; 因为  $f(1) = -1 < 0$ , 故  $\xi_2$  包含在区间  $[0.5, 1]$  内, 在它里面  $f''(x)$  保持着正号 (情形 II). 此处仍需把牛顿法则应用于左端点. 就有

$$x'_1 = 0.5 + \frac{1.5}{6.5} = 0.7307 \doteq 0.74, \quad x_1 = 1 - \frac{0.5}{2.5} = 0.80.$$

把  $x'_1$  在向根的一侧凑足小数第二位, 并不至于越过这根, 因为  $f(0.74) = 0.082848 > 0$ . 最后,

$$\begin{aligned} x'_1 &= 0.74 + \frac{0.082848}{5.1944} = 0.755\dots, \\ x_2 &= 0.80 - \frac{0.01296}{0.298848} = 0.756\dots, \end{aligned}$$

于是  $0.755\dots < \xi_2 < 0.756\dots$ , 而可以令

$$\xi_2 = 0.756_{\pm 0.001}.$$

b) 在区间  $[1, 2]$  内二阶导数保持着正号, 但一阶导数变号, 在

$$x = \frac{1 + \sqrt{43}}{6} \doteq 1.26$$

时等于 0.

试验 1.5:  $f(1.5) = -1$ , 同时却有  $f(2) = 3$ , 于是  $1.5 < \xi_3 < 2$ ;  $f'(x)$  在这区间内有正号 (情形 I). 就有:

$$x_1 = 1.5 + \frac{1}{8} \doteq 1.6, \quad x'_1 = 2 - \frac{3}{13} \doteq 1.7;$$

在此处取  $x'_1 = 1.7$  并没有跳到根的左边去, 因为  $f(1.7) = 0.036$ . 最后,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.6 + \frac{0.0568}{0.604} = 1.6 + 0.094\dots = 1.694\dots, \\ x'_2 &= 1.7 - \frac{0.036}{6.94} = 1.7 - 0.005\dots = 1.694\dots, \end{aligned}$$

于是有

$$\xi_3 = 1.694_{+0.001}.$$

**附注** 因为依代数学上已知道的定理, 根的总和当等于 0.5, 故可利用这定理来验算答案.

2) 方程

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

有二实根: 一根在  $-11$  与  $-10$  之间, 另一根在  $9$  与  $10$  之间. 计算这些根使准确度达到  $0.00001$ .

a) 在区间  $[-11, -10]$  内

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0, \quad f''(x) = 12x^2 - 6 > 0$$



(情形 II). 求得

$$\begin{aligned}x'_1 &= -11 + \frac{3\,453}{5\,183} = -10.33\dots \doteq -10.3, \\x_1 &= -10 - \frac{1\,050}{4\,503} = -10.23\dots \doteq -10.2;\end{aligned}$$

在前一式内我们在向根的一侧舍去尾数, 但并未越过这根. 再求得

$$\begin{aligned}x'_2 &= -10.3 + \frac{164.318\,1}{4234.108} = -10.262\dots \doteq -10.262, \\x_2 &= -10.2 - \frac{25.279\,84}{417.116\,5} = -10.260\dots \doteq -10.260.\end{aligned}$$

(附注同上). 最后,

$$\begin{aligned}x'_3 &= -10.262 + \frac{4.334\,569\,118\,736}{4186.137\,218\,912} = -10.262 + 0.001\,035\,4\dots = -10.260\,964\,5\dots, \\x_3 &= -10.260 - \frac{0.008\,070\,380\,48}{8.369\,759\,358\,736} = -10.260 - 0.000\,964\,2\dots = -10.260\,964\,2\dots,\end{aligned}$$

于是

$$\xi_1 = -10.260\,964_{-0.000\,001}$$

(具有比所要求的更大的准确度).

6) 在区间  $[9, 10]$  内  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$  (情形 I). 在此处:

$$\begin{aligned}x_1 &= 9 + \frac{3007}{3457} = 9 + 0.869\dots \doteq 9.87 \quad (\text{在向根的一侧!}), \\x'_1 &= 10 - \frac{450}{4015} = 10 - 0.112\dots \doteq 9.89, \\x_2 &= 9.87 + \frac{1.238\,965\,887\,8}{77.468\,900\,8} = 9.87 + 0.015\,99\dots = 9.885\,99\dots, \\x'_2 &= 9.89 - \frac{15.520\,606\,41}{3885.106\,676} = 9.89 - 0.003\,993\dots = 9.886\,006\dots.\end{aligned}$$

于是, 显然,

$$\xi_2 = 9.886\,00_{\pm 0.000\,01}.$$

3) 考察方程

$$f(x) = x \cdot \sin x - 0.5 = 0.$$

作出函数  $y = \sin x$  及  $y = \frac{0.5}{x}$  的图像 (图 88), 就看出它们相交于无穷多个点, 于是我们的方程有无穷多个根. 由图像又看出, 最小的正根  $\xi$  靠近着 0.7; 现在要计算这根使准确度达到 0.000 001 (根据在 156 例题 4) 内曾作出的附注, 在此处必须先改用度分秒的单位, 然后再来取舍尾数).

把数值

$$a = 0.698\,131\,7\dots (40^\circ) \text{ 及 } b = 0.785\,398\,2\dots (45^\circ)$$

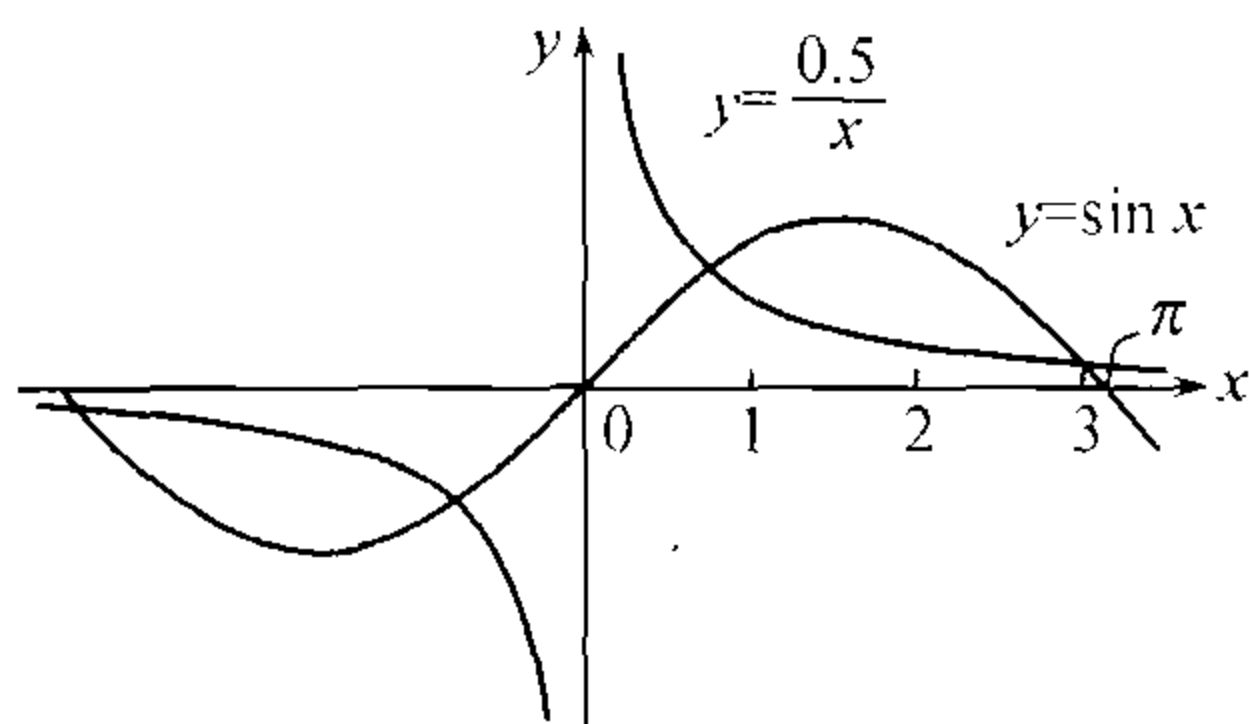


图 88

代入函数  $f(x)$ , 在第一情形结果得负值, 在第二情形结

果得正值, 这就是说  $a < \xi < b$ . 在这区间内导数  $f'(x), f''(x)$  都有正号 (情形 I).



计算的概要:

$$x_1 = 0.698\ 131\ 7\cdots + 0.041\ 951\ 2\cdots,$$

$$x'_1 = 0.785\ 398\ 2\cdots - 0.043\ 851\ 0\cdots;$$

取舍尾数后得第一校正数为  $0.041\ 887\ 9\cdots (2^\circ 24')$ , 第二校正数为  $0.043\ 923\ 1\cdots (2^\circ 31')$ , 于是最后得

$$x_1 = 0.740\ 019\ 6\cdots (42^\circ 24'), \quad x'_1 = 0.741\ 474\ 1\cdots (42^\circ 29').$$

再有

$$x_2 = 0.740\ 019\ 6\cdots + 0.000\ 821\ 1\cdots = 0.740\ 840\ 7\cdots,$$

$$x'_2 = 0.741\ 474\ 1\cdots - 0.000\ 632\ 9\cdots = 0.740\ 841\ 2\cdots,$$

由此就得到具有所要求的准确度的根

$$\xi = 0.740\ 841 \pm 0.000\ 000\ 5.$$

4) 最后, 再回到方程

$$f(x) = x^4 - x - 1 = 0.$$

我们已在 81 内看到, 它有根  $\xi$  在  $a = 1.22$  与  $b = 1.23$  之间. 现在要看只把联合法应用两次, 所得的近似值能达到怎样的准确度.

计算的概要 (情形 I):

$$x_1 = 1.22 + \frac{0.000\ 046\ 654\ 4}{0.063\ 531\ 15} = 1.220\ 73\cdots \doteq 1.220\ 7,$$

$$x'_1 = 1.23 - \frac{0.058\ 866\ 41}{6.443\ 468} = 1.220\ 86\cdots \doteq 1.220\ 9,$$

$$x_2 = 1.220\ 7 + \frac{0.000\ 000\ 055\ 337\ 605\ 983\ 98}{0.001\ 255\ 538\ 012\ 096} = 1.220\ 744\ 07\cdots,$$

$$x'_2 = 1.220\ 9 - \frac{0.000\ 978\ 849\ 982\ 176\ 1}{6.279\ 478\ 581\ 316} = 1.220\ 744\ 1\cdots,$$

这样,

$$\xi = 1.220\ 744\ 1 \pm 0.000\ 000\ 1.$$



# 第五章 多元函数

---

## §1. 基本概念

159. 变量之间的函数关系·例题 到现在为止, 我们只研究过两个变量的共同变动, 而它们之中的一个依赖着另一个: 由自变量的数值已能完全决定因变量或函数的数值. 然而在科学上及生活上常会遇见出现有几个自变量的情形, 于是要想确定函数的数值, 就必须先确定所有这些自变量在同一个时候各自所取的数值.

1) 例如, 圆柱体的体积  $V$  是它的底半径  $R$  及高  $H$  的函数; 这些变量之间的关系用公式

$$V = \pi R^2 H$$

来表示, 由这公式, 若已知自变量  $R$  及  $H$  的数值, 就可以决定对应的  $V$  的数值.

圆锥台的体积  $V$  显然是三个自变量——两底的半径  $R$  及  $r$  以及高  $H$  的函数, 表示这函数的公式是:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

2) 按照欧姆定律, 电路中的电压  $V$  与线路的电阻  $R$  及电流  $I$  具有关系  $V = RI$ . 或  $V$  及  $R$  当作是已给的, 则由此可确定  $I$  为  $V$  及  $R$  的函数:

$$I = \frac{V}{R}.$$

3) 设有放在汽缸的活塞下面的一定质量的气体, 其温度不是固定不变的; 则这气体的体积  $V$  及压力  $p$  都与它的 (绝对) 温度  $T$  有关系, 其关系式称为克拉披隆 (Clapeyron) 公式:

$$pV = RT \quad (R = \text{常量}).$$



由此, 例如认为  $V$  及  $T$  是自变量, 则它们的函数  $p$  就可写成:

$$p = \frac{RT}{V}.$$

4) 研究任何物体的物理状态时往往需要观察它的各种性质随着点的变化. 如: 密度、温度、电位等等. 所有这些量都是“点的函数”, 换言之, 就是点的坐标  $x, y, z$  的函数. 若物体的物理状态随时间而变化, 则在这些自变量内还要加上时间  $t$ . 在这情形我们就得到四个自变量的函数.

类似的例子读者自己还可以任意举出许多来.

要想对于几个自变量的函数的概念给予准确的定义, 我们先从最简单的情形, 当自变量有两个时开始.

**160. 二元函数及其定义域** 凡说及二自变量  $x$  及  $y$  的变动, 我们每一次都应当指出, 它们可以同时取值的数对  $(x, y)$  是哪些; 这些数对所成的集  $M$  就是变量  $x, y$  的变动区域.

函数概念的定义与一元函数时所给出的定义有同样的说法:

若对于集  $M$  中的每一对数值  $(x, y)$ ——依某一法则或规律——有一确定的  $z$  的数值 (在  $Z$  内) 与它们对应, 则变量  $z$  (其变动区域为  $Z$ ) 称为自变量  $x, y$  在集  $M$  中的函数<sup>20)</sup>.

在此处说及的是单值函数; 很易推广这一定义使适用于多值函数.

上面说及的集  $M$  就是函数的定义域. 变量  $x, y$  对于它们的函数  $z$  而言, 称为它的变元. 与一元函数时相类似,  $z$  与  $x, y$  之间的函数关系表示为:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y), \text{ 等等.}$$

若  $(x_0, y_0)$  是从  $M$  中取出的一个数对, 则  $f(x_0, y_0)$  就表示当  $x = x_0, y = y_0$  时函数  $f(x, y)$  所取的一个特别 (数字) 值.

兹举出几个解析地 (即用公式) 给定的函数的例题, 并指出它们的定义域. 公式:

$$1) z = xy \quad \text{及} \quad 2) z = x^2 + y^2$$

确定对于一切数对  $(x, y)$  都满足的函数. 公式:

$$3) z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad 4) z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

只被分别满足不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 < 1$$

的那些数对  $(x, y)$  所适合 (若我们只想得到有限实数  $z$  的话).

<sup>20)</sup>同时应用词组“变量值”和术语“点集”就可以套用这个定义, 我们对  $n$  元函数立刻就这样做 [参看 164 目的脚注 21)].



由公式:

$$5) z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$$

所确定的, 是其数值分别满足不等式

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b$$

的  $x$  及  $y$  的函数.

在一切这些情形中我们都指出了公式适用的最广阔的 —— 自然的  $[46, 2^\circ]$  —— 范围.

今再考察这样的例题.

6) 设三角形的各边在周长保持为常量  $2p$  的条件下任意变化着. 若用  $x$  及  $y$  表示它的二边, 则第三边就是  $2p - x - y$ , 于是三角形可以由边  $x$  及  $y$  完全确定. 问三角形的面积  $z$  与它们的关系怎样?

依海伦公式, 这面积表示为:

$$z = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至于这函数的定义域  $M$ , 在这一次, 就应受到引入这函数的具体问题的限制. 因为三角形的每一边是一个正数而且小于半周, 所以应当满足不等式

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x + y > p;$$

它们就表现了区域  $M$ <sup>①</sup> 的特征.

这样, 虽然在一元函数的情形, 作为变元的标准变动区域的只是 (有限的或无穷的) 区间, 而在二元函数的情形, 我们已碰到变元的各种各样极其复杂的可能 (和自然的) 变动区域.

利用这些区域的几何说明来考察它们, 常使事情变成非常简易. 若在平面上取互相垂直的二轴, 再用通常的办法使它们上面的点各自和  $x$  或  $y$  的值相对应, 那么大家知道, 由每一对  $(x, y)$  可以单值地确定平面上的一点, 它以这些数值作为自己的坐标, 反之亦然.

于是, 要表现出那些使函数有定义的数对  $(x, y)$ , 就只需简单地指出它们所对应的点在  $xy$  平面上填满了怎样的圆形.

如此就说, 函数 1) 及 2) 定义于全平面内, 函数 3) 及 4) 依次定义于闭的 (即包括圆周在内) 或开的 (除去圆周) 圆内 (图 89); 函数 5) 定义于矩形内 (图 90); 最后, 我们仅在开的三角形 (图 91) 内考察函数 6).

这种几何说明是如此的方便, 以致通常就称数对  $(x, y)$  为“点”, 而这种“点”所成的集合也就依照其所对应的图形的名称来称呼它. 例如, 满足不等式

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

<sup>①</sup>虽然所得出的公式本身在更广的范围内, 例如对于  $x > p$  及  $y > p$ , 仍保持有意义.



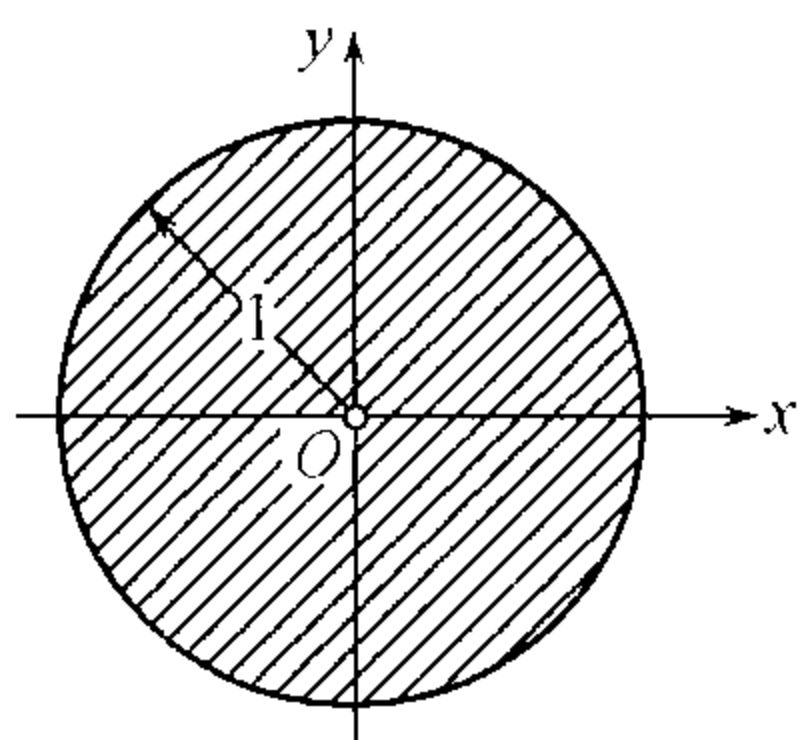


图 89

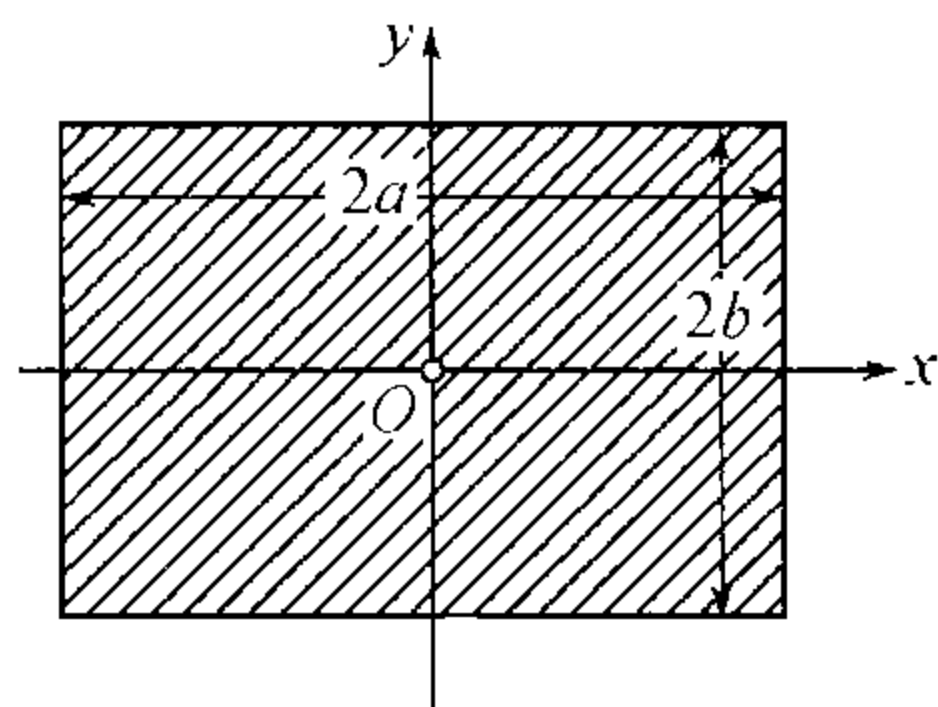


图 90

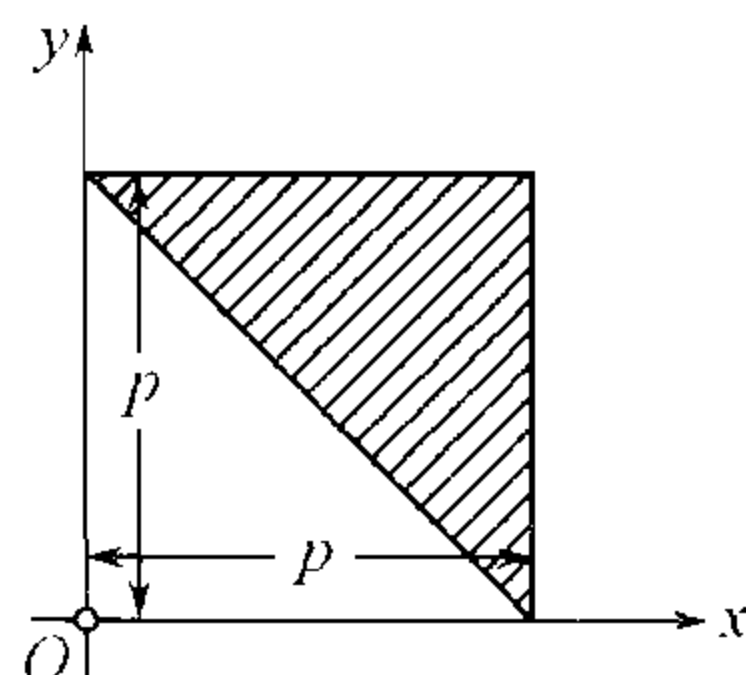


图 91

的“点”集或数对  $(x, y)$  的集是“矩形”，其度量等于  $b-a$  及  $d-c$ ；将用记号  $[a, b; c, d]$  来表示它，与区间的表示法相类似。满足不等式

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2$$

的“点”集或数对  $(x, y)$  的集是中心在“点”  $(\alpha, \beta)$  而半径为  $r$  的“圆”，等等。

恰像函数  $y = f(x)$  可用其图像来几何地说明一样 [47]，方程  $z = f(x, y)$  也可以得到几何上的说明。在空间取以  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴组成的直角坐标系；再在  $xy$  平面上画出变量  $x$  及  $y$  的变动区域  $M$ ，最后，在这区域中的每一点  $M(x, y)$  作  $xy$  平面的垂线，并在垂线上按数值  $z = f(x, y)$  来取点。这样所得的点的轨迹就是我们的函数的空间图形。一般地说来，这是一个曲面；同时等式  $z = f(x, y)$  就称为曲面方程。

为了举例，在图 92、93 及 94 中画着函数：

$$\begin{aligned} z &= xy, & z &= x^2 + y^2, \\ z &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

的几何图形。其中第一个图形是双曲抛物面，第二个是回转抛物面，第三个是半球面。

最后要讲到，有时不得不考察变量  $x_{m,n}$ ，它的数值是用二自然数标  $m$  及  $n$  来编号的（ $m$  与  $n$  各自独立地依自然数列而递变）。在某种意义上来说，这种变量是整序变量  $x_n$  的推广。

例如，可以令

$$x_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}, \quad x_{m,n} = \frac{1}{m^2 + n^2}, \quad x_{m,n} = \frac{(m+1) \cdot n}{m \cdot (n+1)} \text{ 等等.}$$

事实上，标号  $m$  及  $n$  应该看作自变量，而变量  $x_{m,n}$  看成是它们的函数。在当前的情形，自变量的变动区域可用第一象限内的全部方格子点作为其几何说明。

**161.  $n$  维算术空间** 转移到  $n$  个自变量 ( $n \geq 3$ ) 的函数，我们首先来考虑这些变量的协同数值组。



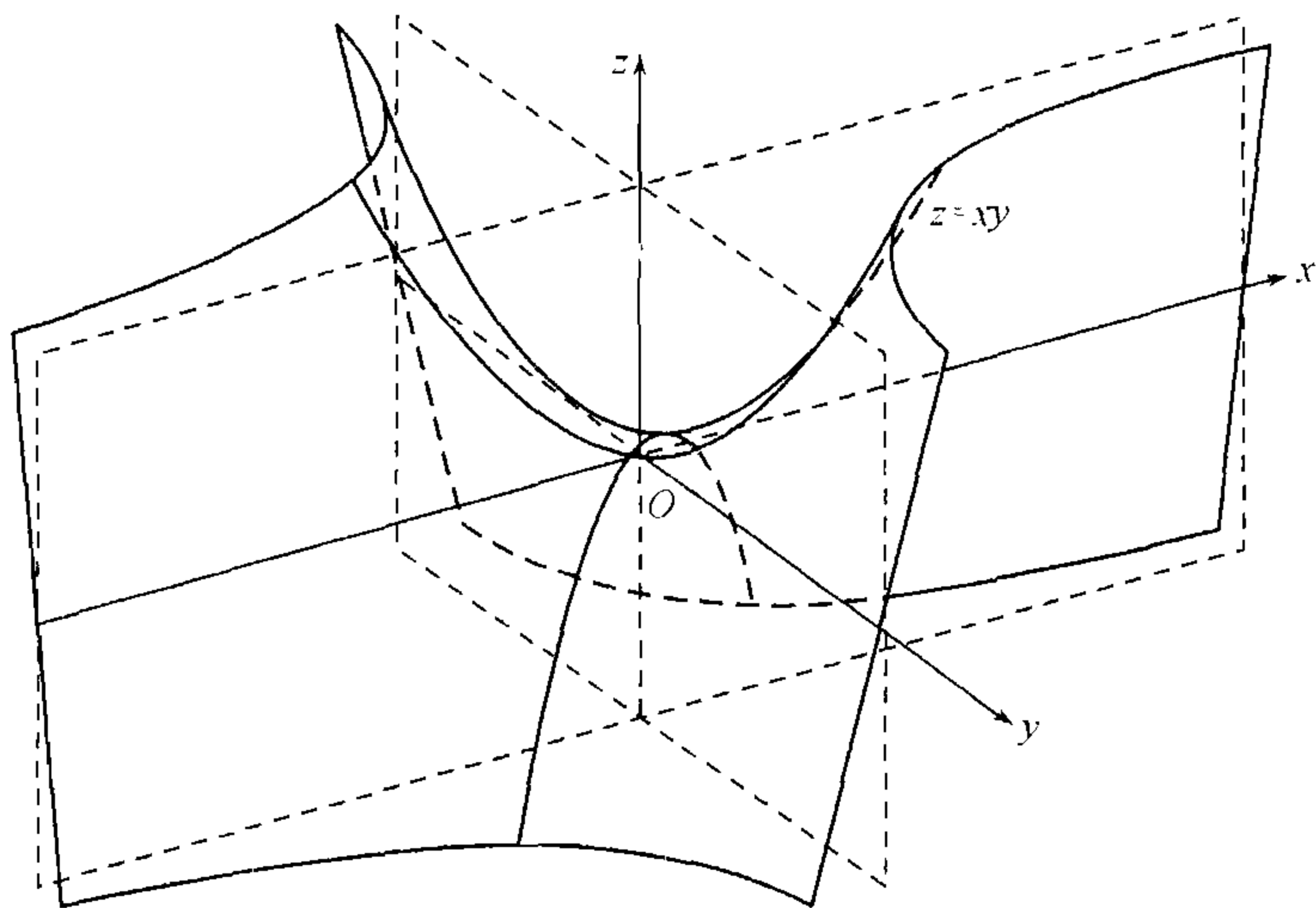


图 92

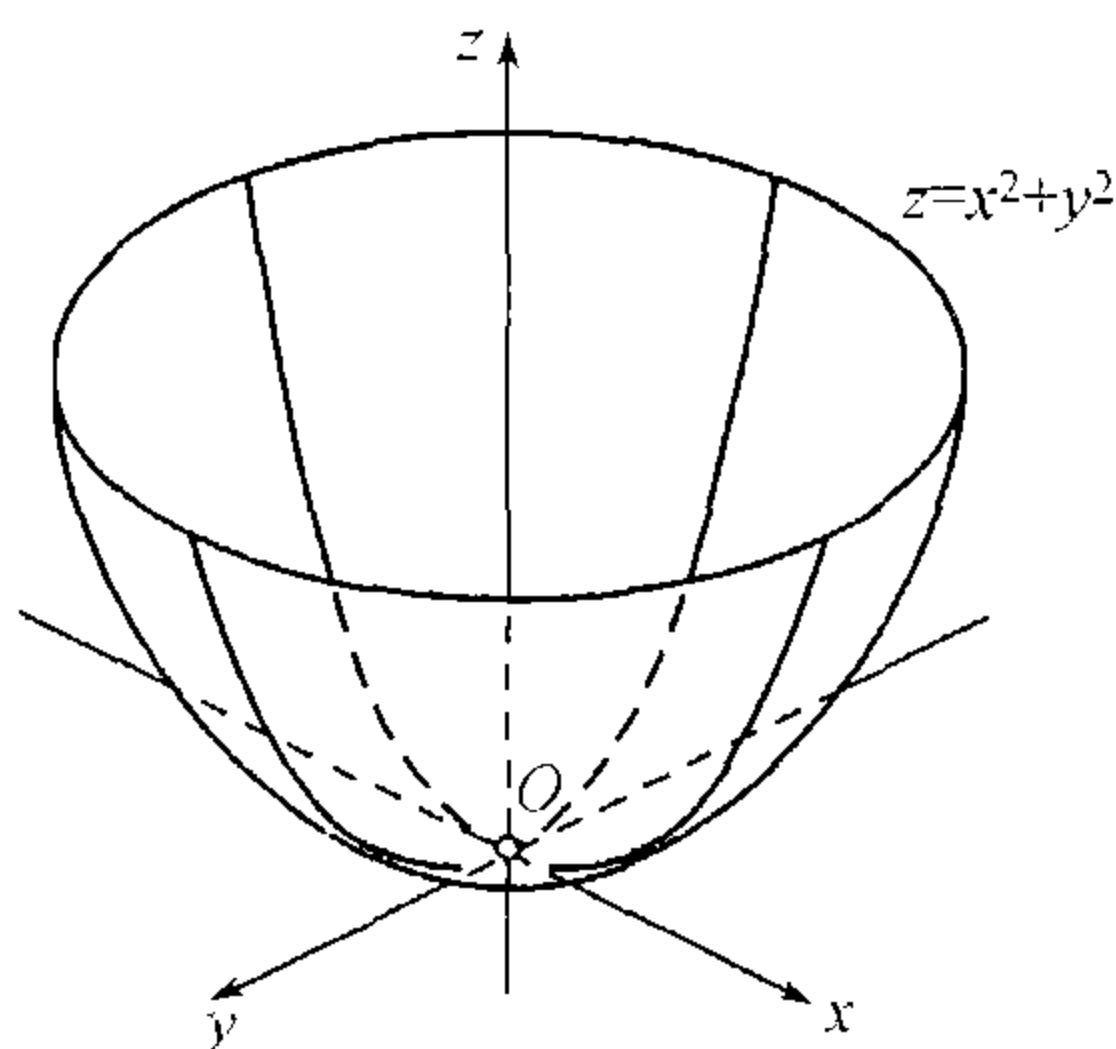


图 93

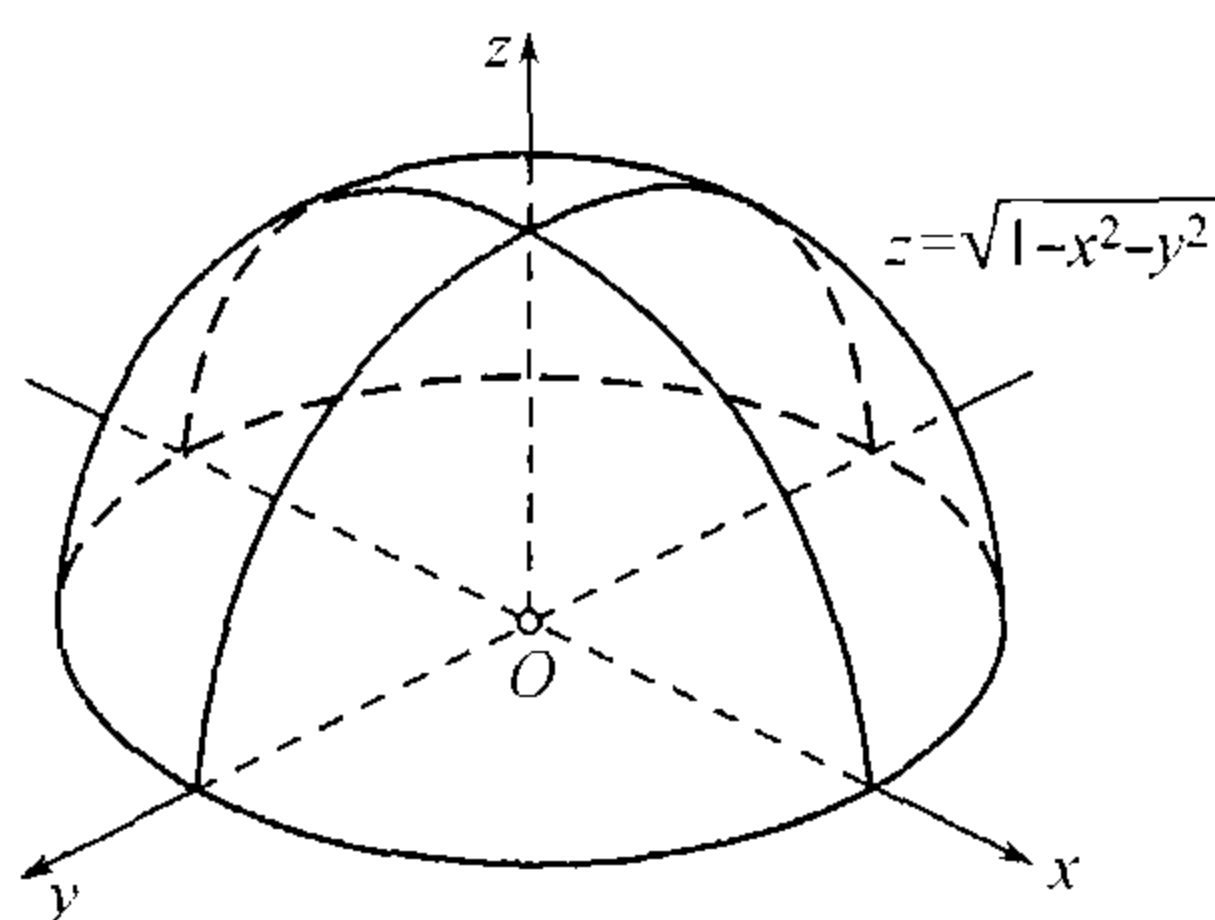


图 94

在  $n = 3$  时, 读者都明白, 三数  $(x, y, z)$  所成的数值组还可以几何地解释为空间的点, 而这种数值的集则可以解释为空间的一部分或几何学中的体. 但在  $n > 3$  时已不可能再有直接的几何说明, 因为我们并没有维数大于 3 的空间的直觉.

虽然如此, 由于仍然希望把 (对于二元及三元函数显得是有效的) 那些几何方法扩充到更多个变元的函数的理论上去, 在分析学内就引入了  $n$  维“空间”的概念 ( $n$  可以大于 3).

$n$  个实数所成的组  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ <sup>①</sup> 称为 ( $n$  维的)“点”; 数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  就是这“点” $M$  的坐标. 所有可以想象的  $n$  维的“点”就组成一个  $n$  维“空间” (它有时称

<sup>①</sup> 由于所论变量的个数没有一定, 所以不用不同的字母, 而只用带有不同序号的同一字母来表示它们, 显得更是方便. 这样,  $x_i$  (与以前的用法相反) 并不表示某一变量的第  $i$  个值, 而是表示可以具有许多不同数值的第  $i$  个变量本身.



为算术空间).

引入两个 ( $n$  维)“点”

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 与 } M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

之间的“距离”  $\overline{MM'}$  的概念是有需要的. 仿照大家知道的解析几何学中的公式, 令

$$\begin{aligned} \overline{MM'} = \overline{M'M} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2} \\ &= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

在  $n = 2$  或  $3$  时这“距离”与对应的两几何点之间的通常距离相同.

若再取一“点”

$$M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n),$$

则可以证明, “距离”  $\overline{MM'}$ ,  $\overline{M'M''}$  及  $\overline{MM''}$  满足不等式

$$\overline{MM''} \leq \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \quad (2)$$

这便是大家知道的几何定理: “三角形的一边不大于其他二边之和”.

实际上, 对于任何两组实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  及  $b_1, b_2, \dots, b_n$  常成立不等式<sup>①</sup>

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

若在此处令

$$a_i = x'_i - x_i, \quad b_i = x''_i - x'_i, \quad \text{于是} \quad a_i + b_i = x''_i - x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x''_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x''_i - x'_i)^2},$$

<sup>①</sup>这个不等式不是别的, 而是我们曾经遇到的闵可夫斯基不等式[133(7)]在  $k = 2$  时的特殊情形. 如果将它两边各自平方并消去相等的项, 则它就变成大家熟知的柯西不等式 [133(5a)]. 对柯西不等式 —— 同时, 也可书中的不等式我们举一个十分初等的证明.

二次三项式

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot x^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \cdot x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

显然不能取负值. 在这个情形它不能有两个不同的实根, 因而表达式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\}^2$$

应当是非负的, 这就相当于柯西不等式.



这就相当于 (2). 这样, 距离的这一重要性质在我们的“空间”中也同样成立.

在  $n$  维“空间”内也可以考察连续“曲线”.

大家知道 [106], 方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(此处的  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  是参变量  $t$  的函数, 在某一区间  $[t', t'']$  是连续的) 表示平面上的连续曲线. 类似于此, 用三个连续函数:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t' \leq t \leq t''),$$

就可表示 (通常) 空间中的连续曲线. 仿此, 今考察  $t$  的  $n$  个连续函数:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \cdots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (t' \leq t \leq t'').$$

则当参变量  $t$  取不同数值时所得的“点”集

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)),$$

就组成  $n$  维“空间”内的连续“曲线”. 令

$$x'_1 = \varphi_1(t'), \cdots, x'_n = \varphi_n(t'); \quad x''_1 = \varphi_1(t''), \cdots, x''_n = \varphi_n(t''),$$

就可以说, 这“曲线”连接着两“点”

$$M'(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \text{ 与 } M''(x''_1, x''_2, \cdots, x''_n).$$

当所有的  $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$  都是线性函数时, “曲线”就变成“直线”:

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \cdots, x_n = \alpha_n t + \beta_n;$$

其中系数  $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$  假定不全等于零, 而  $t$  从  $-\infty$  变至  $+\infty$ . 我们将算作这直线上的“点”是依着参变量渐增的次序一个跟着一个的; 若  $t' < t < t''$ , 则在对应的“点” $M', M, M''$  内, “点” $M$  就位于其他两点之间, 因为它在  $M'$  之后而又在  $M''$  之前. 在这些条件之下, 容易证明, 它们之间的距离满足于关系式:

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''},$$

这正是通常空间内的直线的特性.

给过二给定“点”

$$M'(x'_1, \cdots, x'_n) \text{ 及 } M''(x''_1, \cdots, x''_n)$$

的“直线”的方程显然可以写成:

$$x_1 = x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \quad \cdots, \quad x_n = x'_n + t(x''_n - x'_n) \quad (-\infty < t < +\infty),$$

于此令  $t = 0$  及  $1$ , 就得到“点” $M'$  及  $M''$ . 又若使  $t$  从  $0$  变至  $1$ , 就得到连接这两“点”的“直线段”.

由有限数的“直线段”所组成的“曲线”称为“折线”.



**162.  $n$  维空间内的区域举例** 令转而考察一些  $n$  维“空间”内的“体”或“区域”的例子.

1) 坐标各自互相独立地满足于不等式

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$$

的一切“点” $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集, 称为 ( $n$  维)“长方体”, 并记成:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n].$$

在  $n = 2$  时, 就由此得出 [160] 内曾经讲及的“长方形”; 通常空间中的长方体则对应于三维“长方体”.

若在前面写着的关系式内去掉等号, 得到

$$a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n,$$

就可用它们来定义开的“长方体”:

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n),$$

因为要与它区别, 前一个就称为闭的“长方体”<sup>①</sup>. 差  $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n$  称为两种长方体的度量, 而点

$$\left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

称为它们的中心.

任一中心在  $M^0$  的开的“长方体”

$$(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; x_2^0 - \delta_2, x_2^0 + \delta_2; \dots; x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n) \quad (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0) \quad (3)$$

称为“点” $M^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的邻域, 最常遇见的邻域是“立方体”:

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \dots; x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta) \quad (\delta > 0)$$

其一切度量都相等 ( $= 2\delta$ ).

2) 考察坐标满足不等式

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq h \quad (h > 0) \quad (3^*)$$

<sup>①</sup>也可以考察无穷“长方体”, 如果确定它的各区间 (或其中的某几个) 是无穷区间时. 在说及  $n$  维“长方体”时, 若没有特别声明, 我们总是指有限“长方体”.



的一切“点” $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集. 在  $n = 2$  时对应于这集的几何图形是等腰直角三角形, 在  $n = 3$  时是四面体 (图 95). 在一般情形称它为单纯形<sup>①</sup> (这里是闭的单纯形, 以区别于在上列不等式内去掉等号而得出的开的单纯形).

3) 最后, 若  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  是定“点”, 而  $r$  是正常数, 则由不等式

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 \leq r^2 \text{ (或 } < r^2 \text{)}$$

所确定的一切“点” $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集, 称为闭的 (或开的) $n$  维“球”, 其半径  $r$ , 而中心在“点” $M_0$  处. 换句话说, “球”是所有与某一定“点” $M_0$  的“距离”不超过 (或小于) $r$  的点所成的集. 这是很清楚的,  $n = 2$  时的“球”就是圆 [参阅 160],  $n = 3$  时就是通常的球.

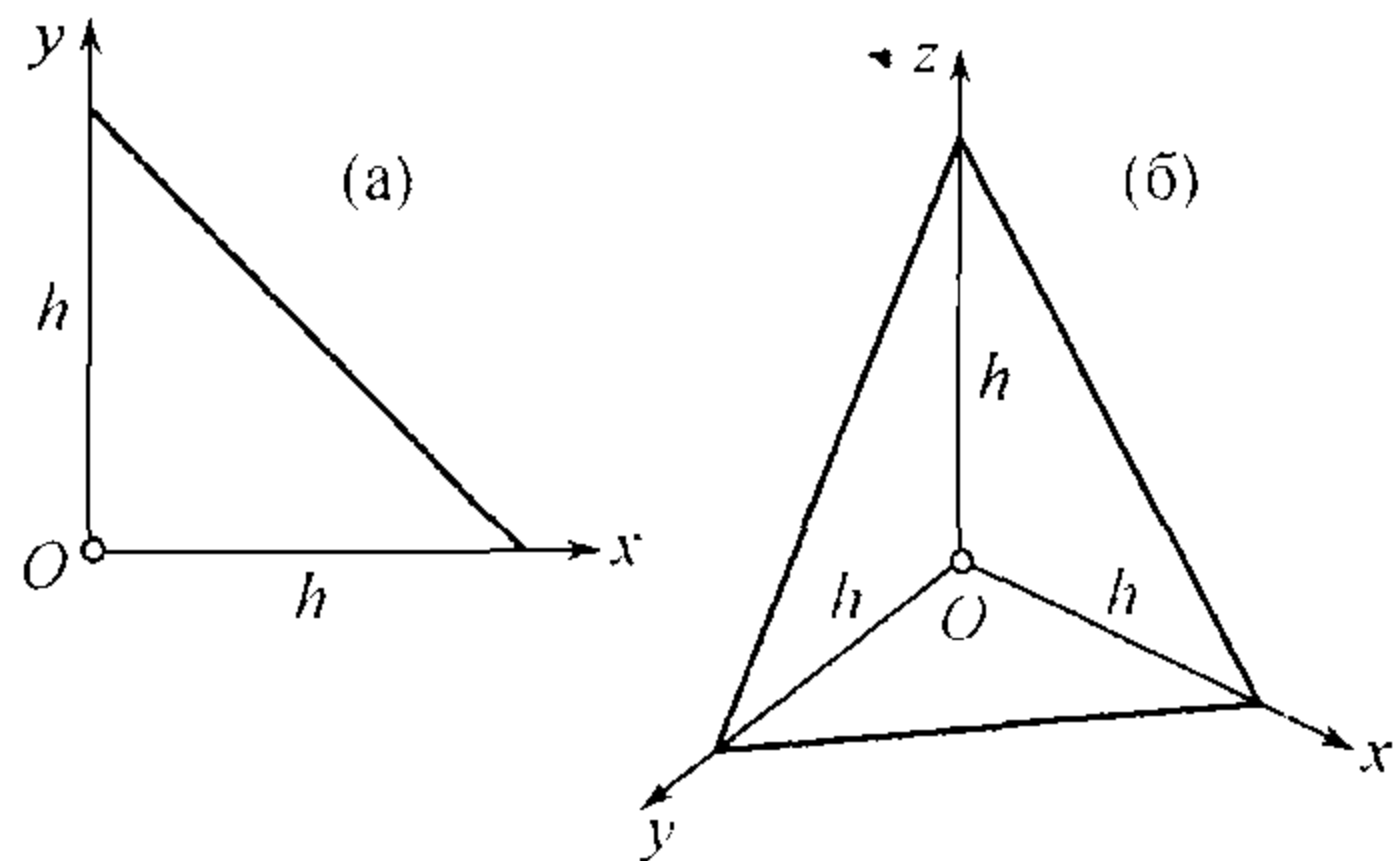


图 95

中心在点  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处而有任意半径  $r > 0$  的开“球”也可以看作这点的邻域; 要使它区别于我们先前引入的那种“长方体形”的邻域, 就称它为“球形”的邻域.

兹证明下一经常要用到的事实: 已给一个“点” $M_0$  的上述任一类型的邻域时, 一定可以找到  $M_0$  的一个另一类型的邻域, 使得后者包含于前者之中.

设首先给定中心在“点” $M_0$  处的“长方体”(3). 那么, 要取有同一中心的开“球”, 使它包含在所给“长方体”之内, 只要取开“球”的半径  $r$  小于一切  $\delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$  就够了. 实际上, 对于这球内的任一“点” $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (对每一  $i = 1, 2, \dots, n$ ) 将有:

$$|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

于是这点必属于给定的“长方体”.

反之, 若给定中心在  $M_0$  而半径为  $r$  的“球”, 那么“长方体”(3), 例如, 在  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$  时就包含在它里面. 因为这“长方体”中任一“点” $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  距“点” $M_0$  的“距离”是

<sup>①</sup>按拉丁文 simplex 的意思是“简单的”; 实际上, 单纯形就是最简单的多面“体”, 对于所给定空间而言, 它具有最少数目的面.



$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^n \delta_k^2} = r,$$

所以, 它也属于给定的“球”.

**163. 开域及闭域的一般定义** 若“点” $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 连同它的充分小的邻域都属于 ( $n$  维“空间”内的) 集  $M$ , 则称“点” $M'$  是集  $M$  的内“点”.

由前一段末所证明的论点很明显地推得, 此处所论及的邻域的类型, 不论是“长方体形的”或是“球形的”, 并不影响内点的定义.

开的“长方体”

$$(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n) \quad (4)$$

的每一“点”都是内“点”. 实际上, 若

$$a_1 < x'_1 < b_1, \dots, a_n < x'_n < b_n,$$

则容易找出这种  $\delta > 0$ , 使得

$$a_1 < x'_1 - \delta < x'_1 + \delta < b_1, \dots, a_n < x'_n - \delta < x'_n + \delta < b_n.$$

仿此, 对于中心在“点” $M_0$  处而半径为  $r$  的开“球”, 属于它的每一“点” $M'$  也都是它的内“点”. 若取  $\rho$  使合于

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

并以  $M'$  为中心作出半径为  $\rho$  的“球”, 则它必全部包含在原来的“球”内: 因为只要  $\overline{MM'} < \rho$ , 就有 [160, (2)]

$$\overline{MM_0} \leq \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

于是“点” $M$  亦属于原来的“球”.

关于开的单纯形:

$$x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < h \quad (h > 0),$$

也可以作出同样的结论.

这种完全由内“点”所组成的集就称为开“域”.

这样, 开“长方体”、开“球”、开的单纯形都是开“域”的例子.

现在再把聚点的概念 [52] 推广到  $n$  维“空间”内的集  $M$  的情形去. 若在“点” $M_0$  的任一邻域(不论什么类型)内总包含着集  $M$  中的至少一个异于  $M_0$  的“点”, 则“点” $M_0$  称为集  $M$  的聚点.



开“域”的“聚点”而不属于这域的称为它的界“点”. 界“点”的全体组成“域界”. 开“域”连同着它的“界”就称为闭域.

不难看出, 只有满足诸式:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \cdots, a_n \leq x_n \leq b_n,$$

并使其中至少一处成立等式的“点” $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  方才能成为开的“长方体”(4)的界“点”.

完全与此相同, 只有确实满足  $\overline{MM_0} = r$  的“点” $M$  方才成为上面说过的开“球”的界“点”.

最后, 只有满足诸关系式:

$$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \quad x_1 + \cdots + x_n \leq h,$$

并使其中至少一处成立等式的“点” $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  方才能成开的单纯形 (3\*) 的界“点”.

这样, 闭的“长方体”、闭“球”、闭的单纯形就给出了闭“域”的例子.

以后凡说及 (开的或闭的) “域”时, 我们总是指着此处所述的有着特殊意义的“域”.

现在要证明, 闭“域”的一切聚“点”都属于这“域”.

设给定闭“域” $\overline{D}$  及在它外部的“点” $M_0$ . 将证明  $M_0$  不是  $\overline{D}$  的聚“点”.

闭“域” $\overline{D}$  是由某一开“域” $D$  加上它的“界” $\mathcal{E}$  而得到的. 显然  $M_0$  不能是  $D$  的聚“点”; 因此,  $M_0$  可以被这样的开“球”所围住, 使它里面不包含  $D$  的“点”. 可是, 在它里面也就不能有  $\mathcal{E}$  的“点”; 因为若有  $\mathcal{E}$  的任何“点” $M'$  落在它里面, 则在它里面将整个地包含着“点” $M'$  的某一邻域, 而在这邻域内却一个都不能有  $D$  的点, 这是违反“界”点的定义的. 因此前述的开“球”内确乎没有  $\overline{D}$  的“点”, 这就证明了我们的论点.

一般, 包含自己的一切聚“点”的“点”集  $\mathcal{M}$  称为闭集. 这样, 闭“域”是闭集的特别情形.

再引入一系列的术语. 若“点”集  $\mathcal{M}$  全部包含在某一“长方体”内, 它就称为有界“点”集.

若“域”的任意两“点”常可以用一“折线”来连接, 该“折线”的一切“点”都位于这“域”中, 这“域”就称为连通“域”. 图 96 中是几个平面上的连通域的例子.

$n$  维“空间”中的有界连通“域”(开的或闭的), 在某种意义上, 类似于 (开的或闭的) 有限

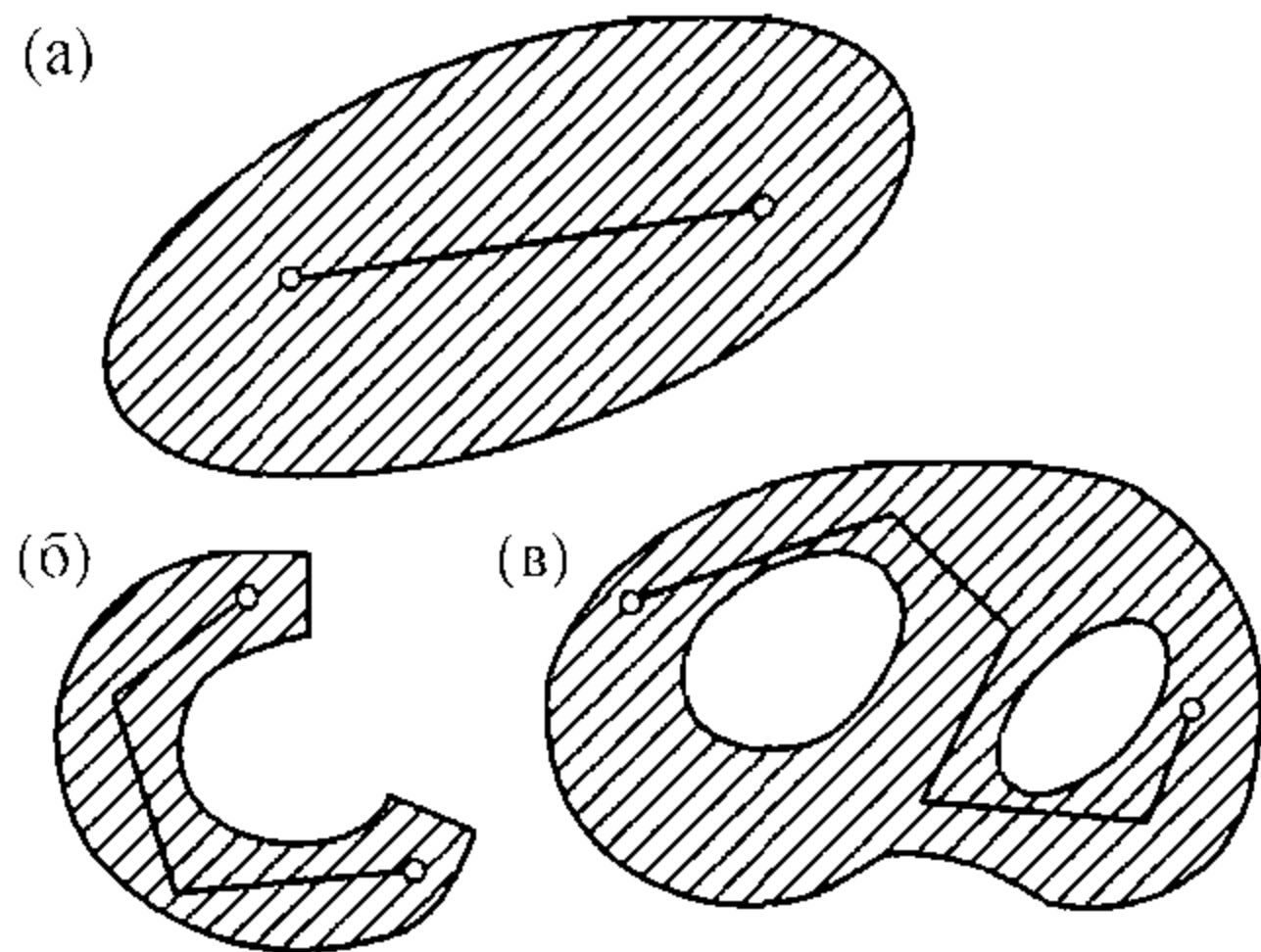


图 96



区间. 然而读者看到, 在维数转变成  $n(n \geq 2)$  时图形是如何地复杂化了. 对应于简单的具唯一形式的区间 (作为它的界的总共只是二点), 在此处却是带有复杂的“界”的各种各样的“域”了.

在以上几目内所讲的一切, 可以看成仅是某种几何语言的设立; 在  $n > 3$  时并未联系到任何实际的几何表示. 然而必须郑重指出, 事实上,  $n$  维 (算术) 空间仅只是走向空间概念在多种高阶中拓广的第一步, 而这些空间概念正是现代分析的许多更高深部门的基础<sup>①</sup>.

**164.  $n$  元函数** 设有  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 它们的协同值可以从  $n$  维空间中的某一点集  $M$  内任意选取: 这些变量称为**自变量**. 对于二自变量所作的函数的定义以及一切由它而得的推论 [160] 都可以直接搬来用于现在所要考察的情形, 因此就不必再来讨论它.

若用  $M$  表示点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则这些变量的函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  有时也称为**点  $M$  的函数**, 并记成:  $u = f(M)$ <sup>21)</sup>.

现在假定在  $m$  维空间的某一点集  $P$  内给定  $m$  个变量  $t_1, t_2, \dots, t_m$  的  $n$  个函数 (这里的  $m$  并不与  $n$  有联系):

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \quad (5)$$

或更简单地记成

$$x_1 = \varphi_1(P), \dots, x_n = \varphi_n(P), \quad (5a)$$

此处的  $P$  表示  $m$  维空间的点  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ . 此外, 再假定当点  $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$  在集  $P$  的范围内变动时, 与它对应的, 坐标为 (5)[或 (5a)] 的  $n$  维点  $M$  总不越出函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(M)$  的定义域,  $n$  维集  $M$  的范围.

于是变量  $u$  就可以看成是借变量  $x_1, \dots, x_n$  为媒介的自变量  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (在集  $P$  内) 的**复合函数**:

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m));$$

<sup>①</sup>一切几何术语, 在使用时其意义与通常不同的, 我们曾都把它们放在引号内, 如: “点”、“距离”、“域”等等. 以后, 我们就不再这样做了.

<sup>21)</sup>这里适时指出, (45 目的脚注 13) 引入的) 函数定义的更为宽泛的形式由于下述而显得方便, 即当过渡到  $n$  元函数时仍保持不变: 对于集  $X$  的每一个点  $x$ , 有且仅有集  $Y$  的一个严格确定的点和它对应的任何一个规则, 称为在集  $X$  上定义, 且在 (数) 集  $Y$  内取值的函数. 函数的定义域  $X$  可以是直线上的一个区间, 或者是  $n$  维空间中的一个区域 —— 我们分别把这些函数称为一元实变函数或  $n$  元实变函数.



$u$  是诸函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  的函数 [参阅 51]<sup>22)</sup>.

这种依函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  以及函数  $f$  来确定复合函数的过程 (如同在最简单的一元函数的情形一样) 称为叠置.

多元函数的类别首先需要直接处理的是很少的. 经常, 它总是借着叠置一元初等函数 [48, 50] 及下列二元函数:

$$z = x \pm y, \quad z = xy, \quad z = \frac{x}{y}, \quad z = x^y$$

(即四则运算及所谓幂指函数) 所组成.

由自变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  及常量出发, 重复使用四则运算, 首先导出整多项式 (有理整函数):

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} C_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n} \textcircled{1}$$

及二整多项式的商 (有理分式函数):

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}}.$$

借助于一元初等函数更可导出其他的函数, 例如:

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx \text{ 等等}.$$

46 内所作关于一元函数的解析表示法的那个附注在此处也可以重述一次.

**165. 多元函数的极限** 假定函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  是在具有聚点  $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$  的某一点集  $M$  内定义的.

仿照一元函数的极限的定义, 常说函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  当变量  $x_1, \dots, x_n$  依次各趋于  $a_1, \dots, a_n$  时以数  $A$  为极限, 如果对于任一数  $\varepsilon > 0$  能找出这种  $\delta > 0$ , 只要

$$|x_1 - a_1| < \delta, \quad \dots, \quad |x_n - a_n| < \delta,$$

就能使

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

<sup>①</sup>我们知道, 记号  $\sum$  表示着同一类型的项的和. 在此处我们有加数依赖于几个标号的更复杂的情形.

<sup>22)</sup>词组“函数的函数”作为说法“复合函数”的同义词完全可以推广到日常的数学语言, 然而这个词组毕竟是模棱两可的. 事实上叠置的定义域与函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  的定义域重合, 即是变量值  $t_1, \dots, t_m$  的某个集合. 与说法“ $x$  的函数”相似的说法“函数的函数”导致这样的意义: 研究定义在一些函数的集合上定义的函数. 实际上是在泛函分析和变分法中研究这样的对象, 它被称为泛函. 特别地, 上述说明了为什么术语“函数的函数”在现今的教科书中仅仅是提到, 实际上并不使用.



在这时, 假定点  $(x_1, \dots, x_n)$  是取自  $\mathcal{M}$  而且异于  $(a_1, \dots, a_n)$ . 因此, 对于集  $\mathcal{M}$  中位于点  $M_0$  的充分小邻域

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \dots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

之内但除去这点本身 (若它属于  $\mathcal{M}$ ) 的一切点, 这个关于函数  $f$  的不等式应当成立.

函数的极限记成:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, \dots, x_n). \quad (6)$$

把点  $(x_1, \dots, x_n)$  及  $(a_1, \dots, a_n)$  记成  $M$  及  $M_0$ , 则刚才引入的定义可以用几何的言语重述成: 数  $A$  称为函数  $f(M)$  当点  $M$  趋于  $M_0$  时 (或在点  $M_0$  处) 的极限, 如果对于任一数  $\varepsilon > 0$  有这种数  $r > 0$  存在, 只要距离  $\overline{M_0 M} < r$  就能使

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

和上面一样, 须假定  $M$  取自  $\mathcal{M}$  但异于  $M_0$ . 这样, 对于集  $\mathcal{M}$  中位于  $M_0$  的充分小的球形邻域内但除去这点本身的一切点, 这个关于函数  $f$  的不等式应当成立.

函数的极限的记法, 也可使适应于这定义:

$$A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M). \quad (6^*)$$

由 [162] 关于两种类型的邻域的讨论可以立刻明白, 上述两种定义有着同等效力.

仿此可建立函数的无穷极限的概念. 在  $A = +\infty$  或  $-\infty$  的场合, 不等式

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$$

只要各换成不等式

$$f(x_1, \dots, x_n) > E$$

或

$$f(x_1, \dots, x_n) < -E$$

就是了, 式中的  $E$  是预先任意取定的正数.

末了将讲到当自变量  $x_1, \dots, x_n$  中的某几个趋于无穷极限的情形.

可以把域  $\mathcal{M}$  的聚点  $M_0(a_1, \dots, a_n)$  的概念拓广至这点的一切坐标 (或其中的几个) 是无穷的场所<sup>①</sup>.

例如, 若在域  $\mathcal{M}$  中能找出一切坐标都可任意大 (正) 的点, 则点  $(+\infty, \dots, +\infty)$  就成为  $\mathcal{M}$  的聚点.

<sup>①</sup>在这场合, 点  $M_0$  称为非正常点.



在这一假定下就说, 函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  对于一切变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  都趋于  $+\infty$  以数  $A$  为极限, 如果对于任一数  $\varepsilon > 0$  有这种数  $\Delta > 0$  存在, 只要

$$x_1 > \Delta, x_2 > \Delta, \dots, x_n > \Delta$$

就能使

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

它记成:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow +\infty}} f(x_1, \dots, x_n).$$

特别情形, 回到在 [160] 末讲过的变量  $x_{m,n}$  常说, 这变量当序号  $m$  及  $n$  都无限增大时以  $A$  为极限, 如果对于任一  $\varepsilon > 0$  能找出这种序号  $N$ , 使当  $m > N, n > N$  时有

$$|x_{m,n} - A| < \varepsilon.$$

这记成:

$$A = \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty}} x_{m,n} \quad \text{或简单地} \quad A = \lim x_{m,n}.$$

容易理解, 当  $A = +\infty$  或  $-\infty$  时应该怎样处理.

**166. 变成整序变量的情形** 考察  $n$  维空间中的点列

$$\{M_k(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

若当  $k \rightarrow +\infty$  时距离

$$\overline{M_0 M_k} \rightarrow 0, \tag{7}$$

我们就说, 这点列收敛于极限点  $M_0(a_1, \dots, a_n)$ .

代替条件 (7), 也可以要求点  $M_k$  的坐标各别地趋于点  $M_0$  的对应的坐标, 即要求

$$x_1^{(k)} \rightarrow a_1, \dots, x_n^{(k)} \rightarrow a_n. \tag{8}$$

严格些说, 由 [161] 内所证关于两种类型的邻域的论点就可推得这两种定义是相当的. 实际上, 条件 (7) 表示着, 不论数  $r > 0$  怎样, 点  $M_k$  在  $k$  充分大时须满足不等式

$$\overline{M_0 M_k} < r,$$

即落在中心在点  $M_0$  而半径为  $r$  的 (开) 球内; 而条件 (8) 则要求, 不论数  $\delta > 0$  怎样, 所说的点 —— 仍在  $k$  为充分大时 —— 须满足不等式

$$|x_1^{(k)} - a_1| < \delta, \dots, |x_n^{(k)} - a_n| < \delta,$$



即包含在以  $M_0$  为中心的 (开) 长方体

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \cdots; a_n - \delta, a_n + \delta) \text{ 内.}$$

今设点  $M_0(a_1, \cdots, a_n)$  是  $n$  维空间内某一集  $M$  的聚点. 则从  $M$  内常可以选出异于  $M_0$  的点列:  $\{M_k\}$ , 它们收敛于极限点  $M_0$ .

为着证明, 我们给定正整序变量  $r_k \rightarrow 0$ . 依聚点的定义 [163], 在点  $M_0$  的每一个半径为  $r_k$  的球形邻域内必能找出集  $M$  的 (异于  $M_0$  的) 点  $M_k$ .  $\{M_k\}$  显然就是所求的点列.

今可以写出使极限等式 (6)[或 (6\*)] 存在的必要且充分的条件如下: 若在  $M$  内选出异于  $M_0$  而收敛于  $M_0$  的点列  $\{M_k\}$ , 则由对应的函数值所组成的数列  $\{f(M_k)\}$  恒收敛于  $A$ .

**必要性** 设 (6\*) 成立, 且依给定的  $\varepsilon > 0$  已找出对应于它的  $r > 0$ , 使符合于前一目的定义. 若点列  $\{M_k\}$  收敛于  $M_0$ , 则当  $k$  充分大时, 将有

$$\overline{M_0 M_k} < r,$$

而这就导致不等式

$$|f(M_k) - A| < \varepsilon,$$

这就证明了  $f(M_k) \rightarrow A$ .

**充分性** 今假定上述的条件已满足. 要证明有符合于前一目的定义的等式 (6\*) 存在, 可先假设其反面. 那时, 对于某一数  $\varepsilon > 0$  将不存在对应的  $r$ , 即不论取怎样的数  $r > 0$ , 在  $M$  内恒能找出这种 (异于  $M_0$ ) 的点  $M'$ , 使同时有

$$\overline{M_0 M'} < r \quad \text{但} \quad |f(M') - A| \geq \varepsilon.$$

取正的整序变量  $r_k \rightarrow 0$ , 依次取数  $r_k$  作为  $r$ ; 则对每一  $r_k$  必能找出对应的 (异于  $M_0$  的) 点  $M_k$ , 使

$$\overline{M_0 M_k} < r_k \quad \text{但} \quad |f(M_k) - A| \geq \varepsilon.$$

这样构成的点列  $\{M_k\}$  收敛于  $M_0$ , 而同时数列  $\{f(M_k)\}$  却不以  $A$  为极限, 违反了条件. 这矛盾就证明了我们的命题.

读者该已明了, 上述条件给出了函数的极限定义的 (用“序列的语言”的) 另一形式.



这样, 即使对于多元函数, 也能把函数的极限的问题变成整序变量的极限问题, 参阅 [53]. 这结果容易拓广到当数  $A, a_1, \dots, a_n$  或其中几个是无穷的情形.

已证明的事实使我们可以把第一章极限论内的一切基本概念及所有导出的命题拓广到新型的极限上去——正好像在 55 内对于一元函数所曾作过的那样.

**167. 例题** 1) 首先利用积的极限的定理, 容易证明

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} C x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} = C a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n},$$

式中的  $C, a_1, \dots, a_n$  是任意的实数, 而  $\nu_1, \dots, \nu_n$  是非负整数. 由此, 若用  $P(x_1, \dots, x_n)$  表示有理整函数 [164]

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n},$$

依和的极限定理, 也就得出

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} P(x_1, \dots, x_n) = P(a_1, \dots, a_n).$$

仿此, 对于有理分式函数 [164]

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \dots, \mu_n} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}},$$

依商的极限的定理, 有

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} Q(x_1, \dots, x_n) = Q(a_1, \dots, a_n),$$

当然, 要附一条件, 只有分母在点  $(a_1, \dots, a_n)$  处不为 0 时才能成立.

2) 考察当  $x > 0$  及任意  $y$  时的幂指函数  $x^y$ . 若  $a > 0$  而  $b$  是任一实数, 就有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} x^y = a^b.$$

实际上, 若取任意的整序变量  $x_n \rightarrow a$  及  $y_n \rightarrow b$ , 则 [比较 78]

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \cdot \ln x_n} \rightarrow e^{b \cdot \ln a} = a^b,$$

而这——用“序列的语言”——就证实了所要求的结果.

3) 设已知整序变量  $x_n$  及  $y_n$  依次有极限  $a$  及  $b$ , 今要讨论由它们所组成的式子

$$x_n \pm y_n, \quad x_n \cdot y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \text{ 或 } x_n^{y_n}$$



的极限问题. 对于约定由记号:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

表示的所谓不定式的情形, 我们知道 [31、78], 极限可以全然不存在, 即使存在的话, 则——对于同样的  $a$  及  $b$ ——极限值仍可视整序变量  $x_n$  及  $y_n$  变动时的特别规律而有不同的数值.

若回想起二元函数的用“序列的语言”的极限定义, 则可知上述各型的“不定性”是与下列极限:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x - y), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm\infty}} x \cdot y, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x}{y}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pm\infty}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} x^y,$$

不存在的事实关联着的.

4) 讨论极限:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(这函数是定义于全平面内, 仅点  $x = 0, y = 0$  除外).

若取二部分点列

$$\left\{ M_k \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\} \quad \text{及} \quad \left\{ M'_k \left( \frac{2}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\},$$

它们显然都收敛于点  $(0,0)$ , 则对于一切的  $k$  都有

$$f(M_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{而} \quad f(M'_k) = f\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{5}.$$

由此已可推得, 上述极限并不存在.

仿此可证极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

也不存在.

5) 反之, 极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

存在着. 这由不等式

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x|$$

就立刻推得.

完全同样地可证

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$



**168. 累次极限** 上面所考察的函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的极限, 是当函数的一切变元同时趋于各自的极限时所得出的, 除此以外, 尚需论及另一种极限, 它是由诸变元依某种次序相继地各别趋于极限而得出的. 前者称为  $n$ 重极限(在  $n = 2, 3, \dots$  时称为二重极限、三重极限, 等等). 后者称为累次极限.

为简单起见, 以讨论二元函数  $f(x, y)$  为限. 假设变量  $x, y$  的变动区域  $\mathcal{M}$  是这样:  $x$  可以(与  $y$  无关地)取集  $\mathcal{X}$  内的任一数值,  $\mathcal{X}$  以不属于它的点  $a$  作为聚点, 同样,  $y$  可以(与  $x$  无关地)在集  $\mathcal{Y}$  内变动着,  $\mathcal{Y}$  以不属于它的点  $b$  作为聚点. 这样区域  $\mathcal{M}$  可以记成  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . 例如

$$(a, a + H; b, b + K) = (a, a + H) \times (b, b + K).$$

若对  $\mathcal{Y}$  内的任一固定的  $y$ , 函数  $f(x, y)$ (它将只是  $x$  的函数)在  $x \rightarrow a$  时有极限存在, 则这极限, 一般地说, 将与预先固定的  $y$  值有关:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y).$$

然后可以讨论函数  $\varphi(y)$  在  $y \rightarrow b$  时的极限:

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y),$$

这就是两个累次极限之一. 若趋于极限的过程由相反的次序进行, 就得出另一累次极限:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

不要以为这些累次极限必定是相等的. 例如, 若在域  $\mathcal{M}(0, +\infty; 0, +\infty)$  内令

$$1) f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, \text{ 并取 } a = b = 0, \text{ 则得:}$$

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = y - 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

但同时却有

$$\psi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x + 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1.$$

还可以碰到累次极限之一存在着, 而另一个却不存在的情形. 例如, 对于函数:

$$2) f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}, \text{ 或}$$

$$3) f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}$$

都是累次极限  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f$  存在, 而累次极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f$  不存在(在后一例内甚至单重极限  $\lim_{y \rightarrow 0} f$  已不存在).



这些简单的例子说明, 在交换关于两不同变量的极限过程时应该多么谨慎小心: 错误的推断就是常常发生于这种不合法的互换. 同时, 分析上的许多重要问题却正好与极限过程的互换有关, 但是自然, 每一次互换的合法性是应当特为证明的.

下面的定理打开了建立这种手续的一条路, 它同时又建立了二重极限与累次极限之间的关系.

**定理** 若 1) (有限或无穷) 二重极限

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$$

存在, 2) 对  $\mathcal{Y}$  内的任一  $y$  有依  $x$  的 (有限的) 单重极限

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

存在, 则累次极限

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

必存在, 且就等于二重极限.

当  $A, a$  及  $b$  为有限数时来证明这定理. 根据 165 的定义, 依给定的  $\varepsilon > 0$ , 必能找出那种  $\delta > 0$ , 只有  $|x - a| < \delta$  及  $|y - b| < \delta$  (且这时  $x$  取自  $\mathcal{X}$  而  $y$  取自  $\mathcal{Y}$ ), 就能使

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \quad (9)$$

现在固定  $y$ , 使满足不等式  $|y - b| < \delta$ , 而后在不等式 (9) 内使  $x \rightarrow a$  以求极限. 因为根据 2), 此时  $f(x, y)$  趋于极限  $\varphi(y)$ , 故得

$$|\varphi(y) - A| \leq \varepsilon.$$

回忆此处的  $y$  是  $\mathcal{Y}$  内的任意数, 仅受条件  $|y - b| < \delta$  的限制, 就得结论

$$A = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y),$$

此即所要证的.

若与条件 1) 及 2) 同时又有: 对  $\mathcal{X}$  内的任一  $x$  有依  $y$  的 (有限的) 单重极限

$$\psi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

存在, 则由刚才所证明的, 但将  $x$  与  $y$  互相调换, 即可推得另一累次极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

也存在, 而且也等于那同一数  $A$ : 在这情形二累次极限相等.



由已证明的定理立刻就知道, 在例题 1) 及 2) 内二重极限并不存在 (何故?). 但这事实也容易直接证明.

反之, 在例题 3) 内, 二重极限却存在着: 由不等式

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$$

看出它等于 0. 这例题指出, 由定理的条件 1) 并不能导出条件 2).

然而, 不要以为二重极限的存在是二累次极限相等的必要条件: 在前一段的例题 4) 内, 虽然没有二重极限, 但累次极限却都存在而且都等于 0.

## §2. 连续函数

**169. 多元函数的连续性及间断** 设函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  定义于  $n$  维空间的某一点集  $M$ , 又设  $M'(x'_1, \cdots, x'_n)$  是这集的聚点并且属于这集.

若等式

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x'_1 \\ \cdots \\ x_n \rightarrow x'_n}} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x'_1, \cdots, x'_n) \quad (1)$$

成立, 就说函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  在点  $M'(x'_1, \cdots, x'_n)$  处是连续的; 否则, 就说函数在点  $M'$  处有间断.

函数在点  $M'$  处的连续性可用“ $\varepsilon$ - $\delta$  的语言”表示如下 [165]; 对任一给定的  $\varepsilon > 0$ , 应能找出这样的  $\delta > 0$ , 只要

$$|x_1 - x'_1| < \delta, \cdots, |x_n - x'_n| < \delta, \quad (2)$$

就能使

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x'_1, \cdots, x'_n)| < \varepsilon; \quad (3)$$

或另一种说法: 对  $\varepsilon > 0$  应能找出这样的  $r > 0$ , 只要距离

$$\overline{MM'} < r,$$

就能使

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon.$$

在这时点  $M(x_1, \cdots, x_n)$  假定是属于集  $M$  的, 特别地还可以重合于  $M'$ . 正因为函数在点  $M'$  处的极限恰等于在这点处的函数值, 所以通常  $M$  必须异于  $M'$  的要求在此处就不需要了.

把差  $x_1 - x'_1, \cdots, x_n - x'_n$  看成自变量的增量  $\Delta x'_1, \cdots, \Delta x'_n$  而把差

$$f(x_1, \cdots, x_n) - f(x'_1, \cdots, x'_n)$$



看成是函数的增量, 就可以 (像在一元函数的情形那样) 说: 若诸自变量的增量是无穷小时, 对应的函数的增量也是无穷小, 则函数是连续的.

上面所确定的函数在点  $M'$  处的连续性可以说是对变量  $x_1, \dots, x_n$  全体的连续性. 若它成立, 那么同时就有

$$\begin{aligned}\lim_{x_1 \rightarrow x'_1} f(x_1, x'_2, \dots, x'_n) &= f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x'_1 \\ x_2 \rightarrow x'_2}} f(x_1, x_2, x'_3, \dots, x'_n) &= f(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)\end{aligned}$$

等等, 因为此处我们只是按照一些特殊规律将  $M$  趋于  $M'$ . 换言之, 这函数对每一变量  $x_i$ , 对每一对变量  $x_i, x_j$  等等也都是连续的.

我们已经遇见过连续函数的例题. 如, 在 166, 1) 内已证明  $n$  元有理整函数及有理分式函数在  $n$  维空间的一切点处的连续性 (对于分式函数要除去使分母等于 0 的那些点). 又在该目的 2) 内, 已证明了幂指数函数  $x^y$  在右半平面的一切点 ( $x > 0$ ) 处的连续性.

若再考察由分式

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0),$$

在除去原点以外的全平面内所确定的函数, 且再令  $f(0, 0) = 0$ , 就得间断的例子. 这间断就在原点, 因为 [167, 4)] 当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时函数的极限并不存在.

在此处我们碰到一种有趣的情况. 所考察的函数  $f(x, y)$  虽然同时对二变量而论, 在点  $(0, 0)$  处是不连续的, 但若分别地当作  $x$  或  $y$  的函数而考察它, 则由于  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ , 它在这点处仍是连续的. 可是这也并不值得惊异, 只要注意到, 当谈及个别地关于  $x$  或  $y$  的连续性时, 我们就只考虑沿着  $x$  轴或  $y$  轴趋于点  $(0, 0)$ , 而不考虑无限多种其他趋于  $(0, 0)$  的规律了.

若函数  $f(M)$  当  $M$  趋于  $M'$  时根本没有确定的有限极限

$$\lim_{M \rightarrow M'} f(M)$$

存在, 则说在点  $M'$  处函数有间断, 甚至当函数在点  $M'$  处没有定义时也这样说 [参阅在 66 内的附注].

函数的间断点不仅可以是孤立点, 像前面例题内所举出的, 而且也可以充满于一线、一面等等. 如二元函数

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

都有间断: 前者是沿着直线  $y = \pm x$ , 而后者是沿着圆周  $x^2 + y^2 = 1$ . 对于三元函数

$$\frac{x + y + z}{xy - z}, \quad \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$$

而论, 前者的间断点充满于双曲抛物面  $z = xy$  上, 而后者的间断点则充满于锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  上.



**170. 连续函数的运算** 很容易叙述并证明关于二连续函数的和、差、积、商的连续性的定理 [参阅 67]; 这留给读者去做.

我们只讨论关于连续函数叠置的定理. 如同在 [164] 那样, 我们假定, 除去在  $n$  维点  $M(x_1, \dots, x_n)$  所成的集  $\mathcal{M}$  内已经给定的函数  $u = f = f(x_1, \dots, x_n)$  以外, 我们再在  $m$  维点  $P(t_1, \dots, t_m)$  所成的某一集  $\mathcal{P}$  内给出  $n$  个函数

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_m), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_m), \quad (4)$$

而且假设坐标为 (4) 的点  $M$  不越出集  $\mathcal{M}$  的范围之外.

**定理** 若一切函数  $\varphi_i(P) (i = 1, \dots, n)$  在  $\mathcal{P}$  内的一点  $P'(t'_1, \dots, t'_m)$  处都是连续的, 而函数  $f(M)$  在坐标为

$$x'_1 = \varphi_1(t'_1, \dots, t'_m), \quad \dots, \quad x'_n = \varphi_n(t'_1, \dots, t'_m)$$

的对应点  $M'(x'_1, \dots, x'_n)$  处也是连续的, 则复合函数

$$u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m)) = f(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P))$$

在点  $P'$  处也是连续的.

实际上, 首先对  $\varepsilon > 0$  确定那样的数  $\delta > 0$ , 使由 (2) 即可推得 (3) (由于函数  $f$  的连续性). 然后再对数  $\delta$  (由于函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  的连续性) 找出这样的数  $\eta > 0$ , 使当

$$|t_1 - t'_1| < \eta, \dots, |t_m - t'_m| < \eta \quad (5)$$

时成立不等式

$$|x_1 - x'_1| = |\varphi_1(t_1, \dots, t_m) - \varphi_1(t'_1, \dots, t'_m)| < \delta, \dots$$

$$|x_n - x'_n| = |\varphi_n(t_1, \dots, t_m) - \varphi_n(t'_1, \dots, t'_m)| < \delta.$$

于是当 (5) 成立时就也有

$$\begin{aligned} & |f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| \\ &= |f(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m)) \\ &\quad - f(\varphi_1(t'_1, \dots, t'_m), \dots, \varphi_n(t'_1, \dots, t'_m))| < \varepsilon, \end{aligned}$$

这就证明了我们的命题.

**171. 在域内连续的函数 · 布尔查诺 — 柯西定理** 若函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  定义于  $n$  维空间的某一点集  $\mathcal{M}$  且在  $\mathcal{M}$  的每一聚点都是连续的, 我们就说, 函数  $f$  在  $\mathcal{M}$  中是连续的. 以后我们的讨论经常总是限于集  $\mathcal{M}$  是开域或闭域 [163] 的情形, 好像以前我们只在区间内考察一元连续函数那样.



今转而研究在  $n$  维空间的某一域中为连续的多元函数的性质. 它们完全类似于在区间内为连续的一元函数的性质 (第二章 §5).

为了简明起见, 我们只限于叙述二自变量的情形. 这可以毫无困难地立刻推广至一般情形. 但是我们仍要随时指出在推广时若干应注意之点.

现在叙述一定理, 它与一元函数的布尔查诺 - 柯西第一定理 [39] 类似.

**定理** 设函数  $f(x, y)$  在某一连通域  $D$  中有定义而且连续. 若在这域中二点  $M_0(x_0, y_0)$  及  $M_1(x_1, y_1)$  的函数值异号:

$$f(x_0, y_0) < 0, \quad f(x_1, y_1) > 0,$$

那么在这域中就能找出一一点  $M'(x', y')$ , 在该处函数等于 0:  $f(x', y') = 0$ .

**证明** 我们把它变成一元函数的情形来完成定理的证明.

由于域  $D$  的连通性, 点  $M_0$  与  $M_1$  可用全部在  $D$  中的连续曲线 (就是用折线) 连接起来 (图 97). 如果依次选取折线的顶点, 则我们得到两种可能, 或者在某个顶点处函数化为 0 —— 这就证明了定理, 或者不是这样. 在后一种情形, 我们可以找到这样一段折线, 函数在它的两个端点取异号的值. 改变点的记号, 就认为  $M_0$  和  $M_1$  恰恰是这段折线的两个端点. 这段折线的方程为如下形状 [161]:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

如果点  $M(x, y)$  沿着这段折线移动, 则我们原来的函数  $f(x, y)$  就变成一个变量  $t$  的复合函数:

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

它显然是连续函数 (根据前一段的定理) 这是因为函数  $f(x, y)$  及线性函数  $x = x_0 + t(x_1 - x_0), y = y_0 + t(y_1 - y_0)$  都是连续的. 而对于函数  $F(t)$  我们有:

$$F(0) = f(x_0, y_0) < 0, \quad F(1) = f(x_1, y_1) > 0;$$

将 80 中证明的定理应用于一元函数  $F(t)$ , 我们得出, 0 与 1 之间必有某一数值  $t'$  使  $F(t') = 0$ . 回忆函数  $F(t)$  的定义, 于是我们就有

$$f(x_0 + t'(x_1 - x_0), y_0 + t'(y_1 - y_0)) = 0.$$

点  $M'(x', y')$  [其中  $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0), y' = y_0 + t'(y_1 - y_0)$ ] 也就是所要求的点.

由此如同 82 一样, 得出布尔查诺 - 柯西第二定理, 但它也可以立刻证明的.

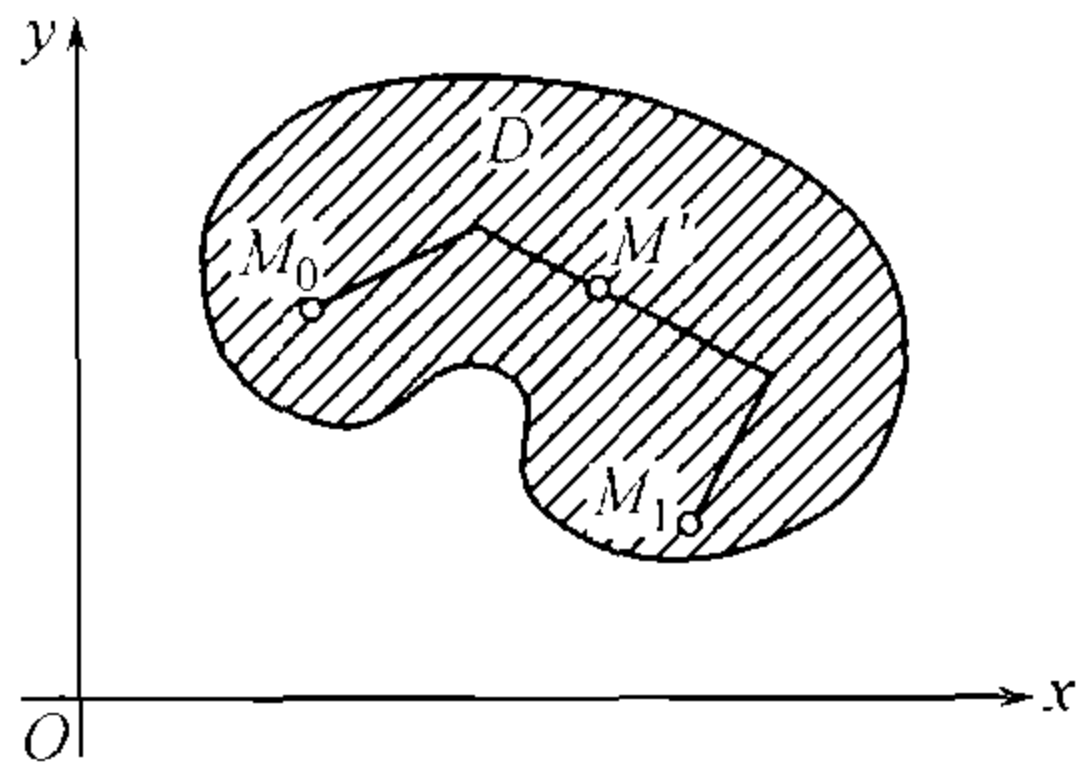


图 97



读者可以看出, 要推广到  $n(n > 2)$  维空间并无任何困难, 因为  $n$  维空间的连通域中的两点也可以用“连续曲线”连接, 沿着这曲线, 函数就只依赖于一个参变量, 余类推.

**172. 布尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理** 为着以后叙述上的需要, 我们必须把布尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 [41] 推广到任意维空间的点列去; 像通常那样, 我们限于讨论“平面的”情形.

**引理 3** 由任一有界点列

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n), \dots$$

中恒能选出收敛于极限点的部分点列

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \dots, M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \dots$$

$$(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots, n_k \rightarrow +\infty).$$

**第一个证明** 我们仿照在“线性的”情形 [41] 中曾用过的办法来进行.

由于所给的点列是有界的, 就能找出把它完全包含在内的 (有限) 矩形  $[a, b; c, d]$ . 同时平分  $x$  的区间  $[a, b]$  与  $y$  的区间  $[c, d]$ :

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \quad \text{及} \quad \left[c, \frac{c+d}{2}\right], \left[\frac{c+d}{2}, d\right].$$

把任一第一类半区间与任一第二类半区间相配合, 就得到四个矩形:

$$(I) \quad \left[a, \frac{a+b}{2}; c, \frac{c+d}{2}\right], \quad (II) \quad \left[\frac{a+b}{2}, b; c, \frac{c+d}{2}\right],$$

$$(III) \quad \left[a, \frac{a+b}{2}; \frac{c+d}{2}, d\right], \quad (IV) \quad \left[\frac{a+b}{2}, b; \frac{c+d}{2}, d\right],$$

它们是由基本矩形  $[a, b; c, d]$  分解而成的 (图 98).

至少在这四部分之一内要含有所给点列的无穷多个点, 因为不然的话, 在全矩形  $[a, b; c, d]$  内就将只含有有限个点, 而这是不可能的. 设  $[a_1, b_1; c_1, d_1]$  就是 (I)、(II)、(III)、(IV) 之中含有所给点列的无穷多个点的那一个矩形 (若这种矩形有几个, 就取其中之一).

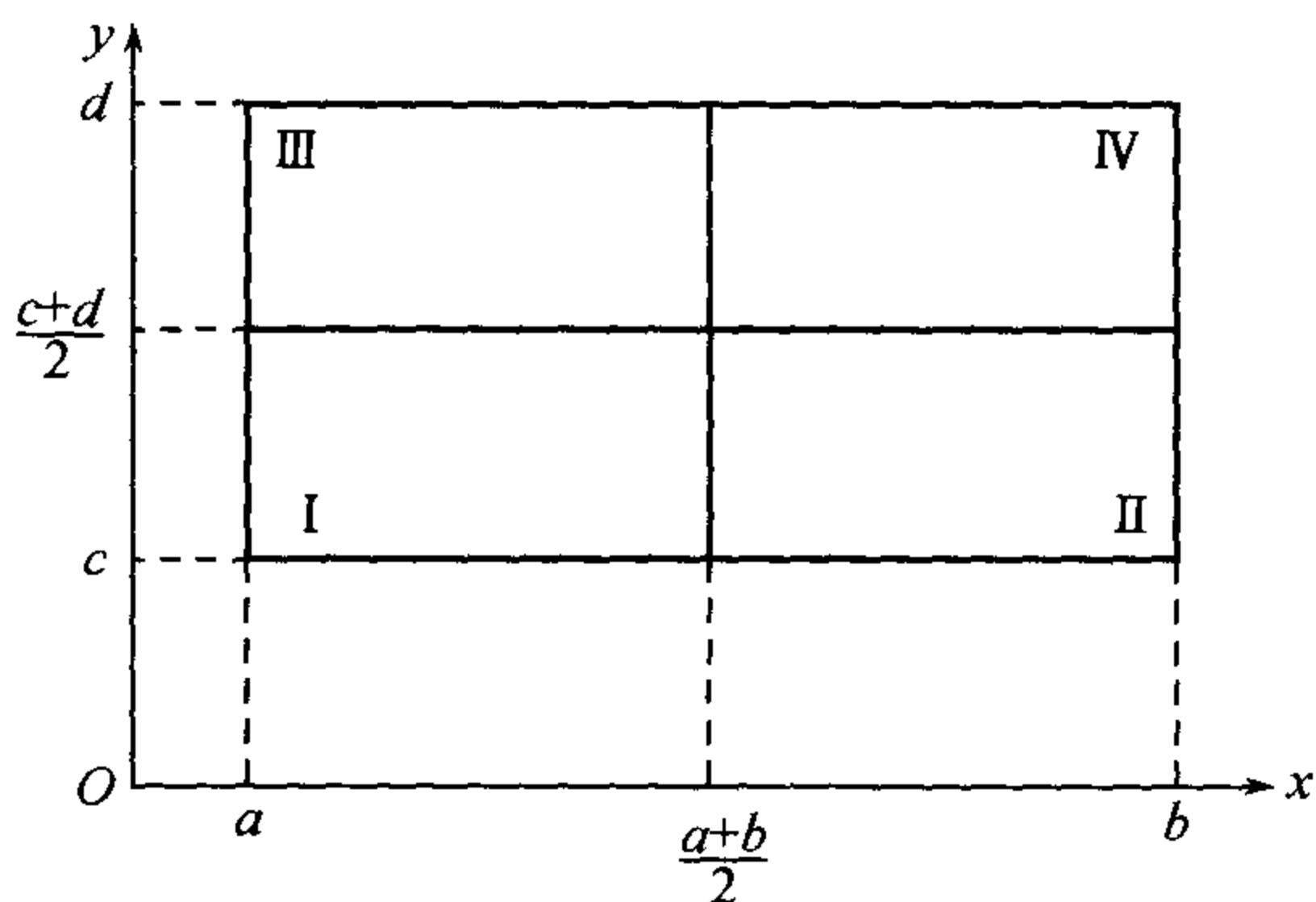


图 98



把这矩形再分解成四个更小的矩形, 并在其中取出含有所给点列的无穷多个点的那一个; 用  $[a_2, b_2; c_2, d_2]$  表示它.

我们想象着把这种逐步分解矩形的手续无限地继续下去. 在第  $k$  次分解时选取矩形  $[a_k, b_k; c_k, d_k]$  的条件仍是: 在它之内含有无穷多个点  $M_n$ . 在  $k \rightarrow +\infty$  时, 这矩形的度量

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}, \quad d_k - c_k = \frac{d - c}{2^k}$$

趋于 0.

现在把内含区间的引理 [38] 分别应用于  $x$  的区间的序列  $\{[a_k, b_k]\}$  及  $y$  的区间的序列  $\{[c_k, d_k]\}$ . 由是推得区间的两端  $a_k$  及  $b_k$ , 以及  $c_k$  及  $d_k$ , 趋于公共的极限:

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x} \quad \text{及} \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}. \quad (6)$$

可以说, 矩形的序列  $\{[a_k, b_k; c_k, d_k]\}$  “凝聚” 于点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$ .

现在, 取落在矩形  $[a_1, b_1; c_1, d_1]$  内的点列中的任一点作为  $M_{n_1}$ , 再依次地选出点  $M_{n_2}, M_{n_3}, \dots$ ——一般, 我们照这样做法选取点列中序号在以前选出者的后面, 而同时又含在第  $k$  个矩形  $[a_k, b_k; c_k, d_k]$  之内的任一点作为  $M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})$ . 这是办得到的, 因为其中的每一矩形都含有无穷多个点  $M_n$ .

因为

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \text{及} \quad c_k \leq y_{n_k} \leq d_k,$$

故由于 (6), 有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \bar{y},$$

于是所选出的部分点列  $\{M_{n_k}\}$  就收敛于极限点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  [166].

**第二个证明** 然而, 改用 41 内已证明的关于线性序列的定理来处理还可以更为简单. 若所给序列中的点包含在有限矩形  $[a, b; c, d]$  内, 则

$$a \leq x_n \leq b, \quad c \leq y_n \leq d \quad (n = 1, 2, \dots).$$

首先把 41 的定理应用于序列  $\{x_n\}$ , 选出收敛于某一极限  $\bar{x}$  的部分序列  $\{x_{n_k}\}$ . 这样, 对于部分点列

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \dots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \dots$$

来说, 它的第一坐标已有极限. 再把上述定理应用于第二坐标的序列  $\{y_{n_k}\}$ , 并选出趋于某一极限  $\bar{y}$  的部分序列  $\{y_{n_{k_m}}\}$ . 那么, 部分点列

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}), (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \dots, (x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}), \dots$$



显然将趋于极限点  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

在这里须注意到, 两种论证都容易推广到  $n(n > 2)$  维空间. 例如, 在第一个证明中, 仅所给的长方域分解成部分长方域的数目有变动, 如果每一确定它的区间都被二等分的话; 在一般情形, 这种区间有  $n$  个, 而分成的部分域总共有  $2^n$  个.

**173. 魏尔斯特拉斯定理** 用已证明的定理首先可以证明二元函数的魏尔斯特拉斯第一定理:

**定理** 若函数  $f(x, y)$  是在有界闭域  $\mathcal{D}$  <sup>①</sup> 中定义着而且连续的, 则它必是有界的, 即它的一切数值都包含在二个有限界限数值之间:

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

**证明** (用反证法) 与 84 的推理完全类似. 设函数  $f(x, y)$  当  $(x, y)$  在  $\mathcal{D}$  中变动时是无界的. 那么, 对于任何  $n$ , 在  $\mathcal{D}$  中就能找出这样的点  $M_n(x_n, y_n)$ , 使

$$|f(x_n, y_n)| > n. \quad (7)$$

由 172 的定理, 在有界的点列  $\{M_n\}$  内就可以选出收敛于极限点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  的部分点列  $\{M_{n_k}\}$ .

注意, 这点  $\overline{M}$  必须属于域  $\mathcal{D}$ . 否则, 所有的点  $M_{n_k}$  就必都与  $\overline{M}$  不同, 而点  $\overline{M}$  实际上就将成为不属于域  $\mathcal{D}$  的聚点, 但由于  $\mathcal{D}$  是闭域, 这是不可能的 [参阅 163].

因为函数的点  $\overline{M}$  是连续的, 故应有

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(\overline{M}) = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

而这是与 (7) 矛盾的.

魏尔斯特拉斯第二定理的叙述及证明 (引用前一定理) 完全同 85 里的一样.

须注意到——在论证上没有变动——魏尔斯特拉斯的两定理都能适用于当函数在任一有界闭集  $\mathcal{M}$  内为连续的情形 (虽然  $\mathcal{M}$  并不一定是域.)

像在一元函数的情形那样, 对于集  $\mathcal{M}$  内有定义而且有界的函数  $f(x, y)$ , 函数值在  $\mathcal{M}$  内的上确界与下确界之差称为它在这集内的振幅. 若  $\mathcal{M}$  是有界闭集 (特别情形, 若  $\mathcal{M}$  是有界闭域), 并且函数  $f$  在其内是连续的, 则振幅就是它的最大值与最小值之差.

**174. 一致连续性** 我们知道, 函数  $f(x)$  在其定义集  $\mathcal{M}$  内一定点  $(x_0, y_0)$  处的连续性可用“ $\varepsilon$ - $\delta$  的语言”表达为: 对任一  $\varepsilon > 0$ , 应能找出这样的  $\delta > 0$ , 对于  $\mathcal{M}$  内的任一点  $(x, y)$ , 仅需

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

<sup>①</sup>这里  $\mathcal{D}$  也可以是非连通域.



就能使不等式

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

成立.

今设函数  $f(x, y)$  在整个集  $M$  内是连续的; 就发生这样一个问题, 能否对所给的  $\varepsilon > 0$  找出同时适用于  $M$  内一切点  $(x_0, y_0)$  的 (合于上述意义的)  $\delta > 0$ . 若这是可能的 (对任何  $\varepsilon$ ), 便说, 函数在  $M$  内为一致连续.

**康托定理** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $D$  中为连续, 则它在  $D$  中也是必为一致连续的.

**证明** (用反证法) 假设对某一数  $\varepsilon > 0$ , 不存在同时适用于区域  $D$  中一切点  $(x_0, y_0)$  的  $\delta > 0$ .

试取趋于 0 的正数序列

$$\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \cdots > 0, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

因为诸  $\delta_n$  中没有一个是 (在上述意义下) 同时适用于区域  $D$  中的一切点  $(x_0, y_0)$ , 故对于每一  $\delta_n$ , 必能在  $D$  中找出  $\delta_n$  对于它不能适用的一个具体的点  $(x_n, y_n)$ . 这就是说, 在  $D$  中有点  $(x'_n, y'_n)$  存在, 它使得

$$|x'_n - x_n| < \delta_n, \quad |y'_n - y_n| < \delta_n,$$

而

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x_n, y_n)| \geq \varepsilon. \quad (8)$$

依据布尔查诺 - 魏尔斯特拉斯定理, 从有界点列  $\{(x_n, y_n)\}$  中将能选出部分点列  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ , 使  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ ,  $y_{n_k} \rightarrow \bar{y}$ , 并且极限点  $(\bar{x}, \bar{y})$  必属于  $D$  (由于它是闭集).

其次, 因为

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k},$$

且当  $k$  渐增时, 有  $n_k \rightarrow +\infty$  及  $\delta_{n_k} \rightarrow 0$ , 故有

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0, \quad y'_{n_k} - y_{n_k} \rightarrow 0,$$

因此又有

$$x'_{n_k} \rightarrow \bar{x}, \quad y'_{n_k} \rightarrow \bar{y}.$$

由于函数  $f(x, y)$  在属于  $D$  的点  $(\bar{x}, \bar{y})$  处的连续性, 我们应该既有

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}),$$

又有

$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}),$$



由此即有

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \rightarrow 0,$$

这显出与不等式 (8) 相矛盾. 定理即得证明.

为了要叙述由此推得的推论, 我们需要点集的直径的概念: 这就是集内任意二点间的距离的上确界.

**推论** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $D$  中为连续, 则对给定的  $\varepsilon > 0$  将能找出这样的  $\delta > 0$ , 不论把这区域分割成怎么样的许多直径小于  $\delta$  的部分闭域<sup>①</sup>  $D_1, \dots, D_n$  时, 函数在每一部分域内的振幅都必小于  $\varepsilon$ .

只要取在一致连续的定义内所说及的那种数作为  $\delta$  就够了. 若部分区域  $D_i$  的直径小于  $\delta$ , 则它的任意二点  $(x, y)$  与  $(x_0, y_0)$  之间的距离必小于

$$\delta : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

由此当然有  $|x - x_0| < \delta$  及  $|y - y_0| < \delta$ , 于是  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ . 若如此地选取二点, 使  $f(x, y)$  及  $f(x_0, y_0)$  分别是函数在  $D_i$  中的最大值及最小值, 便得到所需要的命题.

容易看到, 已证明的命题可以毫无更动地 (如同魏尔斯特拉斯定理那样) 移用于在任何有界闭集  $M$  内为连续的函数.

**175. 博雷尔引理** 在 88 内已证明的有用的命题可以推广至多维空间的情形.

设平面上有若干开域  $\sigma$  所成的系  $\Sigma$ ; 若集  $M$  内的每一点至少被其中一个  $\sigma$  所包含着, 则说系  $\Sigma$  覆盖集  $M$ .

**博雷尔引理** 若平面上点的有界闭集  $M$  能被开域  $\sigma$  的无穷系  $\Sigma = \{\sigma\}$  所覆盖, 则恒能从它里面选出有限子系

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\},$$

它也能覆盖全部集  $M$ .

**证明** (用反证法) 我们假设集  $M$  不能用  $\Sigma$  内的有限个  $\sigma$  来覆盖.

由于集  $M$  是有界的, 它必包含在某一矩形  $[a, b; c, d]$  内. 如在证明布尔查诺-魏尔斯特拉斯定理 [172] 时一样, 平分  $[a, b]$  及  $[c, d]$  的每一个区间, 我们把这矩形分解成四个矩形. 同时, 集  $M$  也分解成几个部分, 各包含在这些部分矩形内;  $M$  的部分的数目可能少于四, 倘使在某一个小矩形内完全不含有集  $M$  的点. 但是至少这些部分之一 (就说是  $M_1$ ) 仍不能用有限个  $\sigma$  来覆盖 (因为, 否则, 全部集  $M$  将违反假定而可被有限个  $\sigma$  所覆盖了). 把含有集  $M_1$  的那一个部分矩形记成  $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ .

<sup>①</sup>这些部分区域仅可能有公共界点.



把这矩形再分解成四个矩形. 至少其中之一——把它记成  $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ ——含有集  $M$  内不能用有限个  $\sigma$  来覆盖的那一部分  $M_2$ .

无限地继续进行这种分解, 在第  $k$  次时, 我们得出矩形  $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ , 它含有集  $M$  内不能用有限个  $\sigma$  来覆盖的一部分  $M_k$ .

如在 172 里那样, 我们由此可以肯定矩形  $[a_k, b_k; c_k, d_k]$  “凝聚”于点  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 于是

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x}, \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}.$$

点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  必属于集  $M$ . 实际上, 不论取点  $\overline{M}$  的怎样的邻域  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta; \bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$  只要  $k$  足够大, 终有

$$\bar{x} - \delta < a_k < b_k < \bar{x} + \delta, \quad \bar{y} - \delta < c_k < d_k < \bar{y} + \delta,$$

于是集  $M$  的一部分  $M_k$  (由于它的选法, 必定含有  $M$  的无穷多个点) 就落在上述邻域之内. 因此, 点  $\overline{M}$  是集  $M$  的聚点, 由于  $M$  是闭集,  $\overline{M}$  就应该属于  $M$ .

在这种情形下点  $\overline{M}$  必包含在诸  $\sigma$  之一内, 就说包含在  $\sigma_0$  内.

因为  $\sigma_0$  是开域, 所以在它里面也能含有这点的某一邻域

$$(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta; \bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta).$$

于是立刻可知, 当  $k$  足够大时, 矩形  $[a_k, b_k; c_k, d_k]$  以及包含在它里面的集  $M_k$  将全部落在这邻域内. 这样, 集  $M_k$  就能用一个  $\sigma_0$  来完全覆盖它, 然而我们当初选取集  $M_k$  时却是因为它不能用任何有限个  $\sigma$  来覆盖的. 得到了矛盾, 就证明了这引理.

读者将在下目及本教程的其他章节内遇见博雷尔定理的应用, 在那些应用内, 集  $M$  通常都是闭域. 但有时也须把它应用于其他的闭集, 例如应用于连续曲线.

### 176. 基本定理的新证明

1° 魏尔斯特拉斯第一定理 函数  $f(x, y)$  假定是在有界闭域  $D$  中为连续. 因此, 这域中每一点  $(x', y')$  必有一个这样的邻域  $\sigma'$ , 使在它的范围内有 (若用  $\varepsilon$  表示预先取定的数)

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

或

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon.$$

这样, 在  $\sigma'$  内函数自然是有界的.

应用博雷尔引理于这些邻域的系  $\Sigma = \{\sigma'\}$ , 可以从  $\Sigma$  内选出有限个邻域  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  它们联合覆盖全部区域  $D$ . 若在  $\sigma_i$  内

$$m_i \leq f(x, y) \leq M_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$



则取诸  $m_i$  中的最小者作为  $m$ , 诸  $M_i$  中的最大者作为  $M$ . 在  $\mathcal{D}$  内就有

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

这便是所要证明的.

2° 康托定理 给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 每一点  $(x', y')$  必有一个这样的邻域

$$\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta'; y' - \delta', y' + \delta'),$$

使得对于  $\mathcal{D}$  中任一属于它的点  $(x, y)$  有

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若  $(x_0, y_0)$  是类似于此的另一点, 则又有

$$|f(x', y') - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

最后便成立

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \quad (9)$$

把每一矩形  $\sigma'$  换成有同一中心而面积缩小四倍的矩形

$$\bar{\sigma}' = \left( x' - \frac{\delta'}{2}, x' + \frac{\delta'}{2}; y' - \frac{\delta'}{2}, y' + \frac{\delta'}{2} \right).$$

这些开矩形的系  $\bar{\Sigma} = \{\bar{\sigma}'\}$  能覆盖  $\mathcal{D}$ . 依据博雷尔引理, 可在它里面选出具有同样性质的矩形

$$\bar{\sigma}_i = \left( x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}; y_i - \frac{\delta_i}{2}, y_i + \frac{\delta_i}{2} \right)$$

的有限系. 最后, 用  $\delta$  表示一切  $\frac{\delta_i}{2}$  中的最小数.

设有  $\mathcal{D}$  中的任意二点  $(x, y)$  及  $(x_0, y_0)$ , 满足

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta. \quad (10)$$

点  $(x_0, y_0)$  必属于诸邻域  $\bar{\sigma}_i$  之一, 例如, 邻域

$$\bar{\sigma}_{i_0} = \left( x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2}, x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}; y_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2}, y_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2} \right),$$

于是有

$$|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}, \quad |y_0 - y_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}.$$

因为  $\delta \leq \frac{\delta_{i_0}}{2}$ , 由 (10) 就推得  $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$  及  $|y - y_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$ . 由此

$$|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}, \quad |y - y_{i_0}| < \delta_{i_0},$$



因此两点  $(x, y), (x_0, y_0)$  遂都位于最初确定的同一邻域

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0}, x_{i_0} + \delta_{i_0}; y_{i_0} - \delta_{i_0}, y_{i_0} + \delta_{i_0})$$

内, 于是, 依据已证明的结果, (9) 式得满足.

因为, 对  $\varepsilon > 0$  而选取与点  $(x_0, y_0)$  的位置无关的  $\delta > 0$  是可能的, 由此得证函数  $f(x, y)$  为一致连续.

### §3. 多元函数的导数及微分

**177. 偏导数及偏微分** 为了书写及叙述的简明起见, 我们以讨论三元函数为限; 然而以后所说的一切对于任意个变元的函数都是真实的.

因此, 设在某一 (开) 区域  $\mathcal{D}$  中有函数  $u = f(x, y, z)$ ; 在这区域中取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . 若我们给  $y$  及  $z$  以常数值  $y_0$  及  $z_0$  而让  $x$  变动, 则  $u$  就成为一个变元  $x$  的函数 (在  $x_0$  的邻域内); 于是就发生如何计算它在  $x = x_0$  处的导数的问题. 给数值  $x_0$  以一增量  $\Delta x$ , 则函数就得到增量

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

因为  $\Delta_x u$  是仅由于一个变元的数值的变动而产生的, 故它可以称为函数 (关于  $x$ ) 的偏增量. 导数按其定义即为极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

这导数就称为函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处关于  $x$  的偏导数.

我们看到, 在这定义内, 诸坐标并不是被平等看待的, 因为  $y_0$  及  $z_0$  是固定的, 而  $x$  则趋于  $x_0$  而变动着.

偏导数可以用下列记号之一来表示:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \text{ ①}; \quad u'_x, f'_x(x_0, y_0, z_0); \quad D_x u, D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

须注意, 在这些记号之内, 下角的字母  $x$  仅指出要取关于那一个变元的偏导数, 而与我们要在那一点  $(x_0, y_0, z_0)$  计算导数值并无关系②.

仿此, 把  $x$  及  $z$  当作常数, 而把  $y$  当作变元, 就可以考察极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

①雅可比 (C.G.J. Jacobi) 首倡使用  $\partial$  (代替  $d$ ) 来表示偏导数.

②在这里要把整个记号

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x, \quad D_x f$$

看成是关于  $x$  的偏导数的函数记号, 以后我们将不再复述类似于此的附注.



这极限就称为函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处关于  $y$  的偏导数, 并用类似于前面的记号来表示它:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}; \quad u'_y, f'_y(x_0, y_0, z_0); \quad D_y u, D_y f(x_0, y_0, z_0).$$

函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处关于  $z$  的偏导数亦可完全同样地定义. 偏导数的求法与普通导数的求法比较起来, 本质上并无两样.

**例题** 1) 设  $u = x^y (x > 0)$ ; 这函数的偏导数是:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x^y \cdot \ln x.$$

第一式是按照  $x$  的幂函数 (当  $y = \text{常数}$  时) 的导数来计算, 而第二式则按照  $y$  的指数函数 (当  $x = \text{常数}$  时) 的导数来计算.

2) 若  $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ , 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3) 对于  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

4) 设  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$ , 其中的  $f(u)$  是 (有导数的) 任意函数. 兹证明不论  $f$  是怎样的函数,  $z$  恒能满足关系式:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

依复合函数的微分法则 (关于  $u$  的导数用小撇来表示) 就有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y \cdot f'(x^2 - y^2) \cdot 2x = 2xy \cdot f'(x^2 - y^2), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f(x^2 - y^2) - 2y^2 \cdot f'(x^2 - y^2), \end{aligned}$$

而由此

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot f'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} \cdot f(x^2 - y^2) - 2y \cdot f'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}.$$

5) 三角形的一边  $a$  可由其他二边  $b, c$  及其间之夹角  $\alpha$  来确定, 其公式为

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}.$$

因此

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c \cdot \cos \alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}} = \frac{b - c \cdot \cos \alpha}{a}, \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{a}.$$



6) 物理学上的克拉披隆公式  $pV = RT$  (式中的  $R$  为常数) 表示着一定质量的理想气体的体积  $V$ 、压力  $p$  及绝对温度  $T$  之间的关系, 并确定量  $p, V, T$  中之一为其他二者的函数. 若把  $p, V$  当作自变量, 而把  $T$  当作是它们的函数:  $T = \frac{pV}{R}$ , 则有

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}.$$

若  $p, T$  为自变量, 而  $V$  是它们的函数:  $V = \frac{RT}{p}$ , 则有

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

最后, 设  $V$  及  $T$  为自变量,  $p$  是它们的函数:  $p = \frac{RT}{V}$ ; 则有

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}.$$

由此, 顺便得出热力学上的重要关系式

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

注意, 偏导数的雅可比记法 (带有  $\partial$  的) 只能看成整个记号, 而不能看成商或分数. 刚才所得的关系式就特别鲜明地表示出普通导数的记法与偏导数的记法的重要区别: 若在左端写着的导数是普通导数, 则可以把它们之中的每一个看成是三个微分  $dp, dV, dT$  中某两个的商, 约分以后将得 1, 而非  $-1$ ; 但在此处显然是不能这样做的.

偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$  乘以任意增量  $\Delta x$  的积称为函数  $u$  关于  $x$  的偏微分; 用记号

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x$$

表示它<sup>23)</sup>. 若在此处把自变量  $x$  的微分  $dx$  理解为增量  $\Delta x$ <sup>24)</sup>, 则前面的公式可以写成:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx.$$

仿此,

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

<sup>23)</sup> 如同在一元情形, 在固定点  $(x_0, y_0, z_0)$  取值的函数  $u$  的偏微分  $d_x u$  显然是自变量  $\Delta x$  的线性函数, 数值  $u'_x \cdot \Delta x$  是这个微分相应于  $\Delta x$  的值  $d_x u(\Delta x)$ . 如果  $(x_0, y_0, z_0)$  不固定, 那么值 (在现在的情形下) 依赖四个自变量:  $x, y, z, \Delta x$ . 这个依赖关系可类似地记作

$$d_x u = d_x u(x, y, z, \Delta x) = u'_x(x, y, z) \cdot \Delta x.$$

<sup>24)</sup> 于是自变量  $x$  的微分  $dx$  的定义是等式  $dx = \Delta x$ . 这个等式首先表明  $dx$  是自变量  $\Delta x$  的线性函数 (斜率为 1), 其次,  $dx$  的值不依赖于自变量  $x, y, z$ . 特别地, 如果  $\Delta x$  固定, 那么  $dx$  是“常数”. 此时, 当  $\Delta x$  固定时  $d_x u$  是  $x, y, z$  的函数; 遇到这种情况, 有时说自变量的微分是常值而函数的微分在变动.



这样, 我们看到, 偏导数亦可以表示为分数的形式

$$\frac{d_x u}{dx}, \quad \frac{d_y u}{dy}, \quad \frac{d_z u}{dz},$$

但须在不可或缺的条件之下: 要指出对哪一个变元而取微分.

**178. 函数的全增量** 若由自变量的值  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  出发, 依次给三者以增量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 则函数  $u = f(x, y, z)$  得增量

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

它就称为函数的全增量.

在一元函数  $y = f(x)$  的情形, 假定在点  $x_0$  处存在着 (有限的) 导数  $f'(x_0)$ , 则对于函数的增量有公式 [96(2)]

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

式中的  $\alpha$  随  $\Delta x$  而变, 且当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\alpha \rightarrow 0$ .

我们现在考虑关于函数  $u = f(x, y, z)$  的增量建立类似的公式:

$$\begin{aligned} \Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y \\ &+ f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \end{aligned} \quad (1)$$

式中的  $\alpha, \beta, \gamma$  随  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  而变, 且与它们同时趋于零. 然而, 在这一次, 需要对函数加上更多的限制.

**定理** 若偏导数  $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$  不仅在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处存在, 并在它的某一邻域内也存在, 此外, 它们 (作为  $x, y, z$  的函数) 在这点为连续, 则公式 (1) 成立.

**证明** 把函数的全增量  $\Delta u$  改写成

$$\begin{aligned} \Delta u &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] \\ &+ [f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)] \\ &+ [f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)]. \end{aligned}$$

其中每一方括弧内的差表示函数仅关于一个变元的偏增量. 因为我们曾假定在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的邻域内偏导数存在, 所以, 当  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  充分小时, 可以把有限增量公



式 [112]<sup>①</sup>分别地应用于每一个差; 就得到

$$\begin{aligned}\Delta u &= f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta x \\ &\quad + f'_y(x_0, y_0 + \theta_1\Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta z) \cdot \Delta z.\end{aligned}$$

若在此处令:

$$\begin{aligned}f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) &= f'_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha, \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_1\Delta y, z_0 + \Delta z) &= f'_y(x_0, y_0, z_0) + \beta, \\ f'_z(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta z) &= f'_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma,\end{aligned}$$

就得出  $\Delta u$  的表达式 (1). 当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  时, 诸等式左端的导数的变元趋于  $x_0, y_0, z_0$  (因为  $\theta, \theta_1, \theta_2$  是真分数), 因此, 这些导数本身, 由于假定它们在  $(x_0, y_0, z_0)$  为连续, 就趋于右端的诸导数, 而  $\alpha, \beta, \gamma$  则都趋于零. 证明由此完成.

顺便提及, 由已证明的定理可得: 由于偏导数在已给点存在且连续可以推得函数本身在这点为连续; 实际上, 若  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ , 则显然  $\Delta u \rightarrow 0$ .

为了要把公式 (1) 写成更紧凑的形式, 可引入两点

$$(x_0, y_0, z_0) \quad \text{与} \quad (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

之间的距离的表达式:

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

利用  $\rho$  以后, 就可以记:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \left( \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\rho} \right) \cdot \rho.$$

用  $\varepsilon$  表示括号内的式子, 就有

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \varepsilon \cdot \rho,$$

式中的  $\varepsilon$  依赖于  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 且当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  时也趋于零, 或更简捷地说, 当  $\rho \rightarrow 0$  时  $\varepsilon$  趋于零. 因此, 现在可以把公式 (1) 改写成:

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y \\ &\quad + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \rho,\end{aligned} \tag{2}$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时式中的  $\varepsilon \rightarrow 0$ . 数量  $\varepsilon \cdot \rho$  显然可以写成  $o(\rho)$  (若把在 60 内引入的记法推广至多元函数的情形).

<sup>①</sup>例如, 若取第一个差, 则它可以看成是函数  $f(x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  关于一个变元  $x$  的增量, 它对应于由  $x = x_0$  变到  $x = x_0 + \Delta x$  时函数的增量. 依假定关于在区间  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  的一切  $x$  值, 这函数关于  $x$  的导数  $f'_x(x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  都存在, 于是有限增量公式是可以应用的, 余仿此.



注意, 在我们的讨论中并没有把增量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  各别地等于 0 或甚至全部同时等于 0 的情形除外. 因此, 说及当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  时有

$$\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0,$$

我们是把它们了解为广义的极限关系式, 而并未除去这些增量在其变动过程中转变为 0 的可能性 (参阅 96 内类似于此的附注).

在前一定理的证明中, 我们对于多元函数的要求比对一元函数的要求多一些. 为了要指出: 若不遵守这些要求, 这里的公式 (1) 或 (2) 可能是不适用的, 最后我们来研究下面的例子 (为了简单起见, 我们在这例子中仅涉及两个变元).

函数  $f(x, y)$  由下列等式确定:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ (假如 } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

这函数在全平面上为连续; 它在点  $(0, 0)$  的连续性已于 167, 5) 内推得. 其次, 在全平面上关于  $x$  及  $y$  的偏导数也存在. 当  $x^2 + y^2 > 0$  时, 显然的

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在原点则有  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ : 这是由  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$  出发, 依照偏导数的定义直接推得的. 容易看出, 在点  $(0, 0)$  处两偏导数的连续性遭受破坏 (例如, 对于第一个只需令  $y = x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  就足以证明).

对于我们的函数而言, 在点  $(0, 0)$  处公式 (1) 或 (2) 并不成立. 事实上, 若假设这些公式成立, 那么就要有

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 式中的  $\varepsilon$  应趋于零. 今特别于上式中令  $\Delta y = \Delta x > 0$ , 则得

$$\frac{1}{2} \Delta x = \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta x, \quad \text{由此有 } \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

而当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\varepsilon$  却并不趋于零, 这就违反了假设.

函数

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

在点  $(0, 0)$  处也有类似的特性. 这让读者去分析.

**179. 全微分** 在一元函数  $y = f(x)$  的场合, 我们在 103 内曾论及它的增量  $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  能否表示为

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (A = \text{常数}) \quad (3)$$

的形式的问题. 由此看出 [104], 要这种表示法成为可能, 其充要条件为: 函数在点  $x = x_0$  处存在有限导数  $f'(x_0)$ , 而且恰好当  $A = f'(x_0)$  时上述等式成立. 函数的增量的线性部分

$$A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$$



就称为函数的微分  $dy$ .

转而讨论到多元函数, 例如, 定义于某一 (就说是开的) 区域  $D$  中的三元函数  $f(x, y, z)$ , 自然要提出类似的问题: 能否把增量

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)\end{aligned}$$

表示为

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho), \quad (4)$$

式中的  $A, B, C$  是常数, 而  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ .

如同在 103 内那样, 容易证明, 若展开式 (4) 成立, 则在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处存在关于每一变元的偏导数, 而且

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = B, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = C.$$

实际上, 例如, 在 (4) 内令  $\Delta y = \Delta z = 0$  而  $\Delta x \neq 0$ , 则得

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x},$$

由此推得, 必存在

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A.$$

这样, 关系式 (4) 永远仅以

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0, z_0) &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x \\ &\quad + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + o(\rho)\end{aligned} \quad (5)$$

或 (用更简捷的记法)

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + o(\rho) \quad (5^*)$$

的形式出现.

虽然, 在一元函数的场合, 导数  $y'_x = f'(x_0)$  在所考察的点存在就已足够保证关系 (3) 成立, 而在现在的场合, 偏导数

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0), \quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

的存在却还不足以保证展开式 (4) 的成立. 对于二元函数, 这种事实已在前目例题内看到过. 在该目的定理内曾指出关系式 (4) 成立的充分条件是: 各偏导数在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的邻域内存在, 并且它们在这点为连续. 可是, 容易证明, 对于公式 (5) 或



(5\*), 这些条件决非必要的. 实际上, 由于类似的条件对于一元函数 (假如愿意的话, 它也可以看成是任意个变元的函数) 并非必要, 已可推知此事.

当公式 (5) 成立时, 函数  $f(x, y, z)$  称为在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微的, 而 (仅在这情形!) 式子

$$\begin{aligned} & u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z, \end{aligned}$$

即函数的增量的线性部分, 称为它的 (全) 微分, 且用记号  $du$  或  $df(x_0, y_0, z_0)$  来表示.

在多元函数的场合, 我们已看到在已给点处 “函数是可微的” 一事并不就相当于在这点处 “函数有关于一切变元的偏导数” 而是比它所指的更多一些. 可是, 我们通常将假定偏导数的存在及连续性, 而这却又超过可微性了.

若约定把自变量的任意增量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  理解为自变量的微分  $dx, dy, dz$ <sup>①</sup>, 则可以写成:

$$\begin{aligned} & df(x_0, y_0, z_0) \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz, \end{aligned}$$

或

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

即全微分等于偏微分 [177] 的总和<sup>25)</sup>.

<sup>△</sup> 180. 二元函数的几何说明 要想给上述的种种以几何说明, 好像一元函数的导数及微分的几何说明一样 [91, 104], 我们得回过来研究曲线  $K$  在其上一已给点  $M_0$  处的切线的概念.

我们曾定义切线  $M_0T$  (图 99) 为割线  $M_0M$  当  $\overline{M_0M}$  趋于零时的极限位置 [91].

显然, 还可以给它一个与此等价的定义:

若曲线  $K$  上的动点  $M$  至直线  $M_0T$  的距离  $\overline{MP}$  <sup>在</sup>  $\overline{M_0M}$  趋于零时成为比  $\overline{M_0M}$  较高阶的无穷小 (即若比值  $\overline{MP}/\overline{M_0M}$  在这时趋向于零)<sup>②</sup>, 则直线  $M_0T$  就称为曲线  $K$  在其上一点  $M_0$  处的切线.

<sup>①</sup>若视自变量  $x$  的微分与作为自变量  $x, y, z$  的函数的  $x$  的微分为恒等, 则依一般公式, 可以写成

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x;$$

那时等式  $dx = \Delta x$  就是可证明的了.

<sup>②</sup>就是说  $\sin \varphi$  趋于零, 从而割线  $M_0M$  与直线  $M_0T$  的夹角  $\varphi$  亦随之趋于零 (参阅图 99).

<sup>25)</sup>这样一来, 函数在固定点  $(x_0, y_0, z_0)$  的全微分  $du$  是三个自变量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  的 (线性) 函数; 总体上,  $du$  的值依赖于 6 个自变量:  $du = du(x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . 固定增量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  (从而  $dx, dy, dz$  变为常数), 我们可以把函数  $u$  的全微分  $du$  看作 (仅仅) 是自变量  $x, y, z$  的函数. 当定义函数  $u$  的二阶微分  $d^2u$  时, 就是这样做的, 在一系列其他情形也一样.







则  $\overline{MK}$  可用式子

$$\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)$$

来表示. 由于上面所作的假定, 至少对于充分接近于  $M_0$  的点  $M$  将有

$$|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)| < \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

于是

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < |A| \cdot \frac{|\Delta x|}{\rho} + |B| \cdot \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2},$$

或 (加强不等式)

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < |A| + |B| + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\Delta z|}{\rho}\right).$$

由此,

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < 2(|A| + |B|) + 1,$$

因此,

$$\frac{r}{\rho} = \sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2} < 2(|A| + |B| + 1),$$

此即需要证明的.

这样, 当且仅当比式

$$\frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\rho}$$

随  $\rho$  而趋向于零时, 即当展开式

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

成立时 (比较 (4)), 平面 (6) 才是曲面  $S$  的切平面.

我们得出最后的结论: 要使曲面  $z = f(x, y)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (式中的  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ) 处有切平面<sup>①</sup>, 必要而且充分的条件是: 函数  $f(x, y)$  在  $x = x_0, y = y_0$  时是可微的.

因为在满足这条件时, 系数  $A$  及  $B$  必须等于偏导数  $f'_x(x_0, y_0)$  及  $f'_y(x_0, y_0)$ , 故切平面可用方程

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (X - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (Y - y_0)$$

来表示.

通常  $x, y, z$  的下标并不写出, 那时, 切平面的方程就成为

$$Z - z = f'_x(x, y) \cdot (X - x) + f'_y(x, y) \cdot (Y - y). \quad (7)$$

<sup>①</sup>此处所指是不平行于  $z$  轴的切平面.



不难看出, 若用经过点  $M_0$  而平行于  $z$  轴的任一平面来截此曲面及其在  $M_0$  处的切平面, 则前一截线为一曲线, 而后一截线恰为此曲线之切线<sup>①</sup>.

特别, 用平面  $Y = y_0$  及  $X = x_0$  截曲面而得出的两曲线, 其斜率<sup>②</sup> 各等于:

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{及} \quad f'_y(x_0, y_0).$$

在图101中, 线段  $K_1M_1, K_2M_2$  及  $KM$  各表示函数的偏增量及全增量, 而线段  $K_1N_1, K_2N_2$  及  $KN$  各表示函数的偏微分及全微分 [比较 104 及图 44].

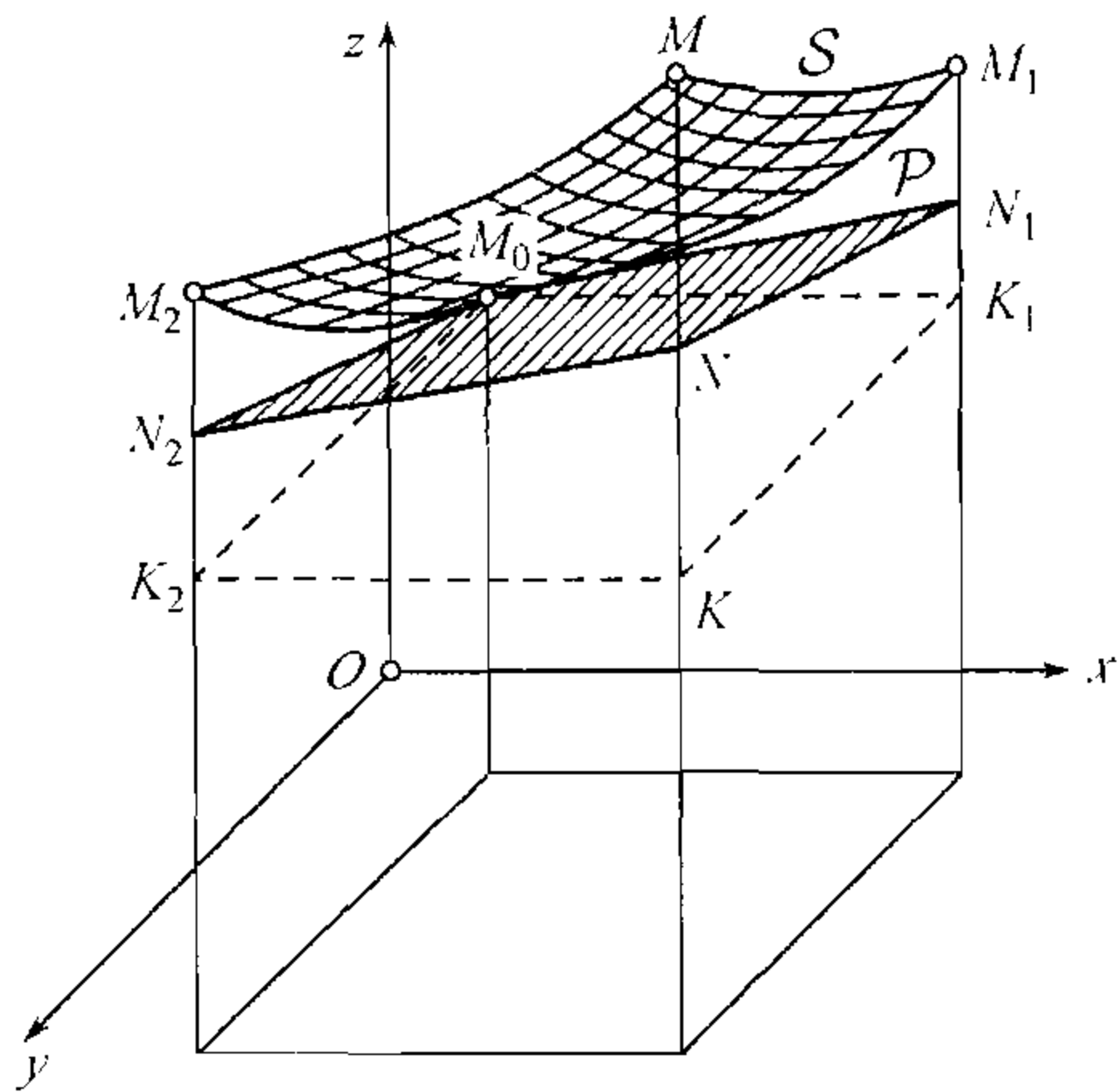


图 101

### 181. 复合函数的导数 设函数

$$u = f(x, y, z)$$

定义于区域  $D$  内, 而且每一变元  $x, y, z$  又各为变动于某一区间内的变量  $t$  的函数:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

此外, 再设当  $t$  变动时点  $(x, y, z)$  不越出  $D$  的范围.

把  $x, y, z$  的数值代入函数  $f$ , 则得复合函数:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)).$$

假定  $u$  有关于  $x, y, z$  的连续偏导数  $u'_x, u'_y, u'_z$ <sup>③</sup>, 且  $x'_t, y'_t, z'_t$  都存在. 那时就可以证明复合函数的导数必存在, 同时还可以把它算出.

实际上, 给变量  $t$  以一增量  $\Delta t$ , 则  $x, y, z$  各得对应的增量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 函数  $u$  也得增量  $\Delta u$ .

把函数  $u$  的增量写成式 (1) 的形式 (我们可以做到这样, 因为曾假定有连续偏导数  $u'_x, u'_y, u'_z$  存在), 就得

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

当  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  都趋于零时式中的  $\alpha, \beta, \gamma$  也都趋于零. 用  $\Delta t$  除等式两边, 将有

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

<sup>①</sup>以后 [234] 还要讨论曲面上经过已给点的任意曲线在此点的切线这一更普遍的问题.

<sup>②</sup>容易判断, 这些斜率是关于那些坐标系而算出的.

<sup>③</sup>严格些说, 只要假定函数  $u = f(x, y, z)$  可微就够了.



今使增量  $\Delta t$  趋于零, 于是  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  就都趋于零, 因为  $x, y, z$  是  $t$  的连续函数 (我们曾假定导数  $x'_t, y'_t, z'_t$  都存在), 因而  $\alpha, \beta, \gamma$  也都趋向于零. 取极限就得:

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t. \quad (8)$$

我们看到, 在前述假定下, 复合函数的导数确实存在着. 若利用微分的记号, 则公式 (8) 可以写成:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (9)$$

今将考察另一种情形, 那时  $x, y, z$  不只是一个变量  $t$  的函数, 而是几个变量的函数, 例如

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v).$$

除假定函数  $f(x, y, z)$  的偏导数存在且连续以外<sup>①</sup>, 我们再假定函数  $x, y, z$  关于  $t$  及  $v$  的偏导数也存在.

把函数  $\varphi, \psi, \chi$  代入函数  $f$  以后, 我们就得出某一个二变元  $t$  及  $v$  的函数, 并且发生关于偏导数  $u'_t$  及  $u'_v$  的存在及求法的问题. 但这一情形与刚才研究过的情形并无本质上的差别, 因为在求二元函数的偏导数时, 我们总是固定其中一个变元, 故所需要处理的仍为一元函数. 因此, 对于这种情形, 公式 (8) 仍然并无改变, 而公式 (9) 需要改写成为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (9^*)$$

### 182. 例题 1) 考察幂指数函数

$$u = x^y.$$

令  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ , 按照刚才导出的复合函数的微分法则而微分它, 就得到我们已经知道的莱布尼茨和贝努利的公式:

$$u'_t = y \cdot x^{y-1} \cdot x'_t + x^y \cdot \ln x \cdot y'_t.$$

从前, 我们曾用技巧的方法 [99, 23] 证明过它 (写成别的形式).

2) 设  $u = f(x, y, z)$  有连续的偏导数, 并用

$$x = \eta - \zeta, \quad y = \zeta - \xi, \quad z = \xi - \eta$$

代替  $x, y, z$ , 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

3) 若 (在那些关于函数  $f$  的同样假定之下) 保留  $x$  为自变量, 而令

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

<sup>①</sup>参阅前页的脚注②.



其中  $y(x), z(x)$  是对  $x$  可微的函数, 则  $u$ , 作为  $x$  的复合函数, 将有导数:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

或

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y(x), z(x)) + f'_y(x, y(x), z(x)) \cdot y'(x) + f'_z(x, y(x), z(x)) \cdot z'(x).$$

在这里  $x$  本身如同公式 (8) 内的变量  $t$  一样.

4) 若把  $x, y$  二者仍作为自变量, 把  $z$  换成函数

$$z = z(x, y),$$

假定它有关于  $x$  及关于  $y$  的导数, 则对于复合函数  $u = f(x, y, z(x, y))$  将有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_x(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_y(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_y(x, y). \end{aligned}$$

5) 作为应用公式 (9) 的另一个例题, 讨论关于行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的微分法的问题. 但假定其元素  $a_{ik}(i, k = 1, 2, \cdots, n)$  都是某一参变数  $t$  的函数, 它们关于  $t$  的导数  $\frac{da_{ik}}{dt}$  都存在.

回忆行列式关于其第  $k$  行的元素的展开式

$$\Delta = A_{1k} \cdot a_{1k} + A_{2k} \cdot a_{2k} + \cdots + A_{ik} \cdot a_{ik} + \cdots + A_{nk} \cdot a_{nk},$$

其中诸代数余因子  $A_{1k}, \cdots, A_{nk}$  并不含有元素  $a_{ik}$ , 就容易知道

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}.$$

在这种情形, 按照公式 (9),

$$\frac{d\Delta}{dt} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dt} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ik} \cdot \frac{da_{ik}}{dt}.$$

注意:  $\sum_{i=1}^n A_{ik} \cdot \frac{da_{ik}}{dt}$  也表示一个行列式的展开式, 它同已给行列式的差别仅在于把已给行列式中第  $k$  行的元素换成它们关于  $t$  的导数罢了. 由此得法则: 行列式  $\Delta$  的导数等于把  $\Delta$  内的第 1, 第 2,  $\cdots$ , 第  $n$  行元素依次换成它们的导数而得出的  $n$  个行列式的总和.

公式 (8) 与关于一个变元  $x$  的函数  $u$  的公式:  $u'_t = u'_x \cdot x'_t$  相似. 然而, 须郑重声明, 在导出这些公式的条件上仍有不同. 若  $u$  是一个变元的函数, 则假定导数  $u'_x$  存在已经够了; 而在多元函数的场合, 我们还不得不假定导数  $u'_x, u'_y, \cdots$  的连续性. 下面的例题指出: 为了公式 (8) 的实现仅知这些导数存在, 一般是不足的.



6) 定义函数  $u = f(x, y)$ , 令:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ (当 } x^2 + y^2 > 0 \text{ 时)}, \quad f(0, 0) = 0.$$

我们已看到过, 这函数在所有点都有偏导数, 原点  $(0, 0)$  也不例外, 而且

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0;$$

注意, 恰好在这点, 导数有间断.

若令  $x = t$  及  $y = t$  以引入新变量  $t$ , 则得  $t$  的复合函数. 按照公式 (8) 这函数在  $t = 0$  时的导数应该等于

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t = 0.$$

但另一方面, 若把  $x$  及  $y$  的值直接代入已给函数  $u = f(x, y)$ , 就得

$$u = \frac{t^2 \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}t.$$

今直接关于  $t$  求微分, 则在  $t$  的任何数值时都有  $u'_t = \frac{1}{2}$ , 故当  $t = 0$  时亦如是. 因此公式 (8) 在这种场合是不能使用的.

7) 函数  $u = f(x, y)$  由两等式

$$f(x, y) = \frac{x^{\frac{5}{3}} \cdot y}{x^2 + y^2} \text{ (当 } x^2 + y^2 > 0 \text{ 时)}, \quad f(0, 0) = 0$$

确定, 它在点  $(0, 0)$  的性质完全与 6) 中的函数类似. 今若取  $x = y = t$ , 则得复合函数  $u = \frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}$ , 它在  $t = 0$  有为无穷的导数. 若令  $x = t$ , 而

$$\text{当 } t \neq 0 \text{ 时 } y = t^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{t}, \text{ 当 } t = 0 \text{ 时 } y = 0,$$

则由两等式:

$$\text{当 } t \neq 0 \text{ 时 } u = \frac{t \cdot \sin \frac{1}{t}}{1 + t^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2 \frac{1}{t}}, \text{ 当 } t = 0 \text{ 时 } u = 0,$$

确定的复合函数在  $t = 0$  时根本没有导数.

**183. 有限增量公式** 设函数  $f(x, y, z)$  在闭域  $\mathcal{D}$  中有定义而且连续, 并在这区域内部 (即在它的所有内点) 有连续偏导数  $f'_x, f'_y, f'_z$ . 今考察  $\mathcal{D}$  中的两点

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{及} \quad M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z),$$

假设这两点能用全部位于  $\mathcal{D}$  域内的直线段  $M_0M_1$  来连接<sup>①</sup>. 则成立下面的公式:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0, z_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \theta \Delta z) \cdot \Delta x \\ &\quad + f'_y(\cdots) \cdot \Delta y + f'_z(\cdots) \cdot \Delta z. \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>①</sup>这里著者的意思是指直线段  $M_0M_1$  上一切点都是  $\mathcal{D}$  域的内点, 仅两端点  $M_0$  与  $M_1$  可能是例外 —— 译者注.



它完全类似于熟知的一元函数的有限增量公式 [112(2)].

为了证明公式 (10), 在函数  $f(x, y, z)$  内令

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y, \quad z = z_0 + t \cdot \Delta z \quad (11)$$

(其中  $0 \leq t \leq 1$ ), 就是只在直线段  $M_0M_1$  上的各点来考察我们的函数.  $t$  的复合函数

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y, z_0 + t \cdot \Delta z)$$

在全区间  $[0, 1]$  中是连续的 [170], 且在这区间内部有导数, 按照公式 (8) 求得这导数等于

$$\begin{aligned} F'(t) = & f'_x(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y, z_0 + t \cdot \Delta z) \cdot \Delta x \\ & + f'_y(\cdots) \cdot \Delta y + f'_z(\cdots) \cdot \Delta z, \end{aligned}$$

因为由 (11),

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y, \quad \frac{dz}{dt} = \Delta z.$$

把 112 的公式 (2) 应用于区间  $[0, 1]$  中的函数  $F(t)$ , 得:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1).$$

若注意到, 按照函数  $F(t)$  的定义, 有

$$F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

并用刚才求出的式子 (当  $t = \theta$  时) 代替导数  $F'(\theta)$ , 就得出公式 (10).

作为应用刚才所证明的公式的简单例题, 可证下面的命题:

若连续于闭连通域  $\mathcal{D}$  中的函数  $f(x, y, z)$  在此域内部有都等于 0 的偏导数:

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0,$$

则这函数在全域  $\mathcal{D}$  中必为常数:

$$f = \text{常数}.$$

设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  及  $M(x, y, z)$  是  $\mathcal{D}$  域中的任意两点. 由于假定  $\mathcal{D}$  是连通域, 故可以用全部在  $\mathcal{D}$  内的折线连接它们. 若  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  是折线上  $M_0$  后面的一个顶点, 则在 (10) 内令  $x_0 + \Delta x = x_1, y_0 + \Delta y = y_1, z_0 + \Delta z = z_1$ , 立即得出

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_0, y_0, z_0);$$

如此逐步推算, 由一顶点至另一顶点, 最后可得

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0),$$

这便是所要证明的.



**184. 沿给定方向的导数** 函数  $f(M) = f(x, y, z)$  关于  $x$ , 关于  $y$ , 关于  $z$  的偏导数分别表示函数沿着三坐标轴方向的“变化率”. 例如,  $f'_x$  是函数关于  $x$  的变化率: 因为预设动点仅沿平行于  $x$  轴的方向而移动. 然而, 在许多物理问题上还需要知道函数  $f(M)$  沿着其他方向的“变化率”. 例如, 若所给为温度场, 即若给定在所考察物体内部每点  $M$  的温度  $f(M)$ , 则热的分布及转移的规律自然地依赖于温度沿着一切方向下降 (或上升) 的速度. 现在要使函数沿任一给定方向的变化率或导数的概念格外准确. 在这里我们也有机会应用公式 (9).

设函数  $f(M)$  定义于某一 (开) 域内. 考察这区域中任一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  及经过这点的任一有向直线 (轴)  $l$  (图 102).

设  $M(x, y, z)$  是在这轴上的另一任意点,  $M_0M$  是  $M_0$  与  $M$  之间的线段的长, 带有适当的符号, 就是, 若  $M_0M$  的方向与轴  $l$  的方向一致, 就带有正号, 在相反的情形就带有负号.

设  $M$  无限地趋近于  $M_0$ . 极限

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$$

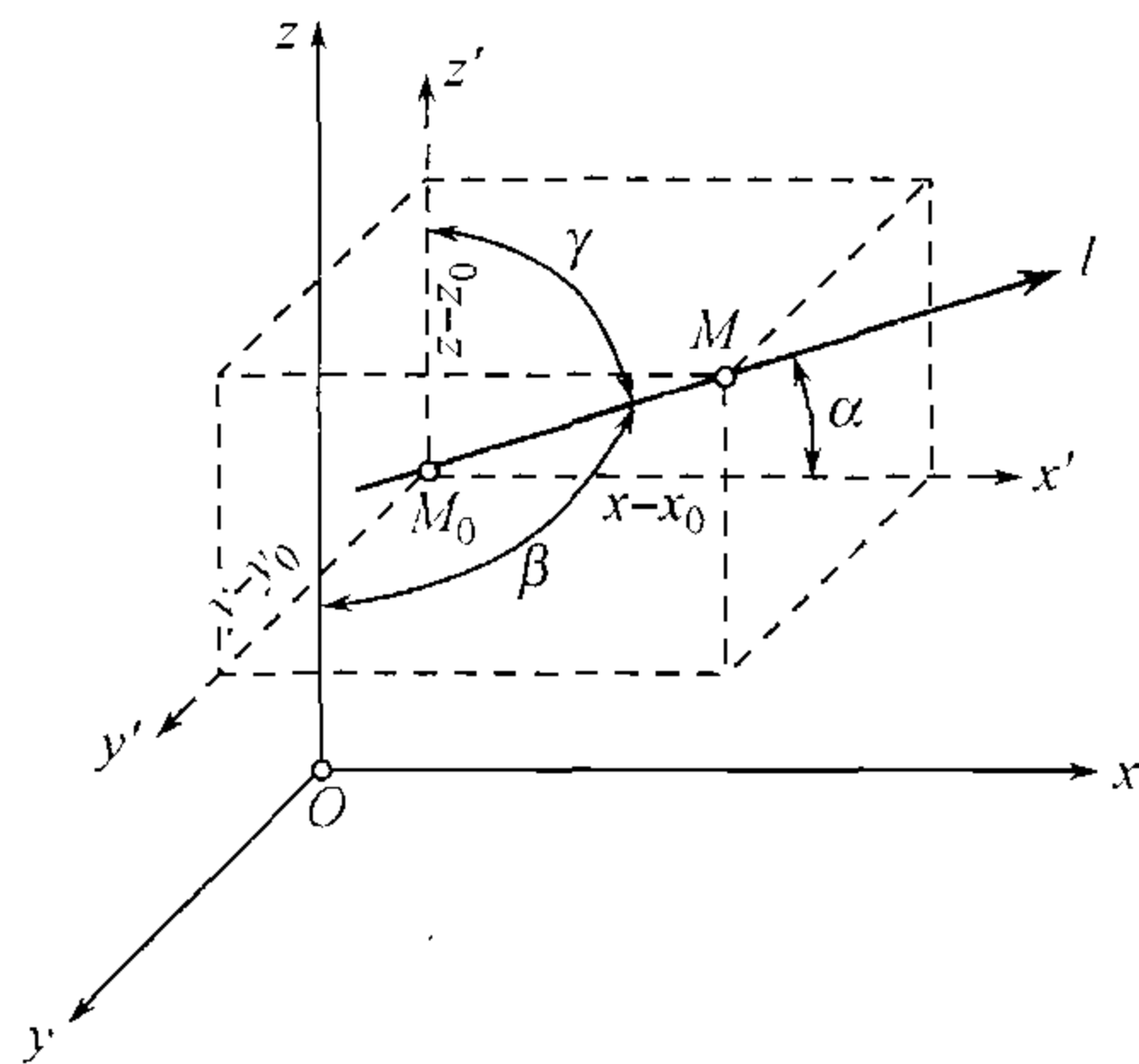


图 102

就称为函数  $f(M)$  沿方向  $l$  (或沿轴  $l$ ) 的导数, 并用下式表示:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

这导数就表征着函数在点  $M_0$  沿方向  $l$  的“变化率”.

特别, 前面已说过, 通常的偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  亦可以看成“方向”导数.

现在假定, 函数  $f(x, y, z)$  在被考察的区域中有连续的偏导数<sup>①</sup>. 设轴  $l$  与三坐标轴分别所成之角为  $\alpha, \beta, \gamma$ . 兹证明, 在上述的假定之下, 沿方向  $l$  的导数必存在且可用下列公式来表示:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos \gamma. \quad (12)$$

为要证明, 注意若令  $M_0M = t$ , 则将有

$$x - x_0 = t \cdot \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cdot \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cdot \cos \gamma.$$

这样, 沿着轴  $l$ , 坐标  $x, y, z$  可以看作  $t$  的函数:

$$x = x_0 + t \cdot \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cdot \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cdot \cos \gamma, \quad (13)$$

<sup>①</sup>参阅第 181 目脚注 ②.



而函数  $f(M) = f(x, y, z)$  就可以看作  $t$  的复合函数  $\varphi(t)$ . 这时点  $M_0$  对应着  $t = 0$ .

这样, 就有

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

仅需导数  $\varphi'(0)$  存在. 但导数  $\varphi'(t)$  在上述假定之下确存在, 并且按照公式 (9) 可以表示为下面的形式:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

利用公式 (13), 就得

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos \gamma.$$

由此即可推得我们的命题.

现在提出这样一个问题: 函数在一给定点沿什么方向增大得最快? 当然, 这问题仅当导数

$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \quad (14)$$

不同时等于零的场合始有意义 (因为, 否则沿任何方向的导数就要都等于零.)

在这一假定下, 把 (12) 式的右方改写为:

$$\begin{aligned} & a \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos \beta + c \cdot \cos \gamma \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \left( \frac{a}{\sqrt{\dots}} \cos \alpha + \frac{b}{\sqrt{\dots}} \cos \beta + \frac{c}{\sqrt{\dots}} \cos \gamma \right). \end{aligned}$$

把括号内的各分数看作某一方向  $g$  的方向余弦:

$$\frac{a}{\sqrt{\dots}} = \cos \lambda, \quad \frac{b}{\sqrt{\dots}} = \cos \mu, \quad \frac{c}{\sqrt{\dots}} = \cos \nu,$$

于是我们就得出

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (\cos \lambda \cdot \cos \alpha + \cos \mu \cdot \cos \beta + \cos \nu \cdot \cos \gamma).$$

最后, 若用  $(g, l)$  表示方向  $g$  及  $l$  之间的夹角, 则按照解析几何学上的已知公式, 得

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \cos(g, l). \quad (15)$$

现在很易明了, 若使  $l$  重合于  $g$ , 这导数将达到其最大值:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$



在坐标轴上的投影为 (14) 的向量  $\vec{g}$ , 就指出函数增大得最快的方向, 而它的长  $|\vec{g}|$  就给出对应的导数的数值. 这向量称为函数  $f(M) = f(x, y, z)$  的梯度.

改写公式 (15) 为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\vec{g}| \cdot \cos(\vec{g}, l),$$

容易看出, 若在方向线  $l$  上放置长度为  $\frac{\partial f}{\partial l}$  的线段, 所得的向量恰巧就是梯度在这方向线上的投影.

**185. (一阶) 微分的形式不变性** 设函数  $u = f(x, y, z)$  有连续的偏导数  $u'_x, u'_y, u'_z$ , 而且  $x, y, z$  本身又都是新变元  $t$  及  $v$  的函数:

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v),$$

它们也有连续偏导数  $x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v$ . 于是 [181] 不仅复合函数  $u$  关于  $t$  及  $v$  的导数存在, 而且这些导数关于  $t$  及  $v$  都为连续, 这很容易由 (8) 看出.

假如  $x, y, z$  是自变量, 则我们知道, 函数  $u$  的 (全) 微分等于

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

在当前的情形,  $u$  已通过  $x, y, z$  的媒介而成为变元  $t$  及  $v$  的函数. 因此, 关于这些变元,  $u$  的微分可写成:

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

但根据 (8),

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t;$$

同样

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

把这些数值代入  $du$  的表达式中, 就有:

$$\begin{aligned} du &= (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t) \cdot dt \\ &\quad + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v) \cdot dv. \end{aligned}$$

重新组合各项如下:

$$\begin{aligned} du &= u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) \\ &\quad + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv). \end{aligned}$$

不难看出, 在括号内的式子不是别的, 正是函数  $x, y, z$  的微分 (关于  $t$  及  $v$ ), 于是我们可以写成:

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$



我们得出的微分与取  $x, y, z$  为自变量时的微分有同一形式(但此处的记号  $dx, dy, dz$  当然已有别的意思).

于是, 对于多元函数 (一阶) 微分的形式不变性亦能成立, 如同对于一元函数时一样<sup>①</sup>.

可能碰到,  $x, y, z$  是一些不同的变元的函数, 例如

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, w), \quad z = \chi(v, w).$$

在这种场合, 我们恒可以当作

$$x = \varphi_1(t, v, w), \quad y = \psi_1(t, v, w), \quad z = \chi_1(t, v, w),$$

于是所有上述的讨论就都能适用于这情形了.

**推论** 当  $x$  及  $y$  都是一元函数时, 我们曾有下列的公式:

$$\begin{aligned} d(cx) &= c \cdot dx, \quad d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(xy) = y \cdot dx + x \cdot dy, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}. \end{aligned}$$

这些公式当  $x$  及  $y$  是任意个变元的函数时, 即当

$$x = \varphi(t, v, \dots), \quad y = \psi(t, v, \dots)$$

时仍是正确的.

证明最后的公式作为例子.

为此, 首先把  $x, y$  当作自变量; 于是

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \cdot dx - \frac{x}{y^2} \cdot dy = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

我们看到, 在这一假定之下, 微分的形式与一元函数  $x$  及  $y$  的微分形式相同. 根据微分的形式不变性, 可以断定这公式当  $x$  及  $y$  是任意个变元的函数时也正确.

全微分的上述性质及由此得出的推论可以使我们简化求导数的手续, 例如:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{darctg} \frac{x}{y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{x^2 + y^2}, \\ 2) d \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)dx - x \cdot d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{(y^2 + z^2 - x^2)dx - 2xy \cdot dy - 2xz \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>注意, 若只假定一切所考察的函数都是可微的, 则结论亦真实. 要证实这点, 只需证明可微函数的叠置仍为可微函数就够了.



因为各自变量的微分前面的系数就是对应的偏导数, 故由此就能立刻得出这些偏导数的数值. 例如, 对于  $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  直接地有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

而对于  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  就立刻得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

[比较 177 的 2) 及 3)].

**186. 应用全微分于近似算法** 类似于一元函数的微分 [108] 那样, 多元函数的全微分也能成功地应用于近似算法中估计误差的工作. 例如, 设有函数  $u = f(x, y)$ , 而且在确定  $x$  及  $y$  的数值时我们容许有误差, 即如  $\Delta x$  及  $\Delta y$ . 那时, 用变元的不准确的数值而算出的  $u$  值也将得有误差  $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ . 现在要谈的是误差  $\Delta u$  的估计, 倘若已知误差  $\Delta x$  及  $\Delta y$  的估值.

用函数的微分 (近似地) 代换它的增量 (这只当  $\Delta x$  及  $\Delta y$  的值充分小时始认为可行), 就得

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (16)$$

这里的误差  $\Delta x$  及  $\Delta y$  以及在它们前面的系数可能是正, 也可能是负; 所以把每一项取绝对值, 就得出不等式

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y|.$$

若用  $\delta u, \delta x, \delta y$  表示最大绝对误差 (或绝对误差的限度), 则显然可以采用

$$\delta u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot \delta x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot \delta y. \quad (17)$$

举例如下:

1) 首先, 借助于刚才引出的公式, 容易建立在实际应用近似算法时的几条普通法则. 设  $u = xy$  (式中  $x > 0, y > 0$ ), 于是  $du = ydx + xdy$ ; 用增量代换微分, 就得  $\Delta u = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$  [参阅 (16)], 或转而对误差的限度来说 [参阅 (17)]:

$$\delta u = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y.$$

用等式  $u = xy$  的两端分别除这等式的两端, 得出最后的公式:

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}, \quad (18)$$

它表达这样的法则: 乘积的 (最大) 相对误差等于各因子的 (最大) 相对误差的总和.

也可以更简单地进行如下: 首先在公式  $u = x \cdot y$  两端取对数, 而后再求微分:

$$\ln u = \ln x + \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \text{ ① 等等.}$$

① 读者注意, 我们计算  $\ln u$  的微分时, 似乎把  $u$  当作是自变量一样, 虽然事实上它是  $x$  及  $y$  的函数 [175]. 这附注以后仍须牢记.



若  $u = \frac{x}{y}$ , 则依这方法求出

$$\ln u = \ln x - \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

取绝对值再改用最大误差, 我们仍得公式 (18). 这样, 商的 (最大) 相对误差等于被除数及除数的 (最大) 相对误差的和.

2) 误差的计算在地形学内经常应用, 主要是用三角形的已测得元素而计算其非直接测量的元素. 下面举出这方面的两个例子.

设在直角三角形  $ABC$  内 (图 103), 一直角边  $AB = b$  及与它邻接的角  $\angle BAC = \alpha$  已测得; 另一直角边  $a$  可按照公式:  $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$  算出. 问在测量  $b$  及  $\alpha$  时的误差对于  $a$  的数值的影响怎样?

求微分, 得

$$da = \operatorname{tg} \alpha \cdot db + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

于是,

$$\delta a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot \delta \alpha.$$

例如, 设测量的结果得

$$b = 121.56 \text{ 米} \pm 0.05 \text{ 米}, \quad \angle \alpha = 25^\circ 21' 40'' \pm 12'',$$

于是

$$a = 57.62 \text{ 米}.$$

按照上面的公式确定  $\delta a$ , 在其中命  $\delta b = 0.05$ , 而  $\delta \alpha = \frac{12''}{206\,265''}$  (因为  $\delta \alpha$  须表示为弧度, 而一弧度等于  $\frac{60'' \times 60 \times 360}{2\pi} = 206\,265''$ ). 我们就得到

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b = 0.0237, \quad \frac{b}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha = 0.0087,$$

于是凑足小数第二位后可以当作  $\delta a = 0.04$ . 由此,  $a = 57.62 \text{ 米} \pm 0.04 \text{ 米}$ .

3) 在斜三角形  $ABC$  (图 104) 内, 当按照公式

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$$

而确定一边  $a$  时, 求其误差. 利用 177 的例 5) 的结果, 可按照公式 (17) 立刻写出:

$$\delta a = \frac{b - c \cdot \cos \alpha}{a} \cdot \delta b + \frac{c - b \cdot \cos \alpha}{a} \cdot \delta c + \frac{bc \cdot \sin \alpha}{a} \cdot \delta \alpha$$

由图中直接看出有

$$b - c \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \gamma, \quad c - b \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \beta, \quad bc \cdot \sin \alpha = a \cdot h_a,$$

式中的  $h_a$  的三角形由顶点  $A$  至其对边的高. 这样, 就有

$$\delta a = \cos \gamma \cdot \delta b + \cos \beta \cdot \delta c + h_a \cdot \delta \alpha;$$

按照这公式, 很容易判断各个误差  $\delta b, \delta c, \delta \alpha$  对于  $\delta a$  的影响.

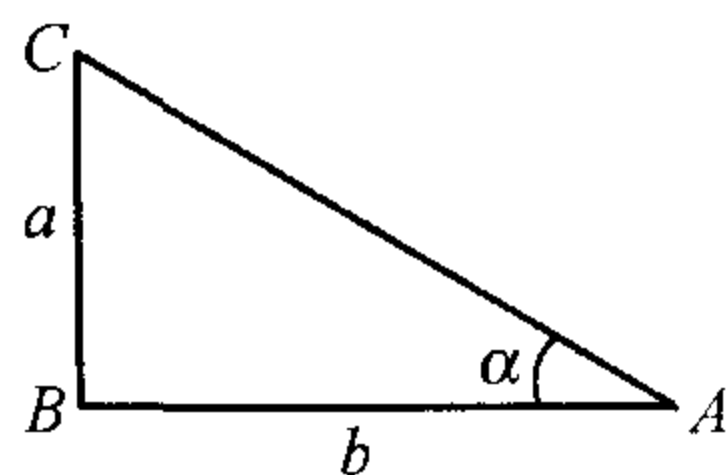


图 103

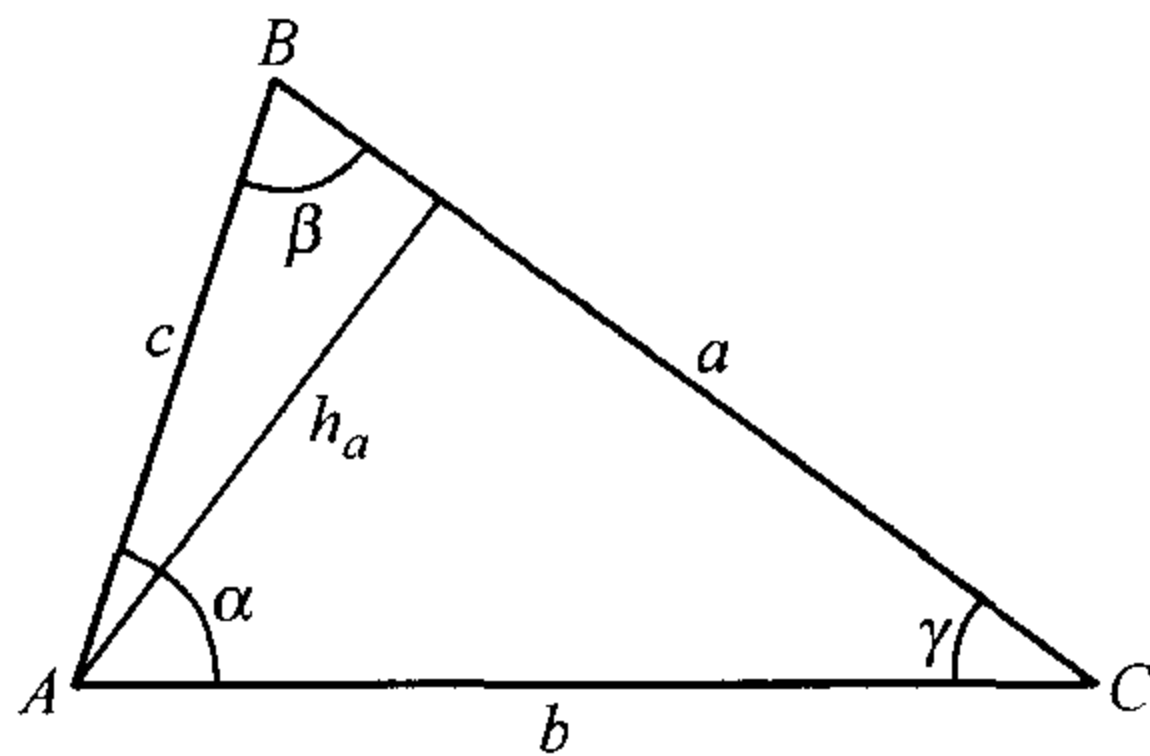


图 104



**187. 齐次函数** 大家知道, 次数相同的诸项所组成的多项式称为齐次多项式. 例如,

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

是齐二次多项式. 若给这里的  $x$  及  $y$  各乘一因子  $t$ , 则全多项式将获得因子  $t^2$ . 对于任何齐次多项式, 类似的情况常能成立.

即使性质较复杂的函数也能具有这样性质; 例如, 若取式子

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln \frac{x}{y},$$

则当变元  $x$  及  $y$  都乘上  $t$  时, 它也获得因子  $t^2$ , 就这点而论, 它与二次齐次多项式有类似之处. 这种函数自然也称为二次齐次函数.

兹给出一般的定义:

有定义于区域  $\mathcal{D}$  中的  $n$  元函数  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 若当它的所有变元各乘上因子  $t$  时, 能获得因子  $t^m$ , 即若能恒等地成立等式

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, \dots, x_n), \quad (19)$$

则函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  就称为  $m$  次齐次函数.

为了简单起见, 我们假定  $x_1, \dots, x_n$  及  $t$  在此处只取正值. 又假设函数  $f$  的定义域  $\mathcal{D}$  如果含有任一点  $M(x_1, \dots, x_n)$  时也必含有当  $t > 0$  时的一切点  $M_t(tx_1, \dots, tx_n)$ , 即含有由原点发出而经过点  $M$  的射线.

齐次函数的次数  $m$  可以是任何实数; 例如, 函数

$$x^\pi \cdot \sin \frac{y}{x} + y^\pi \cdot \cos \frac{x}{y}$$

就是变元  $x$  及  $y$  的  $\pi$  次齐次函数.

现在企图得出  $m$  次齐次函数的一般表达式.

首先设  $f(x_1, \dots, x_n)$  为零次齐次函数; 则

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

令  $t = \frac{1}{x_1}$ , 得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

若引入  $(n-1)$  元函数

$$\varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) = f(1, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

则得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$



由此,任一零次齐次函数可表示为它的所有变元对其中一变元的比的函数.显然其逆也真.于是上面的等式就给出零次齐次函数的一般表达式.

若  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $m$  次齐次函数 (且只在这一场合), 则它对  $x_1^m$  的比就是零次齐次函数, 于是

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

这样,我们就得到  $m$  次齐次函数的一般表达式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

例题

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln \frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x} - 1} \cdot \ln \frac{y}{x}.$$

**188. 欧拉公式** 今假定 ( $m$  次) 齐次函数  $f(x, y, z)$ <sup>①</sup> 在 (开) 域  $\mathcal{D}$  中有关于所有变元的连续偏导数. 任意固定  $\mathcal{D}$  中的一点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 根据基本恒等式 (19), 对于任何  $t > 0$  就有:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

今关于  $t$  微分这等式: 等式的左边按照复合函数的微分法则来微分<sup>②</sup>, 右边单纯地当作幂函数来微分. 则得

$$\begin{aligned} & f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0 \\ &= mt^{m-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

若在此处命  $t = 1$ , 则得出下面的公式:

$$\begin{aligned} & f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y_0 + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z_0 \\ &= m \cdot f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

这样, 对于任一点  $(x, y, z)$ , 成立等式

$$f'_x(x, y, z) \cdot x + f'_y(x, y, z) \cdot y + f'_z(x, y, z) \cdot z = m \cdot f(x, y, z). \quad (20)$$

这等式称为欧拉 (L.Euler) 公式.

我们看到了, 任一有连续偏导数的  $m$  次齐次函数必满足这等式. 今将证明其逆: 每一连续函数, 连同自己的偏导数均为连续, 且满足欧拉等式 (20), 必为  $m$  次齐次函数.

<sup>①</sup> 只为了写起来简便, 我们才在此处限于讨论三个变元的情形.

<sup>②</sup> 就为了要应用这法则, 我们才假定各偏导数均为连续 [181].



实际上, 设  $f(x, y, z)$  是一个这样的函数. 任意固定  $x_0, y_0, z_0$  的数值而考察下面的  $t$  的函数 (当  $t > 0$  时):

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}.$$

它当一切  $t > 0$  时是有定义而且连续的. 按照分式的微分法则求它的导数  $\varphi'(t)$ , 就得一分式, 其分子等于

$$[f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0] \cdot t - m \cdot f(tx_0, ty_0, tz_0).$$

把欧拉公式 (20) 内的  $x, y, z$  换成  $tx_0, ty_0, tz_0$ , 就看到这分子是等于零的, 于是  $\varphi'(t) = 0$ , 而  $\varphi(t) = c = \text{常数}$  (当  $t > 0$  时). 为了要确定常数  $c$ , 可在定义  $\varphi(t)$  的等式内令  $t = 1$ . 则得

$$c = f(x_0, y_0, z_0).$$

因此,

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m} = f(x_0, y_0, z_0)$$

或

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0),$$

这便是所要证明的.

可以说, 欧拉公式与基本恒等式 (19) 同样可以作为  $m$  次齐次函数的特征式.

## §4. 高阶导数及高阶微分

**189. 高阶导数** 若函数  $u = f(x, y, z)$ <sup>①</sup> 在某一 (开) 区域  $\mathcal{D}$  中有关于其中一个变元的偏导数, 则这偏导数本身仍是  $x, y, z$  的函数, 故仍能在某一点  $(x_0, y_0, z_0)$  有关于同一变元或另一变元的偏导数. 这些后来得到的导数, 对于起先的函数  $u = f(x, y, z)$  而言, 就是二阶偏导数 (或第二次的偏导数).

例如, 若一阶导数是关于  $x$  取的, 则它 (一阶导数) 的关于  $x, y, z$  的导数便记成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}$$

或

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)^{\textcircled{2}}.$$

<sup>①</sup>为了书写的简便, 我们在此处以讨论三元函数为限.

<sup>②</sup>自然, 微分表示式必须看成整个的记号. 分母中的  $\partial x^2$  约定代替  $\partial x \partial x$ , 表示关于  $x$  微分二次, 在  $u$  的右下角用标记  $x^2$  代替  $xx$ , 意义亦与此完全一样. 下文都须照这样去理解.



三阶导数、四阶导数等等, 可用类似的方法定义.  $n$  阶偏导数的一般定义可以归纳地给出.

注意, 关于不同变元的高阶偏导数, 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}, \dots$$

称为混合偏导数.

例题 1) 设  $u = x^4 y^3 z^2$ ; 则:

$$\begin{aligned} u'_x &= 4x^3 y^3 z^2, & u''_{xy} &= 12x^3 y^2 z^2, \\ u'_y &= 3x^4 y^2 z^2, & u''_{yx} &= 12x^3 y^2 z^2, \\ u'_z &= 2x^4 y^3 z, & u''_{zx} &= 8x^3 y^3 z, \\ u'''_{xyz} &= 24x^3 y^2 z, & u^{\text{IV}}_{xyzx} &= 72x^2 y^2 z, \\ u'''_{yxx} &= 36x^2 y^2 z^2, & u^{\text{IV}}_{yxxz} &= 72x^2 y^2 z, \\ u'''_{zxy} &= 24x^3 y^2 z, & u^{\text{IV}}_{zxyx} &= 72x^2 y^2 z. \end{aligned}$$

2) 我们已经求出函数  $u = \arctg \frac{x}{y}$  的偏导数 [177]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

今计算以后的导数; 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned}$$

等等.

3) 对于函数  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$  依次有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 3x^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \end{aligned}$$



$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  也可用类似的式子表达. 把它们相加, 可证函数  $u$  满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

4) 设  $y = f(x + at) + \varphi(x - at)$ , 式中  $a =$  常数, 而  $f(u), \varphi(u)$  是有着一阶及二阶导数的两个任意函数. 兹证不论  $f$  及  $\varphi$  是怎样的函数,  $y$  总满足方程  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

利用复合函数的微分法则, 求得<sup>①</sup>:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= f'(x + at) + \varphi'(x - at), & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= f''(x + at) + \varphi''(x - at), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= f'(x + at) \cdot a + \varphi'(x - at) \cdot (-a), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= f''(x + at) \cdot a^2 + \varphi''(x - at) \cdot (-a)^2 = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\end{aligned}$$

这便是所要证明的.

5) 试证

$$z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

满足方程

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

其中的  $\varphi$  及  $\psi$  表示任意函数 (有着一阶及二阶导数).

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{x^3} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right);\end{aligned}$$

最后三个导数依次乘以  $x^2, 2xy, y^2$  然后相加, 就得出 0.

**190. 关于混合导数的定理** 在考察例题 1) 及 2) 时, 可令人注意的是, 关于同样的诸变元但依不同的次序取混合导数, 结果相等.

但须立刻注意, 这从混合导数的定义内并不能必然导出, 因为存在着这样的情形: 当取混合导数的次序不同时, 所得的结果也不相等.

例如, 考察函数

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} (\text{当 } x^2 + y^2 > 0 \text{ 时}), \quad f(0, 0) = 0.$$

<sup>①</sup>在记号  $f', \varphi', \dots$  内的一撇表示函数  $f(u)$  和  $\varphi(u)$  关于变元  $u$  的导数.



就有:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (\text{当 } x^2 + y^2 > 0 \text{ 时}),$$

$$f'_x(0, 0) = 0.$$

令  $x$  取特殊值“零”则在  $y$  取任何值 ( $y = 0$  亦算在内) 时有:  $f'_x(0, y) = -y$ . 关于  $y$  微分这函数, 得  $f''_{xy}(0, y) = -1$ . 由此推得, 特别, 在点  $(0, 0)$  处也有

$$f''_{xy}(0, 0) = -1.$$

用同样方法求出在点  $(0, 0)$  处的  $f''_{yx}$  得到

$$f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

因此, 对于所考察的函数而言,  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

然而, 在例题内所看到的, 仅微分次序不同的诸混合导数相等的事实决非偶然: 它对于广大函数类在遵守一定条件时都能成立. 我们从下一简单定理讨论起.

**定理** 假定 1) 函数  $f(x, y)$  定义于 (开) 区域  $D$  中, 2) 在这区域中存在着一阶导数  $f'_x, f'_y$  及二阶混合导数  $f''_{xy}$  及  $f''_{yx}$ , 且最后 3) 这些二阶导数  $f''_{xy}$  及  $f''_{yx}$  作为  $x, y$  的函数, 它们在  $D$  中某一点  $(x_0, y_0)$  为连续. 那么, 在这点

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (1)$$

**证明** 考察表达式:

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

式中的  $h, k$  异于零, 例如是正的, 而且是如此之小, 使得矩形  $[x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k]$  全部包含在  $D$  中; 我们就这样坚持直至讨论结束.

今引入  $x$  的辅助函数:

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k},$$

根据 2), 它在区间  $[x_0, x_0 + h]$  中有导数

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)}{k},$$

故必为连续. 借助于这函数, 就可以把  $W$  的表达式

$$W = \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right], \quad (2)$$

改写成

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$



因为函数  $\varphi(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + h]$  中满足拉格朗日定理 [112] 的一切条件, 我们可以按照有限增量公式改写  $W$  成为:

$$W = \varphi'(x_0 + \theta h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)}{k} \quad (0 < \theta < 1).$$

利用二阶导数  $f''_{xy}(x, y)$  的存在性, 就可在区间  $[y_0, y_0 + k]$  中对于  $y$  的函数  $f'_x(x_0 + \theta h, y)$  再用一次有限增量公式. 最后, 得

$$W = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) \quad (0 < \theta, \theta_1 < 1). \quad (3)$$

但  $W$  的表达式一方面含有  $x$  及  $h$ , 另一方面以同样方式含有  $y$  及  $k$ . 因此, 它们可以互换, 引入辅助函数

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h},$$

由类似的推断方法, 可推得结果:

$$W = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k) \quad (0 < \theta_2, \theta_3 < 1). \quad (4)$$

比较 (3) 及 (4), 即得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k).$$

今使  $h$  及  $k$  趋于零, 而在这等式两边取极限. 由于因子  $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  都是有界的, 上式左右两方的变元就都各趋于  $x_0, y_0$ . 于是, 根据 3), 最后得:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

这便是所要证明的.

这样, 连续的混合导数  $f''_{xy}$  与  $f''_{yx}$  常相等.

在前面举出的例子中, 这些导数

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left( 1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时根本没有极限, 因此在点  $(0, 0)$  有间断: 我们的定理自然不能应用于这种情形.

把关于等式 (1) 的问题与 168 内所考察过的累次极限的问题相对照是很有趣的. 若假定一阶导数存在, 则把  $W$  的表达式写成 (2) 后, 容易看到, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} W = \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} \quad (h = \text{常数}), \quad (5)$$

同样有

$$\lim_{k \rightarrow 0} W = \frac{f'_x(x_0, y_0 + k) - f'_x(x_0, y_0)}{k} \quad (k = \text{常数}). \quad (5^*)$$



于是, 按照导数的定义有

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} W, \quad (6)$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0, y_0 + k) - f'_x(x_0, y_0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} W. \quad (6^*)$$

这样, 混合导数的存在及相等的问题与  $W$  (作为  $h$  及  $k$  的函数) 的累次极限的存在及相等的问题是完全相同的.

这段附注使我们可以用下面的方式加强已证明的定理.

假定, 除一阶导数存在以外, 在  $(x_0, y_0)$  的邻域内 (即使除去这点本身) 仅知混合导数之一例如  $f''_{xy}(x, y)$  存在. 其次, 再设存在着有限极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f''_{xy}(x, y) = A.$$

由此即可推得在点  $(x_0, y_0)$  的两个混合导数存在且相等<sup>①</sup>

事实上, 由上述假定出发, 可以像前面那样得出等式 (3), 然后利用函数  $f''_{xy}(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的极限存在, 可以证明当  $h$  及  $k$  同时趋于零时二重极限存在:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} W = A.$$

但由假定, 单重极限 (5) 及 (5\*) 都存在; 于是, 按照 168 的定理, 累次极限 (6) 及 (6\*) 也存在且相等. 而这就是说导数  $f''_{xy}(x_0, y_0)$  及  $f''_{yx}(x_0, y_0)$  都存在且相等.

**191. 推广到一般情形** 最后, 转向关于混合导数的一般定理的证明.

**定理** 设  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  定义于  $n$  维 (开) 域  $D$  中, 且在这区域中有至  $(k-1)$  阶为止的一切可能的偏导数以及一切  $k$  阶混合导数, 而且所有这些导数在  $D$  中都为连续.

在这些条件之下, 任一  $k$  阶混合导数的数值就与进行逐次微分的次序无关.

**证明** 当  $k=2$  时定理已证明, 于是, 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

实际上, 要使这情形变成前一定理的情形, 只要注意到, 在求这些导数时, 可以把一切其余的变元 (除  $x_i$  及  $x_j$  以外) 编入常数值, 因为所说的导数关于全体变元是连续的, 那么当固定其余变元时, 它关于变元  $x_i$  及  $x_j$  亦必为连续. 今再设  $k > 2$ .

<sup>①</sup>这命题属于施瓦兹 (H.A.Schwarz).



首先对下面的情形证明我们的定理: 当计算  $k$  阶导数时可以把其中两个相继的微分手续互相对调, 即证明等式

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_h} \partial x_{i_{h+1}} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{h+1}} \partial x_{i_h} \cdots \partial x_{i_k}}. \quad (7)$$

(此处的  $i_1, i_2, \cdots, i_h, i_{h+1}, \cdots, i_k$  是  $n$  个数  $1, 2, \cdots, n$  中可能有重复的  $k$  个数的某一种排列法.)

逐次进行求这些导数所必需的微分手续时, 我们看到, 对于前  $(h-1)$  阶导数在两种情形内是相同的. 把对于  $k=2$  时已经证明的定理应用于它们, 则得  $(h+1)$  阶导数也相等. 此后, 在两边又都进行着相同的运算, 当然导出相同的结果.

因此, 等式 (7) 成立, 于是对于这种情形定理已经证明. 但因为一切元素的互换可经由一系列的两个相继元素的互换而获得, 故对于一般情形定理也已证明了: 在需要用到的各导数都为连续的条件之下, 关于不同变元的微分手续的次序恒可以互换.

我们以后常假定一切导数都为连续, 于是微分的次序对我们是不关紧要的. 这使我们在以后表示混合导数时可以把关于同一变元的微分手续集合在一起. 若  $u$  是  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的函数, 则我们就把那种导数写成

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

式中的  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$ ; 至若  $u$  是  $x, y, \cdots, z$  的函数, 则可写成

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \cdots \partial z^\gamma},$$

式中的  $\alpha + \beta + \cdots + \gamma = k$ . 个别的“指数” $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  或  $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$  也可以是零: 带有“指数”0 的微分的出现, 实际上, 表示着没有对该变元施行微分.

## 192. 复合函数的高阶导数 设有函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

式中的  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  又各是变元  $t_1, t_2, \cdots, t_m$  的函数:

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_m) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

对于函数  $f$  及  $\varphi_i$ , 假定它们都有关于一切变元的直到  $k$  阶为止的连续偏导数. 把  $u$  看成变元  $t_1, t_2, \cdots, t_m$  的复合函数:

$$u = F(t_1, t_2, \cdots, t_m) = f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n),$$

今将证明, 复合函数也有直至  $k$  阶为止的一切导数, 而且它们都是连续的.



更准确地说, 我们将证明下面的命题: 函数  $F$  的每一  $k$  阶导数存在, 且可由函数  $f$  (关于它的变元  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) 的导数及函数  $\varphi_i$  (关于它的变元  $t_1, t_2, \dots, t_m$ ) 的导数用乘法及加法来组成, 这些导数都不超过  $k$  阶.

证明将按照数学归纳法进行. 对于  $k = 1$ , 这命题真实; 它可由以前的复合函数的导数公式 [181] 推得.

假定这定理对于比  $k$  低的各阶导数为真; 将证明它对于  $k$  阶导数也为真. 每一  $k$  阶导数系由某一  $(k-1)$  阶导数关于  $t_j$  中之一变元微分而得出. 设想某一  $(k-1)$  阶导数. 按照假定, 它系由函数  $f$  及  $\varphi_i$  关于变元  $x$  及  $t$  的不超过  $k-1$  阶的导数用乘法及加法而得出, 即它是上述导数的乘积之和. 关于  $t_j$  来微分其中一个乘积, 应当轮番地微分它的每一因子. 若这因子是其中一个函数  $\varphi$  的不超过  $(k-1)$  阶的导数, 则微分它的结果, 我们得出同一函数的不超过  $k$  阶的导数. 又若它是函数  $f$  的不超过  $(k-1)$  阶的导数, 那么, 把这导数看成变元  $t$  的复合函数, 并对  $t_j$  来微分它时, 我们就是用已知的若干乘积之和来代换它<sup>①</sup>.

结果, 对于所考察的  $k$  阶导数, 显然也得出刚才所指出的那种形式的表达式, 这就证明了我们的命题.

复合函数  $F$  的导数的连续性由其以  $f$  及  $\varphi_i$  的导数作成  $F$  的导数的方法而推得, 因为  $f$  及  $\varphi_i$  的导数假定都是连续的.

**193. 高阶微分** 设在区域  $D$  中给定某一函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 它有着  $n$  阶连续偏导数. 那时, 如我们所知, 称为 (全) 微分  $du$  的, 就是下面的表达式:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n,$$

式中的  $dx_1, \dots, dx_n$  是自变量  $x_1, \dots, x_n$  的任意增量.

我们看到,  $du$  也是一个  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数. 若假定  $u$  有二阶连续偏导数. 则  $du$  就有一阶连续偏导数, 于是就能说到微分  $du$  的 (全) 微分  $d(du)$ , 它称为  $u$  的二阶微分, 用记号  $d^2u$  来表示.

必须着重指出, 在这时增量  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  被看成常数, 并且, 当由一个微分转移到下一微分时, 仍保持着同一数值<sup>26)</sup>.

这样, 若利用 185 的微分法则, 就有

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n\right) \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \cdot dx_n, \end{aligned}$$

<sup>①</sup>因为假定函数  $f$  的一切导数为连续, 这就保证我们利用计算复合函数的导数的已知法则 [181] 是对的.

<sup>26)</sup>在所有的微分中把增量固定在同一值是十分重要的. 这样可以认为所有的微分是自变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数; 为了重复地对其施行微分, 这是必要的 [参看 179 目的脚注 25)].



或展开得

$$\begin{aligned}
 d^2u &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n \right) \cdot dx_1 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} dx_n \right) \cdot dx_2 \\
 &\quad \cdots \cdots \cdots \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n \right) \cdot dx_n \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n^2 \\
 &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \cdots \\
 &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n.
 \end{aligned}$$

仿此, 可以定义三阶微分  $d^3u$  等等. 总之, 若  $(k-1)$  阶微分  $d^{k-1}u$  已确定, 则  $k$  阶微分  $d^k u$  就定义为  $(k-1)$  阶微分的全微分:

$$d^k u = d(d^{k-1}u)^{\textcircled{1}}.$$

若函数  $u$  存在着直至  $k$  阶为止的所有各阶的连续偏导数, 则这  $k$  阶微分的存在就有了保证. 但各阶微分的展开式将愈来愈繁. 为了简化它的记法, 可用下面的方法.

首先, 在一阶微分的表达式内, 约定“将字母  $u$  移到括弧外”; 于是它就可以记号化地写成下面的样式:

$$du = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot u.$$

现在注意, 若在二阶微分的表达式内也“将  $u$  移到括弧外”, 则剩在括号内的式子在形式上就表示着

$$\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$$

的平方的展开式, 因此, 二阶微分可以记号化地写成:

$$d^2u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 \cdot u.$$

仿此, 可以记下三阶微分等等. 一般的法则是: 在  $k$  取任何值时, 有记号化的等式

$$d^k u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k \cdot u, \quad (8)$$

<sup>①</sup>关于任意阶的偏微分的概念也容易建立, 在此就不再讨论它了.



这公式必须这样来理解: 首先把括号内的多项式按照代数学的乘幂法则形式地展开, 以后所有各项“乘”以  $u$  (它补写在分子  $\partial^k$  的后面), 仅只在这一步以后, 一切记号方才回复到导数及微分的意义.

我们曾看到, 这法则当  $k = 1, 2$  时为真; 因此, 只需证明, 若它对于  $d^k u$  为真, 则对于  $d^{k+1} u$  也必为真就够了.

假设这法则对于  $d^k u$  能成立, 就有展开式:

$$d^k u = \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n},$$

其中的总和是关于满足条件  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$  的非负整数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的一切可能组合而取的, 且

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}$$

是“多项式公式中的”系数.

由假定, 存在着  $(k+1)$  阶连续导数, 我们微分前面的公式, 就得

$$\begin{aligned} d^{k+1} u = & \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \cdot \left\{ \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1+1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n} \right. \\ & + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2+1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2+1} \dots dx_n^{\alpha_n} + \dots \\ & \left. + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n+1}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n+1} \right\}. \end{aligned}$$

显然, 这式子也可以先由记号化的式子

$$\begin{aligned} & \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n} \\ & \times \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) \end{aligned}$$

作形式上的逐项相乘, 再添写  $u$  而得出. 但这一“乘积”不是别的, 正是

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k \\ & \times \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) \\ & = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1}, \end{aligned}$$

于是

$$d^{k+1} u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1} \cdot u,$$

这便是所要证明的.



由前面的讨论可见  $k$  阶微分是  $k$  次齐次整<sup>27)</sup> 多项式, 或常说是关于自变量的微分的  $k$  次形式, 它们的系数即为  $k$  阶偏导数乘一为整数的常数 (“多项式公式中的” 系数).

例如, 若  $u = f(x, y)$ , 则

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2, \\ d^3u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3, \\ d^4u &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 \\ &\quad + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} dy^4, \end{aligned}$$

等等. 具体地令  $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ , 就有

$$\begin{aligned} du &= \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}, \quad d^2u = \frac{2xy(dy^2 - dx^2) + 2(x^2 - y^2)dx dy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ d^3u &= \frac{(6x^2y - 2y^3)dx^3 + (18xy^2 - 6x^3)dx^2 dy}{(x^2 + y^2)^3} \\ &\quad + \frac{(6y^3 - 18x^2y)dx dy^2 + (2x^3 - 6xy^2)dy^3}{(x^2 + y^2)^3}, \text{ 等等.} \end{aligned}$$

变元的个数增加时微分表达式的繁复也递增. 若  $u = f(x, y, z)$ , 那么, 譬如, 三阶微分  $d^3u$  的展开式是

$$\begin{aligned} d^3u &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 \\ &\quad + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} dx^2 dz + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} dx dz^2 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} dy^2 dz \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} dy dz^2 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

#### 194. 复合函数的微分 设有复合函数

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

式中

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

<sup>27)</sup> 术语“整”对于多项式来说强调的是在其记法中仅取自变量的整数幂.



在这种情形, 一阶微分可以仍保持原来的形式:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

[根据一阶微分的形式不变性, 185]. 但这里的  $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$  已不是自变量的微分, 而是函数的微分, 因此, 本身就可能都是函数, 而不是像前面那样的常数了<sup>28)</sup>.

现在计算这函数的二阶微分 [若利用 185 的微分法则] 就有:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \cdot dx_n \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d(dx_2) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot d(dx_n) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 \cdot u \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d^2x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot d^2x_n. \end{aligned}$$

由此可见, 对于高于一阶的微分, 其形式的不变性一般并不成立.

现在考察特殊情形, 当  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  是  $t_1, t_2, \cdots, t_m$  的线性函数时, 即当

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \alpha_i^{(2)} t_2 + \cdots + \alpha_i^{(m)} t_m + \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

时, 式中的  $\alpha_i^{(j)}$  及  $\beta_i$  是常数.

在这情形, 就有

$$dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} dt_m = \alpha_i^{(1)} \Delta t_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} \Delta t_m = \Delta x_i.$$

我们看到, 在这种情形, 一切函数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的一阶微分都是常数, 都与  $t_1, t_2, \cdots, t_m$  无关; 因此, 193 证出的公式可以不加改变地取来应用. 由此推得, 将自变量  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  换成新变量  $t_1, t_2, \cdots, t_m$  的线性函数以后, 即使是高阶微分也能保持原来的形式. 在其中微分  $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$  符合于增量  $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ , 但这些增量不是任意的, 而是由增量  $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_m$  来决定的.

这简单而重要的附注 (属于柯西) 我们在下一目内立刻就要用到它.

**195. 泰勒公式** 我们已经知道 [126(13)], 函数  $F(t)$  在它的前  $n+1$  阶导数存在的条件之下, 可以按照泰勒公式展开成下列形式:

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + F'(t_0) \cdot (t - t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} F''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0) \cdot (t - t_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0)) \cdot (t - t_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

<sup>28)</sup> 参看 177 目的脚注 24) .



(余项取拉格朗日式). 令

$$t - t_0 = \Delta t = dt, \quad F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0),$$

就可以把这公式改写成:

$$\begin{aligned} \Delta F(t_0) = & dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) \\ & + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta \cdot \Delta t) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

这时, 须着重指出, 等式右边各微分式内具有各种不同幂次的数量  $dt$ , 确实等于参与于左边函数增量内的增量  $\Delta t$ .

最后形式的泰勒公式便被推广到多元函数的情形.

为了简省书写的手续, 我们以讨论二元函数  $f(x, y)$  为限.

假定在某一点  $(x_0, y_0)$  的邻域内这函数有直到  $(n+1)$  阶为止的一切阶的连续导数. 分别给  $x_0$  及  $y_0$  以增量  $\Delta x$  及  $\Delta y$ , 但连接点  $(x_0, y_0)$  及  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  的直线段须不越出点  $(x_0, y_0)$  的前述邻域之外.

今将证明, 在关于函数  $f(x, y)$  的上述假定之下, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) = & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = & df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \quad (9)$$

而且参与在等式右边成为各种幂次的微分  $dx$  及  $dy$ , 就等于产生左边函数增量的自变量的增量  $\Delta x$  及  $\Delta y$ .

为了证明, [如同 183 内的那样] 可引入新自变量  $t$ , 令

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (10)$$

把这些  $x$  及  $y$  的值代入函数  $f(x, y)$ , 则得一个变元  $t$  的复合函数:

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y).$$

我们已经知道, 这样引入的公式 (10) 在几何上表达着连接点  $M_0(x_0, y_0)$  与  $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  的直线段.

这样, 我们就可以代替增量

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

而考察辅助函数的增量:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0),$$



因为二增量是相等的. 但  $F(t)$  是一元函数, 且有 [192] 直到  $n+1$  阶为止的连续导数; 因此, 应用前已导出的泰勒公式, 就得

$$\begin{aligned}\Delta F(0) = F(1) - F(0) &= dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta) \quad (0 < \theta < 1); \end{aligned} \quad (11)$$

这时, 在右边出现的各种幂次的微分  $dt$  就等于  $\Delta t = 1 - 0 = 1$ .

现在, 利用下述性质: 在变元的线性代换之下, 高阶微分也保持其形式不变性, 就可以写成

$$\begin{aligned}dF(0) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy = df(x_0, y_0), \\ d^2F(0) &= f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx dy \\ &\quad + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot dy^2 = d^2f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

等等. 最后, 对于  $(n+1)$  阶微分, 就有

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

应特别注意的是, 此处的微分  $dx$  及  $dy$  与以前取的增量  $\Delta x$  及  $\Delta y$  毫无差别. 实际上,

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \quad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y.$$

把这一切代入展开式 (11), 就得出所需要的展开式 (9).

读者应当了解, 虽然取微分形式的泰勒公式关于多元函数的情况与关于一元函数的情况有同样简单的形式, 但在展开时它的形式就繁复得多. 请看, 即使对于二元函数, 它的前三项已显得是够繁复了:

$$\begin{aligned}f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= [f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y] \\ &+ \frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta y^2] \\ &+ \frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^3 + 3f'''_{x^2y}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^2 \Delta y + 3f'''_{xy^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta x \Delta y^2 \\ &\quad + f'''_{y^3}(x_0, y_0) \cdot \Delta y^3] + \cdots.\end{aligned}$$

公式 (9) 当  $n=0$  时也成立; 我们已在 183 内考察过这一特殊情形.

## §5. 极值 · 最大值及最小值

### 196. 多元函数的极值 · 必要条件 设函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$



定义于区域  $\mathcal{D}$  中, 且  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  是这区域的内点.

若点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  有一这样的邻域

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \dots; x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta),$$

使对于其中一切点都能成立不等式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

就说, 函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处有极大值 (极小值).

若这邻域可以取得如此之小, 以致等号可以去掉, 即在除去点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  本身以外邻域中的每一点都能成立严格不等式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \underset{(>)}{<} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

就说, 函数在点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处有真正的极大值 (极小值); 否则, 极大值 (极小值) 就称为广义的.

极大值及极小值总称为极值.

假定我们的函数在某一点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处有极值. 今将证明, 若在这一点处存在着 (有限) 偏导数:

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \dots, f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

则一切这些偏导数必都等于零, 于是, 一阶偏导数等于零就是极值存在的必要条件.

为了证明这个论断, 令  $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ , 而  $x_1$  仍保持为变量; 那么, 我们就得到  $x_1$  的一元函数:

$$u = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

因为我们曾假定在点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  有极值存在 (为了明确起见, 设这是极大值), 所以由此推得, 特别, 在点  $x_1 = x_1^0$  的某一邻域  $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$  内必成立不等式

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

于是上述的一元函数在点  $x_1 = x_1^0$  将有极大值, 由此按照费马定理 [109] 就推得

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0.$$

用同样方法可以证明在点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处其他偏导数也都等于零.

因此, 对极值的“怀疑”就是那些点, 在该点的一阶偏导数全等于零; 它们的坐标可由解联立方程组

$$\left. \begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



求出<sup>①</sup>.

像在一元函数的情形那样, 这种点称为静止点.

附注 I. 在可微函数的情形, 极值存在的必要条件还可以简写成:

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

因为, 若  $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \dots = f'_{x_n} = 0$ , 则对于不论怎样的  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , 恒有

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + \dots + f'_{x_n} \cdot dx_n = 0.$$

反之, 若在所给点恒等地成立这条件, 则由于  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  是任意的, 导数  $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$  就应该各别地都等于零.

II. 通常, 被考察的函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在整个区域内部都有有限偏导数, 因此, 使函数达到极值的点必定只能在诸静止点之中去找. 然而, 也会碰到这种情形, 当在个别点处某些偏导数有无穷大值或全然不存在 (而同时, 其余的偏导数都等于零). 当然, 这种点也必须与静止点同样算作对极值“怀疑”的点 [参阅下文: 201, 6].

**197. 充分条件 (二元函数的情形)** 像在一元函数的情形那样, 在静止点完全不能保证有极值存在. 例如, 若取简单的函数  $z = xy$  来看, 就有  $z'_x = y, z'_y = x$ , 它们在唯一的点 —— 原点  $(0,0)$  —— 同时等于零, 在该点又有  $z = 0$ . 但同时显见在这点的任一邻域内, 函数既具有正值也具有负值, 故并无极值. 在图 92 上画着方程  $z = xy$  的图像 (双曲抛物面); 在原点的近处它具有鞍状, 在一铅直坐标平面内向上凹曲, 在另一铅直坐标平面内向下凹曲.

这样, 就引起关于在静止点极值存在 (或不存在) 的充分条件的问题. 就是说, 如何更进一步来研究这一点的问题.

我们首先考察二元函数  $f(x, y)$  的情形. 假定在某一点  $(x_0, y_0)$  的邻域内这函数有定义, 连续, 且有一阶及二阶连续偏导数, 而且这点  $(x_0, y_0)$  就是静止点, 即它满足条件

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (1a)$$

要确定我们的函数在点  $(x_0, y_0)$  究竟有无极值, 自然须转而考察

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

<sup>①</sup>对于二元函数  $z = f(x, y)$  —— 假定它是可微分的 —— 的情形, 条件

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0$$

有着简单的几何说明: 与曲面  $z = f(x, y)$  相切于对应于极值的点的切平面 [参阅 180(6)] 应当平行于  $xy$  平面.



按照泰勒公式 [195] 展开它到第二项为止. 可是, 因为假定  $(x_0, y_0)$  是静止点, 故第一项已消失, 我们就得到

$$\Delta = \frac{1}{2!} \{ f''_{x^2} \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y^2} \cdot \Delta y^2 \}. \quad (2)$$

这时, 增量  $\Delta x, \Delta y$  即由  $x - x_0, y - y_0$  充任, 而一切导数都在某一点

$$(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (0 < \theta < 1)$$

计算它们的数值.

引入这些导数在受检点  $(x_0, y_0)$  的数值:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0), \quad (3)$$

并令

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= a_{11} + \alpha_{11}, \\ f''_{xy}(\cdots) &= a_{12} + \alpha_{12}, \quad f''_{y^2}(\cdots) = a_{22} + \alpha_{22}, \end{aligned}$$

于是, 由于二阶导数的连续性,

$$\text{当 } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时, 一切 } \alpha \rightarrow 0. \quad (4)$$

把差  $\Delta$  写成

$$\Delta = \frac{1}{2} \{ a_{11} \Delta x^2 + 2a_{12} \Delta x \Delta y + a_{22} \Delta y^2 + \alpha_{11} \Delta x^2 + 2\alpha_{12} \Delta x \Delta y + \alpha_{22} \Delta y^2 \}.$$

我们即将证明,  $\Delta$  的性态基本上由表达式  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  的符号决定.

为了使论证容易起见, 我们引用极坐标, 取  $(x_0, y_0)$  作为极点, 取通过它而且平行于  $x$  轴的半直线作为极轴 (图 105). 设  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  是点  $(x_0, y_0)$  与  $(x, y)$  之间的距离, 而  $\varphi$  表示连接它们的线段与极轴间的夹角, 于是  $\Delta x = \rho \cos \varphi, \Delta y = \rho \sin \varphi$ .

这时我们关心的是将差  $\Delta$  写成:

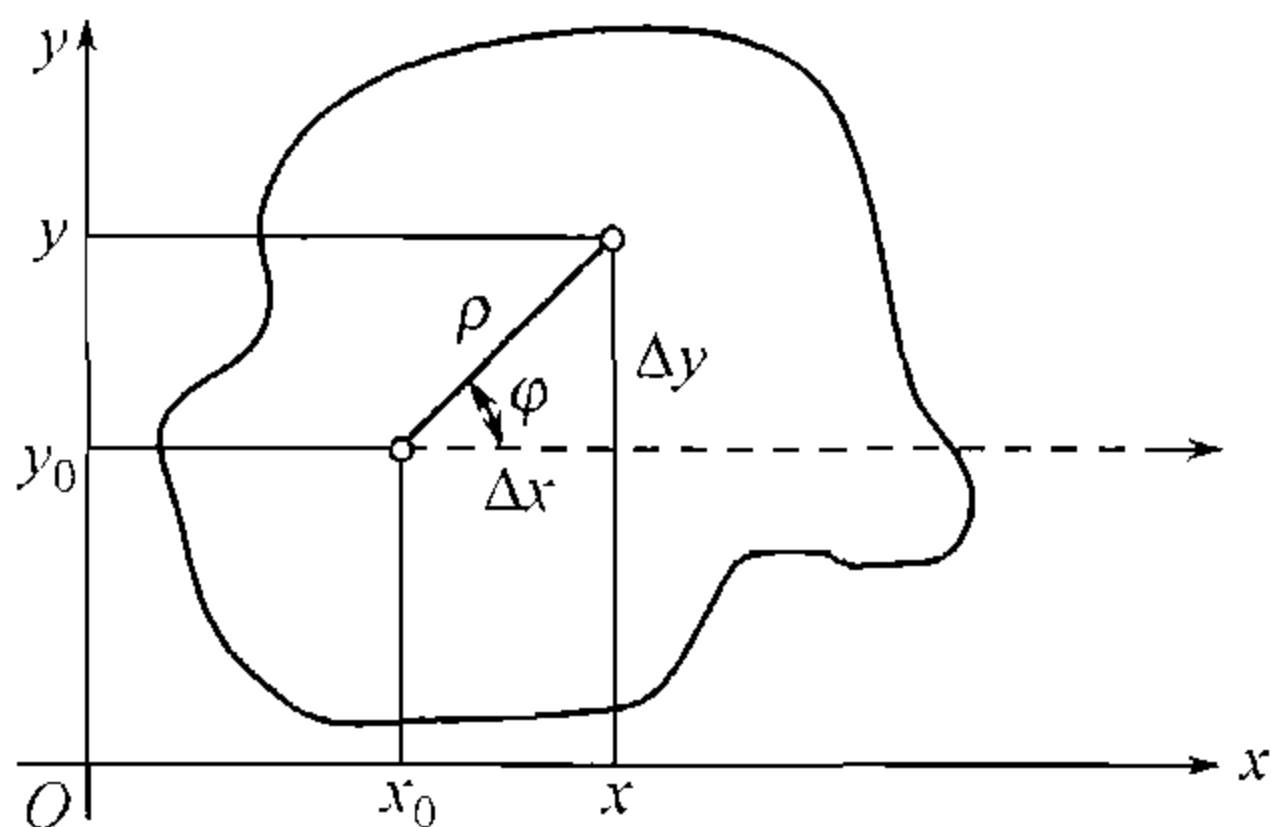


图 105

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\rho^2}{2} \{ &a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \\ &+ \alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi \}. \end{aligned}$$



1° 首先设  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .

在这情形必有  $a_{11}a_{22} > 0$ , 于是  $a_{11} \neq 0$ , 而在括号  $\{\dots\}$  内的前三项可以表示为:

$$\frac{1}{a_{11}} \cdot [(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \cdot \sin^2 \varphi]. \quad (5)$$

由此很明显地, 在括号  $[\dots]$  内的表达式总是正的, 于是上述的三项式对于一切  $\varphi$  的值都不等于零, 且保持着与系数  $a_{11}$  相同的符号. 它的绝对值, 是区间  $[0, 2\pi]$  内的  $\varphi$  的连续函数, 它有 (显然是正的) 最小值  $m$ [85]:

$$|a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi| \geq m > 0.$$

另一方面, 若转而考察括号  $\{\dots\}$  内的后三项, 则由于 (4), 对于一切  $\varphi$  都有

$$|\alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi| \leq |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m,$$

只要  $\rho$  (随之而  $\Delta x, \Delta y$ ) 充分小就行. 但那时, 在括号  $\{\dots\}$  内的整个表达式, 这也就是说, 差  $\Delta$  将保持着与三项式中第一项相同的符号, 也就是与  $a_{11}$  相同的符号.

因此, 若  $a_{11} > 0$  时, 则也有  $\Delta > 0$ , 即函数在被考察的点  $(x_0, y_0)$  有极小值, 而当  $a_{11} < 0$  时, 就有  $\Delta < 0$ , 即有极大值.

2° 现在假定  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ .

先讨论  $a_{11} \neq 0$  的情形, 这时仍可以利用 (5) 的变换. 当  $\varphi = \varphi_1 = 0$  时, 括号  $[\dots]$  内的表达式因为已变成  $a_{11}^2$ , 所以是正的. 反之, 若由条件

$$a_{11} \cos \varphi_2 + a_{12} \sin \varphi_2 = 0 \quad (\sin \varphi_2 \neq 0)$$

确定  $\varphi = \varphi_2$ , 则 (5) 式的括号  $[\dots]$  内将变成  $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi_2$ , 因而是负的. 当  $\rho$  充分小时, 括号  $\{\dots\}$  内的后三项, 不论在  $\varphi = \varphi_1$  或  $\varphi = \varphi_2$  时都可成为任意小, 故  $\Delta$  的符号即由前三项的符号来确定. 这样, 在被考察的点  $(x_0, y_0)$  的任意近处, 在由角度  $\varphi = \varphi_1$  及  $\varphi = \varphi_2$  所确定的射线上, 差  $\Delta$  将有异号的值. 因此, 在这点, 函数不能有极值.

若  $a_{11} = 0$ , 括号  $\{\dots\}$  内的前三项就变成

$$2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = \sin \varphi \cdot (2a_{12} \cos \varphi + a_{22} \sin \varphi),$$

因为此时必有  $a_{12} \neq 0$ , 故可这样来确定角  $\varphi_1 \neq 0$ , 使

$$|a_{22}| |\sin \varphi_1| < 2|a_{12}| \cdot |\cos \varphi_1|,$$

于是, 当  $\varphi = \varphi_1$  及  $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$  时, 上述的三项式就有相反的符号, 而讨论可同上面一样来完成.



因此, 若  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , 则在受检的静止点  $(x_0, y_0)$  函数  $f(x, y)$  有极值, 就是, 当  $a_{11} < 0$  时有极大值, 当  $a_{11} > 0$  时有极小值. 若  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , 则函数没有极值.

至于在  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  的情形, 要解决这问题, 必须再研究其较高阶的导数; 这个“怀疑”的情形我们将搁置不论.

**例题** 1) 研究函数

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0, q > 0)$$

的极大值及极小值.

计算偏导数:

$$z'_x = \frac{x}{p}, \quad z'_y = \frac{y}{q}.$$

由此立刻看到, 原点  $(0, 0)$  是唯一的静止点.

算出  $a_{11}, a_{12}$  及  $a_{22}$ , 得

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{q};$$

由此,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . 因此在点  $(0, 0)$  函数  $z$  有极小值; 但这是明显而可直接证明的.

在几何图形上我们的函数表示着顶点在原点的椭圆抛物面 (比较图 93).

$$2) \quad z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0, q > 0);$$

$$z'_x = \frac{x}{p}, \quad z'_y = -\frac{y}{q}.$$

在这里亦看出  $(0, 0)$  是静止点.

算出

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{q};$$

由此  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ . 因此, 函数没有极值.

在几何上, 我们这里遇见的是顶点在原点的双曲抛物面.

$$3) \quad z = y^2 + x^4 \text{ 或 } z = y^2 + x^3;$$

在这两种情形静止点都是  $(0, 0)$ , 且在该点  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ .

我们的判别法并未给出答案: 这时, 显而易见, 在前一情形有极小值, 而在后一情形根本没有极值.

**附注** 以后 [236] 可以看出, 本目的结果与关于曲线在奇异点近处的性态的几何问题紧密地关联着.



**198. 充分条件 (一般情形)** 现在转而考察一般情形. 设函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是在某一静止点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的邻域内定义着, 连续, 并有一阶及二阶连续导数. 如同上面那样, 按照泰勒公式展开

$$\Delta = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

得

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \left\{ f''_{x_1^2} \cdot \Delta x_1^2 + f''_{x_2^2} \cdot \Delta x_2^2 + \dots + f''_{x_n^2} \cdot \Delta x_n^2 + 2f''_{x_1 x_2} \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \right. \\ &\quad \left. + 2f''_{x_1 x_3} \cdot \Delta x_1 \Delta x_3 + \dots + 2f''_{x_{n-1} x_n} \cdot \Delta x_{n-1} \Delta x_n \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n f''_{x_i x_k} \cdot \Delta x_i \Delta x_k, \end{aligned}$$

式中的  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ; 一切导数都在某一点

$$(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \quad (0 < \theta < 1)$$

计算它们的数值.

在此处引入数值

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

于是

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) = a_{ik} + \alpha_{ik} \textcircled{1}$$

且

$$\text{当 } \Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0 \text{ 时 } \alpha_{ik} \rightarrow 0. \quad (7)$$

现在, 我们所关心的式子  $\Delta$  可以写成

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right\}. \quad (8)$$

括号内的前一部分是函数  $f$  在所考察的点的二阶微分; 它表示为变元  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  的二次齐次多项式, 或即所谓二次型<sup>②</sup>. 下面将看到, 我们所关心的问题的解答就与这二次型的性质有关.

在高等代数内, 变元  $y_1, \dots, y_n$  的二次型

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} y_i y_k \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (9)$$

<sup>①</sup>显然,  $a_{ik} = a_{ki}$  (且  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ).

<sup>②</sup>后一总和也有相似的形式, 但其中的系数也是这些变元的函数.



若在各变元不同时等于零而取任何数值时恒有正(负)值, 就称为正(负)定的. 例如

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

就是正定二次型. 只要把它表示为

$$(2y_1 - 3y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2,$$

这事实就很明显了.

在这种场合我们不能详述. 单只举出西尔维斯特 (J.J.Sylvester) 所发现的 (9) 式为正定的必要且充分的条件. 它可以用一串不等式<sup>①</sup>

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

来表示.

因为将负定二次型的所有项变号就得到正定二次型, 反之也如此, 所以容易由此找出负定二次型的特征, 它可由一串不等式给出, 这串不等式是由前面那一串不等式 (从第一个开始) 间隔改变不等式的方向而得到:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \dots, \\ (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

利用这些概念, 可叙述极值存在的充分条件:

<sup>①</sup>注意含有  $y_i y_k (i \neq k)$  的项在 (9) 式内将遇见两次, 因此  $a_{ik} = a_{ki}$  就是  $y_i y_k$  的系数的一半. 对于刚才举出的例子, 若算出

$$a_{11} = 6, a_{22} = 5, a_{33} = 14, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -4, a_{23} = a_{32} = -1,$$

检查条件的具备是很容易的.



若二阶微分, 即二次型

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \quad (10)$$

——其系数之值如 (6)——是正 (负) 定的, 则在受检点  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  函数有极小值 (极大值).

为了证明, 引入点  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  与  $(x_1, \dots, x_n)$  之间的距离

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}.$$

从 (8) 式的括号内提出  $\rho^2$ , 并令

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

改写  $\Delta$  的表达式成为

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left\{ \sum_{i,k=2}^n a_{ik} \xi_i \xi_k + \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \right\}. \quad (11)$$

一切  $\xi_i$  的数值并不同时等于零, 因此, 若二次型 (10) 是正定的, 则在公式 (11) 的括号内, 前一和式恒有正号. 进一步说, 因为

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1, \quad (12)$$

所以必能找出这种正的常数  $m$ , 使对于  $\xi_i$  可能有的一切数值总有

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq m.$$

实际上, 这一和式是变元  $\xi_i$  在全空间的连续函数, 特别, 在满足关系式 (12) 的点  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  的集合  $\mathcal{M}$  (“球面”) 中也是连续函数. 但不难看出这集是闭集, 即含有其本身的一切聚点; 于是按照魏尔斯特拉斯定理 [173, 参阅在它的证明后的附注] 所说的和式将在  $\mathcal{M}$  中有最小值  $m$ , 它必然是正的, 因为这一和式在  $\mathcal{M}$  中的一切数值都是正的.

另一方面, 从 (7) 看来, (11) 式右边括号内的后一和式当  $\rho$  充分小时显然在绝对值上可小于  $m$ , 于是全括号内的值是正的. 因此, 在中心为点  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  的充分小的球内, 差  $\Delta$  必取正值, 由此可见在所说的点处函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  有极小值.

同样, 可以详尽地说明当二次型 (10) 是负定形式时函数有极大值.



**199. 极值不存在的条件** 若二次型 (9) 能取具有相反符号的数值, 它就称为不定的. 这样的二次型如

$$6y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 8y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3.$$

实际上, 例如, 当  $y_1 = 1, y_2 = y_3 = 0$  时它的值等于 6, 而当  $y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = 0$  时它的值等于 -1.

现在我们可以给前目内已证明的命题以如下的补充:

若二次型 (10) 是不定的, 则在受检点  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  处必无极值.

设当  $\Delta x_i = h_i (i = 1, 2, \dots, n)$  时二次型 (10) 具有正值:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} h_i h_k > 0, \quad (13)$$

而当  $\Delta x_i = \bar{h}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  时具有负值:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \bar{h}_i \bar{h}_k < 0.$$

首先令

$$\Delta x_i = h_i t, t \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

它对应于沿着连接  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  与  $(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n)$  的直线而移动. 于是从 (8) 式括号内提出  $t^2$ , 在这场合就得到

$$\Delta = \frac{t^2}{2} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} h_i h_k + \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} h_i h_k \right\}.$$

由 (13) 知道括号内的第一个和式是确定的正数. 至于第二个和式, 则当  $t \rightarrow 0$  时它的系数趋于零, 因为在这时显然一切  $\Delta x_i \rightarrow 0$ . 这就是说, 在充分小的  $t$  时上述括号内的式子 (随之而差  $\Delta$  的全部) 成为正的, 即在上述直线上充分接近于  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  的点, 将有

$$f(x_1, \dots, x_n) > f(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

另一方面, 若取

$$\Delta x_i = \bar{h}_i t, \text{ 在 } t \neq 0 \text{ 时 } (i = 1, 2, \dots, n),$$

即沿着连接  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  与  $(x_1^0 + \bar{h}_1, \dots, x_n^0 + \bar{h}_n)$  的另一直线而移动, 则在其上充分接近于  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  的点 (即对应于充分小的  $t$ ) 有

$$f(x_1, \dots, x_n) < f(x_1^0, \dots, x_n^0).$$



由此得证在受检点处不能有极大值,也不能有极小值.

可能碰到这种情形,二次型 (9) 不取具异号的数值,但却不是正定或负定的,因为除变元的零值以外还有其他使它等于零的点:在这种情形,二次型称为半定的.例如,二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1 + y_2 + y_3)^2;$$

虽不取负值,但当每一次

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

时,例如说,当  $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$  而  $y_3 = -1$  时,它就等于零.

当二次型 (10) 是半定时,也是“可疑”的情形.在这种情形,可能有极值,也可能无极值,须视高阶导数的性质而决定,特别是当一切二阶导数在受检点都等于 0 时,应当引用高阶导数.

对于“可疑”的情形我们不准备再研讨它.

**附注** 对于一元函数  $f(x)$ , 二次型 (10) 变成一项

$$f''(x_0) \cdot \Delta x^2,$$

式中的  $x_0$  是受检点. 这“二次型”当  $f''(x_0) > 0$  时显然是正定的,当  $f''(x_0) < 0$  时是负定的. 这样, 137 内的判定法就成为 198 内所述情形的特例.

转到二元函数  $f(x, y)$  的情形, 请注意, 197 的结果也包含在 198 及 199 所证明的情形内. 容易看到, 197 内也已证明了二次型

$$a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2$$

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  时是定型 ( $a_{11} > 0$  时为正定,  $a_{11} < 0$  时为负定), 而当  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$  时是不定的.

**200. 函数的最大值及最小值 · 例题** 设函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是在某一有界闭域  $D$  中有定义而且连续, 并且在这域中 (或许要除去某些个别的点) 有有限偏导数. 依魏尔斯特拉斯定理 [173], 在这区域中必能找出一点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , 在这点处函数取最大 (小) 值. 若点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  位于区域  $D$  的内部, 则在这点处函数显然有极大值 (极小值), 于是, 在这种情形, 我们所关心的点必定包含在对极值“怀疑”的各点内. 然而函数  $u$  也可能在区域的周界上达到它的最大 (小) 值. 因此, 为了要找出函数  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  在区域  $D$  中的最大 (小) 值, 必须找出一切对极值“怀疑”的内点, 算出在这些点的函数值, 然后再与区域周界上的函数值相比较; 这些数值中的最大 (小) 值就是函数在全区域中的最大 (小) 值.

用例题来说明上述的论点.

1) 设需要求出函数

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$



在由  $x$  轴、 $y$  轴及直线  $x + y = 2\pi$  所围成的三角形 (图 106) 中的最大值. 首先有

$$u'_x = \cos x - \cos(x + y), \quad u'_y = \cos y - \cos(x + y).$$

两导数在区域内部唯一的点  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  处同时等于零, 在这点  $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . 因为在区域的周界上, 即在直线  $x = 0, y = 0, x + y = 2\pi$  上, 我们的函数等于 0, 故上面求出的点  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  显然使函数达到最大值.

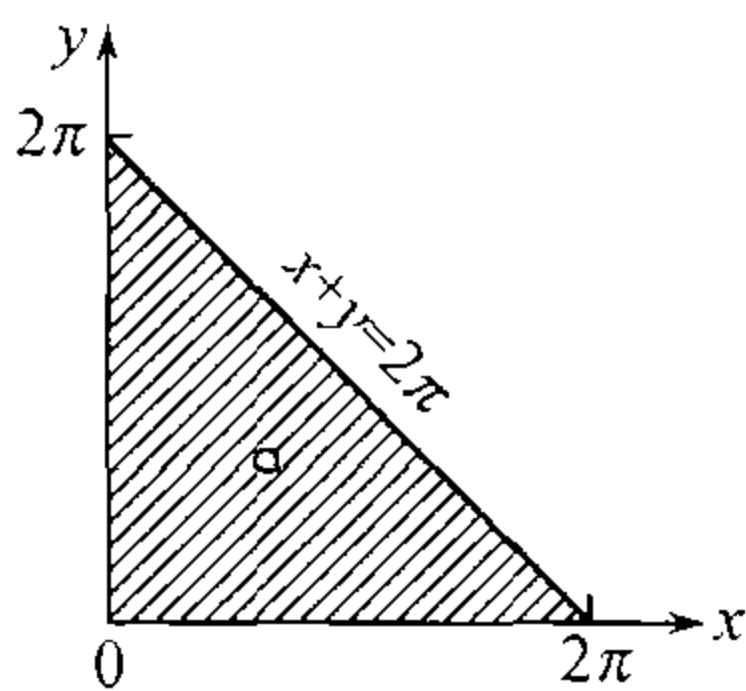


图 106

2) 求函数

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

的最大值及最小值, 其中变元  $x, y, z$  由关系式  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所关联着 (且  $a > b > c > 0$ ).

由此关系式解出  $z^2$ , 并把它代入  $u$  的表达式内, 就得出函数

$$u = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - [(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]^2,$$

它是二自变量  $x$  及  $y$  在圆  $x^2 + y^2 \leq 1$  内的函数.

导数

$$u'_x = 2x(a - c)\{(a + c) - 2[(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]\},$$

$$u'_y = 2y(b - c)\{(b + c) - 2[(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]\}$$

在下列各点同时等于零:

$$(1) \ x = y = 0 \quad (u = 0), \quad (2) \ x = 0, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(u = \frac{1}{4}(b - c)^2\right),$$

$$(3) \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0 \quad \left(u = \frac{1}{4}(a - c)^2\right).$$

现在必须转而考察区域的周界, 即圆周  $x^2 + y^2 = 1$ . 由此方程确定  $y^2$ , 并把它代入  $u$  的表达式内, 就得到区间  $[-1, 1]$  内的一个变量  $x$  的函数:

$$u = (a^2 - b^2)x^2 + b^2 - [(a - b)x^2 + b]^2.$$

在这区间内部, 导数

$$u'_x = 2(a - b)^2x(1 - 2x^2),$$

当  $x$  为下列各值时等于零:

$$(4) \ x = 0 \quad (u = 0), \quad (5) \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(u = \frac{1}{4}(a - b)^2\right).$$

最后, 注意在所考察的区间的端点有

$$(6) \ x = \pm 1 \quad (u = 0).$$

因此, 必须比较数值

$$u = 0; \frac{1}{4}(b - c)^2; \frac{1}{4}(a - c)^2; \frac{1}{4}(a - b)^2;$$



其中最小值为 0, 而最大值为  $\frac{1}{4}(a-c)^2$ . 这就是所求的函数的最小值及最大值, 它在下列诸点分别达到这些数值:

$$(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)$$

及

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

一般说来, 在二元函数  $u = f(x, y)$  的情形, 区域通常是用一条 (或几条) 曲线为边界的. 沿着这曲线 (若有几条曲线, 则沿着其中的每一条) 变元  $x$  与  $y$  或是彼此之间存在函数关系, 或是二者都是另一参变量的函数, 于是函数  $u = f(x, y)$  在域界上就成为一个变元的函数, 它的最大 (小) 值可用 139 已讲过的方法试求. 例如, 若曲线由参变量方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

给定, 式中的  $t$  在区间  $[t_0, T]$  内变动着, 则在这曲线上我们的函数就是  $t$  的 (复合) 函数:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)),$$

对于它, 我们已能求其最大 (小) 值.

3) 求四个非负数  $x, y, z, t$  的乘积

$$u = xyz t$$

的最大值, 假定它们的和保持着常数值:

$$x + y + z + t = 4c.$$

现在证明, 当  $u$  的各因子相等时:  $x = y = z = t = c^{\text{①}}$ , 它将得最大值.

由所给条件确定  $t: t = 4c - x - y - z$ , 把它代入  $u$  的表达式内:

$$u = xyz(4c - x - y - z).$$

我们现在就有了一个三自变量  $x, y, z$  的函数, 而需要求出它在由条件

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4c$$

所确定的三维区域中的最大值. 这区域在几何的形式上是一个以平面  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4c$  为界的四面体.

算出各偏导数并使它们等于零:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yz(4c - 2x - y - z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} &= zx(4c - x - 2y - z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= xy(4c - x - y - 2z) = 0. \end{aligned}$$

在区域内部满足这些方程的仅有一点  $x = y = z = c$ , 在这点  $u = c^4$ . 因为在区域的界面上  $u = 0$ , 故在  $x = y = z = c$  这点函数确是达到最大值.

<sup>①</sup>我们仅为了明确起见, 取因子的数目等于四; 其实对于任何个因子, 结果总是相同的.



我们的论点已得证明 (因为当  $x = y = z = c$  时, 亦必  $t = c$ )<sup>①</sup>.

一般说来, 在三元函数  $u = f(x, y, z)$  的情形, 其区域通常是用曲面 (或一系列的曲面) 为界的. 沿着这种曲面, 变元  $x, y, z$  就都成为某两参变量的函数 (也可以就用这些变元之中的某两个作为参变量. 例如  $z = 4c - x - y$ ). 那时函数  $u$  也成为这两参变量的函数, 于是怎样确定它在界面上的最大 (小) 值, 已成为上面讲过的比较简单的问题了. 其他由此类推.

若函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  仅只给定在开的 (或无界的) 区域  $\mathcal{D}$  中, 则已不得预先断言它在区域中达到自己的最大 (小) 值. 尽管如此, 在个别情形这种最大 (小) 值仍能存在; 我们将举例来说明如何证明这件事情.

4) 求正数  $x, y, z, t$  的和

$$u = x + y + z + t$$

的最小值, 假定它们的乘积保持着常数值:

$$xyzt = c^4.$$

将证明, 当一切加数相等时:  $x = y = z = t = c$ <sup>②</sup>,  $u$  获得最小值.

确定  $t$ :  $t = \frac{c^4}{xyz}$ , 把它代入  $u$  的表达式内:

$$u = x + y + z + \frac{c^4}{xyz}.$$

我们需要找出这  $x, y, z$  的三元函数在由不等式  $x > 0, y > 0, z > 0$  所确定的区域中 (即在无界的, 开的第一卦限内) 的最小值.

尝试应用以前的方法: 若在区域中有一点, 在该点我们的函数达到最小值, 则如同以前那样这点应当是静止点之一. 我们有

$$\begin{aligned} u'_x &= 1 - \frac{c^4}{x^2 y z} = 0, & u'_y &= 1 - \frac{c^4}{x y^2 z} = 0, \\ u'_z &= 1 - \frac{c^4}{x y z^2} = 0; \end{aligned}$$

由此,  $x = y = z = c$ , 与此对应也有  $t = c$ ; 这时  $u = 4c$ .

现在怎样检验这数值是真正的最小值?

显然, 在接近界平面  $x = 0, y = 0, z = 0$  时, 或是  $(x, y, z)$  趋于无穷远时, 我们的函数  $u$  无限增大. 因此可以把已求出的点用立方体  $[\varepsilon, E; \varepsilon, E; \varepsilon, E]$  围住, 而取  $E > 0$  如此之大,  $\varepsilon > 0$  如此之小, 使得在这立方体之外以及它的境界上都有  $u > 4c$ . 但在立方体中, 如同在有界闭域中那样, 函数  $u$  应当有最小值; 现在已可明了, 正是在上面求出的点处函数达到这数值, 而且它也就是函数在全部原来区域中的最小值, 这便是所要证明的.

<sup>①</sup>由此结果推得, 总和等于  $4c$  的四个正数的乘积  $xyzt$  决不超过  $c^4$ , 于是

$$\sqrt[4]{xyzt} \leq c = \frac{x + y + z + t}{4},$$

即几何中项不超过算术中项. 这对于任何个数的数字都是正确的.

<sup>②</sup>在此处可以重述前页的脚注.



**附注** 在例题 1), 3), 4) 所考察的区域中仅存在一个“可疑的”点. 在这种情形, 有时, 虽然可以证明在这点函数有极大值 (或极小值). 然而, 与一元函数的情形 [参阅 139 的附注] 不同, 在此处, 由这种只有一个极值的事实却不能作出结论, 说这个极大 (小) 值必定就是函数在区域中的最大 (小) 值.

下面的简单例子说明这种结论实际上可能得出不正确的结果. 考察定义于矩形  $[-5, 5; -1, 1]$  中的函数

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2.$$

它的导数

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y, \quad u'_y = 2x - 2y$$

在区域的界限内仅在点  $(0, 0)$  都变为零. 用 197 的判定法容易证明函数在这点有极大值 (等于 0). 然而这数值并不是函数在区域中的最大值, 因为, 例如在点  $(5, 0)$ , 函数  $u = 25$ .

因此, 探求多元函数在区域中的最大值或最小值时, 讨论极大值及极小值在实用上显然是不需要的.

**201. 应用问题** 数学领域或其他科学和工程技术领域内的许多问题, 常可归结于求某一函数的最大值或最小值的问题.

下面的应用题 1) 至 4) 的解答与前目内讨论过的例题有密切关系.

1) 在半径为  $R$  的已知圆的一切内接三角形中, 求出其面积最大者 (图 107).

若用  $x, y, z$  表示三角形各边所对的中心角, 则它们由关系式

$$x + y + z = 2\pi$$

互相联系着, 由此

$$z = 2\pi - x - y.$$

三角形的面积  $P$  可借  $x, y, z, R$  表示为:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}R^2 \sin x + \frac{1}{2}R^2 \sin y + \frac{1}{2}R^2 \sin z \\ &= \frac{1}{2}R^2 [\sin x + \sin y - \sin(x + y)]. \end{aligned}$$

变元  $x$  及  $y$  的变动区域在此处由条件  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi$  所确定. 现在就需要求出使括号内的式子有最大值的那些变元的值.

我们已知道 [200, 例题 1)] 这数值是  $x = y = \frac{2\pi}{3}$ , 因而  $z = \frac{2\pi}{3}$ : 得出的是等边三角形.

2) 在已知周长为  $2p$  的一切三角形中, 求出面积  $P$  为最大的三角形.

设  $x, y, z$  表示三角形的边长; 按照海伦公式,

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

自然, 我们可以把  $z = 2p - x - y$  代入, 将  $P$  改写成为

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)},$$

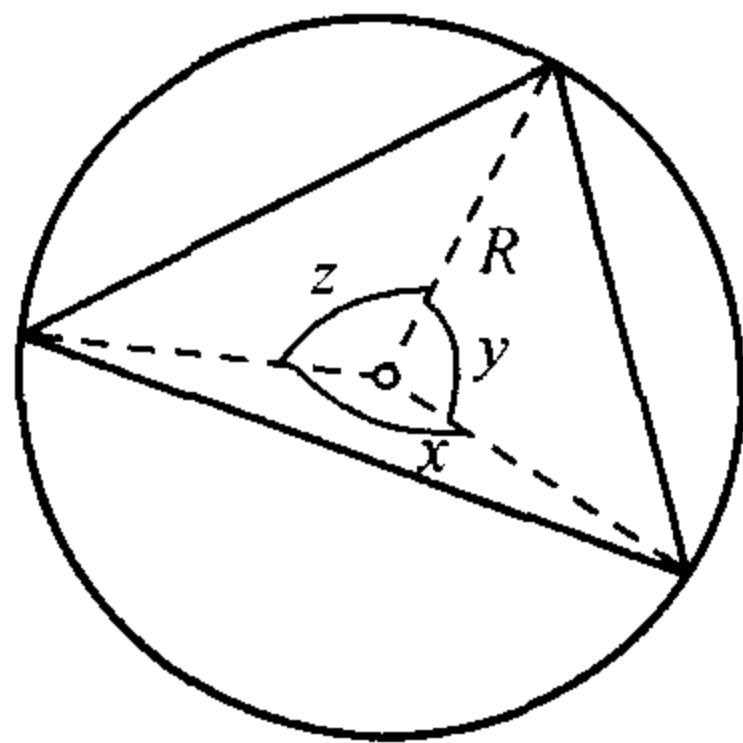


图 107



再求这函数在某一三角形区域内的最大值, 关于这区域在 (160, 6) 内已讲过了.

我们现在用另外的方法: 把问题变成求几个正数的乘积

$$u = (p-x)(p-y)(p-z)$$

的最大值, 而设它们的和是常数:

$$(p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - 2p = p.$$

我们已经知道 [200, 例题 3)], 要达到极大值, 一切乘数都应相等, 于是  $x = y = z = \frac{2p}{3}$ . 得出的仍是等边三角形.

3) 在已给椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的一切内接长方体 (各边都平行于椭圆面的对称轴) 中, 求出有最大体积的长方体.

若用  $x, y, z$  表示长方体的一个顶点的坐标, 这顶点位于第一卦限内, 则其体积为  $v = 8xyz$ . 先不考察  $v$ , 而考察量

$$u = \frac{v^2}{64a^2b^2c^2} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2},$$

因为它们显然如同  $x, y, z$  那样, 在有同一数值时达到自己的最大值. 关于  $u$  的最大值, 问题又归结于前目例题 3) 去了.

答案:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}, \quad \text{于是} \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

4) 假定有某种气体 (例如, 空气) 被压缩于唧筒压缩器内, 从大气压力  $p_0$  增至压力  $p > p_0$ . 这时压缩 1 千克气体所耗费的功, 表示为

$$A = RT_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right];$$

其中  $R$  是“气体常数”,  $T_0$  是气体在压缩前的绝对温度, 而  $\gamma$  是与压缩器构造有关的某一常数 ( $> 1$ ). 原始温度愈小时显然功  $A$  亦愈小. 要达到高度的压缩, 这时节省所费的功是很要紧的, 可以把全部压缩过程分成几个阶段, 而在每两个阶段之间使被压缩的 (同时亦在发热的) 气体冷却.

例如, 设我们有三阶段的压缩器, 附有两个中间冷却器, 在冷却器内温度仍还原至  $T_0$ . 若用  $p_1$  及  $p_2$  表示在第一及第二阶段末的压力, 则压缩所耗费的总功就是

$$A = RT_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \left[ \left( \frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}.$$

于是就引起这样的问题: 当给定  $p_0, p, T_0$  时, 若要使所耗费的功的数量为最小, 应该怎样选择中间压力  $p_1$  及  $p_2$ .

若弃去并不影响所求数量  $p_1$  及  $p_2$  的常数因子及常数项, 则事情就变成去研究函数

$$u = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left( \frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$



的最小值. 因为乘积

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

保持着常数, 故利用 200 的例题 4), 立刻看到, 在一切被加数相等;

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

即

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p}{p_2}$$

时  $u$  达到最小值. 由此知道相继的压力作成等比数列. 因而

$$p_1 = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot p}, \quad p_2 = \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}.$$

5) 在平面上给定一个边长为  $a, b, c$  的三角形 (图 108); 在它上面可作无数个有已知高  $h$  的锥体. 要在其中求出有最小侧面积  $S$  的那一个.

问题变成要去求锥体顶点的投影  $M$ , 它的位置由边  $a, b, c$  上的三条垂线  $x, y, z$  的数量所确定. 若这点与三角形本身位于边的同侧, 则垂线之前附以正号, 否则附以负号. 数量  $x, y, z$  由下列关系式联系着 ( $P$  表示三角形的面积):

$$ax + by + cz = 2P,$$

由此

$$z = \frac{2P - ax - by}{c}.$$

我们所关心的侧面积  $S$ , 现在就可表示为:

$$S = \frac{a}{2} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2} \sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2} \sqrt{z^2 + h^2},$$

式中的  $z$  应当用求得的表达式代入; 自变量  $x, y$  的变动区域就是全部  $xy$  平面. 我们有

$$\begin{aligned} 2S'_x &= \frac{ax}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{a}{c} = 0, \\ 2S'_y &= \frac{by}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{b}{c} = 0, \end{aligned}$$

或

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}, \quad \text{由此 } x = y = z.$$

对应于此的点  $M$  是三角形的内切圆的中心.

如同前目的例题 4), 容易证明, 与这样  $x$  及  $y$  的数值相对应的  $S$  是最小值, 由于当  $x$  或  $y$  无限增大时  $S$  也无限增大.

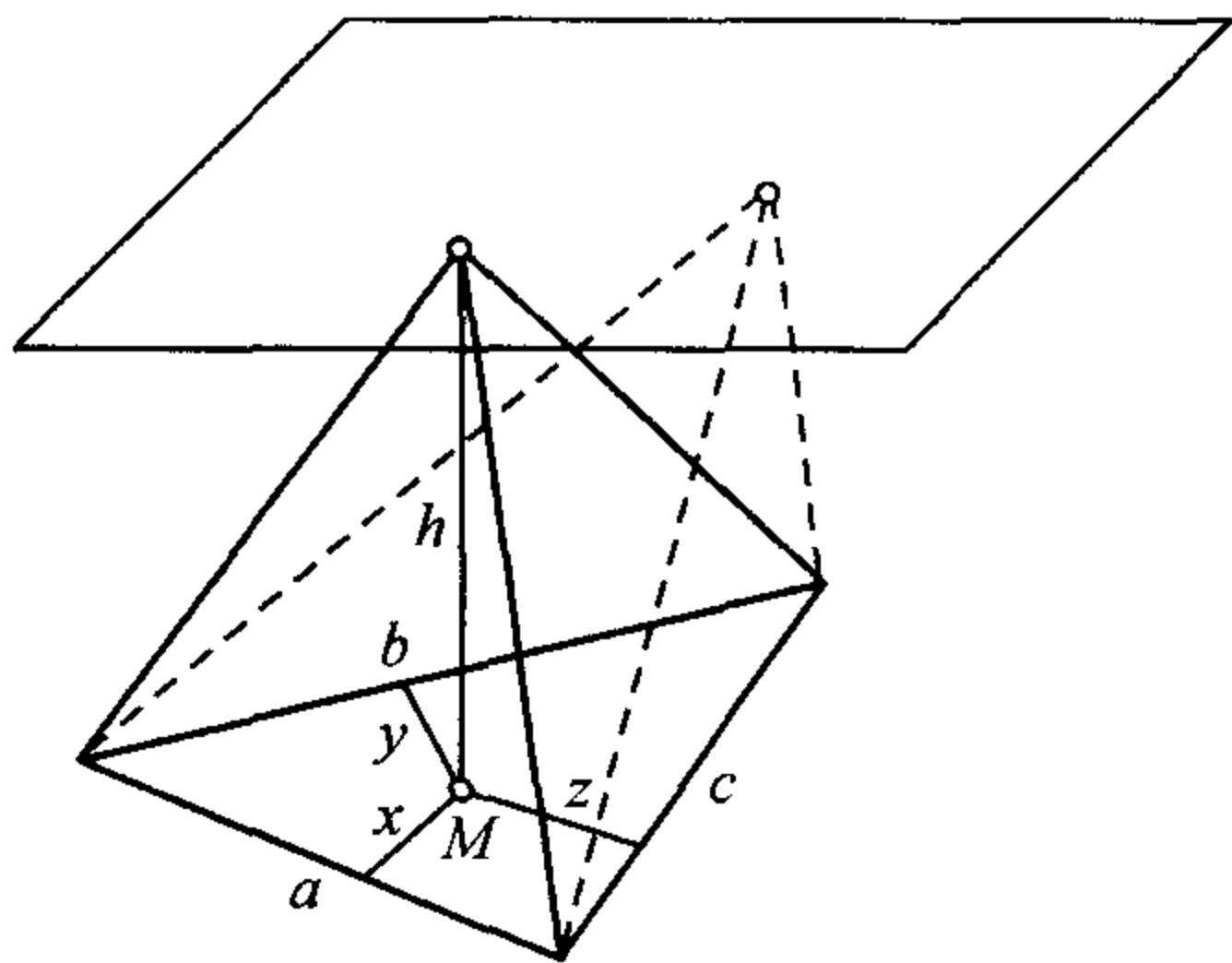


图 108



6) 设在平面上给定不在同一直线上的三点  $M_1(a_1, b_1), M_2(a_2, b_2), M_3(a_3, b_3)$ . 要求出在这平面内的这样一点, 使它至此三定点的距离之和为最小.

取任意点  $M(x, y)$ , 令

$$\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

于是, 应该研讨函数

$$u = \sum \rho_i = \sum \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}.$$

除了三个给定点以外, 它到处存在着偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{x - a_i}{\rho_i} = \sum \cos \theta_i, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum \frac{y - b_i}{\rho_i} = \sum \sin \theta_i,$$

式中的  $\theta_i$  表示直线  $M_iM$  与  $x$  轴间的交角.

这样, 对极值“怀疑”的点, 首先要算  $M_1, M_2, M_3$  在该处导数并不存在, 其次是导数同时等于零的点  $M_0$  (我们将看到, 它并不一定存在). 因为当  $x$  或  $y$  无限增大时函数  $u$  显然也无限增大, 故函数在上述各点中的某一点必能达到其最小值.

要找出静止点  $M_0$ , 可令二偏导数同时等于零; 它给出条件

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0, \quad \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0.$$

第一式乘以  $\sin \theta_2$ , 第二式乘以  $\cos \theta_2$ , 相减, 得

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_2 - \theta_3), \quad \text{由此 } \theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3.$$

同样, 可得

$$\theta_2 - \theta_3 = \theta_3 - \theta_1.$$

这样, 三直线  $M_1M_0, M_2M_0, M_3M_0$  中每二线之间的夹角应当等于  $\frac{2\pi}{3}$ , 而点  $M_0$  可由下列方法求得: 在三角形  $M_1M_2M_3$  的三边上各作一含弓形角  $\frac{2\pi}{3}$  的弧, 三弧的公共点即点  $M_0$ .

若这三角形没有大于或等于  $\frac{2\pi}{3}$  的内角, 则此三弧确能在三角形之内相交而确定  $M_0$ , 这时, 各边显然都对着顶点在  $M_0$  的等于  $\frac{2\pi}{3}$  的角 (图 109). 在这种情形, 就必须比较  $u$  在这四点的四个数值. 我们将证明, 在静止点  $M_0$  处  $u$  的数值必小于其他三个数值 (这就是说, 总是最小值). 实际上, 依“余弦定理”

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2}^2 &= \overline{M_0M_1}^2 + \overline{M_0M_2}^2 + \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \\ &> \left( \overline{M_0M_2} + \frac{1}{2} \overline{M_0M_1} \right)^2, \end{aligned}$$

于是

$$\overline{M_1M_2} > \overline{M_0M_2} + \frac{1}{2} \overline{M_0M_1}.$$

同样

$$\overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_3} + \frac{1}{2} \overline{M_0M_1}.$$

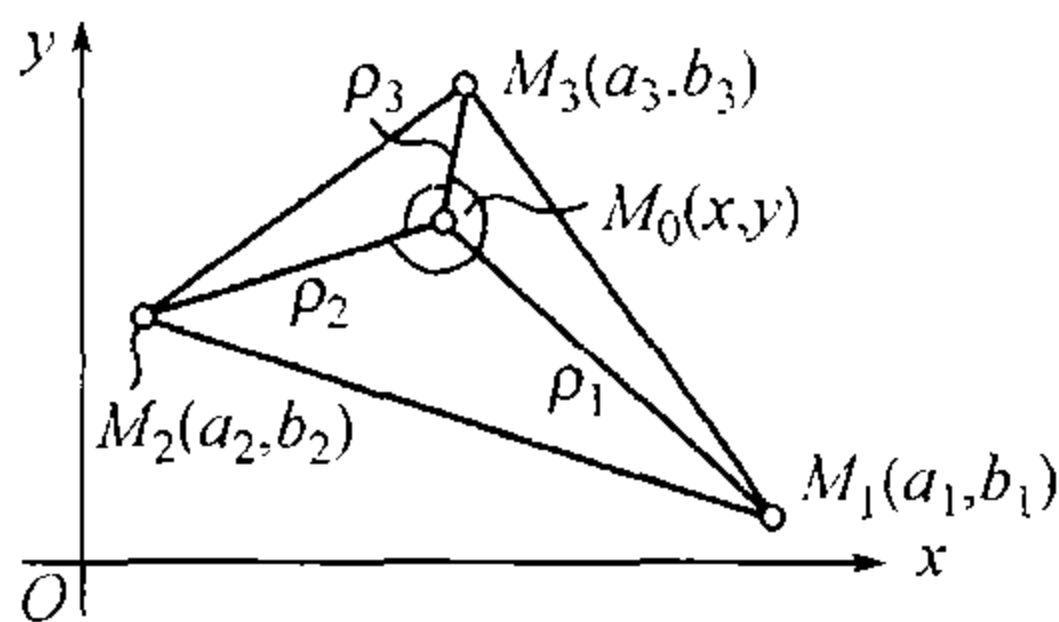


图 109



相加, 得

$$\overline{M_1 M_2} + \overline{M_1 M_3} > \overline{M_0 M_1} + \overline{M_0 M_2} + \overline{M_0 M_3},$$

即

$$u(M_1) > u(M_0).$$

显然, 此处的点  $M_1$  可能换成  $M_2$  或  $M_3$ , 这样证明便已完成.

但当三角形  $M_1 M_2 M_3$  有一内角等于或大于  $\frac{2\pi}{3}$  时, 情形就不同了. 那时静止点根本不存在, 而函数  $u$  在所给点  $M_1, M_2, M_3$  之一处, 也就是在钝角的顶点处达到其最小值.

这一问题的奇特性说明, 在探求函数的最大 (小) 值时, 除了静止点以外, 导数不存在的点也须考虑在内 [参阅 196, 附注 II].

7) 推广应用题 1): 现在要求内接于所给圆 (半径为  $R$ ) 而有最大面积  $P$  的  $(n+1)$  角形.

用  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  表示多角形各边所对的中心角; 则有

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = 2\pi,$$

由此

$$x_{n+1} = 2\pi - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

面积  $P$  等于

$$P = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_1 + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_2 + \dots + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_n + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_{n+1};$$

若把  $x_{n+1}$  换成它的表达式, 则问题变成要探求函数

$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n + \sin[2\pi - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)]$$

的最大值, 其中自变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 的变动区域  $\mathcal{D}$  由不等式

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 2\pi$$

确定, 即  $\mathcal{D}$  为  $n$  维单纯形 [162].

按照一般法则求出导数并使它们等于零:

$$\cos x_1 - \cos(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0,$$

.....

$$\cos x_n - \cos(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0;$$

区域内满足这些条件的唯一的内点是

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2\pi}{n+1} \quad \left( \text{因而也有 } x_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1} \right);$$

与它对应的是  $u = (n+1) \sin \frac{2\pi}{n+1}$ .

要证明它实在是  $u$  的最大值, 需利用数学归纳法. 当  $n=2$  时我们的论断在前目的例题 1) 内已经证明. 现在假设它对于  $n$  项正弦之和的情形是正确的 (这样它们的和的最大值就是  $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ ), 要证明它对于  $(n+1)$  项正弦之和也是正确的.



根据前面已作出的一般指示, 必须把数值  $(n+1) \cdot \sin \frac{2\pi}{n+1}$  与函数在区域  $D$  的境界上的数值相比较. 例如, 取“单纯形的边界”  $x_n = 0$ ; 在它上面,  $u$  将只是  $n-1$  个变元的函数:

$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{n-1} + \sin[2\pi - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})],$$

而且按照假设, 在这里的最大值就是  $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ . 对于其他的“边界”也可以证实同样的事情. 但因

$$n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} < (n+1) \cdot \sin \frac{2\pi}{n+1} \text{ ①},$$

故我们的论点已证明, 正多边形有最大的面积.

8) 考察并联的电力输送网. 图 110 是电路的草图, 其中  $A$  及  $B$  是电源的两端, 而  $P_1, P_2, \cdots, P_n$  是用电器, 各需要电流  $i_1, i_2, \cdots, i_n$ . 预先假设在线路上容许总的电位降落是  $2e$ , 现在需要确定导线各部分的截面积, 使在全线路上用铜的分量为最小.

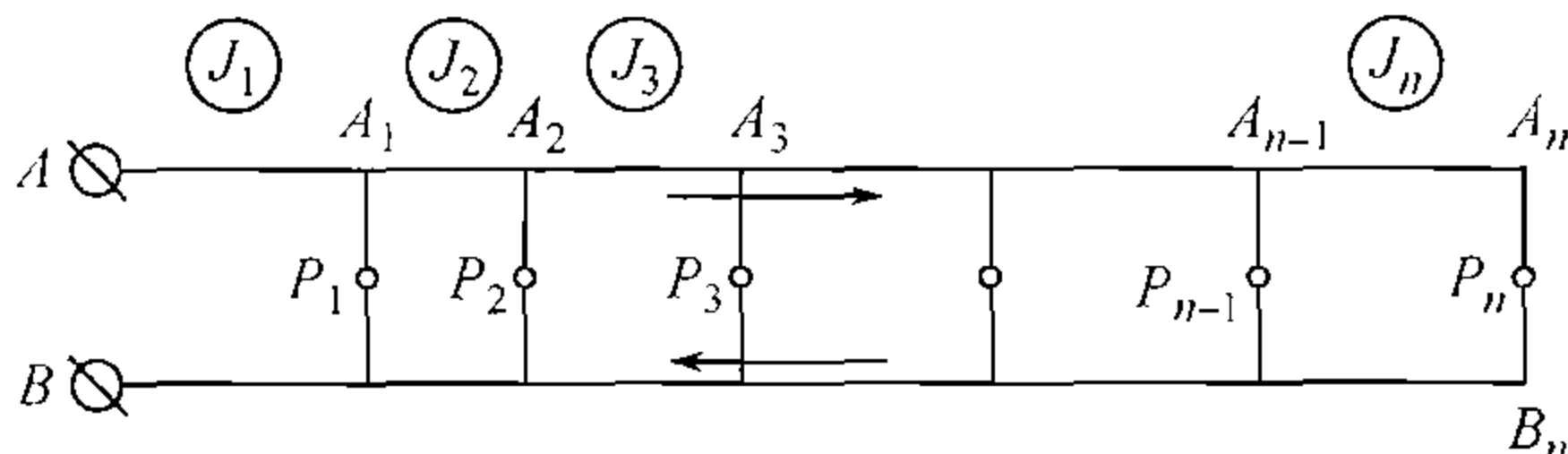


图 110

显然, 只要考察导线之一, 就说是  $AA_n$ , 已经够了, 因为另一导线处于完全类似的条件下. 用  $l_1, l_2, \cdots, l_n$  表示各部分  $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$  的长 (用米计), 用  $q_1, q_2, \cdots, q_n$  表示它们的截面积 (毫米<sup>2</sup>), 那时表达式

$$u = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n$$

即表示所用铜量的总体积 (厘米<sup>3</sup>); 我们需要求出它的最小值, 并注意着在导线  $AA_n$  上电位的总降落应当等于  $e$ .

容易计算在线路各段  $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$  将流过怎样的电流  $J_1, J_2, \cdots, J_n$ :

$$J_1 = i_1 + i_2 + \cdots + i_n, J_2 = i_2 + \cdots + i_n, \cdots, J_n = i_n.$$

若用  $\rho$  表示长 1 米截面 1 毫米<sup>2</sup> 的铜导线的电阻, 则这些线段的电阻就是

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{q_1}, r_2 = \frac{\rho l_2}{q_2}, \cdots, r_n = \frac{\rho l_n}{q_n},$$

于是按照欧姆定律, 在这些线段上对应的电位降落依次为

$$e_1 = r_1 J_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1}, e_2 = r_2 J_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{q_2}, \cdots, e_n = r_n J_n = \frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

为了避免繁复的计算, 代替变量  $q_1, q_2, \cdots, q_n$ , 我们就导入  $e_1, e_2, \cdots, e_n$  它们是用如下简单的条件联系着:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n = e, \text{ 由此 } e_n = e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}.$$

①因为当  $z$  从 0 增大至  $\pi$  时  $\frac{\sin z}{z}$  是  $z$  的单调减函数 (这不难用微分学的方法证明).



于是就有

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1}, q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2}, \cdots, q_n = \frac{\rho l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}},$$

因而

$$u = \rho \left[ \frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \cdots + \frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_n}{e - e_1 - \cdots - e_{n-1}} \right],$$

其中自变量  $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$  的变动区域由不等式

$$e_1 > 0, e_2 > 0, \cdots, e_{n-1} > 0, e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} < e$$

(开的单纯形) 确定.

使  $u$  关于一切变元的导数等于零, 得方程组

$$\begin{aligned} -\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} &= 0, \\ -\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} &= 0, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ -\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} &= 0, \end{aligned}$$

由此 (仍引入  $e_n$ ) 有

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} = \frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} = \cdots = \frac{l_n^2 J_n}{e_n^2}.$$

用  $\frac{1}{\lambda^2} (\lambda > 0)$  表示这些比的公共数值. 则

$$e_1 = \lambda l_1 \sqrt{J_1}, e_2 = \lambda l_2 \sqrt{J_2}, \cdots, e_n = \lambda l_n \sqrt{J_n},$$

而且很容易由条件  $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = e$  来确定  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{e}{l_1 \sqrt{J_1} + l_2 \sqrt{J_2} + \cdots + l_n \sqrt{J_n}}.$$

因为当点  $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$  接近于区域的边界时,  $u$  就无限地增大, 所以上面得出的  $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}(e_n)$  的数值确使函数  $u$  获得最小值.

最后, 回到原来的变量  $q_1, q_2, \cdots, q_n$ , 我们求得

$$q_1 = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_1}, \quad q_2 = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_2}, \quad \cdots, \quad q_n = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_n},$$

因此知道导线的最适当的截面积显然与对应的电流强度的平方根成正比例.

9) 最小二乘法 所谓最小二乘法就是广泛使用的修正观测的方法, 它的要素包括在下文内.

设要确定三个量<sup>①</sup> $x, y, z$  的数值, 若对于它们建立  $n > 3$  个线性方程

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

<sup>①</sup>我们以三个为限, 仅是为了写起来简便.



在  $a_i, b_i, c_i, d_i$  之中某些系数从经验方法得出, 只知其为近似值. 这时, 我们假定其中至少某三方程有异于零的行列式; 例如, 设

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (14)$$

然而由前面三个方程算出的  $x, y, z$  的数值, 一般说来, 并不就精确地满足其余的方程 (或则由于方程的系数内有着不可避免的误差, 或则由于方程本身仅表示着近似等式). 我们没有任何根据可以偏重其中某些方程而看轻其他式. 而不论怎样选取  $x, y, z$  的值, 必须估计到有不可避免的误差

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i,$$

我们只望达到这样的目的, 使这些误差的平方之和:

$$W = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2$$

为最小 (最小二乘法即由此得名). 换句话说, 使函数  $W = W(x, y, z)$  获得最小值的  $x, y, z$  的值就认为是最符合于实验结果的数值.

按照一般法则, 要求出这些  $x, y, z$  的数值, 可使  $W$  关于  $x, y, z$  的导数等于零:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n a_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n b_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n c_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) &= 0. \end{aligned}$$

高斯 (C.F.Gauss) 引用其他记号来表示仅具相异下标的同类型项的总和, 如:

$$[aa] \text{ 代替 } \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad [ab] \text{ 代替 } \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \text{等等.}$$

上述确定  $x, y, z$  的数值的三个方程用高斯的记法就可改写成

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [ad], \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z &= [bd], \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z &= [cd]; \end{aligned}$$

它们称为标准方程组.

为了要证实用这些方程可以单值地确定  $x, y, z$  的值, 需要先证明方程组的行列式异于零. 但按照已知的代数定理, 这行列式的平方可表示为

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}^2 = \sum_{(i,j,k)} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}^2,$$



其中右边的和是关于从  $n$  个下标  $1, 2, \dots, n$  中每次取三个的一切可能的组合  $(i, j, k)$  而取的. 因为按照我们的假定, 右边诸行列式内至少有一个异于零, 故由此推得左边的行列式也不等于零.

尚需证明由标准方程组所确定的变元之值确能使函数  $W$  获得最小值. 为此, 例如, 只要证明, 在半径足够大的球体之外,  $W$  可成为适当的大就够了.

为此目的, 考察在  $W$  的表达式中前面三个括号内的数值:

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = u_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = u_2, \quad a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = u_3.$$

由于 (14),  $x, y, z$  也可用这些数值  $u_1, u_2, u_3$  线性地表示出来, 并且带有完全确定的常系数, 因此当  $u_1, u_2, u_3$  全部为有界数量时,  $x, y, z$  本身也必定是有界数量. 由此已很明显, 当  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  无限增大时,  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$  (随之而  $W$ ) 也必无限增大.



<sup>①</sup>与雅可比同时奥斯特洛格拉得斯基 (M.V.Ostrogradskii) 也引用过雅可比式.







(按照“行乘以列”的规则相乘). 应用这公式于函数行列式, 则得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

注意到复合函数的导数公式后, 就知道这行列式的一般元素是

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k} \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n),$$

我们就可以把最后的行列式改写成

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

刚才所证明的是雅可比式的第一性质, 可以简写成:

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)}. \quad (3)$$

如果  $y$  是  $x$  的一个函数, 其中  $x$  又是  $t$  的函数, 则我们就可由此得到已知的复合函数的导数公式:  $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ ; 这样, 刚才导出的雅可比式的性质就成为复合函数的导数公式的推广.

请注意当变元  $t_1, t_2, \cdots, t_n$  恒等于  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  的特别情形, 这时函数组 (2) 就是函数组 (1) 的结果<sup>①</sup>. 于是刚才所得的关系式便是:

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1$$

<sup>①</sup>我们在此处假设这种转变有可能, 参阅下节.







来计算. 对应于这方阵的行列式等于和式:

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \cdots & b_{i_1 m} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \cdots & b_{i_2 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i_m 1} & b_{i_m 2} & \cdots & b_{i_m m} \end{vmatrix}$$

这和式是从  $n$  个标号  $1, 2, \dots, n$  内每次取  $m$  个的一切可能组合  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  而遍取的.

应用这结果于“函数矩阵”(即“雅可比矩阵”)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{pmatrix},$$

我们得到

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{vmatrix} \\ = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

若再回忆复合函数的导数公式, 则在这等式左边的行列式可以写成:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial t_1} & \frac{\partial y_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$



所得的结果可以简写为:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})} \cdot \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}, \quad (5)$$

等式右边的和式是从  $n$  个标号  $1, 2, \dots, n$  内每次取  $m$  个的一切可能组合而遍取的.

当  $m = 1$  时所证明的公式变成熟知的 (借若干中间变量的) 复合函数的微分公式

$$\frac{dy}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

因此就成为它的推广.

还须注意当  $n = 3$  而  $m = 2$  时由我们的公式所得出的一种特殊情形:

$$\begin{aligned} \frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} &= \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} \\ &\quad + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

这公式经常特别地有用.

我们已建立雅可比式的 (类似于普通导数的) 一系列的形式性质; 再有将在 210, 8) 中导出的一个公式也属于此. 但在隐函数理论 (参看下面 §2) 中, 尤其是在二重、三重以及一般多重积分 (参看第三卷) 的变量变换的问题中, 导数与雅可比式之间表现出更深刻的相似性.

## §2. 隐函数

**205. 一元隐函数的概念** 假定二变元  $x$  及  $y$  的值用方程互相联系着, 若把这方程的一切项都移至左边, 则在一般情形, 其形式为

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

此处的  $F(x, y)$  是在某一区域中给定的二元函数. 若对于每一  $x$  值 —— 在某一区间内 —— 存在一个或几个  $y$  值, 它们与  $x$  同时满足方程 (1), 则函数  $y = f(x)$  由此确定是单值的还是多值的, 于是, 方程

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (2)$$

便成为关于  $x$  的恒等式.

例如, 取方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad (1a)$$



它显然确定  $y$  为  $x$  在区间  $[-a, a]$  内的双值函数, 即

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

又若把这函数代换方程 (1a) 内的  $y$ , 则得恒等式.

在这里我们可以用  $x$  的初等函数写出  $y$  的很简单的解析表达式. 然而事情并非常常如此顺利的. 若取我们曾经遇见的方程 [仅变元的表示法有不同, 83]

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

来看, 我们知道, 由这方程确定  $y$  为  $x$  的单值函数, 虽然用有限形式它却不能用初等函数表达出来.

若函数  $y = f(x)$  是由未曾解出 (关于  $y$ ) 的方程 (1) 所给定, 它就称为**隐函数**; 若研究其中  $y$  对  $x$  的直接关系, 它就成为**显函数**. 读者当能明了, 这些术语仅叙述函数  $y = f(x)$  的表示方法, 而并未涉及它的性质. [严格地说, 函数的隐式与显示式的对立性仅当显示式被理解为显的解析表示式时始能显得十分明确; 不然, 若把按照任何规则 [45] 所给定的函数都看作显函数, 则借助于方程 (1) 以确定  $y$  为  $x$  的函数并不劣于其他任何方法.]

在最简单的情形, 当方程 (1) 是代数方程时, 即当函数  $F(x, y)$  是  $x$  及  $y$  的整多项式时, 由此而确定的  $x$  的隐函数  $y$  (一般是多值函数) 称为**代数函数**. 若方程 (关于  $y$ ) 的方次不超过四, 则代数函数总可以表示为含有根式的显函数, 在幂次高于四时这样的表达式仅在例外的情形始为可能.

目前我们仅关心于“隐”函数的存在及单值的问题 (以及它的其他性质), 不管它能否用解析公式表示为“显”式与否. 可是这样提出的并非新的问题; 当涉及反函数的存在及性质时我们已讨论过这问题的特殊情形, 那时曾用方程

$$y - f(x) = 0$$

确定  $x$  为  $y$  的“隐”函数.

上述问题的几何解释是大有教益的. 方程 (1) 在某种场合下表示平面曲线 [例如大家知道方程 (1a) 表示着椭圆 (图 111)]; 在这种情形, 它称为曲线的**隐示方程**. 问题归结于: 曲线 (1) (或它的一部分) 能否用右边单值函数的普通方程  $y = f(x)$  来表示? 几何意义是, 曲线 (或它的一部分) 与平行于  $y$  轴的直线仅相交于一点.

若我们希望得到单值函数, 则像在椭圆的例子内所看到的, 不仅需要限定  $x$  的变动区域, 还要限定  $y$  的变动区域.

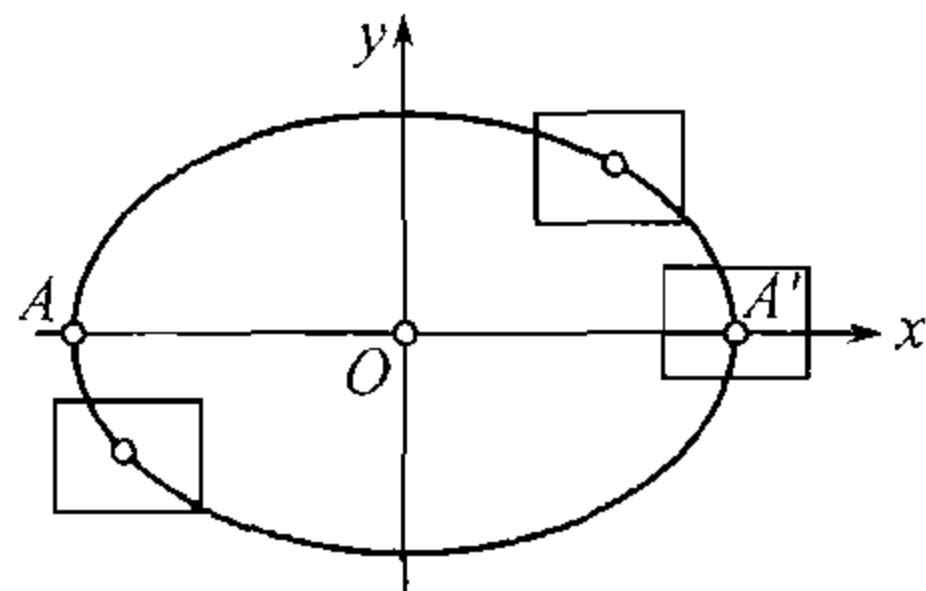


图 111



为了简明起见,我们就说,在矩形  $(a, b; c, d)$  内方程 (1) 确定  $y$  为  $x$  的单值函数, 如果对于区间  $(a, b)$  内的  $x$  的每一值, 在区间  $(c, d)$  内方程 (1) 有一个, 且仅有一个根  $y$ .

通常我们将只关心于满足方程 (1)(位于曲线上) 的某一定点  $(x_0, y_0)$ , 并取这点的一个邻域作为上述的矩形. 这样, 例如在椭圆 (图 111) 的情形, 显然可以断定, 方程 (1a), 除椭圆长轴上的顶点  $A, A'$  以外, 在椭圆上任一点的充分小的邻域内确定纵标  $y$  为横标  $x$  的单值函数.

**206. 隐函数的存在** 现在将建立保证单值连续隐函数存在的条件.

**定理 1** 假定 1) 函数  $F(x, y)$  在以点  $(x_0, y_0)$  为中心的某一邻域

$$\mathcal{D} = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

中有定义而且连续;

2)  $F(x, y)$  在这点等于零:  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

3) 当  $x$  为常数时, 函数  $F(x, y)$  随着  $y$  的增大而单调增大 (或单调减小). 那么,

a) 在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内, 方程 (1) 确定  $y$  为  $x$  的单值函数:  $y = f(x)$ ;

б) 当  $x = x_0$  时这函数具有数值  $y_0$ :  $f(x_0) = y_0$ ; 最后,

в)  $f(x)$  是连续函数.

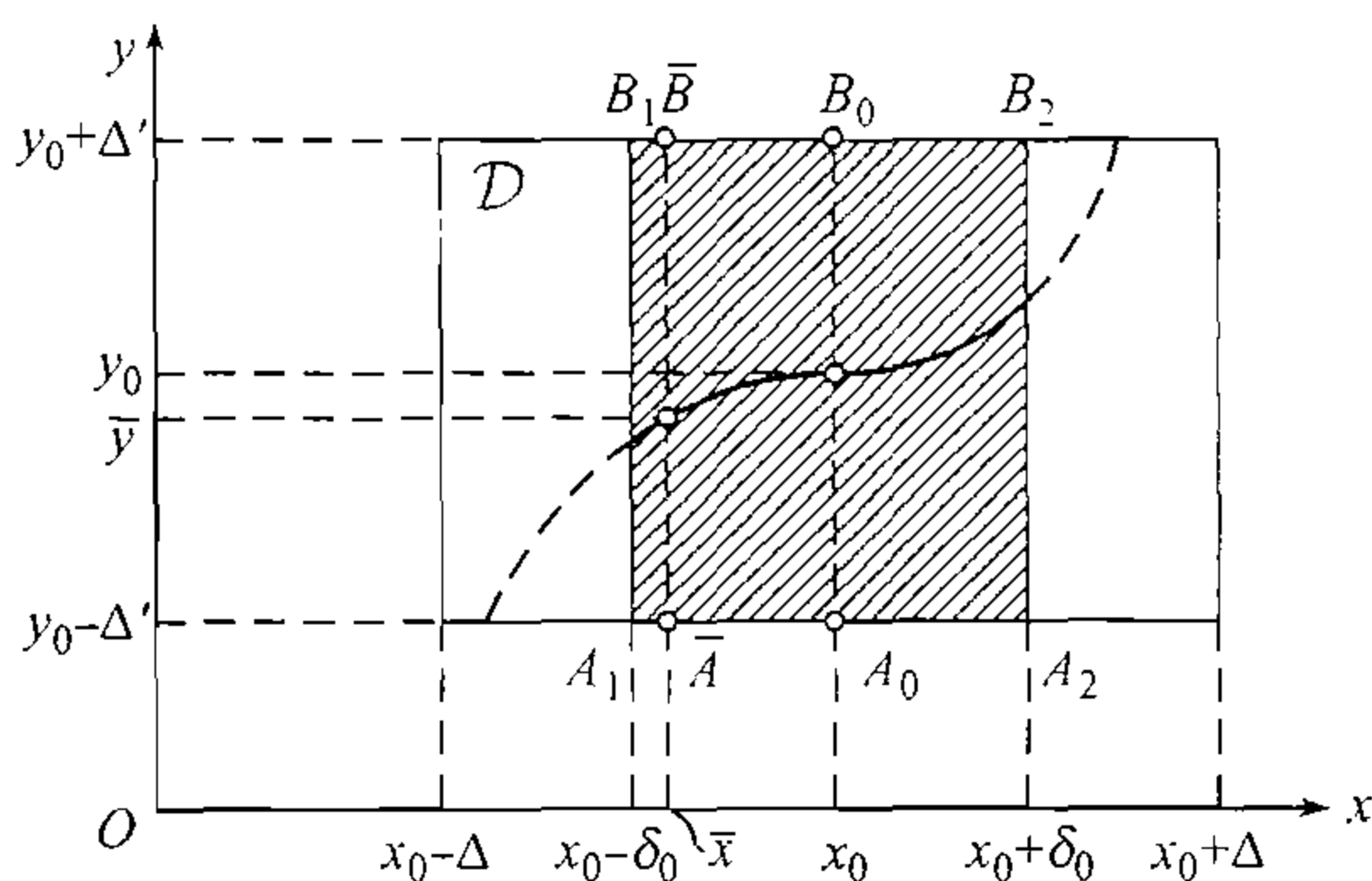


图 112

**证明** 先令  $(x, y)$  沿着通过点  $M_0(x_0, y_0)$  的铅直线 (图 112) 而移动, 即固定  $x = x_0$ ; 于是函数  $F(x, y)$  就变成一个变元  $y$  的函数  $F(x_0, y)$ . 根据 2), 它当  $y = y_0$  时等于 0. 同时按照条件 3), 函数  $F(x_0, y)$  随着  $y$  一起增大, 于是当  $y < y_0$  时函数值小于零, 当  $y > y_0$  时函数值大于零. 因此, 特别, 它在点  $A_0(x_0, y_0 - \Delta')$  及  $B_0(x_0, y_0 + \Delta')$  将有异号的函数值, 就是

$$F(A_0) = F(x_0, y_0 - \Delta') < 0, \quad F(B_0) = F(x_0, y_0 + \Delta') > 0.$$



现在再看点  $(x, y)$  沿着通过  $A_0$  与  $B_0$  的两水平直线而移动的情形, 就是固定  $y = y_0 - \Delta'$  或  $y = y_0 + \Delta'$ . 于是得出两个  $x$  的函数:  $F(x, y_0 - \Delta')$  及  $F(x, y_0 + \Delta')$ , 我们已看到当  $x = x_0$  时第一个函数有负值, 第二个有正值. 但按照条件 1), 这些函数均为连续<sup>①</sup>, 因此必能找出点  $x_0$  的某一邻域  $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  ( $0 < \delta_0 \leq \Delta$ ), 使在这邻域内, 二函数都保持着自己的符号 [80, 引理], 于是当  $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$  时, 有

$$F(x, y_0 - \Delta') < 0, \quad F(x, y_0 + \Delta') > 0.$$

换句话说, 在原矩形的下底及上底上, 有以点  $A_0$  及  $B_0$  为中心而长为  $2\delta_0$  的线段  $A_1A_2$  及  $B_1B_2$ , 沿着这些线段, 给定的函数  $F(x, y)$  在  $A_1A_2$  上有负值而在  $B_1B_2$  上有正值.

在区间  $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  内固定其任一值  $x = \bar{x}$ , 考察连接点  $\bar{A}(\bar{x}, y_0 - \Delta')$  与  $\bar{B}(\bar{x}, y_0 + \Delta')$  的铅直线段. 沿着这线段, 我们的函数又变成一个变元  $y$  的函数  $F(\bar{x}, y)$ . 因为根据 1) 它是连续的<sup>②</sup>, 而且曾说过, 在区间  $[y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$  的两端有异号的函数值:

$$F(\bar{A}) = F(\bar{x}, y_0 - \Delta') < 0, \quad F(\bar{B}) = F(\bar{x}, y_0 + \Delta') > 0,$$

所以依布尔查诺-柯西定理 [80], 这函数  $F(\bar{x}, y)$  必在介于  $y_0 - \Delta'$  及  $y_0 + \Delta'$  之间的某一值  $y = \bar{y}$  处等于零:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

由条件 3) 又推得, 在这里当  $y \geq \bar{y}$  时就要各有  $F(\bar{x}, y) \geq 0$ , 于是  $\bar{y}$  是区间  $(y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$  内唯一的  $y$  值, 它同  $x = \bar{x}$  一起满足方程 (1). 在每一铅直线段  $\bar{A}\bar{B}$  上仅能找出一一点  $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ , 使方程的左边等于零.

这样, 在点  $(x_0, y_0)$  的邻域

$$(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$$

内, 方程 (1) 确实确定  $y$  为  $x$  的单值函数:  $y = f(x)$ .

同时, 由于 2), 前面的论断也表明  $f(x_0) = y_0$ . 就是说, 由  $F(x_0, y_0) = 0$  可知  $y_0$  正是区间  $(y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$  内那个唯一的  $y$  值, 它与  $x = x_0$  共同满足方程 (1).

剩下来仅需证明函数  $y = f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  内为连续. 对于点  $x = x_0$ , 函数的连续性可由前面的论断直接得出, 这论断对于以点  $M_0(x_0, y_0)$  为中心的任意小的矩形都能适用: 把  $\Delta'$  换成任一数  $\varepsilon < \Delta'$ , 和前面一样我们可以求出这种  $\delta \leq \delta_0$ ,

<sup>①</sup>我们假定了函数  $F(x, y)$  对于变元  $x, y$  是连续的; 在这种情形, 它对于个别的每一变元也必为连续.

<sup>②</sup>参阅上页的脚注!



使对于区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内的任一  $x$ , 有对应于它的唯一的  $y$  值, 它与  $x$  共同满足方程 (1), 而且它刚好落在  $y_0 - \varepsilon$  与  $y_0 + \varepsilon$  之间. 这样, 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 将有

$$|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

这就证明了函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  的连续性.

对于任意点  $x = \bar{x}$  函数的连续性的证明与对于点  $x = x_0$  的证明类似. 点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  (其中的  $\bar{y} = f(\bar{x})$ ) 和  $M_0(x_0, y_0)$  满足着同样的条件, 因为  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . 因此, 同上面一样, 在点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  的邻域内, 变元  $y$  由方程 (1) 而确定为  $x$  的单值函数, 它在点  $x = \bar{x}$  为连续. 但正由于它是单值函数, 它必重合于  $f(x)$ , 由此得证  $f(x)$  当  $x = \bar{x}$  时为连续.

我们已证明隐函数的存在定理, 但并未提出关于计算它的数值或关于它的解析表示式等问题; 我们将在第十二章内再研究这些.

已证明的定理显然是 83 中定理的推广.

**207. 隐函数的可微性** 现在我们将加强关于函数  $F(x, y)$  的假定, 那时就可证明函数  $y = f(x)$  的导数也存在.

**定理 2** 假定 1) 函数  $F(x, y)$  在以点  $(x_0, y_0)$  为中心的矩形

$$D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

中有定义且连续;

2) 在  $D$  中偏导数  $F'_x$  及  $F'_y$  存在且连续;

3)  $F(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  等于零:  $F(x_0, y_0) = 0$ ; 最后,

4) 导数  $F'_y(x_0, y_0)$  异于零.

那么, 除了定理 1 的结论 a), б), в) 成立以外, 还可以证明 r) 函数  $f(x)$  有连续导数.

**证明** (图 113) 例如, 设  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ ; 因为根据 2), 导数  $F'_y(x, y)$  是连续的, 所以可以作出这样的正方形

$$[x_0 - \delta', x_0 + \delta'; y_0 - \delta', y_0 + \delta'] \quad (\delta' < \Delta \text{ 及 } \Delta'),$$

使对一切属于它的点有  $F'_y(x, y) > 0$ <sup>①</sup>. 于是对于这正方形而言, 定理 1 的一切条件都得满足: 由  $F'_y > 0$  就能推得当  $x = \text{常数}$  时  $F(x, y)$  是  $y$  的单调函数 [132]. 因此, 结论 a), б), в) 可以作为是已证明为真实的了.

转而证明论断 r), 现在把  $y$  理解为由方程 (1) 所确定的, 且恒等地满足它的隐函数  $y = f(x)$ . 给  $x$  以一增量  $\Delta x$ ; 与自变量终值  $x + \Delta x$  对应的函数的终值是

<sup>①</sup> 因为与 80 中对于一元函数的引理相类似的论断对于多元函数也真实.



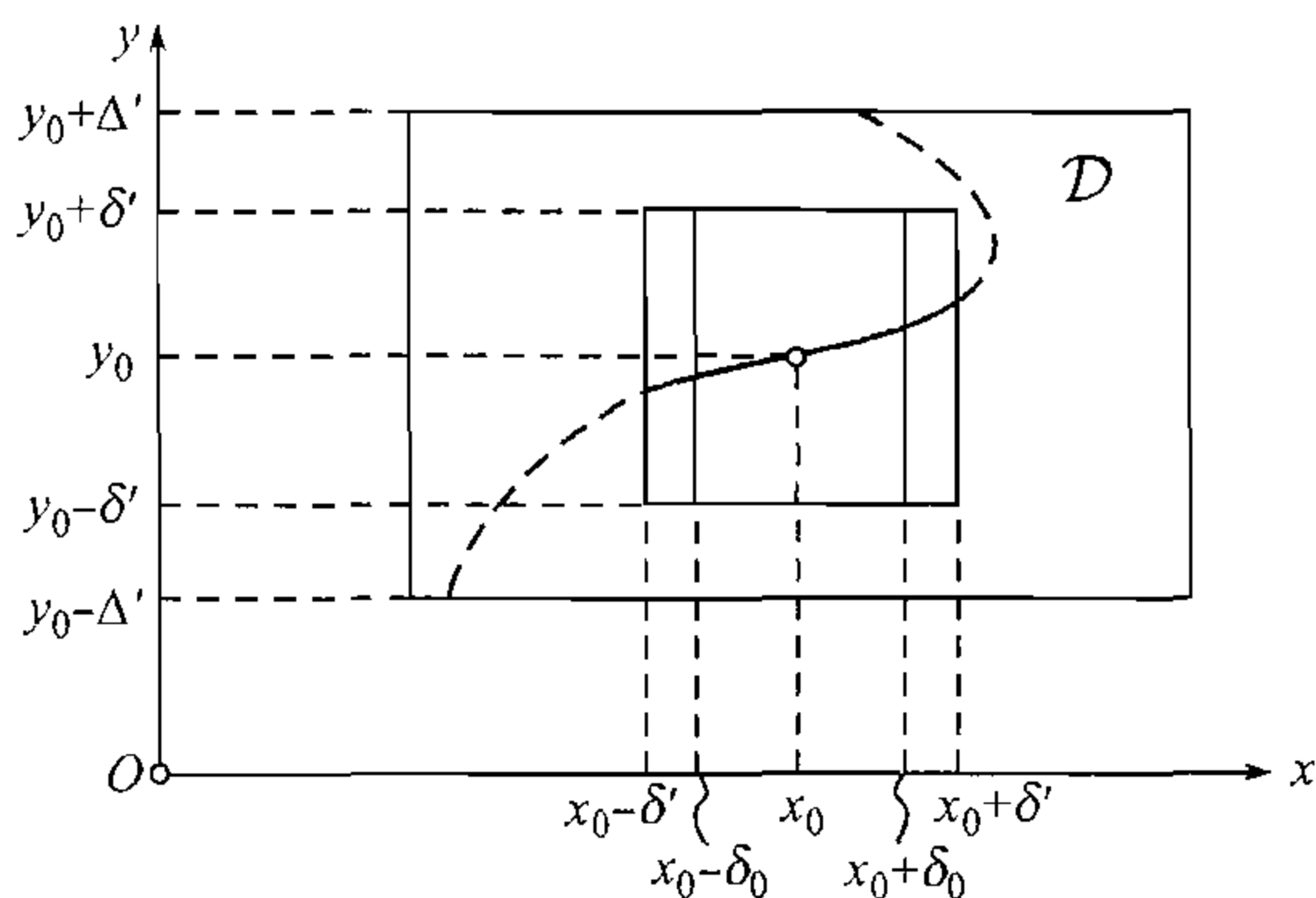


图 113

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , 它们共同满足方程 (1):  $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ . 显然, 增量

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

用 178 的公式 (1) 表示  $\Delta F$ , 就得

$$0 = \Delta F(x, y) = F'_x(x, y) \cdot \Delta x + F'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

式中的  $\alpha$  及  $\beta$  依赖于  $\Delta x, \Delta y$ , 且当  $\Delta x$  及  $\Delta y$  同时趋于零时也趋于零. 由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}.$$

使  $\Delta x$  趋于零; 根据已证明的函数  $y = f(x)$  的连续性 [参阅 B)] 这时  $\Delta y$  也趋于零, 于是  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ . 因为  $F'_y \neq 0$ , 故右边的极限存在, 从而  $y$  关于  $x$  的导数也存在:

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (3)$$

用  $f(x)$  代换  $y$ , 就有

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

因为等式右边分子及分母中都是连续函数的连续函数, 且分母不变为零, 故由此可知  $f'(x)$  也是连续函数. 定理就已证明.

值得注意的是: 由直接给出的函数  $F(x, y)$  的性质, 我们可以判断不能直接给出的函数  $y = f(x)$  的性质.







$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1; \cdots; x_n^0 - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n; \\ y_1^0 - \Delta'_1, y_1^0 + \Delta'_1; \cdots; y_m^0 - \Delta'_m, y_m^0 + \Delta'_m]$$



中有定义而且连续;

2) 在  $D$  中这些函数关于一切变元的偏导数都存在且连续;

3) 点  $(x_1^0, \dots, y_m^0)$  满足方程组(5);

4) 雅可比式  $J$ [见 (6)] 在这点异于零.

则, a) 在点  $(x_1^0, \dots, y_m^0)$  的某一邻域内, 方程组 (5) 确定  $y_1, \dots, y_m$  为  $x_1, \dots, x_n$  的单值函数:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \dots, x_n), y_m = f_m(x_1, \dots, x_n);$$

6) 当  $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$  时, 这些函数各具有数值  $y_1^0, \dots, y_{m-1}^0, y_m^0$ :

$$f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_1^0, \dots, f_{m-1}(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_{m-1}^0, f_m(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_m^0;$$

B) 函数  $f_1, \dots, f_m$  都为连续, 且

Г) 有关于一切变元的连续偏导数.

**证明** (用数学归纳法) 当  $m = 1$  时方程组变成一个方程, 定理是正确的 (这就是定理 3). 现在假设, 由  $m - 1$  个方程所成的方程组来确定  $m - 1$  个隐函数时定理正确, 要证明它对于  $m$  个方程所成的方程组也正确.

由于雅可比式  $J$  在点  $(x_1^0, \dots, y_m^0)$  异于零, 那么, 在最后一行内至少有一个元素在这点不等于零; 例如, 设

$$\frac{\partial F_m(x_1^0, \dots, y_m^0)}{\partial y_m} \neq 0.$$

这时, 按照定理 3, 方程组 (5) 的最后一个方程, 在点  $(x_1^0, \dots, y_m^0)$  的某一邻域  $D^*$  内, 确定  $y_m$  为其余变元的单值函数:

$$y_m = \varphi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}), \quad (7)$$

于是就有 (关于这些变元的) 恒等式

$$F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})) = 0. \quad (8)$$

这函数  $\varphi$  是连续的, 且有连续偏导数; 此外

$$\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_{m-1}^0) = y_m^0. \quad (9)$$

必须着重指出, 由于我们以后的讨论也以上述的邻域  $D^*$  为限, 方程

$$F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0$$



用方程 (7) 代替方程组 (5) 中的最后一方程, 并把函数  $\varphi$  代入方程组 (5) 中其余方程内的  $y_m$ , 我们得到具有  $n+m-1$  个变元的  $m-1$  个方程的新方程组

[illegible]

$$\begin{aligned} & \Phi_j(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_{m-1}) \\ &= F_j(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \cdots, y_{m-1})). \end{aligned} \quad (11)$$
$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \dots, x_n), \quad (12)$$
$$\begin{aligned} y_m &= f_m(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \cdots, x_n; f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{m-1}(x_1, \cdots, x_n)), \end{aligned} \quad (12a)$$

转而讨论方程组 (10), 将证明在点  $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$  的邻域内它能满足类似于 1), 2), 3), 4) 的条件. 前二条件的正确性可以根据 (11) 由函数  $F_j$  及  $\varphi$  的性质直接推得. 条件 3) 也完全一样, 因为由 (11) 及 (9) 给出 (当  $j = 1, \dots, m-1$ )

$$\begin{aligned}\Phi_j(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_{m-1}^0) &= F_j(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0, \varphi(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)) \\ &= F_j(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0, y_m^0) = 0.\end{aligned}$$

①要说明的是:  $(n+m-1)$  维 (开的) 长方体  $d^*$  应假定为如此之小, 使得确定它的诸区间各包含于确定  $(n+m)$  维长方体  $\mathcal{D}^*$  的对应区间内. 而在结论 a) 内所讲到的那个点  $(x_1^0, \dots, y_m^0)$  的邻域则由与  $d^*$  有联系的一切区间以及与  $\mathcal{D}^*$  有联系的最后一个区间共同确定.



剩下来仅需考察雅可比式 (类似于  $J$ )

$$J^* = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{D(y_1, \dots, y_{m-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix},$$

并证明它在点  $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$  异于零. 为此目的, 就须将行列式  $J$  变形, 依次用  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}$  乘第  $m$  列的各元素, 然后分别加到前  $m-1$  列的每一行去:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

在此处若视  $y_m = \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})$ , 则除最后一行及最后一列以外的一切元素都是函数  $\Phi_j$  (关于  $y_1, \dots, y_{m-1}$ ) 的偏导数. 就是说, 根据 (11), 把  $\Phi_j$  当作复合函数, 分别对  $y_1, \dots, y_{m-1}$  而微分它 [应用 181 的法则], 可得 (当  $j = 1, \dots, m-1$ )

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1} = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_{m-1}} = \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}.$$

另一方面, 若分别对  $y_1, \dots, y_{m-1}$  而微分恒等式 (8)<sup>①</sup>, 则得

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = 0.$$

这样, 在最后一列内的元素 (除最后一个外) 全部等于零. 结果就得到

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

<sup>①</sup>需知, 若 (8) 式左边的 (复合) 函数恒等于零, 则它关于任何变元的导数也必为零.



按照最后一列展开这行列式, 就得出结果

$$J = J^* \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y_m}.$$

最后, 在此处令  $x_1 = x_1^0, \dots, y_{m-1} = y_{m-1}^0$ ; 则根据 (9),  $y_m = \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})$  变为  $y_m^0$ . 但在这情形按照条件 4),  $J$  异于零, 故  $J^*$  也不能为零, 这便是所要证明的.

对于包含  $m-1$  个方程的方程组 (10), 我们的定理已假定为正确. 因此, 这方程组在点  $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$  的邻域内确定单值函数 (12), 它们是连续的且有连续导数; 此外, 这些函数又都满足条件 5):

$$f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_1^0, \dots, f_{m-1}(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_{m-1}^0. \quad (13)$$

由此推得, 第  $m$  个函数 (12a) 也是连续的且有连续导数, 而最后, 根据 (13) 及 (9), 推得:

$$\begin{aligned} & f_m(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0; f_1(x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, f_{m-1}(x_1^0, \dots, x_n^0)) \\ &= \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_{m-1}^0) = y_m^0. \end{aligned}$$

定理证明完毕.

**附注** 请读者注意一切隐函数存在定理的局部性: 我们始终仅涉及被考察点的某一邻域. 但即使在这种形式之下这些定理也已很有用; 例如, 读者在第七章内可以看到, 当研究几何图形在已给点的性质时, 只需以这点的直接邻域为限就够了.

**209. 隐函数导数的求法** 用以证明隐函数存在定理的推论过程, 在一般情形, 并未给出隐函数 (一阶) 导数的求法的启示. 关于高阶导数则根本完全未说及. 现在我们将专门讨论这些重要问题.

从最简单的情形如方程 (1) 开始. 假设定理 2 的条件在被考察点的邻域内都能获得满足; 在以后, 条件  $F'_y \neq 0$  将起决定性的作用.

今将指出导数  $y'_x$  (若预先已知它的存在) 的简单求法. 我们知道, 若把隐函数  $y = f(x)$  代入方程 (1) 内, 它就化为恒等式 [参阅 205, (2)]. 因此, 若理解  $y$  就是这个  $x$  的函数, 则 (1) 式左边的  $F(x, y)$  就成为恒等于零的  $x$  的复合函数. 那时, 它关于  $x$  的导数也必为零. 若按照 181 的法则而微分这函数, 就得

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0^{①}, \quad (14)$$

由此 (因为  $F'_y \neq 0$ ),

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}; \quad (15)$$

①实际上, 我们在前面已经有过这种形式的推论了. 参阅前一个脚注.



我们就得出熟知的公式 [比较 206,(3)].

现在可以继续讨论下去. 若函数  $F(x, y)$  有连续的二阶导数, 则公式 (15) 右边的式子可以对  $x$  而微分, 因此,  $y'_x$  的导数也存在; 即隐函数  $y$  的二阶函数  $y''_{x^2}$  存在. 施行微分以后再把每一个  $y'_x$  代以它的表达式 (15), 求得:

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y}{F'^2_y} \\ &= \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x \cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}; \end{aligned}$$

由此可见, 二阶导数也是  $x$  的连续函数.

若函数  $F(x, y)$  有连续的三阶导数; 则显然隐函数的三阶导数  $y'''_{x^3}$  也存在; 它的表达式仍可以由直接微分  $y''_{x^2}$  的表达式而得出, 其余由此类推. 用数学归纳法容易证明, 函数  $F(x, y)$  有直至  $k(k > 1)$  阶为止的各阶连续导数, 就保证隐函数有连续的  $k$  阶导数存在.

这样, 当已证明了隐函数的逐次导数都存在的事实以后, 它们的求法就很简单, 只要把  $y$  看作  $x$  的函数, 而逐次地微分恒等式 (14) 就是了. 例如, 这恒等式的第一次微分, 给出

$$F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x + (F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot y'_x + F'_y \cdot y''_{x^2} = 0, \quad (16)$$

由此 (需知  $F'_y \neq 0$ ),

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2} + 2F''_{xy} \cdot y'_x + F''_{y^2} \cdot y'^2_x}{F'_y};$$

把  $y'_x$  代以它的表达式 (15), 仍得刚才求出的  $y''_{x^2}$  的表达式, 其余由此类推.

在有许许多个变元的方程 (4) 的情形, 也可以类似地处理. 在此处假设定理 3 的条件都能获得满足. 若把  $y$  理解为由方程 (4) 所确定的隐函数, 则 (4) 化为恒等式. 固定  $x_2, \dots, x_n$  的数值, 把  $y$  看成仅是  $x_1$  的函数, 对  $x_1$  而微分这恒等式, 得

$$F'_{x_1} + F'_y \cdot y'_{x_1} = 0, \quad \text{由此 } y'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y},$$

同样可得

$$y'_{x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \dots, y'_{x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y} \text{ 等等.}$$

若需要求一阶、二阶、 $\dots$  所有各阶导数, 则以直接计算  $dy, d^2y, \dots$  较为简便. 求恒等式的全微分, 即使它的左边的全微分等于零 [这时利用一阶微分的形式不变性, 185]:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$



于是

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx_1 - \cdots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx_n.$$

同时

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n.$$

由于  $dx_1, \cdots, dx_n$  是任意的, 由此很明显地,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

像我们上面所得出的一样.

再微分一次, 则得

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} dx_1 + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y} dy \right] dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 y = 0,$$

由此确定  $d^2 y$ , 即可得出

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \cdots$$

的表达式, 其余由此类推. 我们看到, 在这一切运算中, 条件

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

起了主要的作用.

今转而考察方程组 (5). 我们假定, 在所取点的邻域内定理 4 的条件都能获得满足. 请注意条件  $J \neq 0$  在以下所要起的作用.

我们知道, 隐函数  $y_1, \cdots, y_m$  有关于  $x_1, \cdots, x_n$  的偏导数. 要计算它们, 只需把 (5) 式中的  $y_1, \cdots, y_m$ , 理解为就是上述的隐函数, 然后微分所得的那些恒等式. 例如, 对  $x_1$  而微分它, 给出

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

这是关于未知数  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}$  的线性方程组, 它具有异于零的行列式

$$J = \frac{D(F_1, \cdots, F_m)}{D(y_1, \cdots, y_m)}.$$



由此, 有

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, y_m)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, x_1)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}}.$$

至于  $y_1, \dots, y_m$  关于  $x_2, \dots, x_n$  的导数, 也能得出同样的表达式.

若函数  $F_1, \dots, F_m$  有连续的二阶偏导数, 则以上所得诸公式的右边都能有关于一切变元的 (连续) 导数, 因此, 隐函数有 (连续的) 二阶导数存在. 一般地说 (这是容易用归纳法证明的), 若函数  $F_1, \dots, F_m$  有直到  $k$  阶为止的各阶连续导数, 则隐函数的一切  $k$  阶导数也存在且连续.

隐函数导数的求法, 在一般情形也相同: 或则对这些或那些变元而微分诸恒等式 (5), 或则求它们的全微分, 如此得到的用以求诸导数或微分的线性方程组的行列式常是异于零的雅可比式  $J$ . 这些附注在例题内显得更为清楚.

**210. 例题** 1) 设  $y$  与  $x$  是由方程

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

联系着. 两边各对  $x$  微分 (其中的  $y$  看作是  $x$  的函数), 就得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} \text{ 或 } x + yy' = xy' - y;$$

再微分一次得

$$1 + y'^2 + yy'' = xy'';$$

其余由此类推. 由前一方程求得

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

由第二式 (若代入所求得的  $y'$  的数值) 得

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{x - y} = 2 \frac{x^2 + y^2}{(x - y)^3},$$

其余由此类推.

2) 已给方程

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

需要求出由它所确定的  $x$  的隐函数  $y$  的极值.

在此处有

$$F'_x = 3(x^2 - ay), \quad F'_y = 3(y^2 - ax).$$

由于 (15), 知道要使  $y'_x = 0$  必需  $F'_x = 0$ . 解联立方程组  $F = 0$  及  $F'_x = 0$ , 求得  $x$  及  $y$  的两对对应值:

$$x = 0, y = 0 \quad \text{及} \quad x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}.$$

但在第一点  $F'_y$  也变为零, 于是就不能断定, 我们的方程在该点的邻域内能否确定点  $y$  为  $x$  的单值函数; 因此把点  $(0, 0)$  搁在一边.



在第二点  $F'_y = 3a^2\sqrt[3]{2} > 0$ , 对于它适用定理 2. 要证实有极值存在, 可算出当  $x = a\sqrt[3]{2}$  时的  $y''_{x^2}$ ; 最简便的方法是从 (16) 着手, 令其中的  $y'_x = 0$ , 就得

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_y} \textcircled{1}.$$

因为当  $x = a\sqrt[3]{2}$  时  $F''_{x^2} = 6x > 0$ , 故  $y''_{x^2} < 0$ , 因而有极大值存在.

3) 设  $z$  为  $x, y$  的隐函数, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

确定.

随即我们有

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} = 0, \quad dz = -\frac{c^2 x}{a^2 z} dx - \frac{c^2 y}{b^2 z} dy,$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

以后再有

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{z d^2 z}{c^2} = 0,$$

由此 (若利用已知的  $dz$  的表达式) 得

$$d^2 z = -\frac{c^4}{z^3} \left[ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2} dx dy + \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right],$$

这就给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{c^4}{a^2 z^3} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right), & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{c^4}{b^2 z^3} \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \text{ 等等.} \end{aligned}$$

4) 设由方程

$$z = x + y \cdot \varphi(z)$$

确定  $z$  为  $x$  及  $y$  的函数. 假定  $1 - y \cdot \varphi'(z) \neq 0$ , 求证

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y \cdot \varphi'(z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y \cdot \varphi'(z)},$$

由此就推得所要求证的.

5) 设由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

①这不是  $y''_{x^2}$  的一般表达式, 它只能适用于我们所关心的点  $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ .



确定变元  $z$  为  $x$  及  $y$  的隐函数. 假定  $x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$ , 求证这函数满足微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

为简明起见, 约定

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

则上一微分方程可改写为

$$r \cdot q^2 - 2pq \cdot s + t \cdot p^2 = 0,$$

对  $x$  及对  $y$  而依次地微分所设方程, 则得

$$\varphi(z) + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot p = 0, \quad [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot q = 1,$$

其次有

$$2\varphi'(z) \cdot p + [x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot p^2 + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot r = 0,$$

$$\varphi'(z) \cdot q + [x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot pq + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot s = 0,$$

$$[x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot q^2 + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot t = 0.$$

最后三等式依次乘以  $q^2, -2pq, p^2$ , 然后相加, 就得出所要求的关系式.

6) 设已给方程组

$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3,$$

它们确定  $y, z, u$  为  $x$  的函数. 我们就有

$$1 + y' + z' + u' = 0, \quad x + yy' + zz' + uu' = 0,$$

$$x^2 + y^2 y' + z^2 z' + u^2 u' = 0.$$

假定行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} = (z - y)(u - y)(u - z)$$

不等于零, 由此就有

$$y' = -\frac{(z - x)(u - x)}{(z - y)(u - y)} \text{ 等等.}$$

7) 设变元  $x, y, z$  与变元  $r, \theta, \varphi$  间由关系式

$$x = r \cdot \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \cdot \sin \varphi$$

联系着, 式中  $0 < r < +\infty, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . 雅可比式

$$\begin{aligned} J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos \varphi > 0. \end{aligned}$$



前述诸关系式也确定  $r, \theta, \varphi$  为  $x, y, z$  的函数. 要求出这些函数的导数, 可求这些关系式的全微分:

$$\cos \theta \cos \varphi dr - r \cdot \sin \theta \cos \varphi d\theta - r \cdot \cos \theta \sin \varphi d\varphi = dx,$$

$$\sin \theta \cos \varphi dr + r \cdot \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \cdot \sin \theta \sin \varphi d\varphi = dy,$$

$$\sin \varphi dr + r \cdot \cos \varphi d\varphi = dz.$$

由此确定  $dr, d\theta, d\varphi$ :

$$dr = \frac{r^2 \cdot \cos \theta \cos^2 \varphi}{J} dx + \frac{r^2 \sin \theta \cos^2 \varphi}{J} dy + \frac{r^2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{J} dz,$$

$$d\theta = -\frac{r \sin \theta}{J} dx + \frac{r \cdot \cos \theta}{J} dy,$$

$$d\varphi = -\frac{r \cdot \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi}{J} dx - \frac{r \cdot \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi}{J} dy + \frac{r \cdot \cos^2 \varphi}{J} dz.$$

由这些式子已经能求得我们所关心的导数 (若把上面算出的  $J$  的值代入):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \sin \varphi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r \cdot \cos \varphi}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r \cdot \cos \varphi}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

由原设三方程甚易解出  $r, \theta, \varphi$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

可以由此算出一切导数, 用来核对已求出的结果.

8) 当作隐函数的微分法的最后一个例题, 我们再导出一个公式, 它将又一次着重说明函数组的雅可比式与单独一个函数的导数之间的相似性.

设已给具有  $2n$  个变元的  $n$  个方程所成的方程组:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

假定雅可比式:

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

异于零, 把  $y_1, y_2, \dots, y_n$  看成由这方程组所确定的  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数, 因此它们也能使这方程组化成恒等式. 对每一  $x_j$  而微分这些恒等式, 结果可以表示为下列形式:

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$



由这些等式的左边所组成的行列式是

$$(-1)^n \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

至于由这些等式的右边所组成的行列式, 显然可表示为行列式

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad \text{及} \quad \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

的乘积 [参阅 203(3)]. 由此得公式

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}},$$

它与公式 (15) 相类似.

若已给的方程为关于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  而解出的方程组:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

则这也可以变成刚才所研究的情形, 只需令其中的  $F_i = \varphi_i - x_i$ . 因为在这里  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -1$  或  $0$ , 依照  $i = j$  或  $i \neq j$  而定, 故分子变成

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

而前面的公式就成为

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{1}{\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}.$$

这结果是我们所已经知道的 [203(4)].

### §3. 隐函数理论的一些应用

**211. 相对极值** 设有  $n + m$  个变元的函数  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ , 并假定这些变元还满足  $m$  个联系方程

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$



现在我们研究这函数的极值问题. 我们先来明确一下这种相对极值的概念, 并指出检定它的方法.

常说, 在满足诸联系方程的点  $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$ , 函数  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$  有相对的极大(极小)值, 如果在点  $M_0$  的某一邻域内, 对于一切满足联系方程的点  $(x_1, \dots, x_{n+m})$  都能成立不等式:

$$f(x_1, \dots, x_{n+m}) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0).$$

我们将假定, 函数  $f$  及  $\Phi_i$  在被考察点的邻域内都有关于一切变元的连续偏导数. 再设, 从偏导数所成的矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

内取出的  $m$  阶行列式中至少有一个, 例如, 行列式

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix} \quad (3)$$

在点  $M_0$  异于零<sup>①</sup>.

于是, 若以点  $M_0$  的充分小邻域为限, 按照定理 4, 方程组 (1) 就等价于方程组

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

式中的  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  是由方程组 (1) 所确定的隐函数. 换句话说, 变元  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  满足联系方程 (1) 这一条件, 可以用变元  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  是  $x_1, \dots, x_n$  的函数 (4) 这一句话来代替. 这样,  $n+m$  个变元的函数  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$  在点  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$  的相对极值的问题就变成  $n$  个变元的复合函数

$$f(x_1, \dots, x_n; \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \quad (5)$$

在点  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  的普通 (绝对) 极值的问题了.

<sup>①</sup>在这种情形, 常说, 矩阵 (2)(在点  $M_0$ ) 的秩为  $m$ .



这种想法也指出了探求使函数  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$  达到相对极值的点的现实途径: 若事实上我们能够解出联系方程, 例如关于变元  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ , 而求得函数 (4) 的显示式, 则问题就变成求复合函数 (5) 的绝对极值了. 实在说, 在先前已解出的一系列问题内 [200, 201], 例如, 当我们在条件  $xyzt = c^4$  之下求  $x + y + z + t$  的极小值等等时, 就已这样做了.

现在将指出求点  $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$  的另一途径, 并不假定 (隐) 函数 (4) 有显示式, 虽然在这里我们仍须利用这些函数的存在性.

因此, 设函数  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$  在点  $M_0$  有相对极值, 或同样地, 复合函数 (5) 在点  $P_0$  有绝对极值. 于是, 按照 196 的附注 I, 它的微分在这点应变为零, 并且关于自变量的微分  $dx_1, \dots, dx_n$  应当是恒等的. 按照一阶微分的形式不变性 [185], 这条件可以写成:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad (6)$$

其中  $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$  要理解为函数 (4) 在点  $P_0$  的微分, 同时要像各偏导数那样都在点  $M_0$  计值, 因为 (由定理 4 可以明白)

$$\varphi_1(x_1^0, \dots, x_n^0) = x_{n+1}^0, \quad \dots, \quad \varphi_m(x_1^0, \dots, x_n^0) = x_{n+m}^0. \quad (7)$$

当然, 由 (6) 式不能断定诸微分前面的系数都等于零, 因为这些微分并非全是任意的. 为了要使问题只涉及可以任意选取的微分, 即自变量的微分  $dx_1, \dots, dx_n$ , 我们企图由此去掉各个因变量的微分  $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ . 这是容易做到的, 只要把  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  理解为函数 (4)<sup>①</sup>, 而取联系方程 (1) 的全微分:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (8)$$

在此处如同上面一样, 由于 (7), 各偏导数在点  $M_0$  计值. 因为按照假定, 行列式 (3) 在这点不为零. 故  $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$  可以由此用  $dx_1, \dots, dx_n$  的一次式来表达. 若把这些表达式代入 (6) 内, 则得形如

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$$

的等式, 其中  $A_1, \dots, A_n$  是诸函数  $\Phi_j$  的偏导数的  $n$  个有理式, 且在点  $M_0$  计值. 因为在这等式内只涉及自变量的微分  $dx_1, \dots, dx_n$ , 故在点  $M_0$  有

$$A_1 = 0, \quad \dots, \quad A_n = 0.$$

<sup>①</sup>准确些说, 我们要微分那些恒等式, 它们是从方程 (1) 内把  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  代以隐函数 (4) 而得出的. 我们在以后将采用相似的说法.



这些方程连同  $m$  个联系方程共有  $n + m$  个方程, 由此就可以确定未知量  $x_1, \dots, x_{n+m}$ .

当然, 我们已得到的仅是  $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$  为极值点的必要条件. 但是在这种形式下, 这些条件甚至对于检定函数  $f$  在条件 (1) 之下的最大 (或最小) 值都可能是有用处的, 只要按照问题的性质能预先知道, 在所考察的区域内部应当有达到最大 (最小) 值的点存在, 或是在推论的过程中作出这样的假定, 使所求的点能从其他方面的考虑来认定.

例题在下面 214 内.

**212. 拉格朗日不定乘数法** 在上述的方法内, 变量的对称性受到破坏: 其中一部分当作自变量, 另一部分当作因变量, 一些微分需去掉, 而另一些微分却保留着. 有时这就会引起很复杂的计算. 拉格朗日提出一种方法, 使一切变量都保持着同样的地位.

把 (8) 中诸等式依次乘以暂时任意的 (“不定的”) 乘数  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 然后把所得的结果与 (6) 相加. 即得等式

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0, \quad (9)$$

式中的  $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$  仍旧都表示着隐函数 (4) 的微分 (在推论时我们将暂时保持着变量的不平等); 一切导数都是在点  $M_0$  计值的.

现在将如此选择乘数  $\lambda_i = \lambda_i^0 (i = 1, \dots, m)$  的值, 使得因变量的微分  $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$  前面的系数刚好都等于零:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m^0 \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (j = n+1, \dots, n+m). \quad (10)$$

这是能够做到的, 因为为了确定  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  所获得的线性方程组有异于零的行列式 (3). 在选定了这些乘数以后, 等式 (9) 成为

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m^0 \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0. \quad (9^*)$$

在这里我们所讨论的又只是自变量的微分了, 因此, 它们前面的系数必须都等于零, 即与 (10) 并列, 我们又有

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m^0 \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (10^*)$$

于是, 为了要确定  $n + m$  个未知量  $x_1, \dots, x_{n+m}$  以及  $m$  个乘数  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 刚好就有同样个数的方程, 就是  $m$  个联系方程及  $n + m$  个方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+m)$$



[参阅 (10) 及 (10\*)].

为了要使这些方程容易书写, 通常引入辅助函数

$$F = f + \lambda_1 \Phi_1 + \cdots + \lambda_m \Phi_m;$$

那时, 上述诸方程就可以写成

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n+m). \quad (11)$$

这些方程好像是函数  $F$  有普通极值的条件. 但这仅能看成是便于记忆的一种方法.

由拉格朗日法也只能得出必要条件. 此外还可以重述前目末尾所说的话.

**附注** 在上面讲过的理论内, 关于矩阵 (2) 的秩的假定起了决定性的作用, 我们已经三次利用过了. 在用上述方法之一来解问题时, 为了要证实使函数达到相对极值的点一个都没有漏掉, 应当预先肯定, 在所考察的区域内满足联系方程的一切点, 实际上这一假定都能成立. 在简单的情形下我们将为读者证明.

**213. 相对极值的充分条件** 关于相对极值的充分条件, 这里我们只作简单的论述. 假定函数  $f$  及  $\Phi_j (j = 1, 2, \cdots, m)$  的二阶导数存在且连续. 现在设点  $M_0(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$  连同乘数  $\lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0$  都满足于上面已建立的必要条件.

在这点是否有 (相对) 极值存在, 如同在 198 内那样, 仍取决于差

$$\Delta = f(x_1, \cdots, x_{n+m}) - f(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$$

的符号, 但须附以重要的限制, 即点  $(x_1, \cdots, x_{n+m})$  也应满足联系方程 (1) 或与它相同的 (4). 容易了解, 对于这种点, 函数  $f$  的增量可以用函数  $F$  的增量代替 (式中一切乘数  $\lambda_i$  当作等于  $\lambda_i^0$ ):

$$\Delta = F(x_1, \cdots, x_{n+m}) - F(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0).$$

因为在点  $M_0$ , 条件 (11) 能获满足, —— 正由于此, 所以转而考虑函数  $F$  更为方便 —— 这增量, 按照泰勒公式可以写成 [参阅 198, (8)]:

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,k=1}^{n+m} A_{j,k} \Delta x_j \Delta x_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \alpha_{j,k} \Delta x_j \Delta x_k \right\},$$

其中

$$\Delta x_j = x_j - x_j^0, A_{j,k} = F''_{x_j x_k}(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0) \quad (j, k = 1, 2, \cdots, n+m),$$

而当  $\Delta x_1 \rightarrow 0, \cdots, \Delta x_n \rightarrow 0$  时  $\alpha_{j,k} \rightarrow 0$  (其余的增量  $\Delta x_{n+1}, \cdots, \Delta x_{n+m}$  由于函数 (4) 的连续性, 在这时也都是无穷小).



若在此处把一切增量  $\Delta x_j$  各换成对应的微分  $dx_j$ , 则对于自变量而言, 全然没有变动; 对于因变量, 由代换所引起的变动不过是把系数  $\alpha_{j,k}$  换成其他的无穷小  $\beta_{j,k}$ :

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,k=1}^{n+m} A_{j,k} dx_j dx_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \beta_{j,k} dx_j dx_k \right\}.$$

换成微分是有益处的, 因为因变量与自变量的微分是由 (8) 中诸线性关系式联系着的. 因为行列式 (3) 在点  $M_0$  依假定并不为零, 故因变量的微分可以由此用自变量的微分的线性式来表示. 把它们的表达式代入  $\Delta$  内, 代替第一个和式, 我们就得出关于微分  $dx_1, \dots, dx_n$  的二次型.

现在, 如同 198 及 199 内那样, 可以证明: 若这二次型是正 (负) 定的, 则在受检点有相对极小值 (极大值); 若二次型表现为不定的, 则无相对极值.

可是这检定法的实用价值并不大 (比较 200 的附注).

以下将考察一些例题及应用题.

**214. 例题及应用题** 1) 设需要求函数  $f = x + y + z + t$  在条件  $\Phi = xyzt - c^4 = 0$  之下的极值; 变量的变动区域由不等式  $x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$  所确定. 在 190, 4) 我们已经解过, 这一问题, 那时是用  $\Phi = 0$  来确定  $t$  的表达式, 而后代入函数  $f$  之中. 现在, 求这等式的全微分, 得

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} = 0, \text{ 由此 } dt = -t \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right).$$

从等式  $df = dx + dy + dz + dt = 0$  内消去  $dt$ , 得结果

$$\left(1 - \frac{t}{x}\right) dx + \left(1 - \frac{t}{y}\right) dy + \left(1 - \frac{t}{z}\right) dz = 0,$$

由于  $dx, dy, dz$  是任意的, 它就分解为三个式子:

$$1 - \frac{t}{x} = 0, \quad 1 - \frac{t}{y} = 0, \quad 1 - \frac{t}{z} = 0,$$

于是得  $x = y = z = t = c$ .

应用拉格朗日法于这一问题, 引入辅助函数

$$F = x + y + z + t + \lambda xyzt^{①},$$

并写出条件

$$F'_x = 1 + \lambda yzt = 0, \dots, F'_t = 1 + \lambda xyz = 0,$$

由此

$$yzt = xzt = xyt = xyz,$$

于是

$$x = y = z = t = c.$$

①若回忆起这函数所起的作用, 就能明了,  $\Phi$  内的常数项可以略去而并无妨碍.



为了要利用前段的结果, 算出  $\lambda = -\frac{1}{c^3}$ , 而考察函数

$$F = x + y + z + t - \frac{xyzt}{c^3}.$$

它的二阶微分 (在点  $x = y = z = t = c$ ) 为

$$d^2F = -\frac{2}{c}(dxdy + dxdz + dxdt + dydz + dydt + dzdt).$$

微分联系方程 (在同一点), 得

$$dx + dy + dz + dt = 0.$$

若由此确定  $dt$  并把它代入前式内, 最后就得

$$-\frac{2}{c}[dxdy + dxdz + dydz - (dx + dy + dz)^2] = \frac{1}{c}[(dx + dy + dz)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2].$$

因为这二次型显然是正定的, 所以在所求的点有相对极小值.

(然而不能由此作出结论, 说这极小值就是函数  $f = x + y + z + t$  当它的变元之间有如上述的联系时的最小值; 参阅 200,4).)

2) 再求函数

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

在条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

之下, 即在这方程所表示的球面上<sup>①</sup>的最小值及最大值 [参阅 200,2)].

为此目的, 先用拉格朗日法求函数的一切相对极值. 辅助函数

$$F = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

给出条件:

$$x[(a^2 + \lambda) - 2a(ax^2 + by^2 + cz^2)] = 0,$$

$$y[(b^2 + \lambda) - 2b(ax^2 + by^2 + cz^2)] = 0,$$

$$z[(c^2 + \lambda) - 2c(ax^2 + by^2 + cz^2)] = 0.$$

在它们之外必须再附加联系方程 (即条件). 由此解出

$$(1) \ x = 0, y = 0, z = \pm 1 (u = 0);$$

$$(2) \ x = 0, y = \pm 1, z = 0 (u = 0);$$

$$(3) \ x = \pm 1, y = 0, z = 0 (u = 0);$$

$$(4) \ x = 0, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u = \frac{1}{4}(b-c)^2 \right);$$

$$(5) \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0, z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u = \frac{1}{4}(a-c)^2 \right);$$

$$(6) \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0 \left( u = \frac{1}{4}(a-b)^2 \right).$$

<sup>①</sup> 由于球面是有界闭集, 在它上面使函数达到最小值及最大值的点必存在, 这由魏尔斯特拉斯定理知之 (参阅 173 末的附注).



在括号内所指出  $u$  的数值内, 选取其最小值及最大值, 就得出问题的解答 [参阅 200, 2)].

3) 回到并联的输电网中导线的最经济截面的问题 [201, 8)]. 保留那里曾采用的表示法, 就是要求函数

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \dots + l_n q_n$$

在条件

$$\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1} + \frac{\rho l_2 J_2}{q_2} + \dots + \frac{\rho l_n J_n}{q_n} = e$$

之下的极值. 现在我们已不必像前面那样做法引入其他变元来代换  $q_1, q_2, \dots, q_n$  了, 因为用了我们的新方法, 问题就简单地解决了.

因此, 求方程  $\Phi = 0$  的全微分, 就可由此求出微分  $dq_n$  的表达式

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n} \left\{ \frac{l_1 J_1}{q_1^2} dq_1 + \dots + \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2} dq_{n-1} \right\}.$$

把它代入方程  $df = l_1 dq_1 + \dots + l_{n-1} dq_{n-1} + l_n dq_n = 0$  内, 得出结果

$$\left( l_1 - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_1 J_1}{q_1^2} \right) dq_1 + \dots + \left( l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2} \right) dq_{n-1} = 0.$$

因为  $dq_1, \dots, dq_{n-1}$  已经是任意的<sup>29)</sup>, 故在它们前面的系数必各别等于零, 由此有

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \dots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2,$$

而

$$q_1 = \lambda \sqrt{J_1}, q_2 = \lambda \sqrt{J_2}, \dots, q_n = \lambda \sqrt{J_n}. \quad (12)$$

比例因子  $\lambda$  容易由联系方程确定它:

$$\lambda = \frac{\rho}{e} \sum_{i=1}^n l_i \sqrt{J_i}.$$

若应用拉格朗日法, 就须作出辅助函数<sup>①</sup>

$$F(q_1, q_2, \dots, q_n) = l_1 q_1 + \dots + l_n q_n + \lambda^2 \left( \frac{l_1 J_1}{q_1} + \dots + \frac{l_n J_n}{q_n} \right)$$

而使它的导数等于零:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

由此仍得出 (12), 等等.

4) 作为更复杂的例题, 我们考察这样一个问题: 三轴椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > b > c)$  被一个通过其中心的平面  $lx + my + nz = 0$  所截; 需要确定所得椭圆截线的半轴. 换句话说, 需要求函数  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  的极值, 如果它的变元满足上述的两个联系方程.

①为了方便, 我们取“不定乘数”的形式如  $\lambda^2$ , 其中并含有常数  $\rho$ .

<sup>29)</sup>参看 220 目的脚注 30).



消去因变量的微分的方法 [211] 在这里将引致复杂的计算, 因此我们就立即运用拉格朗日法. 为了要证实在椭圆面与平面的截线上的一切点, 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

的秩等于 2<sup>①</sup>, 我们用反证法. 由一切二阶行列式等于零必将推得上下两列的元素成比例; 但那时等式  $lx + my + nz = 0$  将导致  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ , 这是不可能的.

作辅助函数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + 2\mu(lx + my + nz),$$

使它的导数等于零:

$$x + \lambda \cdot \frac{x}{a^2} + \mu l = 0, \quad y + \lambda \cdot \frac{y}{b^2} + \mu m = 0, \quad z + \lambda \cdot \frac{z}{c^2} + \mu n = 0. \quad (13)$$

这些方程分别乘以  $x, y, z$  而后相加, 就得出 (利用联系方程)  $\lambda = -r^2$ .

为了明确起见, 若假定  $l, m, n$  没有一个等于零, 则由 (13) 可以看出  $r$  不等于  $a, b$  或  $c$ . 那时方程 (13) 就可以改写成:

$$x = -\mu \frac{la^2}{a^2 - r^2}, \quad y = -\mu \frac{mb^2}{b^2 - r^2}, \quad z = -\mu \frac{nc^2}{c^2 - r^2}.$$

由此容易求出  $\mu$ , 于是也连带地求出  $x, y, z$ ; 但避免这样做, 也可以把这些等式预先分别乘以  $l, m, n$  而后相加, 就得方程

$$\frac{l^2 a^2}{a^2 - r^2} + \frac{m^2 b^2}{b^2 - r^2} + \frac{n^2 c^2}{c^2 - r^2} = 0,$$

由此可直接确定出我们所关心的  $r^2$  的两个极值.

因为预先已知这些极值存在, 故在此处问题已获得完全的解决.

5) 最后, 需要求二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

在条件

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1^{②} \quad (14)$$

下的最小值及最大值.

作出拉格朗日函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

<sup>①</sup>参阅 212 的附注.

<sup>②</sup>此处可加附注如同第 409 页下的脚注 ①.



[illegible]
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0$$
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda.$$

### 215. 函数的独立性的概念 考察函数组

[illegible]

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m)$$
$$a_{ik} - a_{ji} \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j, k, l$$



单值地确定的情形. 更准确地说, 若  $\mathcal{E}_0$  是对应于  $\mathcal{D}$  中一切可能的点  $(x_1, \dots, x_n)$  的上述这种  $(m-1)$  维点的集合, 则将假定在  $\mathcal{E}_0$  内成立函数关系

$$y_j = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m), \quad (18)$$

而且, 如果把一切  $y_i$  换成函数 (17), 这等式在  $\mathcal{D}$  中就成为关于诸  $x$  的恒等式<sup>①</sup>. 这时我们说, 函数  $y_j$  在区域  $\mathcal{D}$  中与其他函数有关. 然而, 为了使我们有可能应用微分学的可能, 在这定义内再加上一个条件: 函数  $\varphi$  在含有集  $\mathcal{E}_0$  的  $(m-1)$  维空间的开域  $\mathcal{E}$  中是有定义的, 它连同自己的偏导数都是连续函数.

特别情形, 若函数 (17) 中之一函数  $y_j$  变成常数, 则它显然与其余函数有关: 在此处可以简单地令  $\varphi = \text{常数}$ . 一般说来, 函数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  称为在区域  $\mathcal{D}$  中彼此相关, 如果其中之一 (哪一个都是一样) 与其余有关.

例题 1) 若令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \end{cases}$$

则不难核对, 在全  $n$  维空间内成立恒等式

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3.$$

2) 类似于此, 关于函数

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1x_3 + x_2, \\ y_3 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 - 1)x_2x_3 - x_1(x_2^2 - x_3^2), \end{cases}$$

在三维空间内有恒等式

$$y_3 = y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2$$

成立. 它们是相关函数.

若形如 (18) 的恒等式 既不在区域  $\mathcal{D}$  中成立, 也不在包含于  $\mathcal{D}$  中的任何部分区域中成立, 则函数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  就称为在区域  $\mathcal{D}$  中彼此独立.

要得出函数的独立性这一问题的解答, 可考察这些函数关于一切自变量的偏导数所组成的雅可比矩阵:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (19)$$

<sup>①</sup>重要的是, 函数  $\varphi$  在它自己的直接变元中不包含那些  $x$ .



假定  $n \geq m$  首先就有这样的定理:

**定理 1** 若由矩阵 (19) 的元素所组成的  $m$  阶行列式中至少有一个区域  $D$  中异于零, 则在这区域中函数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  是独立的.

**证明** 设

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (20)$$

假如不等于零的行列式不是这一个, 而是任何别的一个, 那么, 只要调换变元的序号, 就可以把问题变成 (20) 的情形.

定理的证明我们用反证法来进行. 假定其中之一函数例如  $y_m$ , 可以用其余函数来表示, 于是

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}), \quad (21)$$

即使在区域  $D$  的某一部分  $D_0$  中是如此也行.

对每一个变量  $x_i (i = 1, \dots, m)$  微分这恒等式, 我们得出一系列的恒等式 (在  $D_0$  中) 其形状为

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

我们看出, 行列式 (20) 的最后一行的元素可以由前面  $m-1$  行的元素预先分别乘以  $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$  再相加而得. 这种行列式当然是等于零的. 这便违反了定理的条件. 所得的矛盾就证明了等式 (21) 是不可能成立的.

**216. 雅可比矩阵的秩** 转向一般情形, 我们引入下面的定义. 所谓雅可比矩阵 (19) (在区域  $D$  中) 的秩, 这是指由矩阵 (19) 的元素组成的在  $D$  中不恒为零的行列式的最高阶数. 当然, 可能遇到这种情形: 矩阵 (19) 的所有元素都恒为零; 这时我们说, 矩阵 (19) 的秩是 0; 但这种情形不值得我们注意, 因为这时所有的函数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  都干脆成为零 [183]. 如果矩阵 (19) 的秩是  $\mu \geq 1$ , 则由矩阵 (19) 的元素 (当然, 这要假定  $m \geq \mu$  和  $n \geq \mu$ ) 所组成的  $\mu$  阶行列式中至少有一个在  $D$  中不恒等于零, 同时所有阶数高于  $\mu$  的行列式 (如果有的话) 都恒等于零. 我们说矩阵在区域某点达到秩  $\mu$ , 只要上述的  $\mu$  阶行列式在这一点异于零.

**定理 2** 设雅可比矩阵在区域  $D$  中的秩是  $\mu \geq 1$  且在这区域内一点

$$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$







在上述区域中方程组 (24) 与 (25) 是完全等价的, 即它们被变元  $x_1, \dots, x_n$  和  $y_1, \dots, y_n$  的同样数值所满足. 由我们所根据的定理本身得出, 如果将函数 (25) 代入 (24) 以代替  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ , 则得出关于  $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$  的恒等式. 但是对于我们现在重要的还有另一方面: 如果将函数  $f_1, f_2, \dots, f_\mu$  代入 (25) 以代替  $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ , 则得出关于变元  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的恒等式 —— 至少在点  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的某个邻域内是如此. 就是只要选取这个邻域

$$\mathcal{D}_0 = (x_1^0 - \delta'_1, x_1^0 + \delta'_1; x_2^0 - \delta'_2, x_2^0 + \delta'_2; \dots; x_n^0 - \delta'_n, x_n^0 + \delta'_n)$$

使得

$$0 < \delta'_1 \leq \delta_1, 0 < \delta'_2 \leq \delta_2, \dots, 0 < \delta'_n \leq \delta_n,$$

此外, 还要求对于它的各点由 (24) 定出的  $y_1, y_2, \dots, y_\mu$  的值, 即  $f_1, f_2, \dots, f_\mu$  的值, 与  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_\mu^0$  之差分别小于  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\mu$ <sup>①</sup>. 实际上, 这时点  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_\mu)$  落在  $\mathcal{M}_0$  上, 并且与等式 (24) 同时等式 (25) 也应当满足.

现在从 (17)(如果  $m > \mu$ ) 的其余函数中任取一个, 例如  $y_{\mu+1}$ , 我们证明, 它与前  $\mu$  个函数  $y_1, y_2, \dots, y_\mu$  有关. 如果将 (25) 中的诸函数代入等式  $y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \dots, x_n)$  中以代替  $x_1, \dots, x_n$  则  $y_{\mu+1}$  就成为  $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$  的 (复合) 函数的形状:

$$\begin{aligned} y_{\mu+1} &= f_{\mu+1}(\varphi_1(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &\quad \varphi_\mu(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n); x_{\mu+1}, \dots, x_n) \\ &\equiv F_{\mu+1}(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (26)$$

根据上面所作的附注, 如果在这个等式中分别以函数  $f_1, f_2, \dots, f_\mu, f_{\mu+1}$  代替  $y_1, y_2, \dots, y_\mu, y_{\mu+1}$ , 则它在区域  $\mathcal{D}_0$  中关于诸  $x$  成为恒等式.

为了证明函数  $y_{\mu+1}$  与函数  $y_1, y_2, \dots, y_\mu$  相关, 剩下只要证明 (26) 中的函数  $F_{\mu+1}$  实际上与变元  $x_{\mu+1}, \dots, x_n$  无关. 为了这个目的, 只要证明, 关于  $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$  的恒等式即:

$$\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+2}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0$$

成立就行了 [比较 183]. 下面讨论第一个等式作为例子, 其余可以同样证明.

对方程 (24) 关于  $x_{\mu+1}$  微分, 把  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  看成是  $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$  的函数, 我们就得出关于

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}$$

<sup>①</sup>由于函数  $f_1, f_2, \dots, f_\mu$  在点  $M_0$  取值  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_\mu^0$  并且连续, 所以这是可以实现的.







3) 例如, 设  $y_1$  及  $y_2$  是二个自变量  $x_1, x_2$  的函数, 在平面  $x_1x_2$  上由下列等式确定:

$$y_1 = \begin{cases} x_1^3 x_2^2, & \text{若 } x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{若 } x_1 < 0. \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x_1^2 x_2^3, & \text{若 } x_2 \geq 0, \\ 0, & \text{若 } x_2 < 0. \end{cases}$$

容易验证, 这些函数连同自己的导数在全平面上是连续的.

在本题的情形, 雅可比矩阵的秩在第一象限内为 2, 在第二、四象限内为 1, 在第三象限内为零. 只有在第一象限内, 函数彼此独立.

## §4. 换元法

**217. 一元函数** 这一节的目的在于使读者熟悉换元法的形式上的步骤. 因此我们在这里不准备多去解释, 使得这种演算成为合法的一切条件 (而那样做也并无任何困难).

本节内容的主要部分可能在以前都已讲过了, 然而现在把有关换元的全部材料集中在一处似乎是适时的.

设已给含有自变量  $x$ , 其函数  $y$ , 以及  $y$  关于  $x$  的直至某阶为止的一系列导数的某一表达式

$$W = F(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots).$$

有时需要将它变换成新的自变量  $t$  及其函数  $u$  的相同的表达式, 而新旧变量之间则由确定的关系 (名为变换公式) 互相关联着. 准确些说, 要把  $W$  表示为  $t, u$  以及  $u$  关于  $t$  的导数的函数.

通常使用这种换元法的动机或则由于在所讨论的问题内变量  $t$  及  $u$  特别值得采用, 或则由于把这变换公式引入表达式  $W$  后可使  $W$  简化.

首先讨论只是自变量受到变换的情形, 且已给出  $x$  与新自变量  $t$  之间的直接变换公式.

假定, 这变换公式关于  $x$  而解出:

$$x = \varphi(t). \quad (1)$$

若  $y$  是  $x$  的函数, 则用  $x$  做媒介, 它就成为  $t$  的函数. 我们在 121 内已有用  $x$  及  $y$  关于  $t$  的导数来表示  $y$  关于  $x$  的导数的公式:

$$\left. \begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^3_t}, \\ y'''_{x^3} &= \frac{x'_t (x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2} (x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{x'^5_t}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

因为  $x'_t, x''_{t^2}, x'''_{t^3}, \dots$  可以作为  $t$  的已知函数 [它们可以由 (1) 式微分而得出], 故只需再把  $W$  内的  $y'_x, y''_{x^2}, \dots$  用上述诸表达式代换成  $t$  的函数  $y'_t, y''_{t^2}$  等等即可.

若已给的变换公式关于  $x$  为未解出的形式:

$$\Phi(x, t) = 0, \quad (3)$$

问题在本质上是同样解决的, 只是导数  $x'_t, x''_{t^2}, \dots$  须按照隐函数的微分法去求出它们<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>可是, 这样在  $W$  的最后表达式内仍可能包含有  $x$ , 那时就必须借助于 (3) 式来消去它.



转而讨论一般情形. 设二变量都需变换, 但假定变换公式可以写成关于旧变量而解出的形式:

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \psi(t, u). \quad (4)$$

若  $y$  与  $x$  间存在函数关系, 则由此知  $u$  与  $t$  间也将存在函数关系, 由是根据 (4),  $x$  及  $y$  就成为  $t$  的复合函数. 按照复合函数的微分法则, 就有

$$\begin{aligned} x'_t &= \varphi'_t + \varphi'_u u'_t, & y'_t &= \psi'_t + \psi'_u u'_t; \\ x''_{t^2} &= \varphi''_{t^2} + 2\varphi''_{tu} u'_t + \varphi''_{u^2} u'^2_t + \varphi'_u u''_{t^2}, & y''_{t^2} &= \psi''_{t^2} + \cdots + \psi'_u u''_{t^2}; \cdots \end{aligned}$$

读者须注意, 我们用  $x'_t, y'_t$  等等表示  $x$  及  $y$  关于  $t$  的“全”导数, 即已把  $u$  当作  $t$  的函数了; 反之,  $\varphi'_t, \psi'_t, \cdots$  只表示关于  $t$  的偏导数, 因为在函数  $\varphi, \psi, \cdots$  内  $t$  只是二变元之一.

把这些式子代入公式 (2), 就得出用  $t, u$  以及  $u$  关于  $t$  的导数来表示  $y$  关于  $x$  的导数的式子.

若变换公式不能关于  $x$  及  $y$  而解出:

$$\Phi(x, y, t, u) = 0, \quad \Psi(x, y, t, u) = 0, \quad (5)$$

就须按照隐函数的微分法则求出导数  $x'_t, y'_t, x''_{t^2}, y''_{t^2}, \cdots$ . 例如对  $t$  而微分 (5)(这时, 不仅把  $x$  及  $y$ , 就是把  $u$  也当作  $t$  的函数), 就得方程

$$\Phi'_x x'_t + \Phi'_y y'_t + \Phi'_t + \Phi'_u u'_t = 0, \quad \Psi'_x x'_t + \Psi'_y y'_t + \Psi'_t + \Psi'_u u'_t = 0,$$

由此就能求出  $x'_t, y'_t$  等等.

在变换公式可以关于新变元而解出的那种特别情形:

$$t = \alpha(x, y), \quad u = \beta(x, y), \quad (6)$$

首先可以利用刚才讲过的一般方法. 例如对  $t$  而微分公式 (6)(这时把  $x, y, u$  都当作  $t$  的函数), 就得

$$1 = \alpha'_x x'_t + \alpha'_y y'_t, \quad u'_t = \beta'_x x'_t + \beta'_y y'_t,$$

由此得

$$x'_t = \frac{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}, \quad y'_t = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x},$$

最后得

$$y'_x = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}.$$

然而在这种情形, 更简单的是这样做: 正好像是反过来要把  $t, u$  变成  $x, y$  的一样. 对  $x$  而微分公式 (6)(把  $y$  当作  $x$  的函数), 就得

$$t'_x = \alpha'_x + \alpha'_y y'_x, \quad u'_x = \beta'_x + \beta'_y y'_x,$$

于是

$$u'_t = \frac{u'_x}{t'_x} = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'_x}{\alpha'_x + \alpha'_y y'_x}, \quad (7)$$

由此也能得出同上面一样的  $y'_x$  的表达式.



在这里我们也这样区别导数  $t'_x, u'_x$ , 与  $\alpha'_x, \beta'_x$ : 前者表示关于  $x$  的“全”导数, 已把  $y$  当作  $x$  的函数了, 而在后者只是把  $x$  当作函数  $\alpha, \beta$  的二变元之一.

注意, 按照公式 (6) 把变元  $x, y$  换成变元  $t, u$ , 可以几何地解释为一种平面 (或它的一部分) 上的点变换: 若把  $x, y$  看成平面上一点  $M$  的坐标, 把  $t, u$  看成一点  $P$  的坐标, 则这变换就把点  $M$  迁移到点  $P$ . 再取平面上的任何曲线  $K$ , 其方程为  $y = f(x)$ ; 对应于  $x$  与  $y$  之间的这种函数关系, 在  $t$  与  $u$  之间也得到一种函数关系:  $u = g(t)$ , 它也确定平面上的某一曲线  $\mathcal{L}$ . 这样, 在所考察的变换之下, 曲线  $K$  转移成曲线  $\mathcal{L}$ . 若作前一曲线在  $M$  点的切线, 其斜率为  $y'_x$ , 则第二曲线在对应点  $P$  也有切线, 其斜率就是由公式 (7) 所确定的  $u'_t$ . 这样, 由曲线  $K$  上一点  $M$  的坐标及在  $M$  切线的斜率就单值地确定了变换后的曲线  $\mathcal{L}$  上对应点  $P$  的坐标及在  $P$  切线的斜率. 因此, 若经过点  $M$  作相切于这点的二曲线, 则变换后的两曲线也必相切于对应点  $P$ . 故所考察的平面上的点变换保持相切关系 [比较下面的例题 5)].

**218. 例题** 1) 设已给方程  $x^2 y''_{x^2} + xy'_x + y = 0$ ; 令  $x = e^t$ , 求变换后的方程.

按照公式 (2) 有

$$y'_x = e^{-t} \cdot y'_t, \quad y''_{x^2} = e^{-2t} \cdot (y''_{t^2} - y'_t),$$

而方程就变成更简单的形式:

$$y''_{t^2} + y = 0.$$

2) 令  $x = t - y$ , 变换表达式

$$W = \frac{y''_{x^2} - y'_x(1 + y'_x)^2}{(1 + y'_x)^3}.$$

若写成  $x = t - u, y = u$ , 就可以由一般方法完成这变换. 按照公式 (2), 得

$$W = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t - y'_t(x'_t + y'_t)^2}{(x'_t - y'_t)^3}.$$

另一方面, 变换公式给出  $x'_t = 1 - y'_t$ ; 代入, 最后得  $W = y''_{t^2} - y'_t$ .

3) 互换变元的任务 假定要把自变量  $x$  与其函数  $y$  所担任的任务互换: 则只需令  $x = u, y = t$ , 就可以由一般方法完成这变换. 试提出这样的问题: 用  $x$  关于  $y$  的导数去表示  $y$  关于  $x$  的导数.

仍利用公式 (2), 用  $y$  代  $t$ . 若注意  $y'_y = 1$  (又  $y''_{y^2} = y'''_{y^3} = \cdots = 0$ ), 则立刻得出

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad y''_{x^2} = -\frac{x''_{y^2}}{x'^3_y}, \quad y'''_{x^3} = \frac{3x''_{y^2} - x'_y x'''_{y^3}}{x'^5_y}, \cdots$$

例如, 若应用这变换于表达式  $W = y'_x y'''_{x^3} - 3y''_{x^2}$ , 可得  $W = -\frac{x'''_{y^3}}{x'^5_y}$ .

4) 换成极坐标 若把  $x, y$  看成点的直角坐标, 则方程  $y = f(x)$  表示曲线. 有时常需把  $x, y$  换成极坐标  $r, \theta$ , 而改用极坐标方程  $r = g(\theta)$  来表示曲线. 那时, 自然会有必要, 要把由  $x, y, y'_x, y''_{x^2}, \cdots$ , 表示的曲线的各种几何元素改用  $\theta, r, r'_\theta, r''_{\theta^2}, \cdots$  来表示.



在这种情形, 大家知道, 变换公式是:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . 对  $\theta$  而微分它们 (在这时, 注意  $r$  是  $\theta$  的函数), 就得

$$x'_\theta = r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta, \quad y'_\theta = r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta;$$

$$x''_{\theta^2} = r''_{\theta^2} \cos \theta - 2r'_\theta \sin \theta - r \cos \theta,$$

$$y''_{\theta^2} = r''_{\theta^2} \sin \theta + 2r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta, \dots$$

由此, 按照公式 (2) 用 ( $\theta$  代  $t$ ), 得

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta}, \quad y''_{x^2} = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_{\theta^2}}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^3}; \dots$$

用这种方法, 例如, 切线的斜率便是

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta};$$

而切线与向径的延长线所成的角  $\omega$  的正切 (图 114)

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta} = \frac{xy'_x - y}{x + yy'_x}.$$

现在可以用更简单的公式

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'_\theta}$$

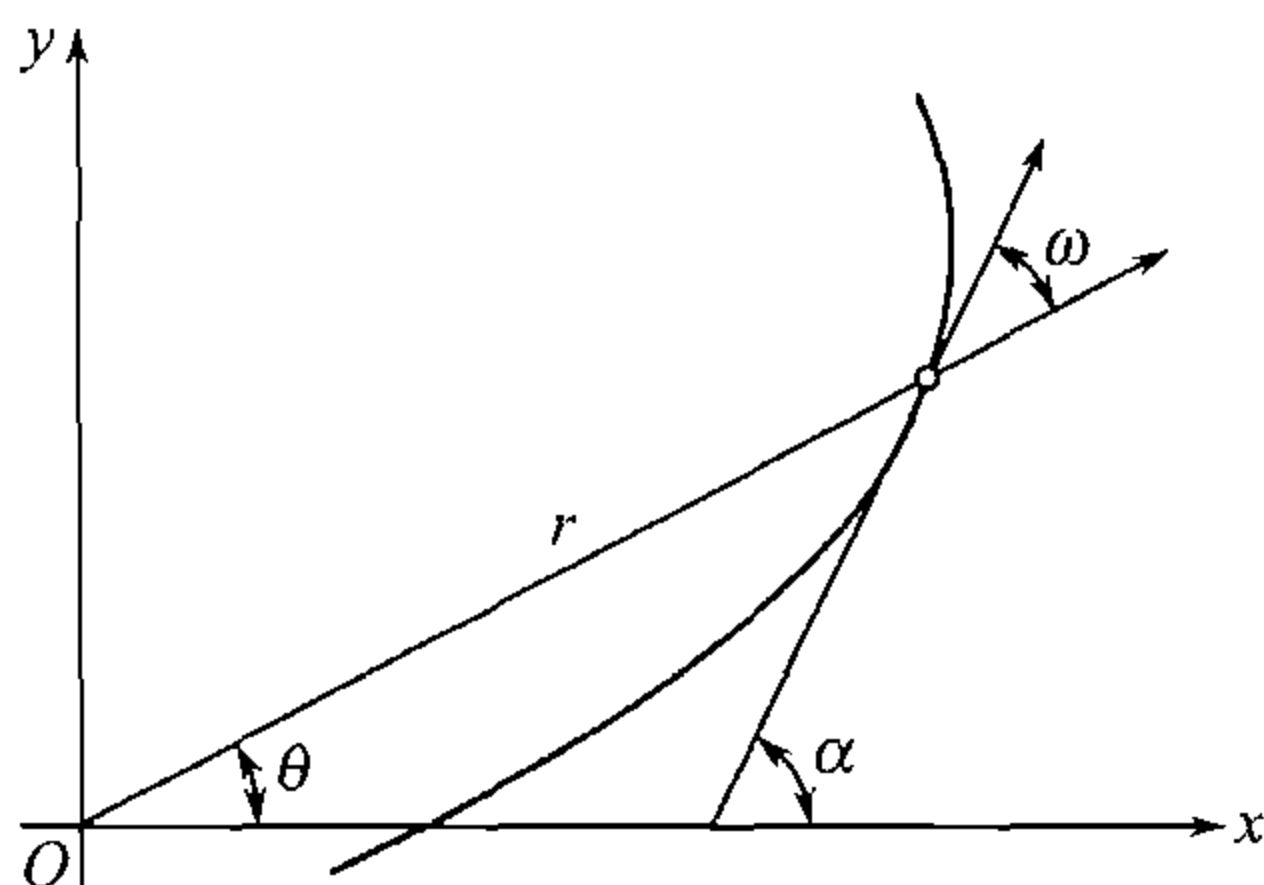


图 114

来表示, 由于这缘故, 当曲线用极坐标方程给定时, 切线的位置最好就用角  $\omega$  来确定它.

再考察表达式

$$R = \frac{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}},$$

以后 [251] 将看到, 它表示曲线的重要的几何元素 (“曲率半径”). 若把上面求出的关于  $y'_x$  及  $y''_{x^2}$  的式子代入此处化简后可得

$$R = \frac{(r^2 + r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'_\theta r''_{\theta^2} - rr''_{\theta^2}}.$$

5) 勒让德变换 在前目内所提出的换元问题可以把它推广到在变换公式内已出现有导数的情形去. 我们限于讨论这类变换之一作为例题:

$$t = y'_x, \quad u = x \cdot y'_x - y;$$

这变换称为勒让德变换.

对  $x$  而微分第二变换公式, 把左边的  $u$  看成是以  $t$  为媒介的  $x$  的函数 ( $t$  与  $x$  的函数关系由第一公式给出):

$$u'_t \cdot y''_{x^2} = y'_x + x \cdot y''_{x^2} - y'_x = x \cdot y''_{x^2}.$$

由此 (假定  $y''_{x^2} \neq 0$ )  $u'_t = x$ . 这样, 若写出两个变换公式, 就有

$$x = u'_t, \quad y = t \cdot u'_t - u,$$



这就表明变换的相互性:  $t, u, u'_t$  是怎样用  $x, y, y'_x$  表示的, 则后者也完全同样地用前者表示着.

用类似于前的方法, 对  $x$  而微分  $u'_t = x$ , 则得

$$u''_{t2} \cdot y''_{x2} = 1, \text{ 由此 } y''_{x2} = \frac{1}{u''_{t2}}.$$

继续微分给出

$$u'''_{t3} \cdot y''_{x2} + u''_{t2} \cdot y'''_{x3} = 0, \text{ 于是 } y'''_{x3} = -\frac{u'''_{t3}}{u''_{t2}},$$

等等.

须注意, 若以平面上的变换来做勒让德变换的几何说明, 则它决不是点变换. 若要知道点  $P$  的坐标  $t, u$ , 单知道点  $M$  的坐标  $x, y$  是不够的, 还需要知道所考察的曲线  $y = f(x)$  在这点的切线的斜率  $y'_x$ . 纵然如此, 曲线在此处仍变成曲线, 且仍保持相切关系<sup>①</sup>.

**219. 多元函数 · 自变量的变换** 现在转而讨论除自变量  $x, y, \dots$  以及它们的函数  $z$  以外, 还含有  $z$  关于其变元的 (达到一定阶的) 偏导数的表达式

$$W = F \left( x, y, \dots, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots \right)$$

的变换问题.

和前面所说过的简单情形一样, 在这里也可能需要利用联系新旧变元的变换公式把它变成新变量的表达式. 若有  $t, u, \dots$  表示新自变量, 用  $v$  表示它们的函数, 则问题就成为用  $t, u, \dots, v$  以及  $v$  关于其变元的导数来表示  $W$ . 显然, 只要学会如何来变换旧导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$  成为新导数就够了. 为了书写简单起见, 我们将假定自变量只有两个: 旧的是  $x, y$ , 新的是  $t, u$ .

先从只变换自变量的情形开始, 而变换公式直接联系着旧变元  $x, y$  与新变元  $t, u$ .

假设变换公式可以关于旧变量而解出:

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \psi(t, u). \quad (8)$$

以  $x$  及  $y$  为媒介把  $z$  看成  $t$  及  $u$  的复合函数, 按照复合函数的微分法则就得:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (9)$$

这样, 我们就得到旧导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  所满足的线性方程组; 由此旧导数就可用新导数线性地表达出来:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \frac{\partial z}{\partial t} + B \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C \frac{\partial z}{\partial t} + D \frac{\partial z}{\partial u}. \quad (10)$$

这时必须注意系数  $A, B, C, D$  是由公式 (8) 中的函数  $\varphi$  及  $\psi$  的导数所组成, 但却完全与  $z$  无关.

<sup>①</sup>保持相切关系类似的变换在各种几何及分析的领域内起了重要的作用. 这种变换称为切线变换或接触变换. 点变换及勒让德变换只是其特例.



因此我们也可以把公式 (10) 应用于导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  (代替  $z$ ). 例如由此, 对于  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  就能得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + B \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= A \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ &\quad + B \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + B \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right).\end{aligned}$$

把 (10) 应用于二阶导数 (代替  $z$ ), 可以得出三阶导数的表达式, 等等.

若变换公式能关于新变量而解出:

$$t = \alpha(x, y), \quad u = \beta(x, y),$$

则更方便的是应用反逆法, 即以  $t, u$  为媒介把  $z$  看成  $x, y$  的复合函数, 再对旧变元而施行微分. 这时立即得出形式如 (10) 的公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (11)$$

这次, 系数

$$A = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial y}$$

是  $x, y$  的函数, 但同样与  $z$  无关.

累次应用公式 (11), 仍可以得出以后各阶导数的表达式. 例如

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial z}{\partial t} + B \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial u} + A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) + B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial u} + A \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} \right) + B \left( A \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + B \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right) \textcircled{1}.\end{aligned}$$

最后, 在一般情形, 对于任意的变换公式

$$\Phi(x, y, t, u) = 0, \quad \Psi(x, y, t, u) = 0, \quad (12)$$

可以用直接法或反逆法按照隐函数的微分法则算出偏导数

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{或} \quad \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}.$$

**220. 微分的求法** 如果在  $W$  内出现的不是个别的导数, 而是已给阶次的全部导数, 那么我们可以讲一种用新导数表示旧导数的特别方便的方法. 这就是全微分的求法. 它同样可以表示成两组公式, 看我们是用  $t, u$  还是用  $x, y$  当作自变量而定.

先设  $t, u$  是自变量, 一切微分就是关于这些变量而取的 (直接法). 求变换公式 (12) 的全微分,  $dx$  及  $dy$  就可以由  $dt$  及  $du$  线性地表达出来:

$$dx = \alpha dt + \beta du, \quad dy = \gamma dt + \delta du; \quad (13)$$

<sup>①</sup>在此处应再作出类似于第 217 目的脚注. 因为用新导数表示旧导数的表达式内含有  $x, y$ , 故把它们代入  $W$  以后, 可能还需要再依靠变换公式来消去  $x, y$ . 读者注意在下一场合中也有类似于此的情形.



以后再微分这两个式子, 可以把  $d^2x$  及  $d^2y$  表示为  $dt$  及  $du$  的二次齐次多项式

$$d^2x = \varepsilon dt^2 + \zeta dtdu + \eta du^2, \quad d^2y = \theta dt^2 + \tau dtdu + \chi du^2, \quad (14)$$

等等. 系数  $\alpha, \beta, \dots, \tau, \chi$  是  $x, y, t, u$  的已知函数.

现在 (利用微分的形式不变性) 把  $dz$  双关地表示为:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du. \quad (15)$$

若把  $dx$  及  $dy$  换成它们的表达式 (13), 并使等式两边  $dt$  及  $du$  之前的系数相等<sup>①</sup>, 则得线性方程

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{及} \quad \beta \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

由此可以确定导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

同样, 可以双关地表示  $d^2z$  (记住, 自变量不是  $x, y$  而是  $t, u$ ):

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2. \end{aligned} \quad (16)$$

若把  $dx, dy, d^2x, d^2y$  换成它们的表达式 (13) 及 (14), 并使等式两边  $dt^2, dtdu, du^2$  之前的系数相等<sup>②</sup>. 这就给出三个线性方程的方程组, 借此可以确定导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  (因为  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  已经知道); 等等.

在实施时, 用反逆法更为简便. 这时把  $x$  及  $y$  当作自变量, 于是就须对这些变量而取一切微分.

由变换公式 (12) 求得的历次微分为

$$dt = a dx + b dy, \quad du = c dx + d dy; \quad (17)$$

$$d^2t = e dx^2 + f dx dy + g dy^2, \quad d^2u = h dx^2 + i dx dy + j dy^2 \quad (18)$$

等等. 且此处的系数  $a, b, \dots, i, j$  是  $x, y, t, u$  的已知函数.

若在 (15) 内把  $dt$  及  $du$  换成它们的表达式 (17), 并使等式两边  $dx$  及  $dy$  之前的系数相等, 则直接得出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b \frac{\partial z}{\partial t} + d \frac{\partial z}{\partial u}.$$

<sup>①</sup>请回忆, 等式  $Adt + Bdu = A'dt + B'du$  仅在  $A = A', B = B'$  的场合方才可以对于任意的<sup>30)</sup>  $dt$  及  $du$  成立.

<sup>②</sup>等式  $Adt^2 + Bdtdu + Cdu^2 = A'dt^2 + B'dtdu + C'du^2$  仅当  $A = A', B = B', C = C'$  时方才可以对于任意的<sup>30)</sup>  $dt$  及  $du$  成立.

<sup>30)</sup>在所考虑的等式中右边与左边都是函数, 由两个函数的等式总可以得出对任意固定的自变量的值, 这些函数的值相等. (所以实际上在任何正确的包含自变量微分的等式中, 愿意的话, 这些微分可以认为是任意固定的数.)



在这一情形, 代替 (16) 就有

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial z}{\partial t} d^2t + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u. \end{aligned}$$

把 (17), (18) 式代入, 使等式两边  $dx^2, dx dy, dy^2$  的系数相等, 便直接得出导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  的表达式, 等等.

**221. 换元的一般情形** 最后回头讨论当自变量及函数都变换时的一般情形. 设变换公式能关于旧变量而解出:

$$x = \varphi(t, u, v), \quad y = \psi(t, u, v), \quad z = \chi(t, u, v). \quad (19)$$

若  $z$  是  $x$  及  $y$  的函数:  $z = f(x, y)$ , 则把此式中的  $x, y, z$  用 (19) 中的各式代入, 就得到新变量之间的函数关系, 于是  $v$  成为  $t$  及  $u$  的函数.

把  $t$  及  $u$  当作自变量 (直接法), 且借  $x$  及  $y$  为媒介把  $z$  看成  $t$  及  $u$  的函数, 就可同上面那样, 得到等式 (9), 由此又得 (10). 但在此应把  $\frac{\partial x}{\partial t}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u}$  理解为  $x, y, z$  对于  $t$  或  $u$  的“全”偏导数, 它们可以由 (19) 式顾及  $v$  本身也是  $t$  及  $u$  的函数而得到:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u}.$$

(10) 中的系数  $A, B, C, D$  内不仅含有  $t, u, v$ , 而且含有导数  $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}$ ; 后者是以有理方式出现的. 累次应用公式 (10), 就可由此引出二阶导数的表达式, 等等.

若变换公式能关于新变量而解出:

$$t = \alpha(x, y, z), \quad u = \beta(x, y, z), \quad v = \gamma(x, y, z), \quad (20)$$

则通常可应用反逆法, 即把  $x$  及  $y$  当作自变量. 就有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

此处的  $\frac{\partial t}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y}$  需要换成它们的表达式, 只需对  $x$  及  $y$  微分公式 (20), 并计及  $z$  是  $x$  及  $y$  的函数, 就可以得到这些表达式:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

这样就可得出关于  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  的线性方程组, 由此这些导数很容易用  $x, y, z, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}$  表达出来.

求以后的导数最简单是这样: 借  $t$  及  $u$  为媒介把导数  $\frac{\partial v}{\partial t}$  及  $\frac{\partial v}{\partial u}$  看成是  $x$  及  $y$  的函数再对  $x$  (对  $y$ ) 微分所得的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  (或  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ) 的表达式, 等等.

在变换公式为一般形式

$$\left. \begin{aligned} A(x, y, z, t, u, v) &= 0, \\ B(x, y, z, t, u, v) &= 0, \\ \Gamma(x, y, z, t, u, v) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



的情形, 可以利用上述的任何一种方法, 并应用隐函数的微分法则.

要解决所考察的一般换元问题, 也可以应用全微分的求法. 我们限于在旧变元  $x$  及  $y$  的自变量的假定之下来叙述这一方法 (反逆法), 于是对这些变元而取一切微分.

由公式 (21) 出发, 累次求微分, 可以得出

$$\left. \begin{aligned} dt &= a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, \\ du &= b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz, \\ dv &= c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} d^2 t &= \partial_1 dx^2 + \partial_2 dx dy + \partial_3 dy^2 + \partial_4 dx dz + \partial_5 dy dz + \partial_6 dz^2 + a_3 d^2 z, \\ d^2 u &= e_1 dx^2 + \cdots + e_6 dz^2 + b_3 d^2 z, \\ d^2 v &= f_1 dx^2 + \cdots + f_6 dz^2 + c_3 d^2 z; \cdots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

若在等式

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial u} du$$

内把  $dt, du$  及  $dv$  换成它们的表达式 (22), 则得

$$c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz = \frac{\partial v}{\partial t} (a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) + \frac{\partial v}{\partial u} (b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz),$$

由此有

$$dz = A dx + B dy, \quad (24)$$

式中的  $A, B$  以有理方式包含导数  $\frac{\partial v}{\partial t}$  及  $\frac{\partial v}{\partial u}$ . 把这式与公式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

对照, 看出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

今在等式 ( $t$  及  $u$  不是自变量)

$$d^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v}{\partial t} d^2 t + \frac{\partial v}{\partial u} d^2 u$$

中把  $dt, du, d^2 t, d^2 u, d^2 v$  换成它们的表达式 (22) 及 (23), 再把  $dz$  换成它的表达式 (24). 从所得的等式可以确定  $d^2 z$ :

$$d^2 z = C dx^2 + 2D dx dy + E dy^2,$$

式中的  $C, D, E$  以有理方式包含导数  $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u}, \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ . 把它与公式

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

对照, 得出结果

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = C, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = D, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = E,$$

等等.



变量的变换问题在此处也可给以几何的意义. 若把变量  $(x, y, z)$  及  $(t, u, v)$  看成是点  $M$  及  $P$  的空间坐标, 则变换公式, 例如其形式如 (20), 对每一点  $M$  有某一对应点  $P$ , 即表示着空间(或其一部分)的点变换. 对应于  $x, y, z$  之间的函数关系, 就可以得到  $t, u, v$  之间的函数关系, 于是每一曲面  $S$  在这时仍变换成某一曲面  $T$ .

我们已看到,  $t, u, v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}$  的值由  $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  的值单值地确定. 回忆切平面的方程 [180(6)]:

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

由此容易推断: 在所考虑的变换之中, 相切于  $M$  点的二曲面  $S_1$  及  $S_2$  若对应于二曲面  $T_1$  及  $T_2$ , 则  $T_1$  及  $T_2$  也必相切于  $P$  点. 故空间点变换保持相切关系[比较下面的例题 7)].

**222. 例题** 1) 换成极坐标 设  $z$  是平面上的点函数  $z = f(M)$ . 点的位置通常由它的直角坐标  $(x, y)$  确定, 于是  $z$  就成为变量  $x$  及  $y$  的函数. 然而用极坐标  $r, \theta$  来表示点的位置, 有时显得更为方便, 于是就有换成新变量的必要. 这种变换可由各种不同的方法实现.

**直接法** 把  $r, \theta$  当作自变量. 由变换公式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

出发, 依照公式 (10) 的模样, 就有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y},$$

由此,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad (25)$$

于是  $\cos \theta, -\frac{\sin \theta}{r}, \sin \theta, \frac{\cos \theta}{r}$  在这里就作为系数  $A, B, C, D$ . 以后, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial r}. \end{aligned}$$

同样求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}$$

等等.

**反逆法** 把  $x, y$  当作自变量. 为了要利用公式 (11), 需要知道导数  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ . 只要把联系新旧变量的方程预先解出新变元, 就可以求出它们. 但也可以不必解方程而应用隐函数的微分法求出它们. 若对  $x$  及  $y$  而微分变换公式, 把  $r$  及  $\theta$  当作  $x$  及  $y$  的函数, 就得

$$1 = \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad 0 = \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

及

$$0 = \cos \theta \frac{\partial r}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad 1 = \sin \theta \frac{\partial r}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$



由此得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r},$$

于是, 按照公式 (11), 我们又重新回到表达式 (25), 等等.

微分的求法 如同刚才那样设  $x, y$  是自变量.

求变换公式的全微分

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta;$$

由此

$$dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy, \quad d\theta = \frac{-\sin \theta dx + \cos \theta dy}{r},$$

于是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dx + \left( \sin \theta \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dy,$$

又重新得出表达式 (25).

对  $dr$  及  $d\theta$  的公式再微分, 给出:

$$\begin{aligned} d^2 r &= -\sin \theta d\theta dx + \cos \theta d\theta dy \\ &= \frac{\sin^2 \theta dx^2 - 2 \sin \theta \cos \theta dx dy + \cos^2 \theta dy^2}{r}, \\ d^2 \theta &= \frac{-r(\cos \theta dx + \sin \theta dy) d\theta - (\cos \theta dy - \sin \theta dx) dr}{r^2} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta dx^2 - 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) dx dy - 2 \sin \theta \cos \theta dy^2}{r^2}. \end{aligned}$$

于是对于  $d^2 z$  就有

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} dr d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial z}{\partial r} d^2 r + \frac{\partial z}{\partial \theta} d^2 \theta \\ &= \left( \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dx^2 \\ &\quad + 2(\cdots) dx dy + (\cdots) dy^2, \end{aligned}$$

由此对于二阶导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots$ , 可以得出与前面同样的表达式.

例如, 考察这一表达式

$$W_1 = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

借助于已求出的公式, 它们变换成:

$$W_1 = \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}.$$

2) 换成球面坐标 在空间类似于平面上的极坐标的, 就是所谓球面坐标  $\rho, \varphi, \theta$ , 它们与直角坐标  $x, y, z$  之间的关系是

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$



设有表达式

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

其中  $u$  是一个空间的点函数. 试将旧变元  $x, y, z$  换成新变元  $\rho, \varphi, \theta$ .

若变换分两步进行, 首先令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  (保留  $z$  不变), 再令  $z = \rho \cos \varphi, r = \rho \sin \varphi$  (保留  $\theta$  不变), 就可以利用例题 1) 的结果.

例如, 对于第二式就有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \\ W_2 &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

再根据例题 1), 把括号内的式子改写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho};$$

最后

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

把这些式子代入前式中, 最后求得

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

同样,

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

3) 求证, 表达式  $W_1$  及  $W_2$  在直角坐标换成直角坐标的任何变换:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

之下保持着原有的形式, 式中的系数  $a, b, c$  满足已知关系式

$$a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时.} \end{cases} \quad (26)$$

微分的求法 把  $x, y, z$  当作自变量, 就有

$$\begin{aligned} dx' &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz, & d^2 x' &= 0, \\ dy' &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz, & d^2 y' &= 0, \\ dz' &= a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz, & d^2 z' &= 0. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x'} (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz) + \frac{\partial u}{\partial y'} (a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial z'} (a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz), \end{aligned}$$



由此

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= a_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y'} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z'}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= b_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y'} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z'}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= c_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y'} + c_3 \frac{\partial u}{\partial z'};\end{aligned}$$

各自平方再相加, 根据 (26), 就得

$$W_1 = \left( \frac{\partial u}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y'} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z'} \right)^2.$$

以后,

$$\begin{aligned}d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)(a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz) + \cdots\end{aligned}$$

$W_2$  就是  $dx^2, dy^2, dz^2$  之前的系数的总和, 借助于 (26), 不难证明

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

#### 4) 方程

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + yz \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + zx \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + xy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

按照公式  $x = uv, y = vt, z = tu$  换成关于新变元  $t, u, v$  的方程.

直接法 把  $t, u, v$  看作自变量, 就有

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} u, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial z} t, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} t.$$

由此

$$\begin{aligned}x \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{2} v \frac{\partial w}{\partial v}, \\ y \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} u \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{2} v \frac{\partial w}{\partial v}, \\ z \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{2} v \frac{\partial w}{\partial v}.\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial w}{\partial x} - w \right) \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{2} v \frac{\partial w}{\partial v} - w \right) \\ &= \frac{1}{4} t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{4} u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{1}{4} v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{1}{2} uv \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \\ &\quad - \frac{1}{2} vt \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial t} - \frac{1}{2} tu \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial u} + \frac{3}{4} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{4} u \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{4} v \frac{\partial w}{\partial v},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 yz \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= z \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} u \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{2} v \frac{\partial w}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{1}{4} t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{4} u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{1}{4} v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{1}{2} uv \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \\
 &\quad + \frac{1}{4} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{4} u \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{4} v \frac{\partial w}{\partial v},
 \end{aligned}$$

等等. 把一切同类的表达式相加 (弃去数字乘数), 则得变换后的方程如下:

$$t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

到现在为止只变换自变量; 再举几个问题, 其中函数也要变换.

5) 变换方程  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ , 设

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1+tu}, \quad z = \frac{t}{1+tv}.$$

**直接法** 自变量为  $t, u$ . 把变换公式的第三式对  $t$  及对  $u$  施行微分, 这时把  $z$  及  $v$  看成  $t, u$  的函数 (前者借  $x, y$  为媒介), 就得:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{1}{(1+tu)^2} = \frac{1-t^2 \frac{\partial z}{\partial t}}{(1+tv)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{-t^2}{(1+tu)^2} = -\frac{t^2}{(1+tv)^2} \frac{\partial v}{\partial u}.$$

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+tv)^2} \left( 1 - t^2 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2} \frac{\partial v}{\partial u}.$$

变换后的方程经化简就成为

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

试用他法解同一问题.

**反逆法** 由变换公式解出新变元

$$t = x, \quad u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$$

而把  $x, y$  看作自变量. 对  $x$  及对  $y$  微分第三式 ( $v$  借  $t, u$  的媒介而成为  $x$  及  $y$  的函数) 求得

$$-\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial u} \frac{1}{y^2}$$

或

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial v}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial v}{\partial u} \text{ 等等.}$$

6) 表达式

$$W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

换成关于变元  $t = x + y, u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x}$  的式子.

**微分的求法** 自变量是  $x, y$ . 把变换公式施行微分, 得

$$dt = dx + dy, \quad du = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy, \quad dv = -\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz.$$



通过  $t, u$  为媒介若把  $v$  看成  $x, y$  的函数, 则微分  $dv$  可以写成

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial u} du = \frac{\partial v}{\partial t} (dx + dy) + \frac{\partial v}{\partial u} \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right).$$

把  $dv$  的两个表达式互相对照, 求得

$$dz = \frac{z}{x} dx + x \frac{\partial v}{\partial t} (dx + dy) + \frac{\partial v}{\partial u} \left( -\frac{y}{x} dx + dy \right).$$

求新变元的二阶微分

$$\begin{aligned} d^2 t &= 0, \quad d^2 u = \frac{2y}{x^3} dx^2 - \frac{2}{x^2} dx dy, \\ d^2 v &= -\frac{2}{x^2} dx dz + \frac{2z}{x^3} dx^2 + \frac{1}{x} d^2 z. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} d^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v}{\partial t} d^2 t + \frac{\partial v}{\partial u} d^2 u \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (dx + dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} (dx + dy) \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial u} \left( \frac{2y}{x^3} dx^2 - \frac{2}{x^2} dx dy \right). \end{aligned}$$

使  $d^2 v$  的两个表达式相等, 把  $dz$  换成前已求得的它的表达式, 就可以得到确定  $d^2 z$  的表达式:

$$\begin{aligned} d^3 z &= 2 \frac{dx}{x} \left[ \frac{z}{x} dx + x \frac{\partial v}{\partial t} (dx + dy) + \frac{\partial v}{\partial u} \left( -\frac{y}{x} dx + dy \right) \right] - \frac{2z}{x^2} dx^2 \\ &\quad + x \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (dx + dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} (dx + dy) \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial u} \left( \frac{2y}{x^3} dx^2 - \frac{2}{x^2} dx dy \right) \right]. \end{aligned}$$

由此可以确定导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , 它们就是  $dx^2, 2dx dy, dy^2$  之前的系数. 但我们所需要的结果还可以用更简单的方法求得, 只要注意到, 若取  $dx = 1, dy = -1, d^2 z$  就变成  $W$ . 用此法可求得:

$$W = \frac{(x+y)^2}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{(1+u)^3}{t} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}.$$

7) 勒让德变换 仿照 218 5), 我们在此处引入勒让德变换, 作为一个更一般的变换的例子, 这时联系新旧变元的变换公式内已经含有导数. 令

$$t = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z.$$

把  $z$  理解为  $x$  及  $y$  的某一个确定的函数:  $z = f(x, y)$ , 并假定对于它有

$$J = \frac{D(t, u)}{D(x, y)} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \neq 0. \quad (27)$$



对  $x$  及对  $y$  微分变换公式的第三式 (这时通过  $t, u$  为媒介把  $v$  看成  $x, y$  的函数), 就得

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\end{aligned}$$

由此得

$$x = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad y = \frac{\partial v}{\partial u}, \quad \text{于是又有} \quad z = t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial u} - v, \quad (28)$$

即变换有互易的特征.

先对  $x$  再对  $y$  微分公式 (28) 中的前二式, 得出方程

$$1 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

及

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad 1 = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

因为 [203 4)]

$$I = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} \right)^2 = \frac{D(x, y)}{D(t, u)} = \frac{1}{J} \neq 0,$$

故由这些方程, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{I}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{I}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{I}.$$

若把  $(x, y, z)$  及  $(t, u, v)$  解释为空间某两点的坐标, 则勒让德变换可以看成空间的变换 (但并非点变换). 这时表征  $z$  与  $x, y$  之间的函数关系的曲面变换而成确定  $v$  与  $t, u$  之间的函数关系的曲面. 因为  $t, u, v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}$  仅与  $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  有关, 故勒让德变换保持相切关系<sup>①</sup>.

8) 很易推广勒让德变换至任意维空间的情形. 设  $z$  是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数. 令

$$t_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad v = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - z;$$

在这里  $v$  是新变元  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的新函数.

这里也假定行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

异于零.

<sup>①</sup>第 218 目 5) 的脚注亦可移用于此.



把确定  $v$  的公式对  $x_k$  微分 (在这时通过  $t_1, \dots, t_n$  为媒介把  $v$  看成  $x_1, \dots, x_n$  的函数):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial t_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

由于  $J \neq 0$ , 由此推得

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

这样, 仍有

$$z = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v,$$

于是在一般情形, 变换也有互易的特征.

9) 最后, 再考察一个具有某种特性的变换的例子. 设

$$\varphi(u_1, \dots, u_n; x_1, \dots, x_n)$$

是  $2n$  个变元的函数, 且是关于变元  $x_1, \dots, x_n$  的二次齐次函数. 假定行列式

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

异于零, 再设

$$t_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

并引入  $t_1, \dots, t_n$  作为新自变量以代替  $x_1, \dots, x_n$ . 则函数  $\varphi$  变成函数

$$\psi(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n).$$

今要证明

$$(a) \frac{\partial \psi}{\partial t_i} = x_i, \quad (b) \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

通过  $t_1, \dots, t_n$  为媒介把  $\psi$  看成  $x_1, \dots, x_n$  的函数, 再对  $x_k$  微分  $\varphi = \psi$ , 得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

另一方面, 导数  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  是关于变元  $x_1, \dots, x_n$  的一次齐次函数. 故按照欧拉公式 [188]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} x_i \quad (k = 1, \dots, n).$$

对照已得出的  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  的两个展开式, 由于  $H \neq 0$ , 可知关系式 (a) 是正确的.



再对  $u_i$  微分  $\varphi = \psi$ , 就得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial t_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial u_i}.$$

但  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$  显然是关于  $x_1, \dots, x_n$  的二次齐次函数. 仍应用欧拉公式, 上式右边最后的总和给出

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) x_k = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

由此即推得关系式 (5).



## 第七章 微分学在几何上的应用

---

### §1. 曲线及曲面的解析表示法

**223. 平面曲线 (直角坐标系)** 在本章内我们讲已研究过的微分学的概念、事实和方法在几何上的某些应用. (其中一小部分我们在 91, 141, 143, 145, 148, 180 中已经讨论过了.)

我们认为, 使读者预先回忆一下曲线及曲面的各种解析表示法是有好处的; 而这就是 §1 内所要讲的. 预先约定, 凡在这章内所讲到的函数, 总是假定为连续且有关于其各变元的连续导数; 在必要时, 我们还要求以后各阶导数也存在而且连续.

先从平面曲线开始, 并且以某一直角坐标系统  $Oxy$  为基础.

前面我们曾不止一次地考察过形如

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad x = g(y) \tag{1}$$

的方程, 并研究过与之对应的曲线 [47, 91, 146 及其后各段]. 这种把曲线上的点的流动坐标之一表示为另一坐标的 (单值) 显函数, 如此给定曲线的方法, 就称为曲线的 **显式法** (或显式). 它具有简单明了的特性; 即将看到, 其他任何种表示法——在某种意义上讲——常可以变成这一种.

我们还需说及与隐函数理论有关的曲线的 **隐式法**, 即曲线的表示式为既未解出  $x$  也未解出  $y$  的方程

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

[205 及其后]. 这种方程称为曲线的 **隐式方程**.



由隐函数的存在定理 [205, 206] 推得, 若在曲线的点  $(x_0, y_0)$  满足条件

$$F'_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{或} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

则至少在这点的某一邻域内, 曲线能用显式方程 (1) 中的一种来表示 (而且其中的函数  $f$  或  $g$  连同其导数均为连续).

这样, 只有那种同时满足二条件

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

的曲线上的点  $(x_0, y_0)$  可以有下述奇异性: 在它的邻域内曲线不能用显式方程 (1) 中的任何一种来表示. 曲线上满足方程 (3) 的点就称为奇点.

下面 [236] 我们将研究曲线 (2) 在奇点邻近的性态. 但是通常奇点总是不加考察的, 我们只在该曲线的普通 (即非奇异的) 点的邻域内研究它.

最后, 以往的叙述曾屡次提到, 形如

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (4)$$

的方程, 将点的流动坐标确定为某一参变量的函数, 它们也确定出平面曲线 [例如, 参阅 106]. 类似于此的方程称为参变量方程; 它们给出曲线的参变量表示式.

考察由参变量  $t = t_0$  的值所确定的点  $(x_0, y_0)$ , 并假定在  $t = t_0$  时,  $\varphi'(t_0) \neq 0$ . 那时, 在  $t_0$  的近处导数  $x'_t = \varphi'(t)$  —— 由于连续 —— 将保持同样的符号; 于是函数  $x = \varphi(t)$  逐为单调函数 [132]. 在这些条件之下, 根据 83 及 94, 可以把  $t$  看成  $x$  的单值函数:  $t = \theta(x)$ . 连续且有连续导数. 在  $y$  的表达式内用这函数代替  $t$ , 就建立了  $y$  与  $x$  的直接函数关系

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x),$$

式中的函数  $f$  仍是连同其导数均为连续的; 这样, 我们至少已能用显式方程来表示在所取点邻近的曲线段. 如果  $\varphi'(t_0) = 0$ , 而  $\psi'(t_0) \neq 0$ , 也可以做出类似的结论, 但这时得出的是另一形式的显式方程:  $x = g(y)$ .

只当

$$x'_t = \varphi'(t_0) = 0, \quad y'_t = \psi'(t_0) = 0 \quad (5)$$

同时成立时, 曲线在所考察点的邻域内才不能用显式方程来表示; 这样的点就称为奇点.

在 237 内我们将略论具有形式 (4) 的曲线在奇点近处的性态, 但是在这里我们通常只研究普通的点.

重要的是, 除了保留一切上面关于普通点  $(x_0, y_0)$  所讲过的话以外 [即对于它条件 (5) 不成立], 还需再假定, 这点只在参变量的一个值  $t = t_0$  时得到 (即通常所谓单点). 反之, 若点  $(x_0, y_0)$  是重点, 例如有参变量的两个不同的值  $t = t_0$  及  $t = t_1$  符



合于此点, 则一般说来当有两段曲线在这点相交: 其一段由接近于  $t_0$  的  $t$  值所确定, 另一段则由接近于  $t_1$  的  $t$  值所确定. 在这种情形, 在已给点的邻域内, 整个曲线仍然不能用显式方程来表示. 因此, 重点本质上应属于奇异点①.

综上所述, 我们并不企图给出曲线概念的几何特征: 对于我们, 曲线仅仅是满足解析关系式 (1)、(2) 或 (4) 的点的轨迹. 但假定所遇见的函数及其导数都为连续. 虽然, 由这些不同的方法所确定的几何形象就其整个说来, 可以彼此极为悬殊, 但在小处, 即在普通点 (在参变表示式的情形必须是单点) 的邻域内, 它们全都具有那种由方程 (1) 所给出的最简单的形状.

**224. 例题** 先浏览一些最常遇见的曲线 (虽然其中的大多数读者已在解析几何内熟习过了).

1) 悬链线(图 41) 它的方程是

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

这曲线表示一根两端悬挂着的、没有弹性的、有重量的柔软细线 (链、电线等) 在平衡状态时的形状.

曲线在顶点  $A$  附近的形状 (见图) 类似于抛物线, 但在离顶点较远处, 峻峭地趋于无穷远. 线段  $OA = a$  准确地确定它的形状 —  $a$  愈小, 曲线愈峻峭. 虽然曲线完全没有必要按照图 41 的位置来放置, 但这位置却使它有最简单形式的方程.

2) 对称于坐标轴的椭圆, 有方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

由于  $\frac{x}{a}$  及  $\frac{y}{b}$  的平方和应当等于 1, 它们自然可以各自当作某一角度  $t$  的余弦及正弦. 这就得出通常的椭圆的参变量表示式

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t;$$

当  $t$  由 0 变动至  $2\pi$  时, 椭圆就可由长轴的一端  $A(a, 0)$  依逆时针方向画出来.

自然还可以利用平方和等于 1 的其他任何表达式, 例如可设

$$x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = b \frac{2u}{1 + u^2},$$

式中的  $u$  由  $-\infty$  变动至  $+\infty$ . 因为在  $u \rightarrow \infty$  时有  $x \rightarrow -a, y \rightarrow 0$ , 故可以设想点  $A'(-a, 0)$  是当  $u = \infty$  时得出的.

同样在双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

①可是有一种情形, 能得出二次的点仍不算作重点: 就是, 对应于参变量的两端的数值, 且曲线在此连续的点. 在圆

$$x = a \cdot \cos \theta, \quad y = a \cdot \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

的例子中, 由值  $\theta = 0$  和  $\theta = 2\pi$  所确定的点就是这种点.



的情形,使人想起双曲余弦及双曲正弦的已知关系式,故可以令

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

这曲线的另一表示式为

$$x = a \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad y = b \frac{2u}{1-u^2} \quad (-\infty < u < +\infty, u \neq \pm 1).$$

请读者在每种情形都去观察一下,当参变量变动时点沿曲线而移动的情形.

3) 半立方抛物线 (图 115)

$$y^2 - cx^3 = 0 \quad (c > 0).$$

在这里原点  $(0,0)$  成为奇异点. 若方程关于  $y$  而解出,就得到曲线的对称二支的显式方程

$$y = \pm \sqrt{cx^3} = \pm \sqrt{c} x^{\frac{3}{2}}.$$

因为对于每一支当  $x = 0$  时有  $y' = 0$ , 故在原点二支相切于  $x$  轴, 于是有尖点 [歧点, 参阅 236].

4) 星形线 (图 116)

$$\frac{2}{x^3} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0).$$

严格说来, 这方程与我们约定讨论的那种类型并不一样: 在  $(\pm a, 0)$  及  $(0, \pm a)$  中的任一点, 方程左方的偏导数必有一个变成  $\infty$ . 可是不难解除曲线方程的无理性而把它表示为

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2 x^2 y^2 = 0.$$

在这表示式下, 上面指出的各点恰好都成为奇异点.

由曲线方程很易明白, 曲线位于圆  $x^2 + y^2 = a^2$  之内, 且关于两轴为对称; 因此我们不妨只以讨论第一象限为限. 从方程解出  $y$ :

$$y = \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

且施行微分, 得

$$y' = - \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

我们看到, 在  $x = 0$  时切线是铅直的, 在  $x = a$  时切线是水平的. 由此推得, 四个奇异点都是尖点 (歧点).

要想得出星形线的参变量表示式, 只需 (根据曲线方程) 利用  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$  及  $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$  的平方和应当等于 1 的事实. 令它们等于  $\cos t$  及  $\sin t$ , 就得出参变量方程:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

因为导数

$$x'_t = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$$

在  $t = 0(2\pi), \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  时都等于 0, 故对应于参变量的这些数值的点都是奇异点 —— 这与上面说的相同.

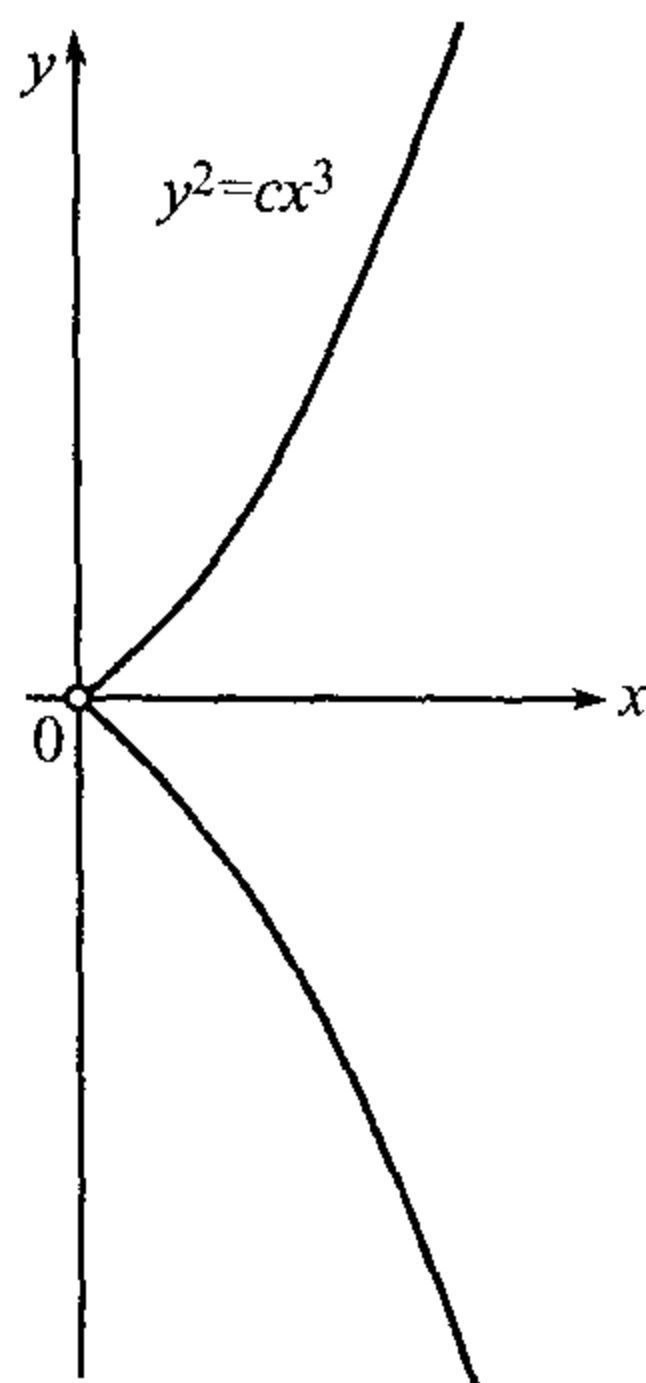


图 115



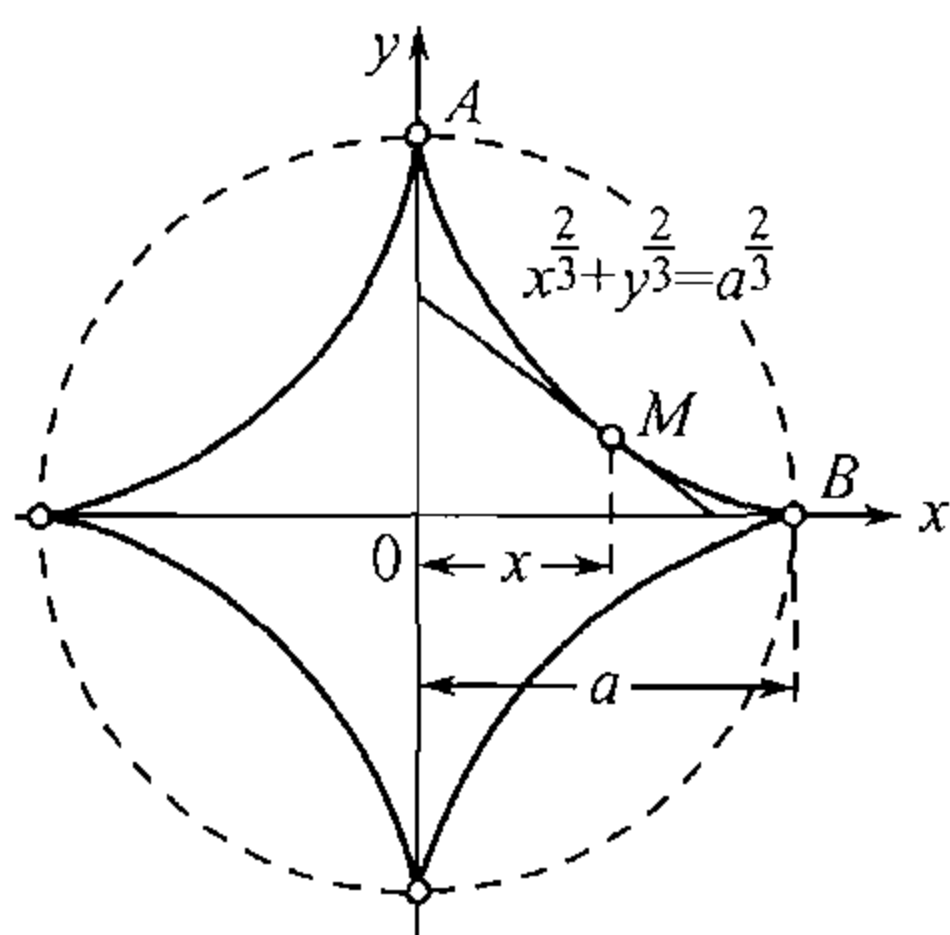


图 116

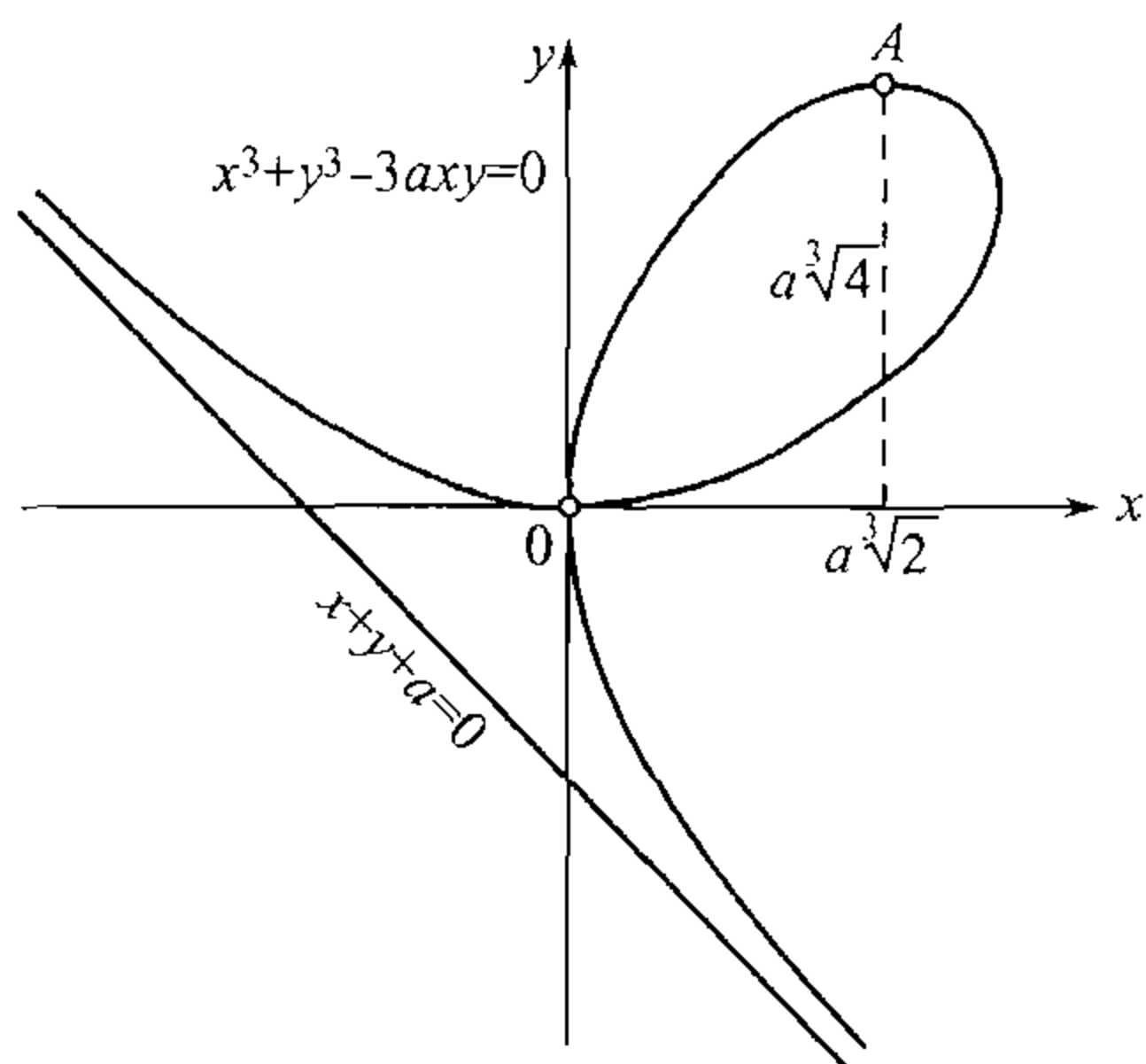


图 117

## 5) 笛卡儿叶形线(图 117)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0^{①} \quad (a > 0).$$

原点  $(0,0)$  是奇异点: 在这点曲线自己相交. 当  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时曲线有同一渐近线  $x + y + a = 0$ .

为了证实这事, 可以用  $x^3$  除方程的各项, 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3a \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} - 1.$$

由此, 首先可以肯定, 例如在  $|x| > 3a$  时,  $\left|\frac{y}{x}\right|$  为有界, 于是显见, 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时, 比式  $\frac{x}{y} \rightarrow -1$ . 另一方面, 方程又给出

$$y + x = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3a \cdot \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

于是当  $x \rightarrow \pm\infty$  时就有  $y + x \rightarrow -a$ . 由此证实了我们的命题 [148].

把比式  $t = \frac{y}{x}$  当作参变量, 把  $y = tx$  代入曲线方程, 就容易得出参变量表示式:

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \quad (-\infty < t < +\infty, t \neq -1).$$

当  $t \rightarrow \pm\infty$  时二坐标都趋于 0; 可以设想, 在  $t = 0$  及  $t = \pm\infty$  时都得到原点  $(0,0)$ . 当  $t$  由  $-\infty$  变至  $-1$  时, 点  $(x, y)$  由原点出发沿右支趋于无穷远. 当  $t$  由  $-1$  变至  $0$  时, 动点由无穷远沿左支回到原点. 最后, 当  $t$  由  $0$  增大至  $+\infty$  时, 动点 (依逆时针方向) 画出叶形线.

①参阅 210 的例题 2). 与  $x$  的函数  $y$  的极大值对应的点  $A(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$  在图上注明着.



**225. 机械性产生的曲线** 继续举例, 再考察一些机械性产生的曲线, 它们系由一曲线沿着另一曲线上滚动而得.

6) 旋轮线 想象一个中心在  $A$ 、半径为  $a$  的圆, 在直线  $Ox$  上自左向右并无滑动地滚动 (图 118). 这时圆周上任一点所画出的曲线就称为旋轮线. 我们将研究例如圆周上一点  $O$  在圆滚动一周时所经过的路线.

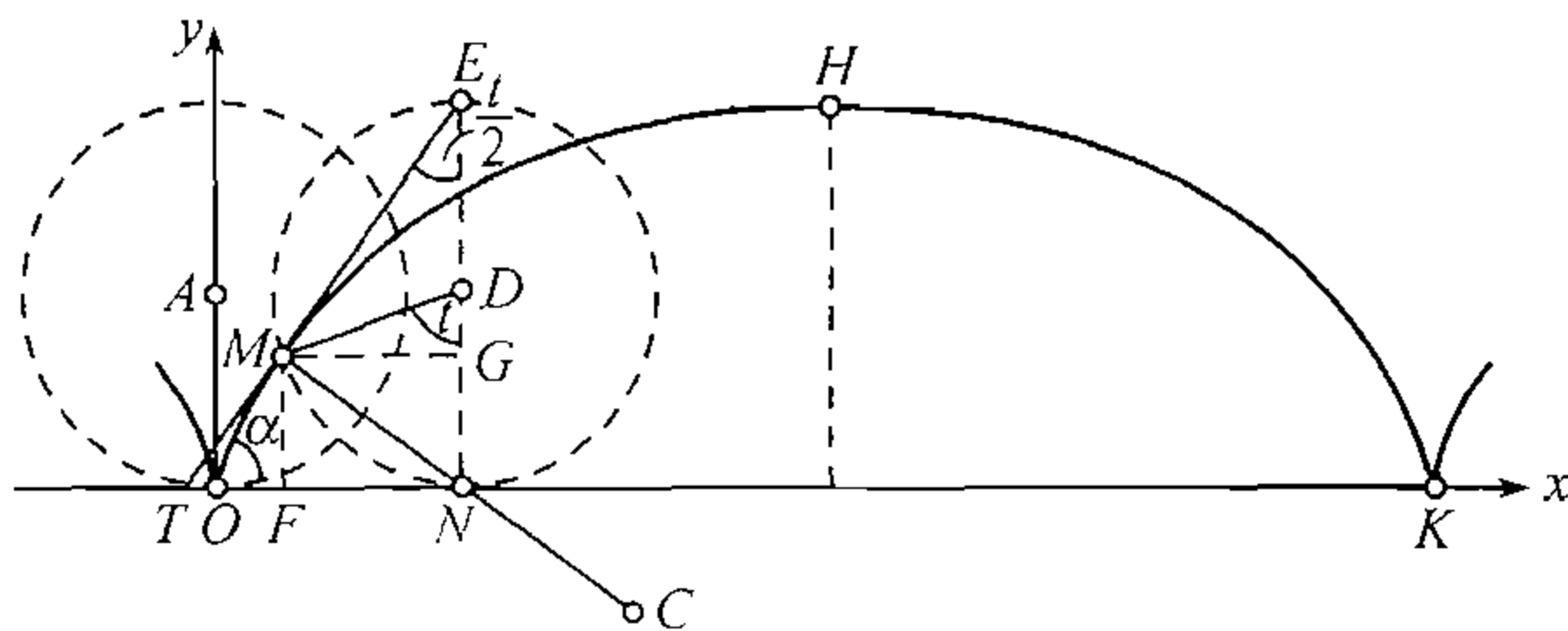


图 118

考察滚动着的圆的一个新位置. 这时, 切点已是另一点  $N$ ; 因此, 切点沿着直线移过一段距离  $ON$ . 同时, 当圆周滚过一段弧  $\widehat{NM}$  以后,  $O$  点已移到新位置  $M$ . 因为滚动时无滑动, 故这两段路程必相等:

$$\widehat{NM} = ON.$$

现在若选取角  $t = \angle NDM$  作为确定动点位置的参变量, 它是滚动开始时取铅直位置  $AO$  的半径所转过的角度, 则点  $M$  的坐标  $x$  及  $y$  可用下列方式表示:

$$\begin{aligned} x &= OF = ON - FN = \widehat{NM} - MG = at - a \sin t, \\ y &= FM = NG = ND - GD = a - a \cos t. \end{aligned}$$

因此, 旋轮线的参变量方程是

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

当  $t$  由  $-\infty$  变动至  $+\infty$  时所得的曲线, 由无数支如图 118 画着的那种曲线所组成.

因为导数

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t$$

在  $t = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时同时变为 0, 故与这些数值对应的点就是曲线的奇异点. 但 [106(10)]

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

因此, 例如在  $t \rightarrow \pm 0$  时 (或在  $x \rightarrow \pm 0$  时) 导数  $y'_x$  将趋于  $\pm\infty$ ; 显见, 在原点 (在其他奇异点亦同) 切线是铅直的: 故在这里有尖点 [歧点, 237].

7) 圆外及圆内旋轮线 若一圆沿着另一圆的外缘无滑动地滚动着, 则动圆的圆周上任一点所画成的曲线称为圆外旋轮线. 当它沿着圆周内缘滚动时, 就得到圆内旋轮线. 现在将导出前一曲线的方程.



取定圆的中心  $O$  作原点, 取  $Ox$  轴使它经过点  $A$ , 点  $A$  便是动点在它成为两圆的公切点时的位置 (图 119). 当动圆移至如图中所指出的新位置时, 点  $A$  移至  $M$ . 点  $M$  的轨迹就是我们需要确定的.

用  $a$  表示定圆的半径, 用  $ma$  表示动圆的半径. 设动圆中心为  $C$ , 其引到  $M$  点的半径  $CM$  与引到切点的半径  $CB$  之间的夹角为  $t = \angle MCB$ , 现在就取  $t$  作为参变量. 在运动开始时, 设  $t$  等于零.

首先考察在这里应如何表示无滑动这一事实, 这就是: 切点在定圆上所移过的弧  $\widehat{AB}$  应该等于它在动圆上所移过的弧  $\widehat{MB}$ :

$$a \cdot \angle AOB = ma \cdot \angle MCB = mat,$$

由此

$$\angle AOB = mt.$$

现在要用  $t$  表示点  $M$  的坐标  $x$  及  $y$ . 就有

$$x = OG = OE + FM = (a + ma) \cos mt + m \sin \angle FCM;$$

但

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE \quad \text{且} \quad \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt,$$

因此

$$\angle FCM = (1 + m)t - \frac{\pi}{2} \quad \text{而} \quad \sin \angle FCM = -\cos(1 + m)t.$$

结果得到

$$x = a[(1 + m) \cos mt - m \cos(1 + m)t].$$

用类似的方法可以求得

$$y = a[(1 + m) \sin mt - m \sin(1 + m)t].$$

这两个方程给出圆外旋轮线的参变量表示式.

当运动开始时动圆上与定圆相接触之点再度与定圆接触时 (即在  $t = 2\pi$  时), 点  $M$  已画完曲线的一支. 在继续滚动时, 它又画出与这支类似的一支, 等等.

导数

$$\begin{aligned} x'_t &= -m(m + 1)a[\sin mt - \sin(1 + m)t], \\ y'_t &= m(m + 1)a[\cos mt - \cos(1 + m)t]. \end{aligned}$$

在  $t = 2k\pi$  (式中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时, 即每当动圆上被考察的点重新成为切点时, 同时等于 0. 与此对应的曲线上的点就是奇异点 (歧点).

在圆内旋轮线的情形, 用类似的方法可求得参变量方程为:

$$\begin{aligned} x &= a[(1 - m) \cos mt + m \cos(1 - m)t], \\ y &= a[-(1 - m) \sin mt + m \sin(1 - m)t]. \end{aligned}$$

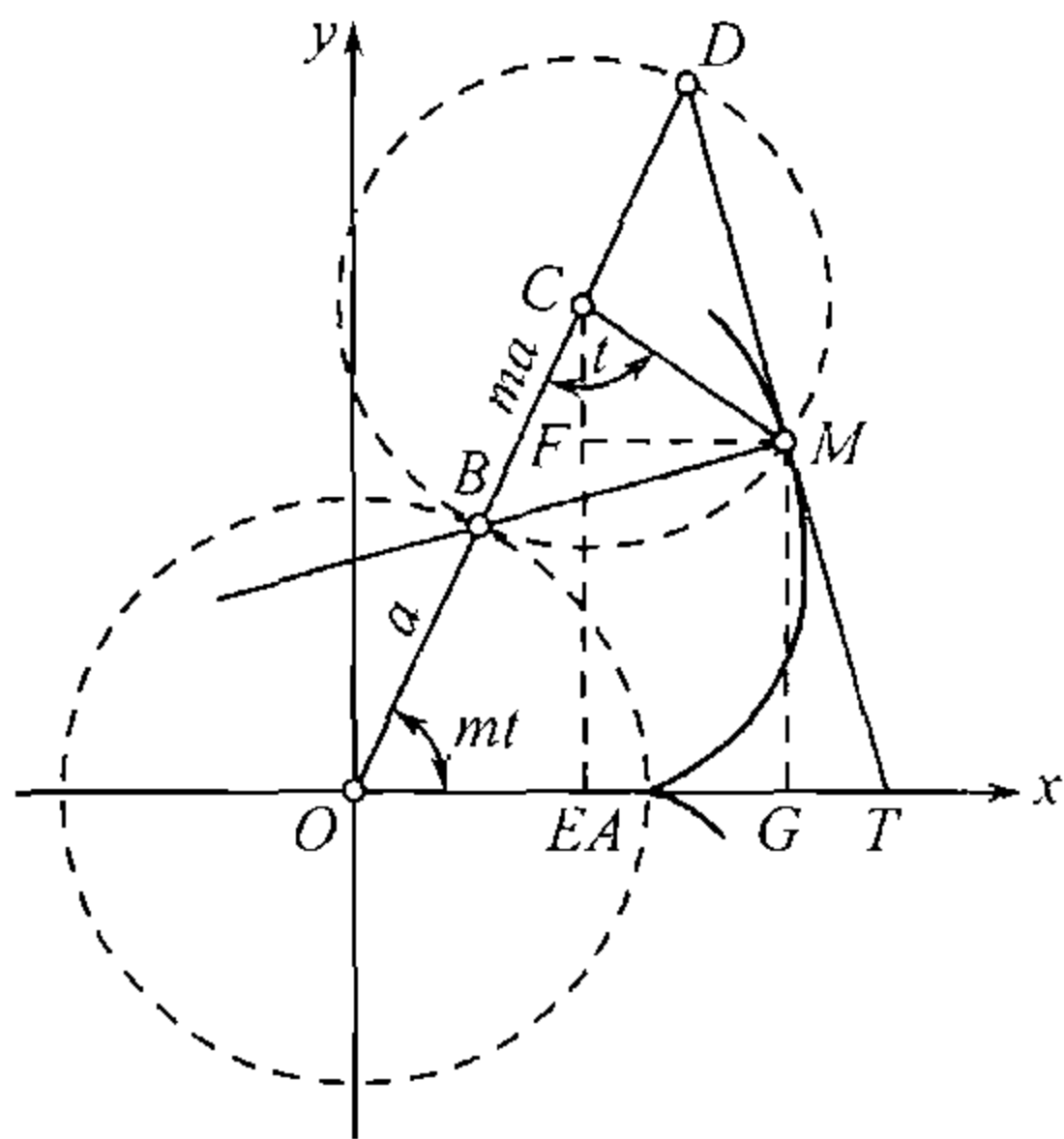


图 119



这里的  $m$  同样表示动圆半径对定圆半径的比值. 容易注意到, 这些方程可以从圆外旋轮线方程内把  $m$  换成  $-m$  而得出.

在图 120 上画着对应于  $m = 1, 2, \frac{1}{3}$  的圆外旋轮线, 及对应于  $m = \frac{1}{3}$  及  $\frac{1}{4}$  的圆内旋轮线. 最后一图就是读者所已经知道的星形线<sup>①</sup>.

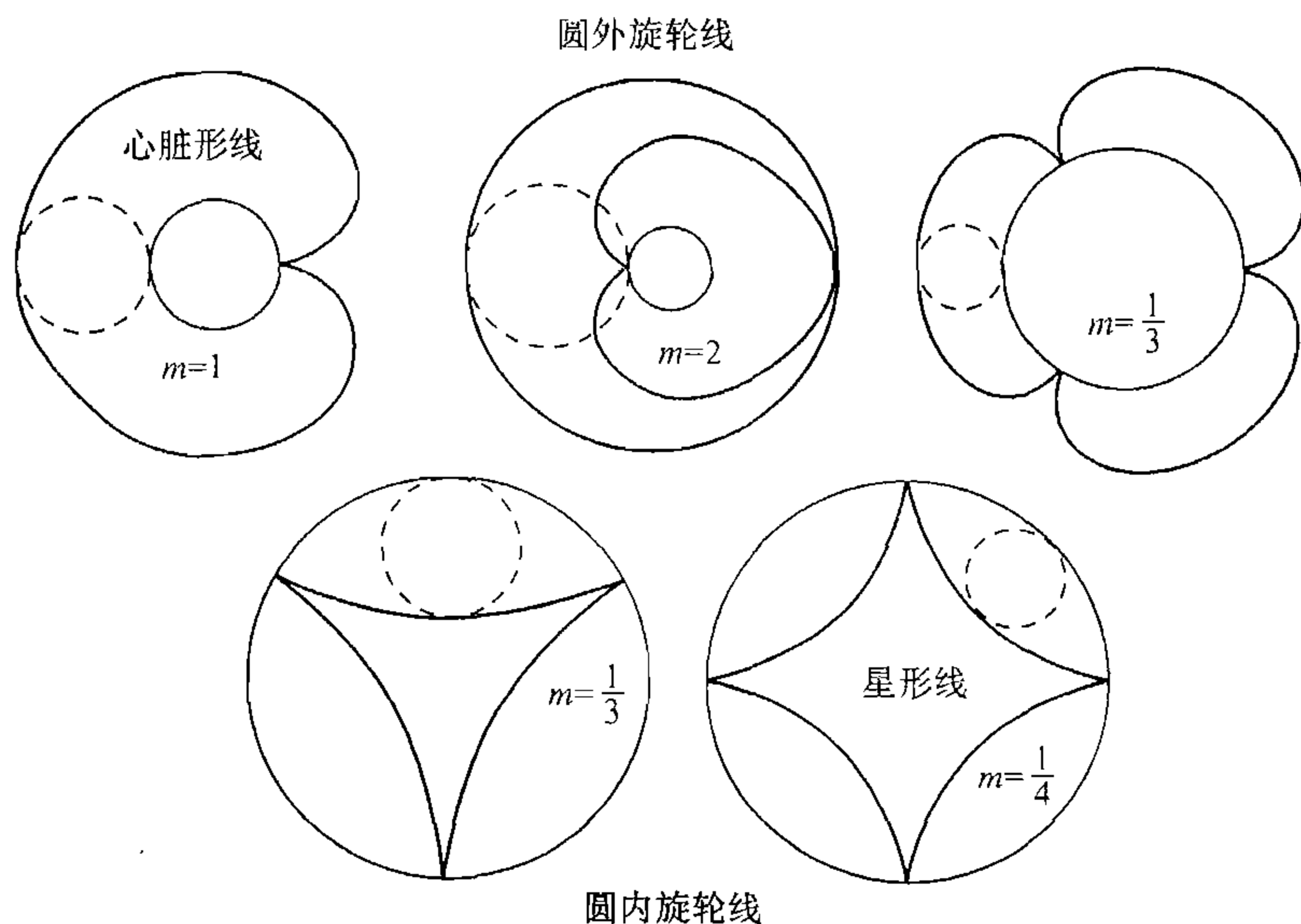


图 120

8) 圆的渐伸线 想象在中心为  $O$ 、半径为  $a$  的圆周上依顺时针方向缠绕以细线; 细线的末端在  $A$  点. 现在要把这细线 (逆时针方向) 从圆周上揭起, 但始终拉住它的末端使它伸直. 这细线末端画出的曲线称为圆的渐伸线[比较下面的 254, 256].

取中心  $O$  为原点 (图 121), 设  $x$  轴经过点  $A$ . 当细线的一段  $AB$  被揭起时, 它伸展到  $BM$  的位置,  $BM$  恰是圆的切线, 而点  $A$  移至  $M$ . 因此,  $\widehat{AB} = BM$ . 取半径  $OA$  及  $OB$  之间的交角  $t = \angle AOB$  作为参变量. 点  $M$  的坐标  $x, y$  可用下列方法表示:

$$\begin{aligned} x &= DC - DO = BF - DO \\ &= BM \sin \angle BMC - OB \cos \angle DOB; \end{aligned}$$

但  $BM = \widehat{AB} = at$ , 而角  $\angle BMC$  及  $\angle DOB$  等于  $\pi - t$ , 于是

$$x = at \sin(\pi - t) - a \cos(\pi - t) = a(t \sin t + \cos t).$$

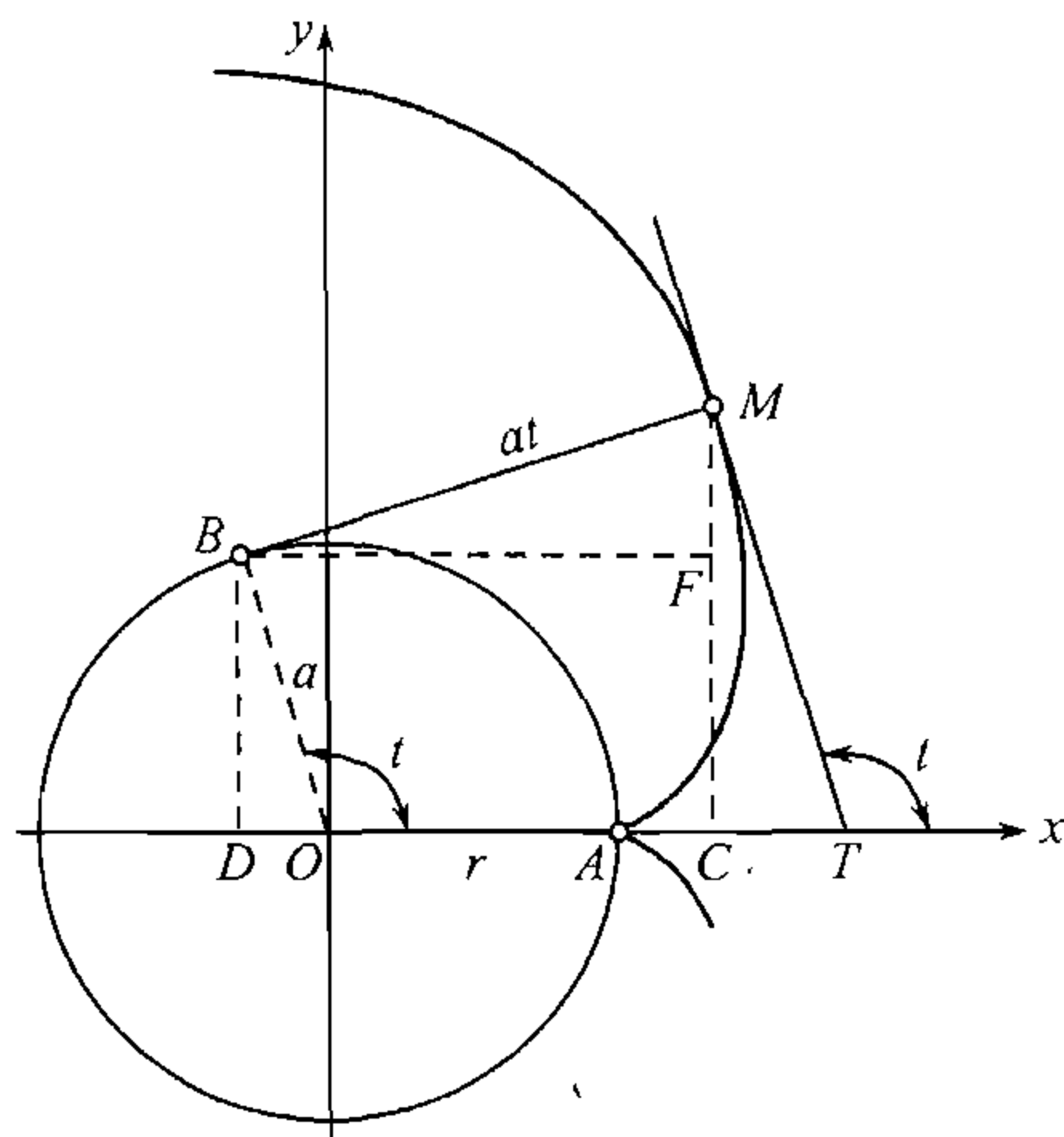


图 121

<sup>①</sup>若在圆内旋轮线的方程内令  $m = \frac{1}{4}$  并把  $t$  换成  $-4t$ , 则得到例 4) 所提出的方程.



其次,

$$\begin{aligned} y &= CM = CF + FM = DB + FM \\ &= OB \sin \angle DOB + BM \cos \angle BMC \\ &= a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

这样, 我们的曲线可用下面的参变量方程表示:

$$\begin{aligned} x &= a(t \sin t + \cos t), \\ y &= a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

唯一的奇异点对应于  $t = 0$  的值, 这时两导数

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t$$

同时变为零.

读者易见, 若把一直线沿一圆周滚动 (无滑动), 考察直线上任一点的轨迹, 则也得出同样的曲线.

**226. 平面曲线 (极坐标系)· 例题** 在许多场合, 用建立曲线上点的流动极坐标  $r, \theta$  之间的函数关系的极坐标方程来表示曲线, 显得更为简单. 极角  $\theta$  从极轴算起, 逆时针方向者为正. 极坐标的向径  $r$  有时取正的, 有时取负的; 当它合于角  $\theta$  所确定的方向时为正, 反之为负.

如同直角坐标的情形一样,  $r$  与  $\theta$  之间的函数关系也可以表示为显式、隐式或参变量式. 我们以讨论最简单的情形为限, 即当曲线可用显式方程  $r = f(\theta)$  来表示的情形.

若换成直角坐标, 通常取极点作原点, 极轴作  $x$  轴, 则方程

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{aligned}$$

给出曲线的参变量表示式, 以极角  $\theta$  为参变量 (在这里得出的  $\theta$  的函数  $f$  是连续的且有连续导数).

公式

$$\begin{aligned} x'_\theta &= r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta, \\ y'_\theta &= r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta \end{aligned}$$

指出, 奇异点 (在 223 的意义下) 只有在  $r = r'_\theta = 0$  的场合才能遇到.

转而考察一些例题.

1) 阿基米德螺线:  $r = a\theta$  (图 122).

这曲线可以看作这种点的轨迹, 点在从极点射出的射线上作等速运动, 同时这射线又绕极点作等速转动.



为了作出曲线上一系列的点  $A, B, C, D, \dots$ , 我们先在铅直线上截取  $OA = a \cdot \frac{\pi}{2}$ , 再取  $OB = 2OA, OC = 3OA, OD = 4OA$  等等, 因为与它们对应的角度是  $2 \cdot \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}, 4 \cdot \frac{\pi}{2}$  等等. 使角  $\theta$  由  $O$  变动至  $\infty$ , 则得这曲线的无数个螺形卷  $OABCD, DEFGH, \dots$ ; 相邻二个螺形卷之间沿射线的距离都等于  $2\pi a$ .

角  $\theta$  也可取负值递增, 由  $0$  至  $-\infty$ . 那时就得到这曲线的第二种  $OAB'CD' \dots$  (用虚线画出); 它与第一种是对称的.

注意, 方程  $r = a\theta + b$  也表示阿基米德螺线: 若使极轴旋转一角度  $\alpha = -\frac{b}{a}$ , 则这方程就变成  $r = a\theta$ .

2) 双曲螺线:  $r = \frac{a}{\theta}$  (图 123).

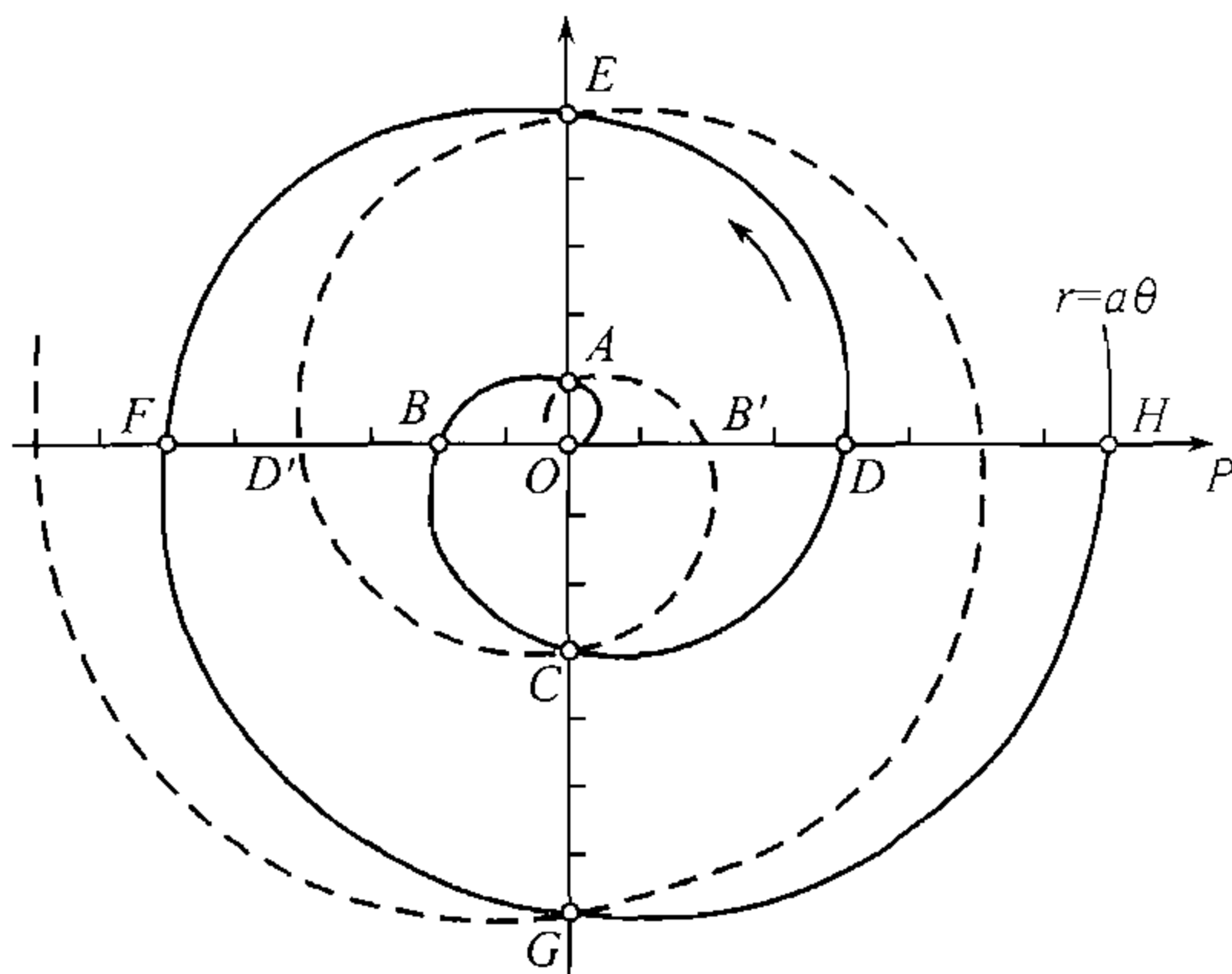


图 122

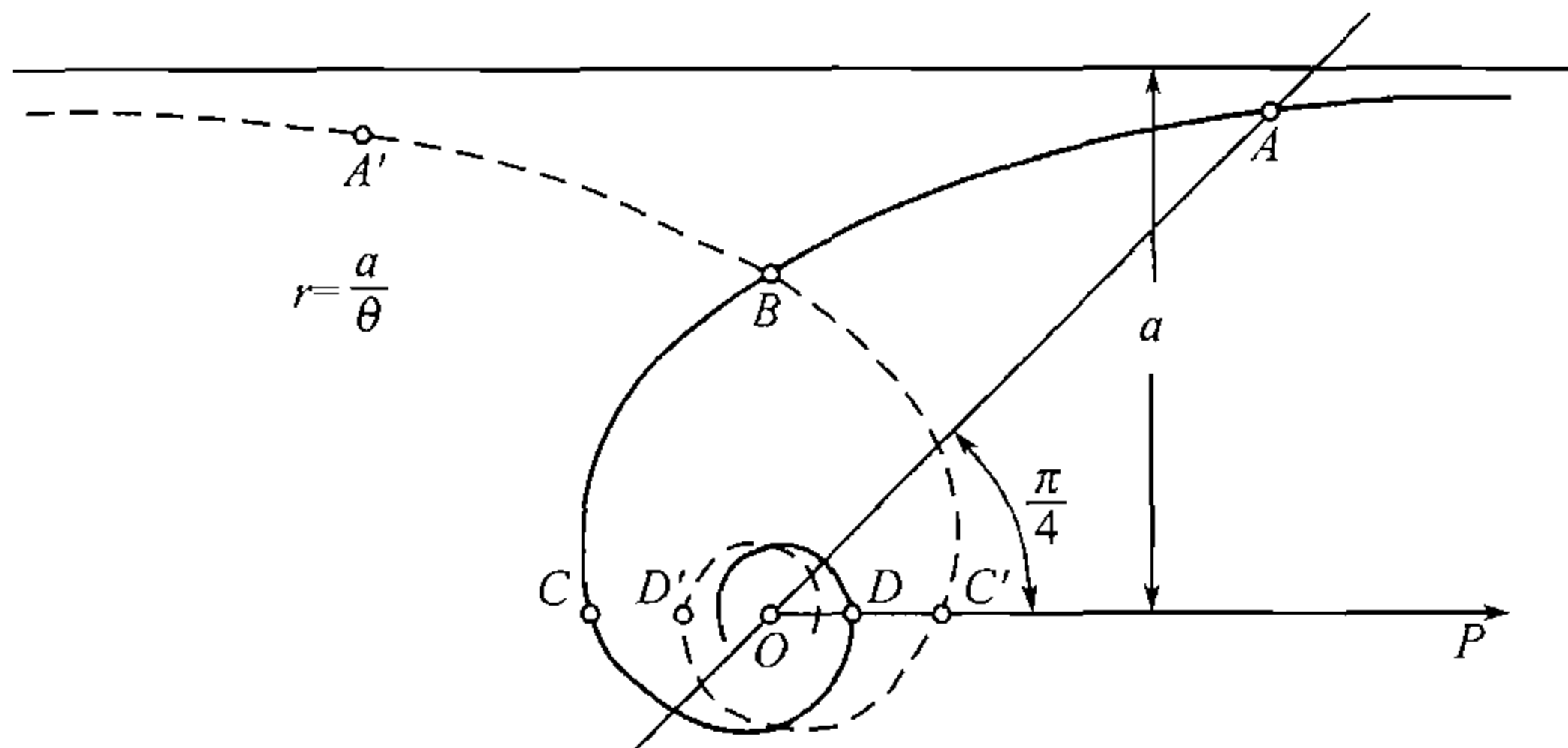


图 123

当极角  $\theta$  增大至无穷时, 向径趋于零, 而曲线上的点趋于与极点相重合 (但它终不能达到); 在这些条件之下, 极点称为曲线的渐近点. 曲线绕极点作无穷多次的旋转.

若在射线  $\theta = \frac{\pi}{4}$  上截取线段  $OA = \frac{4a}{\pi}$ , 再取  $OB = \frac{1}{2}OA, OC = \frac{1}{2}OB, OD = \frac{1}{2}OC, \dots$ , 则点  $A, B, C, D, \dots$  显然都位于曲线上.

角  $\theta$  也可以取负值. 当  $\theta$  由  $0$  变动至  $-\infty$  时, 如同阿基米德螺线的情形一样, 得出曲线的第二种  $A'BC'D' \dots$ , 它与第一种对称, 在这里也用虚线画出.

为了更为正确地明了曲线在无穷远处的形

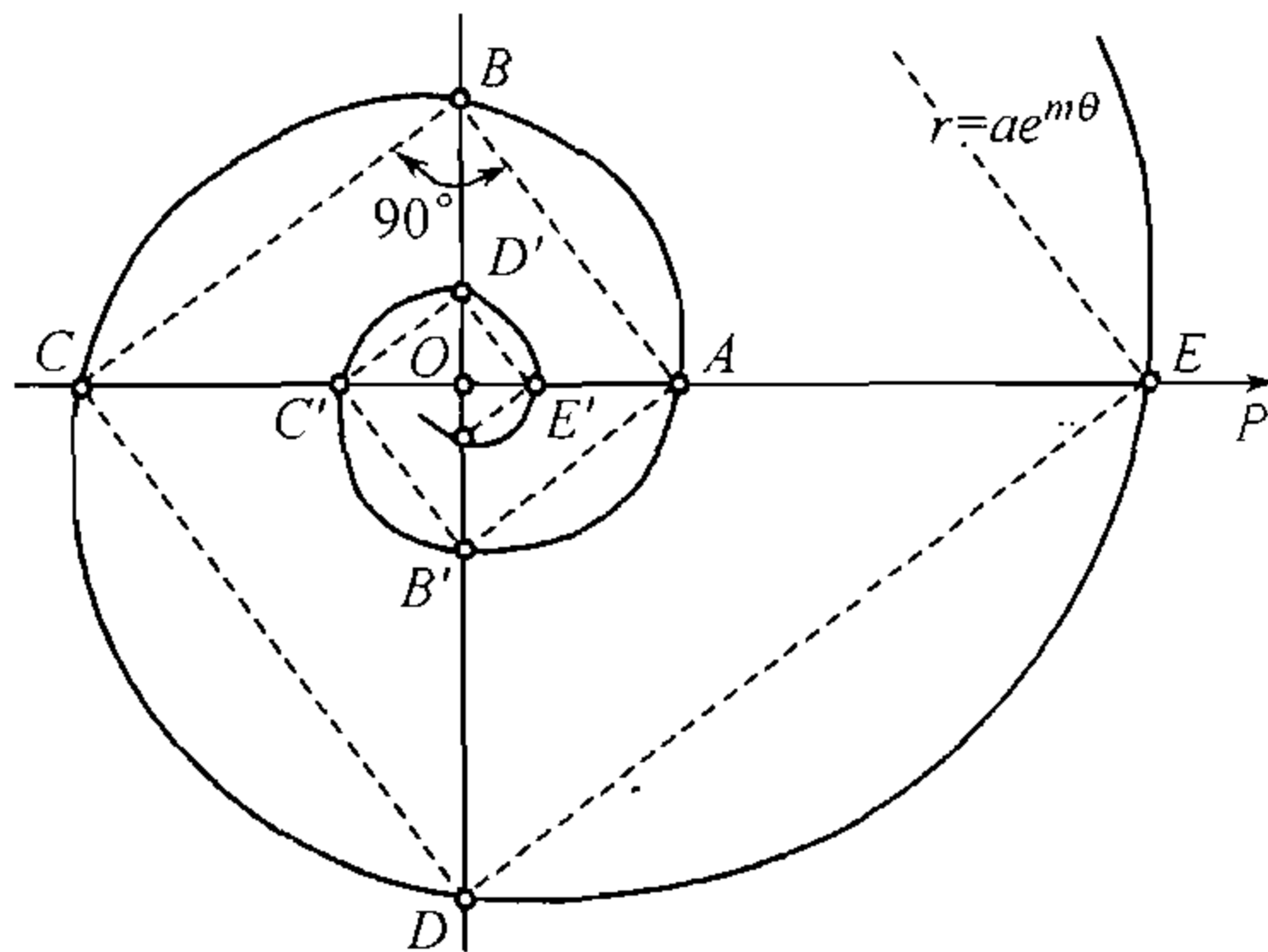


图 124



状, 试考察曲线上的点至极轴的垂直距离  $y = r \sin \theta = a \frac{\sin \theta}{\theta}$ . 当  $r \rightarrow \pm\infty$  时, 或与此相同, 当  $\theta \rightarrow \pm 0$  时有  $\lim y = a$ . 这样, 平行于极轴而与它的距离为  $a$  的直线就成为曲线的渐近线.

3) 对数螺线:  $r = ae^{m\theta}$  (图 124).

若角  $\theta$  依等差数列而增大 (或减小), 则  $r$  依等比数列而增大 (或减小). 在极轴上截取线段  $OA = a$ , 而在其垂直线上截取线段  $OB = ae^{m\frac{\pi}{2}}$ ; 点  $A, B$  都在本题的曲线上. 现在若作出直角折线  $ABCDE \cdots$ , 则由诸相似三角形不难知道, 线段  $OA, OB, OC, OD, OE, \cdots$  组成公比为  $e^{m\frac{\pi}{2}}$  的等比数列; 因为与它们对应的角度是  $0, \frac{\pi}{2}, 2 \cdot \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}, \cdots$  等等, 故一切点  $C, D, E, \cdots$  也位于被考察的螺线上.

当角  $\theta$  由 0 增至  $+\infty$  时, 动点绕极点旋转无数卷, 且迅速离开极点至无穷远; 两卷之间的距离已不相等. 角  $\theta$  也可以取负值; 当  $\theta$  趋于  $-\infty$  时, 向径  $r$  趋于 0. 曲线绕极点旋转无数次, 且无限地接近它 (但终不能达到, 参阅图 124 上  $AB'C'D'E' \cdots$  的一部分); 极点就成为曲线的渐近点.

最后, 注意, 只要把极轴绕极点作适当旋转, 就可以消去乘数  $a$  而把对数螺线的方程化成最简形式:  $r = e^{m\theta}$ .

4) 蚶线:  $r = a \cos \theta + b$  (图 125).

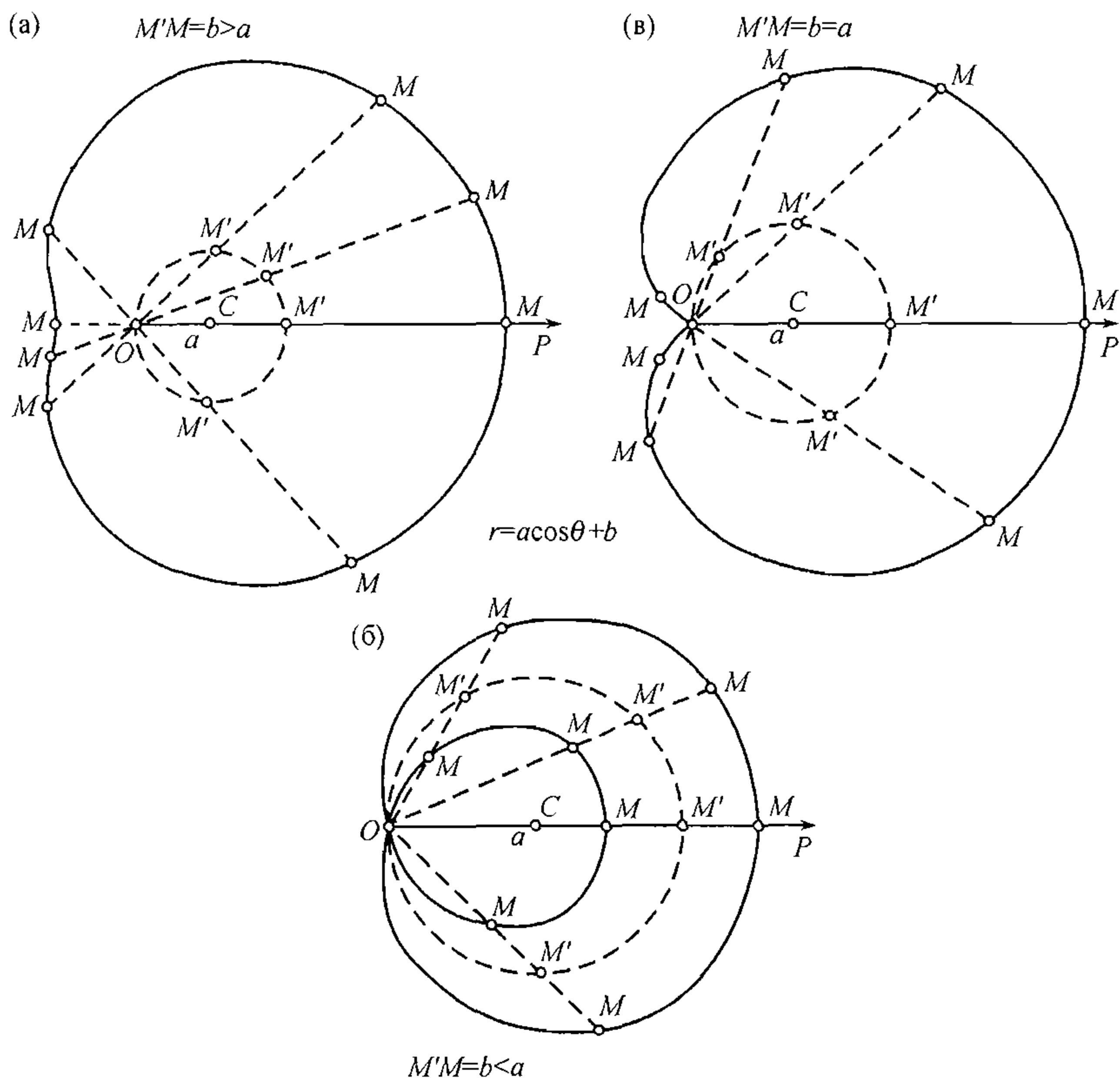


图 125



这些曲线的起源可以设想是这样的: 取直径为  $a$  的圆, 若选取极点  $O$  位于圆周上, 而引极轴通过圆心  $C$ , 则对于圆周上的任一点  $M'$ , 显然有  $r = a \cos \theta$ . 这就是圆的极坐标方程. 若使角  $\theta$  由  $0$  变动至  $2\pi$ , 则动点画这圆两次 (逆时针方向).

现在若把圆的一切向径  $OM'$  都延长一定长的线段  $M'M = b (b > 0)$ , 则由这方法所得出的点  $M$  画成一新曲线, 它通称为蚶线. 它的极坐标方程显然是  $r = a \cos \theta + b$ .

若  $b > a$ , 则事情的处理最为简单, 因为那时向径永远是正的, 故曲线从各方面围绕极点 (图 125a). 在  $b < a$  时曲线通过极点, 且自己相交, 它画成内纽线如图 125b. 为了确定动点经过极点时的角度  $\theta$ , 可在曲线方程内令  $r = 0$ . 我们得到方程  $\cos \theta = -\frac{b}{a}$ , 它只是当  $b \leq a$  时有解.

曲线的中间类型, 即在  $b = a$  时的曲线是特别有趣的. 在这里极点也位于曲线上 ( $\theta = \pi$ ), 但没有纽线; 如图 125b. 立刻看到这曲线与上面考察过的, 圆外旋轮线的特殊情形心脏形线 (图 120) 是相同的. 建议读者去证明这事实.

5) 伯努利双纽线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  (图 126).

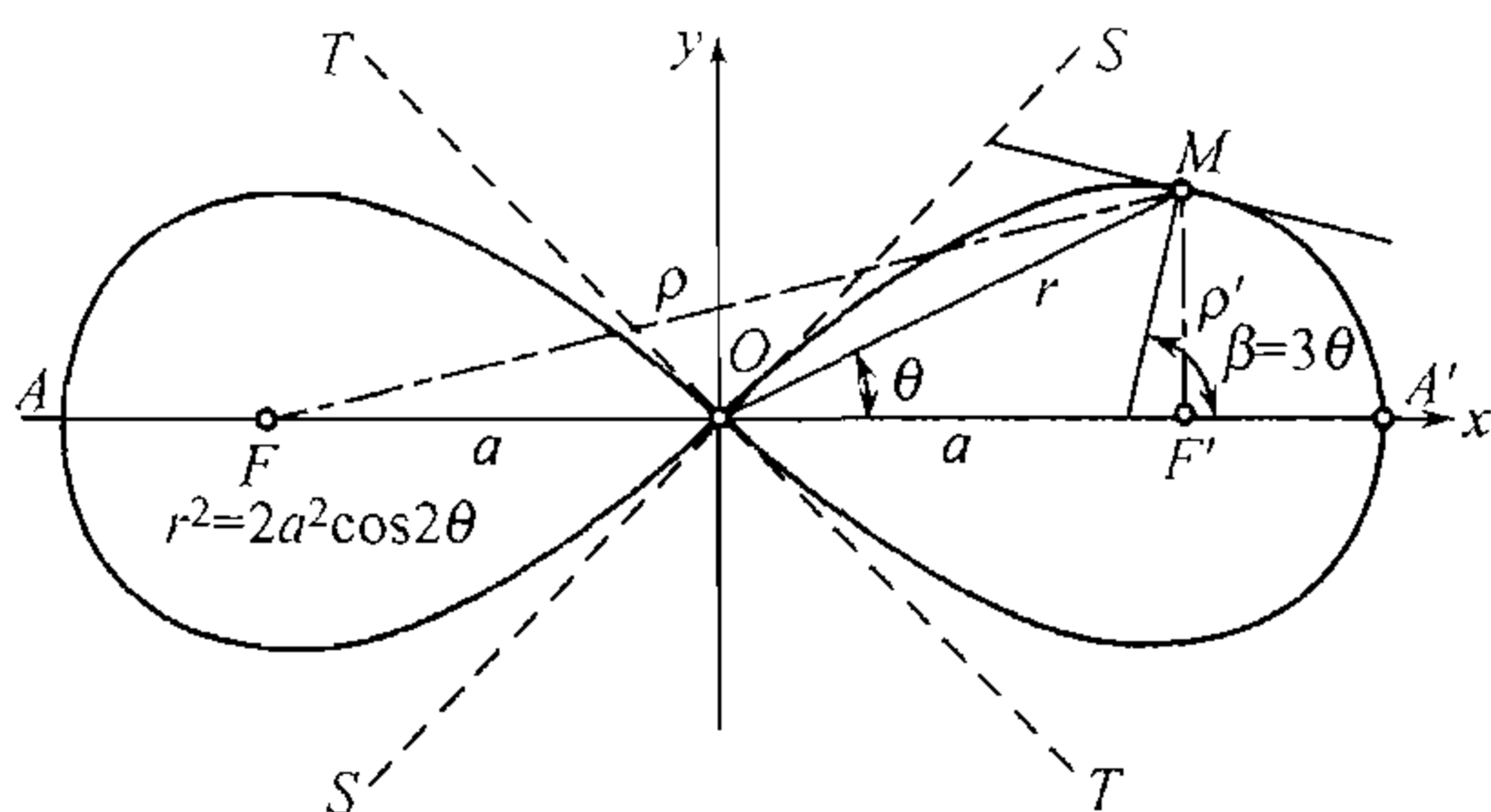


图 126

这曲线可以定义为点  $M$  的轨迹, 点  $M$  与相距  $2a$  的二定点  $F$  及  $F'$  的距离  $\rho = FM$  与  $\rho' = F'M$  的乘积是常数  $a^2$  ①.

依照图内记法, 由三角形  $OMF$  及  $OMF'$  有

$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta, \quad \rho'^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta,$$

于是由定义

$$\rho^2 \rho'^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \theta = a^4,$$

由此, 经过简单计算以后, 得到

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

这就是双纽线的极坐标方程.

因为这方程的左边不能得负值, 故右边的角度  $\theta$  只能在使  $\cos 2\theta \geq 0$  的区间内变动着. 这就是区间

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

①由距离  $FF'$  与常数积  $\rho\rho'$  之间的关系, 显见线段  $FF'$  的中点  $O$  位于曲线上 ( $\rho = \rho' = a$ ). 但若  $\rho\rho' = b^2$ , 而  $b \neq a$ , 则  $O$  不是曲线上的点, 这时我们得到的是所谓卡西尼卵形线.



全部曲线位于与极轴成  $\frac{\pi}{4}$  及  $\frac{3\pi}{4}$  的两直线  $SS$  与  $TT$  之间的一对对顶角内 (见图). 曲线在极点自己相交, 与此对应的角度  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

若用普通方法变成直角坐标, 则容易得出双纽线的直角坐标 (隐式) 方程:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

**227. 空间的曲面和曲线** 我们并不打算在这里深入研究微分学在空间几何学上的应用, 这问题应留给专门的微分几何教程去研究. 因此关于空间几何形象, 我们仅以讨论今后在分析教程本身几个部分内所必需的为限.

如同上述 (回忆一下), 一切被考察的函数将假定为连续且有关于其变元的连续导数.

由坐标轴为  $Oxyz$  的直角坐标系统出发. 我们已经说过, 空间的曲面可以用流动坐标之间的方程

$$z = f(x, y) \quad (6)$$

来表示 [例如, 参阅 160]. 这种方程, 以及类似于它的方程  $x = g(y, z)$  及  $y = h(z, x)$ , 都称为曲面的显式方程.

曲面的其他表示法, 在某种意义之下, 常可以化成这一最简单的情形.

经常遇到曲面用方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

表示, 并没有解出这个或那个坐标 (隐式). 若曲面在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的三个偏导数  $F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)$  中至少有一个异于 0, 则在这点的邻域内, 曲面就可以用某一种类型的显式方程来表示. 实际上, 例如若  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 则按照 208 的定理 3. 至少在被考察点的邻域内, 方程 (7) 确定  $z$  为  $x$  及  $y$  的单值函数:  $z = f(x, y)$  (且这时函数  $f$  连同它关于二变元的导数都为连续).

这样, 只有同时满足了三条件

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0$$

的曲面上的奇异点是例外情形.

方程

$$F(x, y) = 0 \quad (8)$$

根本不含有坐标之一的, 也可以解释为曲面方程. 就是, 在  $xy$  平面上它表示一曲线; 若把它作为准线, 以平行于  $z$  轴的母线沿着准线移动作出一柱面, 则这柱面上一切的点, 且只有它们, 满足方程 (8) (因为  $z$  并未在方程内出现且不受任何限制).

方程  $G(y, z) = 0$  或  $H(z, x) = 0$ , 也可以作同样解释.

现在转而讨论空间曲线. 空间曲线的最简单表示法是把它的一个流动坐标, 例如  $y$  及  $z$ , 给定为第三坐标  $x$  的函数:

$$y = f(x), \quad z = g(x). \quad (9)$$



这种方法是平面曲线的显式的自然推广. 因此方程 (9) 就可以称为曲线的显式方程.

如同在平面曲线的情形, 空间曲线的其他解析表示式基本上也可以化成显式.

方程 (9) 中的每一式可以解释为曲线在坐标平面  $xy$  或  $xz$  上的投影的方程. 或是母线平行于  $z$  轴或  $y$  轴的投影柱面的方程 [见 (8)].

空间曲线的更一般的表示法是把它看成二曲面的交线. 若这两曲面的方程是

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{及} \quad G(x, y, z) = 0, \quad (10)$$

则联立二方程就给出交线的解析表示式. 方程组 (10) 称为曲线的隐式方程.

由函数  $F$  及  $G$  的偏导数组成矩阵

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}. \quad (11)$$

设在这矩阵内有某一行列式, 例如

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

在被考察点异于 0. 则根据 208 的定理 4, 在这点的邻域内方程组 (10) 可以换成方程组 (9)[而且在方程组 (9) 内出现的函数仍是连同其导数均为连续的].

这样, 只有在曲线的奇异点 (在这种点矩阵 (11) 的三个行列式同时变为零) 的邻域内, 不保证有化成最简表示式的可能.

**228. 参变量表示式** 最后, 讲到曲面及空间曲线的参变量表示法, 先从曲线开始.

如同我们在平面上所做过的一样, 空间曲线上动点的坐标可以由某一辅助变量——参变量—— $t$  的函数给出:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (12)$$

使得当参变量  $t$  变动时, 其坐标由这些方程给定的点就画出所考察的曲线 [在显式 (9) 的情形,  $x$  本身起了参变量的作用].

在曲线上所取的点若导数  $x'_t, y'_t, z'_t$  中至少有一个异于 0, 则如同平面曲线一样. 在这点的邻域内, 容易由参变量表示式化成显式. 只有在奇异点 (该处一切这些导数都等于零) 的邻域内不保证有这种转化的可能.

如同平面曲线的情形一样, 还有所谓重点, 即能由两个以上参变量的值得出的点, 亦算作奇异点<sup>①</sup>.

转而讨论曲面的参变量表示式.

<sup>①</sup>参阅第 223 目脚注 ①.



这时, 确定曲面上一点的位置须用二参变量 [在显式 (6) 的情形, 即由二坐标  $x, y$  作为参变量]. 设有方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (13)$$

式中  $(u, v)$  变动于闭区域  $\Delta$  中. 作矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} \quad (14)$$

并假设  $u = u_0, v = v_0$ , 使这矩阵的行列式至少有一个异于 0, 例如, 设

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是, 把方程组 (13) 的前二式改写成

$$\varphi(u, v) - x = 0, \quad \psi(u, v) - y = 0,$$

根据 208 的定理 4, 可以断定, 由这含有四变量  $u, v, x, y$  的二方程 (若它们的数值以接近于我们所关心者为限), 确定变量  $u, v$  为  $x, y$  的单值函数:

$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y),$$

连同它们的导数均为连续. 最后, 把  $u$  及  $v$  的表达式代入方程组 (13) 的第三式内, 就得出普通表示曲面的显式方程

$$z = \chi(g(x, y), h(x, y)) = f(x, y),$$

式中函数  $f$  也为连续且有连续导数.

只有在那种情形, 当矩阵 (14) 的三行列式同时都等于零了 (曲面上对应的点便是奇异点), 这种表示式可能得不到.

读者容易明白, 关于曲面的参变量表示式, 也可以建立曲面的单点或重点的概念: 前者只能由参变量  $(u, v)$  的一组数值得出, 后者至少能由  $(u, v)$  的二组数值得出<sup>①</sup>.

回到曲面的参变量方程 (13), 固定其中一个参变量的值, 例如令  $u = u_0$ . 那时显然得出某一曲线方程

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v),$$

<sup>①</sup>应当指出, 在闭曲面的情形 (即没有围线的曲面, 例如球面), 显然不能使它的点与平面  $uv$  的区域  $\Delta$  的点成互为单值的对应. 在这个情形, 对于任何参变量表示式重点必然存在.



其一切点都位于曲面上. 变动  $u_0$  的值, 就得到这种“(u) 曲线”的一族. 类似于此, 固定  $v = v_0$  的值, 同样能得出在我们的曲面上的一曲线

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0);$$

由这种“(v) 曲线”同样能组成一整个曲线族.

因为  $u$  及  $v$  的数值可以作为曲面上一点的坐标, 故这些曲线就称为曲面的坐标线. 若曲面上一点是单点, 即只能由参变量  $(u, v)$  的一组数值得出, 则在每一曲线族内只能有一条坐标线通过它.

观察曲面 [参阅 (6)、(7)、(13)] 及空间曲线 [(9)、(10)、(12)] 的各种解析表示法, 我们可以重述在 223 末段所说的话. 在普通点 (并且是单点) 的邻域内, 总可变成最简单的显示表示式的情形.

**229. 例题** 1) 维维亚尼 (Вивiani) 曲线 球面与一直圆柱面 (圆柱面的准线是在球内一半径上作成的圆周) 的交线 (图 127), 称为维维亚尼曲线. 设球的半径为  $R$ ; 若置坐标轴如图所示, 则球面及圆柱面的方程各为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 &= Rx. \end{aligned}$$

联立这两方程就确定我们的曲线.

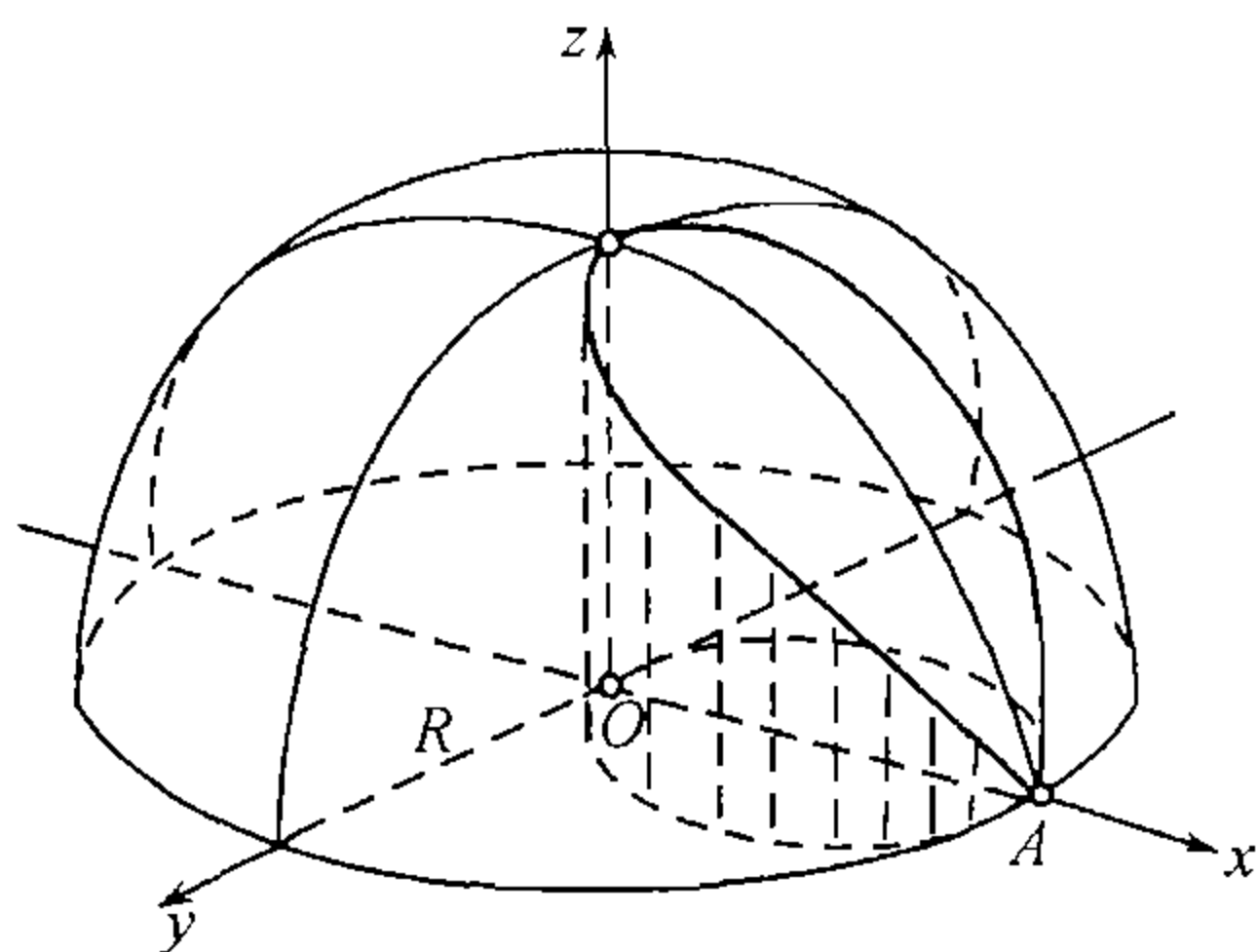


图 127

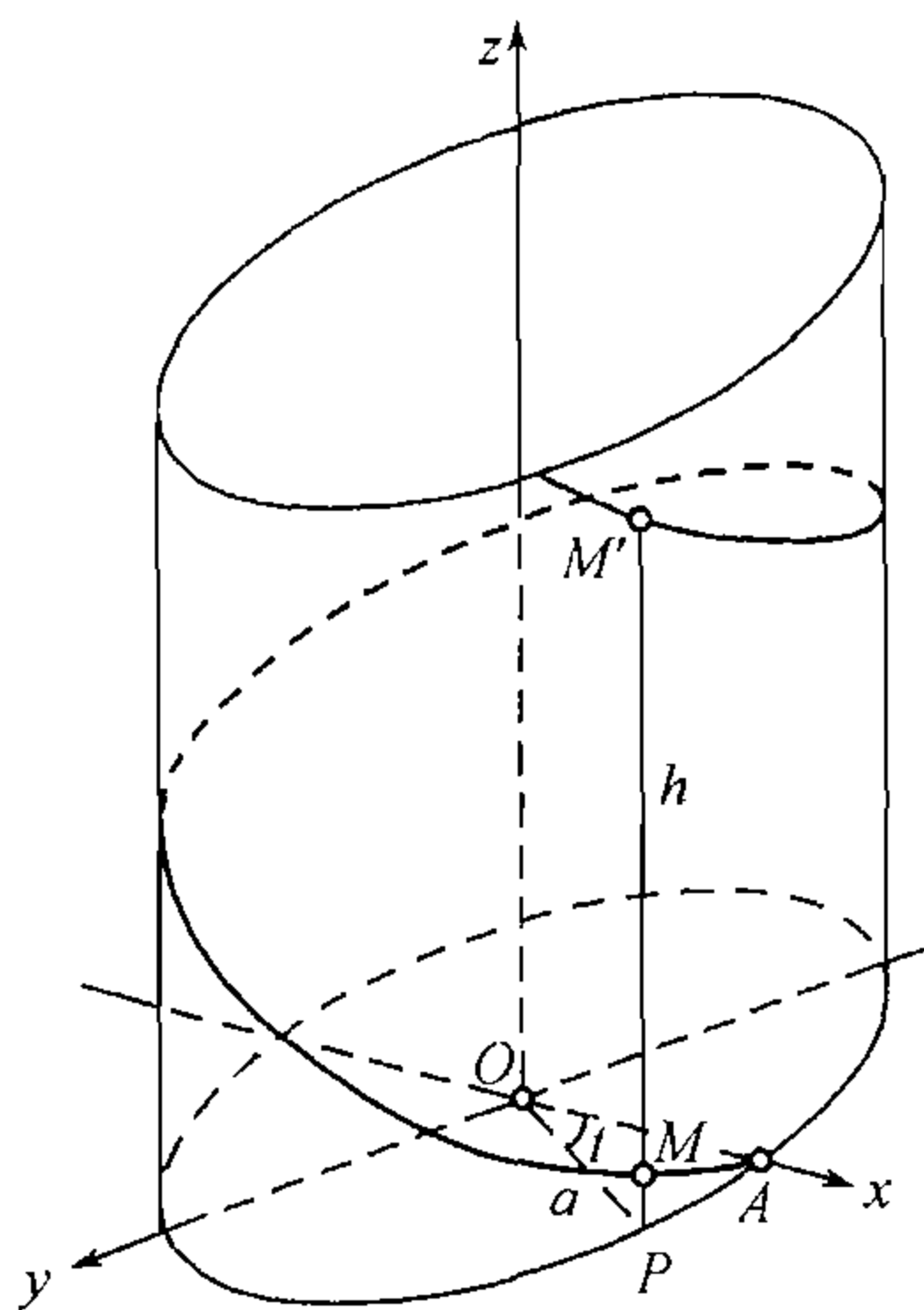


图 128

这曲线形如弯曲的 8; 在点  $(R, 0, 0)$  它自己相交, 所以这点准是奇异点. 这也可以由计算而证实. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - R & 2y & 0 \end{pmatrix}$$



有行列式

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz, \quad \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x - R \end{vmatrix} = 4xz - 2Rz, \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x - R & 2y \end{vmatrix} = 2Ry,$$

它们在点  $(R, 0, 0)$  恰巧一齐等于 0.

维维亚尼曲线也可以用参变量式来表示, 例如,

$$x = R \sin^2 t, \quad y = R \sin t \cos t, \quad z = R \cos t.$$

实际上, 不难核验, 这些式子恒等地满足曲线的隐式方程, 而当参变量变动时, 如自 0 变动至  $2\pi$ , 就画出全部曲线. 点  $(R, 0, 0)$  在  $t = \frac{\pi}{2}$  及  $t = \frac{3\pi}{2}$  时得出二次, 所以它是重点, 如我们所希望的一般.

2) 有时曲线的参变量表示式能由曲线的起源自然地推得. 例如, 考察螺旋线. 它的起源可以设想如下: 设一点  $M$  原来位于  $A$  处 (图 128), 它等速地绕  $z$  轴旋转 (顺时针方向) 同时又在平行于  $z$  轴的方向 (假定沿正向) 作等速的移动, 则点  $M$  的轨迹就称为螺旋线. 为了确定点  $M$  的位置, 可以采用线段  $OM$  的投影  $OP$  与  $x$  轴的夹角  $t$  作为参变量. 点  $M$  的坐标  $x$  及  $y$  与点  $P$  相同. 于是  $x = a \cos t, y = a \sin t$ , 式中的  $a$  是点  $P$  所画出的圆的半径. 至于铅直的量  $z$ , 它与回转角  $t$  成正比例 (移动及转动都是等速地进行), 即  $z = ct$ . 最后, 螺旋线的参变量方程就是

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct. \quad (15)$$

所得的螺旋线称为左螺旋线; 若在右手坐标系时, 则同样的方程组将表示右螺旋线.

由方程组 (15) 内消去参变量  $t$  使变成显式是很容易的; 例如, 由最后一式内求出  $t$ , 再把它代入前二式内, 就得

$$x = a \cos \frac{z}{c}, \quad y = a \sin \frac{z}{c}.$$

3) 考察半径为  $R$  中心在原点的球面 (图 129). 它的隐式方程是

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

为了求得它的通常的参变量表示式, 可以作出“赤道的”截面  $AKA'$ , 并经过“极” $P, P'$  及被考察点  $M$  作“子午线” $PMKP'$ . 点  $M$  在球面上的位置可以用角  $\varphi = \angle POM$  及  $\theta = \angle AOK$  来确定. 我们有  $z = NM' = R \cos \varphi$ . 再有  $ON = R \sin \varphi$ , 而坐标  $x$  及  $y$  ( $M$  与  $N$  有相同的值) 就由  $ON$  表示如:  $x = ON \cos \theta, y = ON \sin \theta$ . 汇集这些结果, 就得到球面的参变量方程:

$$x = R \sin \varphi \cos \theta,$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = R \cos \varphi,$$

其中角度  $\varphi$  只要自 0 变动至  $\pi$  就够了, 而角度  $\theta$  须自 0 变动至  $2\pi$ .

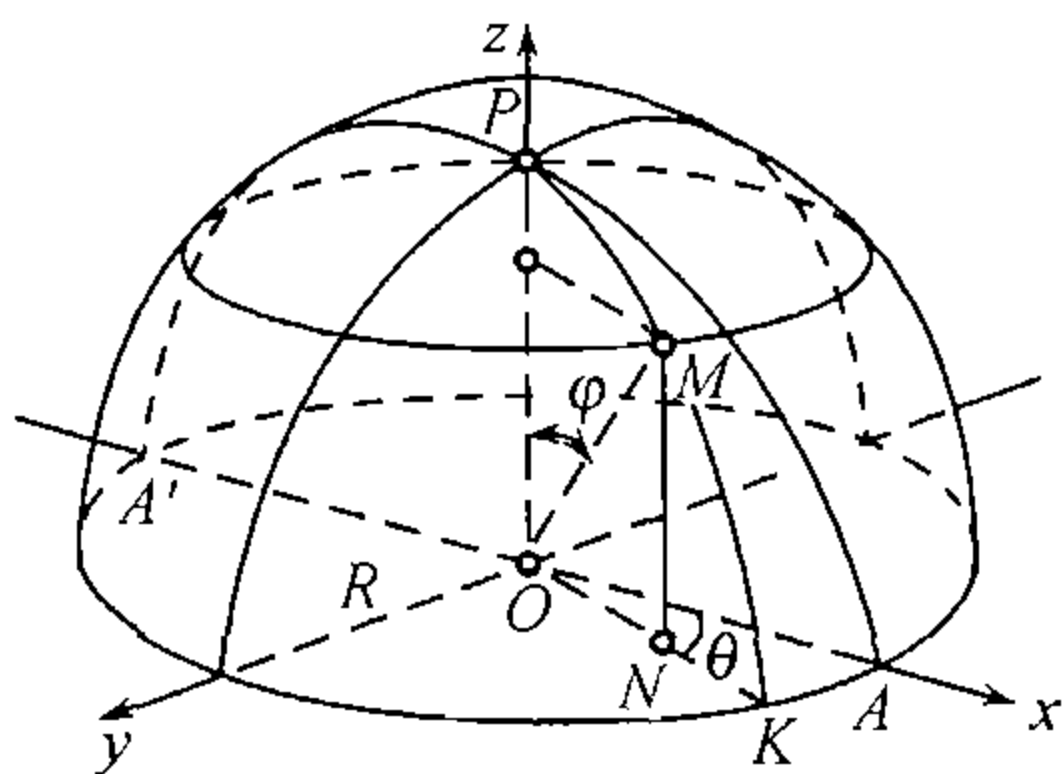


图 129



可是, 球面上的点与在平面  $\varphi\theta$  的矩形  $[0, \pi; 0, 2\pi]$  上的点之间的对应不会是互为单值的<sup>①</sup>: 由数值  $\theta = 0$  和  $\theta = 2\pi$  得出曲面上的同一点, 此外, 在  $\varphi = 0(\varphi = \pi)$  时无论  $\theta$  是怎样的值, 我们只能得到一个点——极点  $P(P')$ .

若把角度  $\varphi$  换以  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $\lambda$  自  $-\frac{\pi}{2}$  变动至  $\frac{\pi}{2}$ , 再使  $\theta$  在  $-\pi$  与  $\pi$  之间变动, 则得地理学上的坐标: 纬度与经度.

偏导数的矩阵

$$\begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

的一切行列式

$$R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, R^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

在  $\varphi = 0$  及  $\varphi = \pi$  时一齐变为零. 然而很明显, 仅当应用这一种球面的解析表示式时, 两“极”才表示有奇异性.

容易看出, 球面上的一族坐标线由经线 ( $\theta = \text{常数}$ ) 组成, 而另一族坐标线由平行圆 ( $\varphi = \text{常数}$ ) 组成.

4) 可用下法推广前例. 设在平面  $xz$  内有一曲线 (母线), 由参变量方程

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u) \quad (16)$$

给定, 而且  $\varphi(u) \geq 0$ . 把它当作刚体绕  $z$  轴旋转 (图 130). 若用  $v$  表示回转角, 则所得的回转面的方程就可写成

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) \quad (0 \leq v \leq 2\pi),$$

若在平面  $xz$  内取半圆周

$$x = R \sin u, \quad z = R \cos u,$$

且把它绕  $z$  轴旋转, 则由这种方法所得球面的参变量表示式与以前的相同 (除记号不同以外).

建议读者去证明, 只有在回转轴上的点, 或是由母线的奇异点回转而得的点, 才可能成为回转面的奇异点.

在此处也是以母线的各种位置 (经线) 及平行圆作为坐标线.

5) 若当曲线 (16) 作回转运动时, 同时又作平行于回转轴的移动, 则 (假设两种运动都是等速地进行) 得一般螺旋面

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) + cv.$$

特别情形, 取  $x$  轴的正向部分

$$x = u, \quad z = 0 \quad (u \geq 0)$$

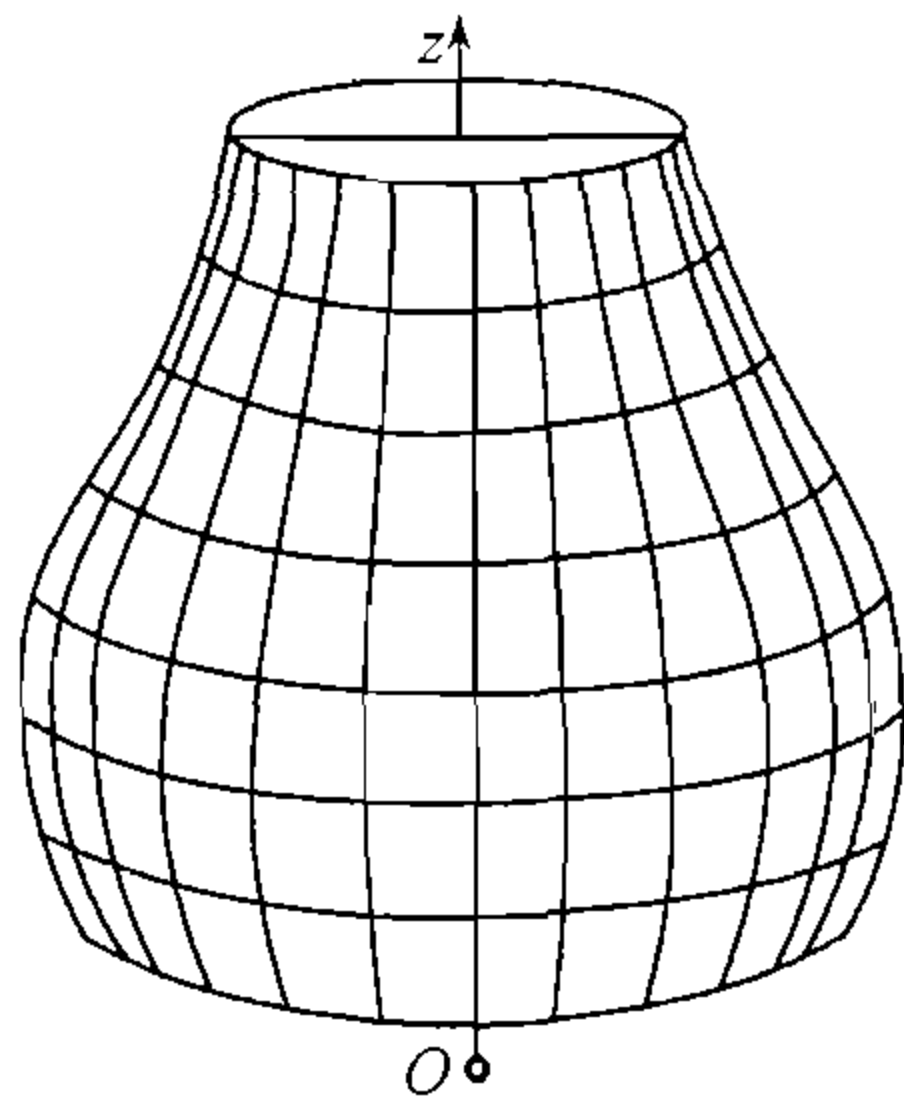


图 130

<sup>①</sup>比较第 450 页下的脚注.



当作母线, 并使它作螺旋运动, 则得出普通螺旋面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv.$$

对于一般螺旋面, 一族坐标线由母线的各种位置 ( $v = \text{常数}$ ) 组成, 另一族坐标线由螺旋线 ( $u = \text{常数}$ ) 组成.

## §2. 切线及切面

**230. 用直角坐标系时平面曲线的切线** 切线的概念我们已经遇见多次 [例如, 参阅 91]. 若一曲线由显式方程

$$y = f(x)$$

给定, 式中的  $f$  是连续函数并有连续导数, 则在这曲线上每一点  $(x, y)$  必有切线, 其斜率  $\operatorname{tg} \alpha$  由公式

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = f'(x)$$

表示. 这样, 切线方程为

$$Y - y = y'_x(X - x). \quad (1)$$

在这里 (以下也一样)  $X, Y$  表示流动坐标, 而  $x, y$  是切点的坐标.

容易得出法线 (即经过切点且垂直于切线的直线) 的方程为:

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x) \quad \text{或} \quad X - x + y'_x(Y - y) = 0. \quad (2)$$

考察与切线及法线有关系的一些线段, 就是线段  $TM$  及  $MN$  以及它们在  $x$  轴上的射影  $TP$  及  $PN$  (图 131). 后二者各称为次切矩及次法矩, 并且记成  $\text{sbt}(\text{subtangent})$  及  $\text{sbn}(\text{subnormal})$ . 在方程 (1) 及 (2) 内令  $Y = 0$ , 容易算出

$$\left. \begin{aligned} \text{sbt} = TP &= \frac{y}{y'_x}, \\ \text{sbn} = PN &= yy'_x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

于是由三角形  $MPT$  及  $MPN$  又可确定切线长及法线长

$$t = TM = \left| \frac{y}{y'_x} \sqrt{1 + y'^2_x} \right|, \quad n = MN = \left| y \sqrt{1 + y'^2_x} \right|. \quad (4)$$

在曲线用隐式

$$F(x, y) = 0$$

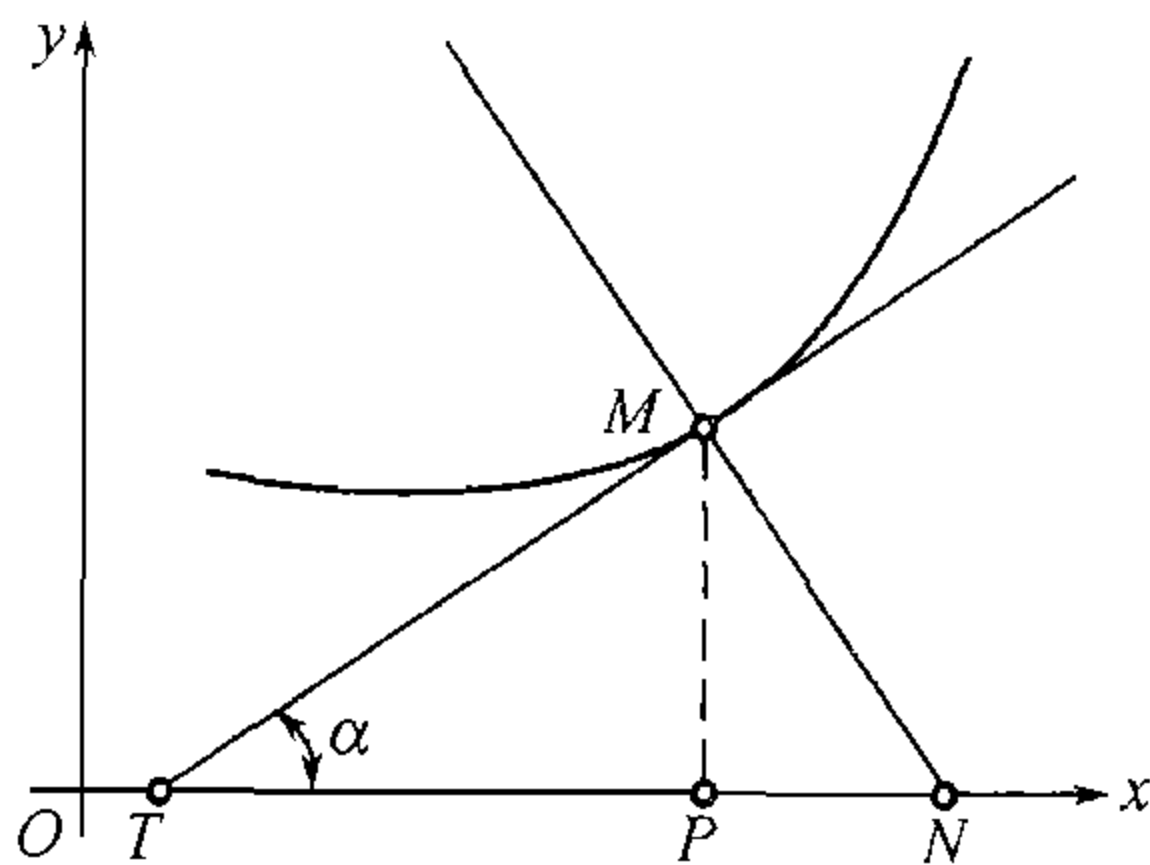


图 131



的场合, 在它的普通点  $M(x, y)$  的邻域内可以设想曲线是用显式方程表示的. 例如, 若在点  $M, F'_y(x, y) \neq 0$ , 则曲线可用形如  $y = f(x)$  的方程来表示, 式中  $f$  为连续函数且有连续导数. 由此已很明显, 曲线在点  $M$  有切线存在, 且切线方程可以写成 (1) 的形式. 但我们知道 [209(15)], 在这情形

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

把它代入 (1), 经过简单的变换后, 就得出关于  $x$  及  $y$  完全对称的切线方程

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \quad (5)$$

若在点  $M, F'_y = 0$ , 但  $F'_x \neq 0$ , 也可以得出同样的结果. 只有在奇异点这方程失去意义, 在没有作补充研究 [236] 时, 这里不能再讲什么.

在上述情形, 法线方程显然是这样的:

$$F'_y(x, y)(X - x) - F'_x(x, y)(Y - y) = 0.$$

最后, 假定曲线由参变量方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

给定. 我们已看到, 若  $\varphi'(t) \neq 0$ , 则曲线的切线存在, 且其斜率为

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (6)$$

[106(11)]. 切线方程可以写成:

$$Y - y = \frac{y'_t}{x'_t}(X - x) \quad \text{或} \quad \frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t}.$$

最后一种形式的方程当  $x'_t = 0$  而  $y'_t \neq 0$  的场合<sup>①</sup>也能适用. 只有在奇异点同时有  $x'_t = 0$  及  $y'_t = 0$  时方程才失去意义, 而关于切线的问题依然存在 [237].

在上式两边的分母上各乘以  $dt$ , 而把切线方程写成

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \quad (7)$$

有时是便利的.

**231. 例题** 1) 抛物线:  $y^2 = 2px$ . 对这等式施行微分 (把  $y$  当成  $x$  的函数), 得  $yy'_x = p$ . 这样 [参阅 (3)], 抛物线的次法矩是常数. 由此可得抛物线的法线 (随之而切线) 的简易作图法.

按照公式 (4), 抛物线的法线长为

$$n = \sqrt{y^2 + p^2}.$$

<sup>①</sup>这时, 像通常在解析几何内所约定的, 若在比例式

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b}$$

中有一个后项为 0, 那么这比例式就简单地表示其对应的前项也等于 0.



2) 椭圆:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (图 132).

按照公式 (5) 就有这样的切线方程:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0.$$

顾及椭圆方程本身, 可以把最后的方程改写成更简单的形式:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

在这里令  $Y = 0$ , 求得  $X = \frac{a^2}{x}$ . 这样, 切线与  $x$  轴的交点  $T$  与  $y$  及  $b$  都无关系. 对应于不同的  $b$  值的各种椭圆, 它们在横标为  $x$  的各点上的切线都经过  $x$  轴上的同一点  $T$ . 因为在  $b = a$  时得出圆, 它的切线作法很简单, 故立刻

能确定  $T$ , 由此就得出椭圆的切线的简易作图法, 如图所显示<sup>①</sup>.

椭圆的法线长容易确定为:

$$n = \sqrt{\frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^2}}.$$

在双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的情形也可得出同样的表达式.

3) 星形线:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  (图 116).

切线方程为

$$x^{-\frac{1}{3}}(X - x) + y^{-\frac{1}{3}}(Y - y) = 0,$$

借助于曲线方程本身可以把上式改写成为

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{或} \quad \frac{X}{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

最后的方程是“截距式”. 因此, 切线在两轴上的截距是  $a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$  及  $a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ . 由此容易得出星形线的一个有趣的性质. 用  $\tau$  表示切线在两轴之间的长度, 就有

$$\tau^2 = a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} = a^2$$

而得

$$\tau = a = \text{常数}.$$

这样, 星形线的对称轴在所有切线上都截取等长的线段.

4) 旋轮线:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  (图 118).

我们已 [在 225,6) 中] 有等式  $y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ , 即

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right),$$

<sup>①</sup>椭圆的切线的这一性质与下列之事实有直接关联: 即椭圆可以看作是位于斜平面上的某一圆 (半径为  $a$ ) 的正射影.

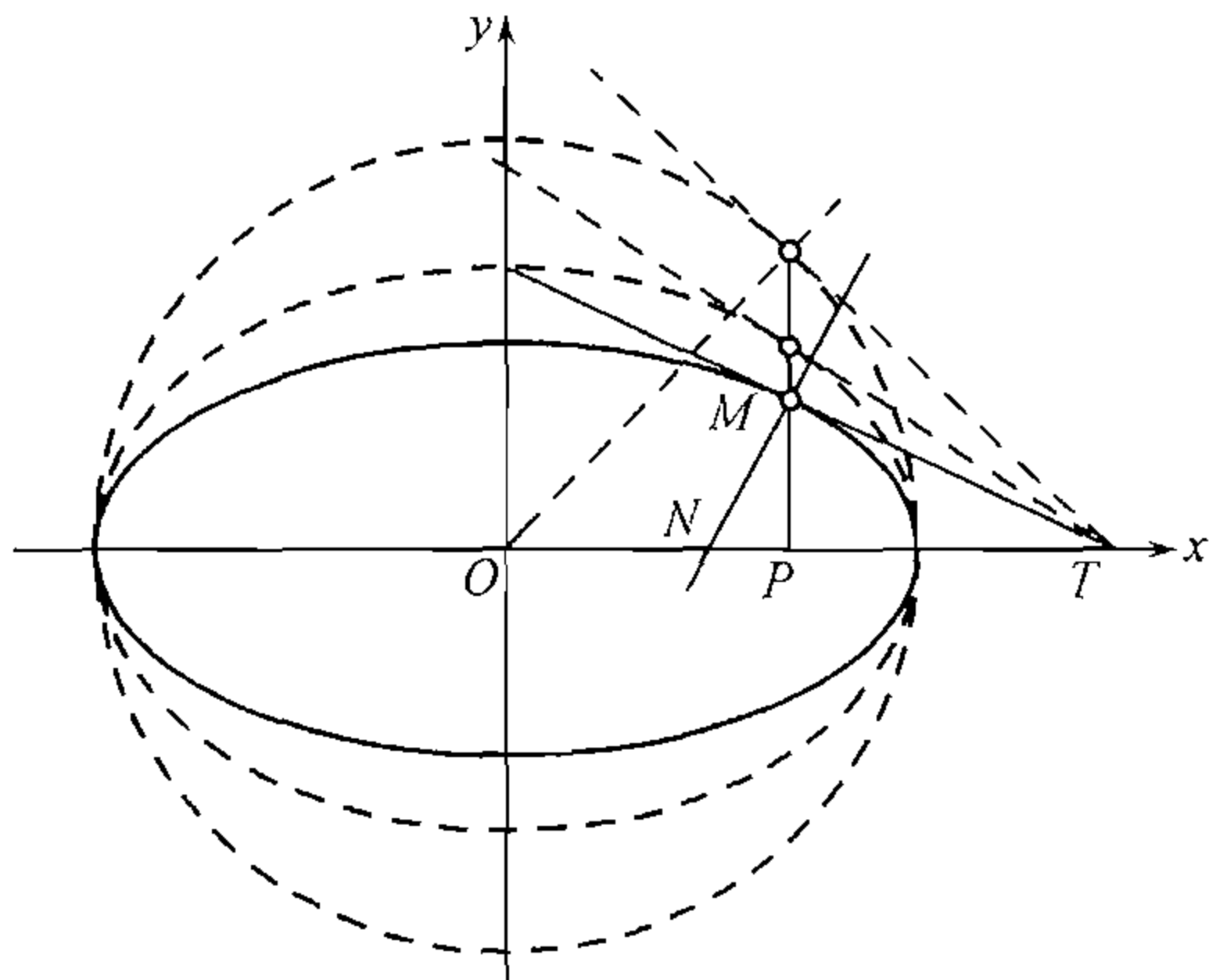


图 132



故可以采用  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ .

回忆 (图 118),  $t = \angle MDN$ , 于是  $\angle MEN = \frac{t}{2}$ . 若延长直线  $EM$  使与  $x$  轴相交于  $T$ . 则  $\angle ETx = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$ . 因此, 连接旋轮线上的点与 (在对应位置的) 动圆的最高点的直线  $EM$  就是旋轮线在这点的切线. 由此, 显然直线  $MN$  就是法线.

法线长  $n$  的表达式以后对我们是有用处的, 它容易从直角三角形  $MEN$  内求得. 就是

$$n = MN = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

5) 圆外旋轮线:

$$\begin{aligned} x &= a[(1+m) \cos mt - m \cos(1+m)t], \\ y &= a[(1+m) \sin mt - m \sin(1+m)t] \end{aligned}$$

(图 119).

把导数  $x'_t$  及  $y'_t$  的表达式写成

$$\begin{aligned} x'_t &= 2am(1+m) \sin \frac{t}{2} \cos \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \\ y'_t &= 2am(1+m) \sin \frac{t}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \end{aligned}$$

就求得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} \left(m + \frac{1}{2}\right)t.$$

由此有  $\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)t$ .

若连接 (图 119) 点  $D$  与  $M$ , 则这直线与  $x$  轴所夹的角恰为:

$$\angle xTD = \angle DOT + \angle ODT = mt + \frac{t}{2}.$$

因为,  $DT$  是在点  $M$  的切线, 而  $MB$  是法线.

6) 圆的渐伸线:  $x = a(t \sin t + \cos t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  (图 121).

在此处

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t, \text{ 由此 } \alpha = t.$$

这样, 切线  $MT$  平行于半径  $OB$ , 且  $BM$  是这曲线的法线.

**附注** 例题 4)、5)、6) 的结果可以不用任何计算, 而由运动学方面的考虑直接得出. 当一曲线在另一曲线上滚动时, 切点常是动形的瞬时中心, 因此动形上任一点的轨迹的法线必经过这切点.

**232. 用极坐标系时的切线** 若曲线是由极坐标方程  $r = f(\theta)$  给定, 则用通常的方法换成直角坐标制, 就得到曲线的参变量表示式

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta, \end{aligned}$$



并且  $\theta$  在这里起了参变量的作用.

在这种场合, 按照一般公式 (6),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta}.$$

可是, 若用极坐标来研究曲线, 则切线的位置通常并不用它与极轴的交角  $\alpha$  来确定, 而是用它与向径延长线所夹的角  $\omega$  来确定 (图 114 及图 133). 我们已有简单的公式 [218,4)]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'_\theta}. \quad (8)$$

完全同样地, 代替 230 内讲过的线段  $t, n, \operatorname{sbt}, \operatorname{sbn}$ . 在此处须考察其他的线段. 经过极点  $O$  作垂直于向径的轴 (当点  $M$  移动时这轴就旋转着), 延长切线及法线使与它依次相交于点  $T$  及  $N$ . 那时线段  $TM$  及  $MN$  就称为极切线及极法线, 而它们在该轴上的射影  $TO$  及  $ON$  就称为极次切矩及极次法矩. 我们将用与前相同的记法来表示它们, 但另附以下标  $p$ . 利用公式 (8) 容易得出:

$$\operatorname{sbt}_p = TO = r \operatorname{tg} \omega = \frac{r^2}{r'_\theta}, \quad \operatorname{sbn}_p = ON = r \operatorname{ctg} \omega = r'_\theta,$$

而由此已有

$$t_p = TM = \left| \frac{r}{r'_\theta} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta} \right|, \quad n_p = MN = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}.$$

**233. 例题** 1) 阿基米德螺线:  $r = a\theta$  (图 122).

因为  $r'_\theta = a$ , 故  $\operatorname{sbn}_p = a = \text{常数}$ . 这使我们得以立刻确定点  $N$  的位置, 随之而作出法线及切线.

注意,  $\operatorname{tg} \omega = \theta$ , 因此当  $\theta \rightarrow \infty$  时就有  $\operatorname{tg} \omega \rightarrow \infty$  即  $\omega$  趋近于直角.

2) 双曲螺线:  $r = \frac{a}{\theta}$  (图 123).

这一次  $r'_\theta = -\frac{a}{\theta^2}$ ,  $\operatorname{sbt}_p = -a = \text{常数}$ , 这同样明显地简化了切线的作法.

3) 对数螺线:  $r = ae^{m\theta}$  (图 134).

因有  $r'_\theta = mae^{m\theta}$ , 于是  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m} = \text{常数}$ , 从而  $\omega = \text{常数}$ . 这样, 对数螺线具有一个值得注意的性质: 向径与切线之间的夹角保持为常数. 换句话说, 对数螺线常与其向径相交成定角. 就这性质来说, 它和圆类似, 因为圆与从中心作出的向径亦相交成定角 (直角). [然而, 圆也可以看成是对应于  $m = 0$  的对数螺线的特殊情形.]

4) 蚶线:  $r = a \cos \theta + b$  (图 135).

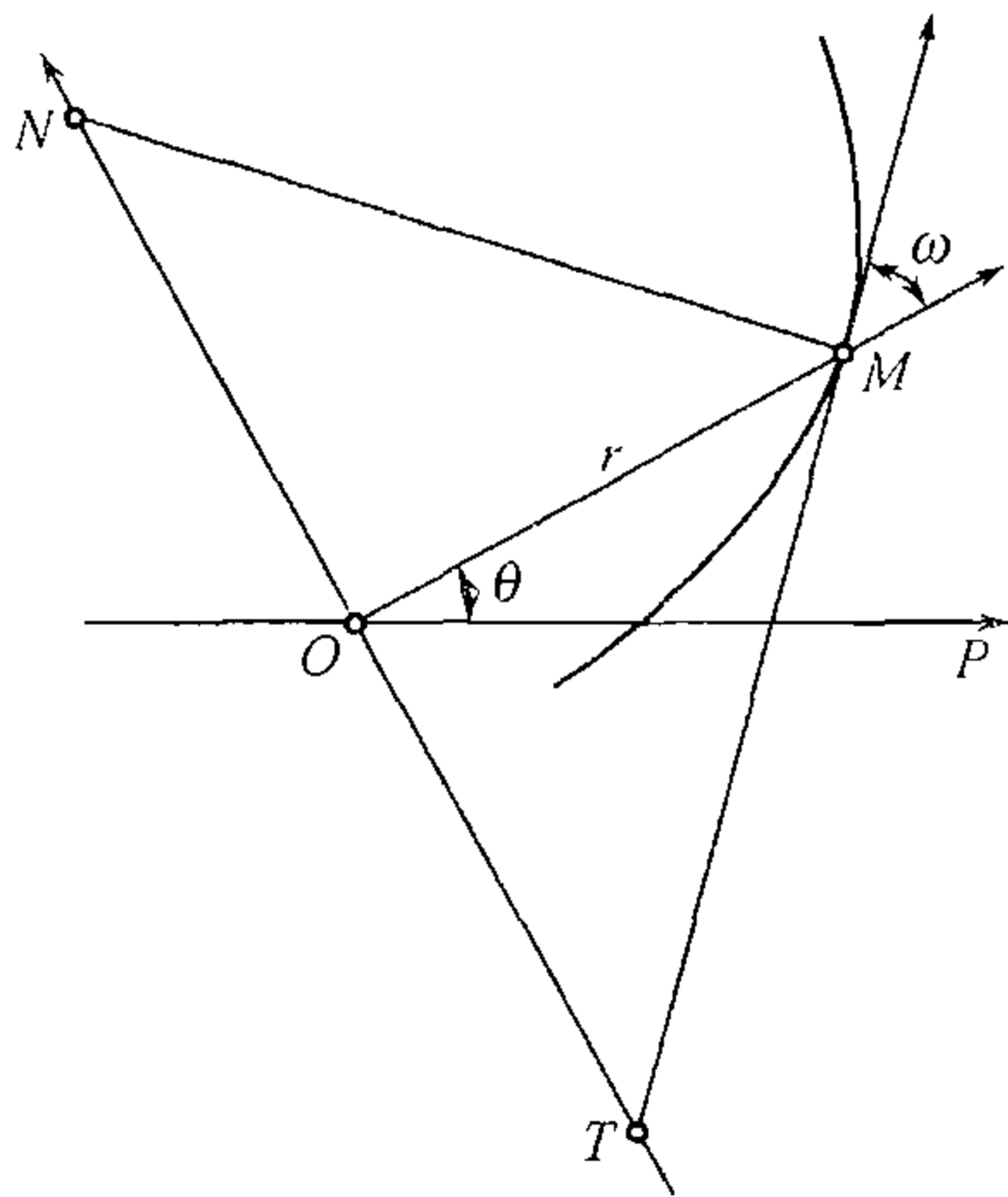


图 133



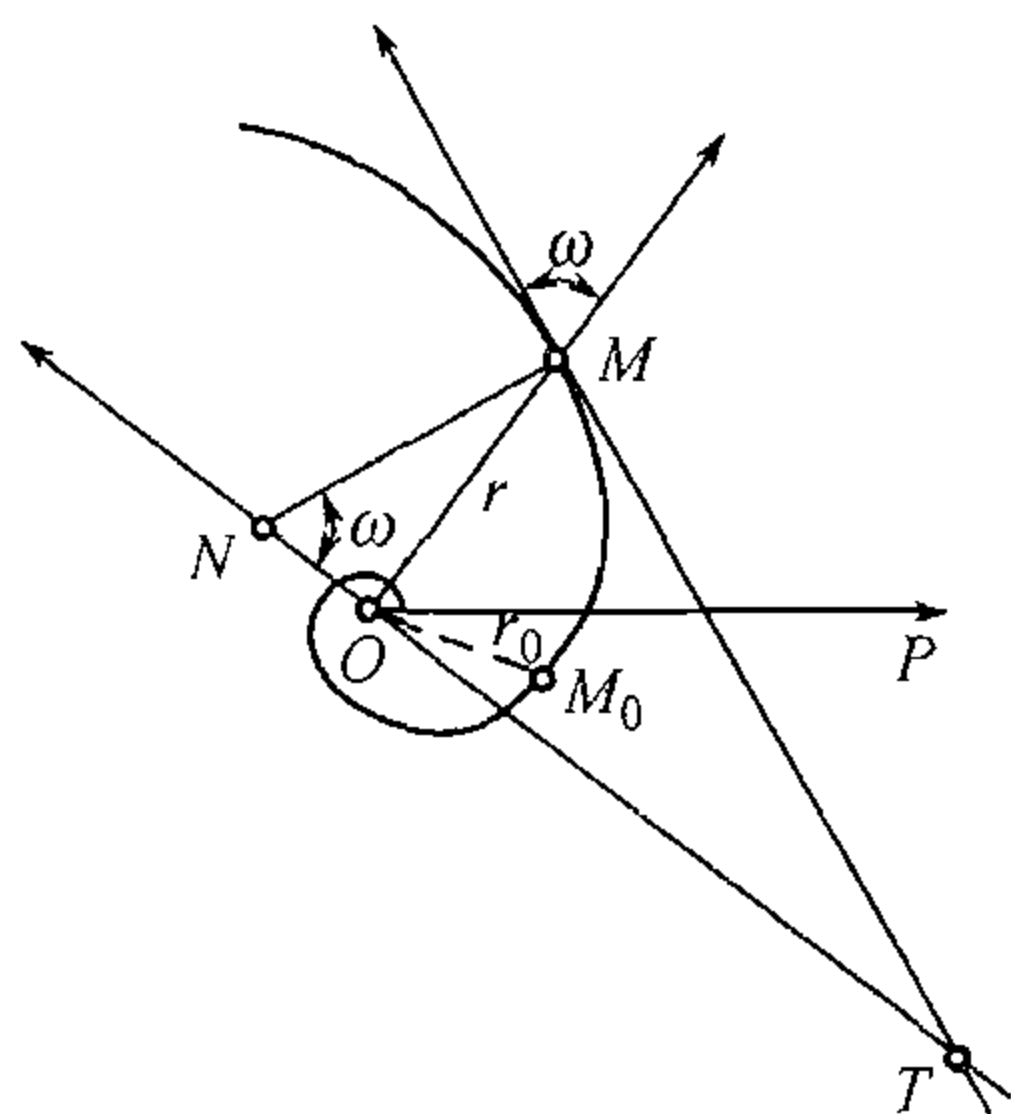


图 134

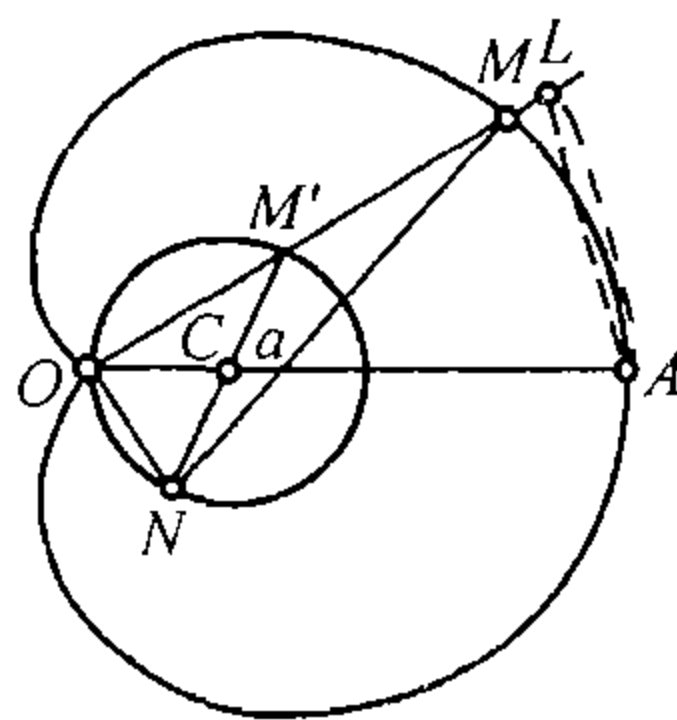


图 135

注意,  $\text{sbn}_p = r'_\theta = -a \sin \theta$  显然与  $b$  无关. 这样, 若取位于从极点发出的同一射线上而有不同  $b$  值的各种蚘线的点, 则这些点将有公共的极法线影, 即点  $N$  是公有的. 但在  $b = 0$  时得出一圆, 它的法线的作法是很明显的; 因此也就容易作出任何蚘线 (图 135) 的法线了. 从  $\triangle MON$  计算极法线之长

$$n_p = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}.$$

心脏形线<sup>①</sup> ( $b = a$ ) 的极法线的表达式特别简单:

$$n_p = 2a \cos \frac{\theta}{2}.$$

5) 双纽线:  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  (图 126).

对上式微分, 把  $r$  当成  $\theta$  的函数, 得

$$rr'_\theta = -2a^2 \sin 2\theta.$$

这二等式两边各自相除, 更根据 (8), 可得

$$\text{tg} \omega = \frac{r}{r'_\theta} = -\text{ctg} 2\theta,$$

由此,  $\omega = 2\theta + \frac{\pi}{2}$ . 用  $\alpha$  及  $\beta$  表示切线及法线的倾角, 就有

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \omega + \theta = 3\theta + \frac{\pi}{2},$$

因此,  $\beta = 3\theta$ : 双纽线的法线的倾角等于切点的极角的三倍. 这给出作法线的简易方法.

**234. 空间曲线的切线 · 曲面的切面** 1° 对于空间曲线, 切线的定义在文字上与平面曲线的情形 91 相同. 在这里限于讨论由参变量表示式给定的曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

<sup>①</sup>画在图 135 上的正是这一特别情形.



取定值  $t$ , 即得曲线上的定点  $M(x, y, z)$ ; 设这是普通点, 又是单点 [223]. 给  $t$  以增量  $\Delta t$ , 则与参变量的新值  $t + \Delta t$  对应的将是另一点  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . 割线  $MM_1$  的方程为

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z},$$

式中的  $X, Y, Z$  是流动坐标. 如果我们用  $\Delta t$  除所有的分母, 这些方程的几何意义并不会改变:

$$\frac{X - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

若当  $\Delta t \rightarrow 0$  时这些方程在极限情形中仍保持确定的意义, 则由此就能证明割线的极限位置 (即切线) 的存在. 但取极限我们得到

$$\frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t} = \frac{Z - z}{z'_t}, \quad (9)$$

这些方程, 由于不是所有的分母都等于零, 确实表示着直线. 这样, 在曲线的每一普通点, 切线必存在, 且可用这些方程来表达. 对于奇异点, 关于切线的问题仍未获得解决.

**附注** 我们在割线方程内在  $\Delta t \rightarrow 0$  时求其极限; 现在要证明这就相当于假定  $\overline{MM_1} \rightarrow 0$ . 由于函数  $\varphi, \psi, \chi$  的连续性, 从  $\Delta t \rightarrow 0$  推得

$$\overline{MM_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \rightarrow 0.$$

为了证明其反面, 指定任意数  $\varepsilon > 0$ . 因为  $\overline{MM_1}$  是  $\Delta t$  的连续函数, 故当  $|\Delta t| \geq \varepsilon$  时这函数有最小值  $\delta$ , 显然  $\delta$  是正的 (因为假定所取的点是单点, 即不能由异于  $t$  的参变量的值得出). 于是

当  $\overline{MM_1} < \delta$  时, 必须  $|\Delta t| < \varepsilon$ , 这就是所要证明的.

有时方程 (9) 写成

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

的形式更为便利, 它是以  $dt$  遍乘 (9) 中所有的分母而得出.

若用  $\alpha, \beta, \gamma$  表示切线与三坐标轴所夹的角, 则方向余弦  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  可表示为:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x'_t}{\pm \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}, \\ \cos \beta &= \frac{y'_t}{\pm \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z'_t}{\pm \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}. \end{aligned}$$



根式前的符号视切线方向的选择而定.

关于由隐式方程  $F(x, y, z) = 0$  及  $G(x, y, z) = 0$  给定的曲线的切线问题, 我们将在 3° 内考察.

2° 今设曲面由显式方程  $z = f(x, y)$  给定. 我们在 180 内已给出切面的定义, 且在函数  $f(x, y)$  是可微分的假定之下<sup>①</sup>, 求出这切面的方程 [180(6)]:

$$Z - z = f'_x(x, y)(X - x) + f'_y(x, y)(Y - y).$$

普通使用记号

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = q,$$

而把切面方程写成:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \quad (10)$$

若  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  是曲面的法线 (即在切点所作切面的垂线) 的方向余弦, 则有表达式

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{-p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, & \cos \mu &= \frac{-q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \end{aligned} \quad (11)$$

在根式前的双重符号对应于法线的两个相反方向.

现在在曲面上通过被考察点作一任意曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

于是关于  $t$  将恒等地成立

$$\chi(t) = f(\varphi(t), \psi(t)),$$

在恒等式中对  $t$  施行微分 [181]:

$$\chi'(t) = p\varphi'(t) + q\psi'(t).$$

在被考察的非奇异点取此曲线的切线如 (9) 的形式. 最后, 若在这一等式内根据 (9) 把导数  $\varphi', \psi', \chi'$  换成与它们成比例的  $X - x, Y - y, Z - z$ , 则得出 (10). 这样, 切线 (9) 必定全部位于切面 (10) 内<sup>31)</sup>. 因此, 曲面在其上一定点的切面又可定义为: 通过这点沿着曲面的一切曲线在这点的切线都贴合于其上的平面<sup>②</sup>.

<sup>①</sup>我们在此处既已假定偏导数存在且为连续, 因此必定是可微分的 [179].

<sup>②</sup>关于这事已在 180 内讲过一部分.

<sup>31)</sup>同样可以验证, 与曲面上过点  $x_0$  的曲线相切的切线可以填满整个曲面的切平面.



若曲面由隐式方程  $F(x, y, z) = 0$  给定, 那么, 假定在被考察点  $F'_z \neq 0$ , 在它的邻域内就可以用显式方程  $z = f(x, y)$  来表示曲面, 于是切面的存在就有了保证. 因为在这情形

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

故把这些  $p$  及  $q$  之值代入方程 (10) 内, 就容易把它变成

$$F'_x(x, y, z)(X - x) + F'_y(x, y, z)(Y - y) + F'_z(x, y, z)(Z - z) = 0. \quad (12)$$

显然, 即使  $F'_z = 0$ , 只要其他二导数  $F'_x$  及  $F'_y$  中有一个异于 0, 切面方程仍可以表示为这种形式. 只有在奇异点这方程才失去意义 (而关于切面的问题仍未获得解决).

3° 现在容易领会, 当曲线由二隐式方程

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

给定时, 即表示为对应的二曲面的交线时, 怎样去求它的切线. 若曲线上被考察的是普通点, 则在它的邻域内曲线可以用显式方程来表示 [227], 于是切线必定存在. 这切线显然是上述二曲面的切面的交线, 因此就可用方程

$$\left. \begin{aligned} F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) &= 0, \\ G'_x(X - x) + G'_y(Y - y) + G'_z(Z - z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

表示. [因为在普通点, 系数所成的矩阵中至少有一个行列式异于 0, 故由这方程组确实决定一直线.]

4° 回到曲面, 最后考察曲面由参变量方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

表示的情形. 仍限于讨论普通点 (又是单点); 因为 [228] 在它的邻域内曲面也可以用显式方程来表示, 故必定有切面存在. 其方程可以写成

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \quad (14)$$

式中系数  $A, B, C$  尚待确定.

若在曲面方程内固定与我们所考察的点对应的  $v$  值, 则得通过该点的坐标线 [“(v) 曲线”] 的方程. 这曲线在该点的切线用方程 [参阅 (9)]

$$\frac{X - x}{x'_u} = \frac{Y - y}{y'_u} = \frac{Z - z}{z'_u}$$

表示. 仿此, 固定  $u$ , 则得另一族中通过所给点的坐标线 [“(u)” 曲线], 它在这点的切线是

$$\frac{X - x}{x'_v} = \frac{Y - y}{y'_v} = \frac{Z - z}{z'_v}.$$



因为这二切线应当都在切面 (14) 内, 故条件

$$Ax'_u + By'_u + Cz'_u = 0,$$

$$Ax'_v + By'_v + Cz'_v = 0.$$

获得满足. 因此系数  $A, B, C$  应当与矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

的行列式成比例. 通常就令它们等于这些行列式:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \quad (15)$$

于是切面方程可以借助于行列式而写成:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0; \quad (16)$$

它在普通点确实表示一平面.

法线的方向余弦就是

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos \mu &= \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

**235. 例题** 1) 考察螺旋线(图 128):  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$ .

在这情形

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = a \cos t, \quad z'_t = c,$$

而切线方程为

$$\frac{X-x}{-a \sin t} = \frac{Y-y}{a \cos t} = \frac{Z-z}{c}.$$

切线的方向余弦为

$$\cos \alpha = -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

注意,  $\cos \gamma =$  常数, 因此, 也有  $\gamma =$  常数. 若设想螺旋线是绕在直圆柱面上的, 就可以说, 螺旋线与这柱面的一切母线交成定角<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>若把柱面沿母线切开并且铺平, 则螺旋线将变成直线, 它自然与一切铅垂线相交成同一角度. 这种想法使前述结果十分明显.



2) 椭圆面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

切面由公式 (12) 并运用椭圆面方程而求得:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

3) 锥面 (二次的):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .

切面:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 0.$$

锥面的顶点  $(0,0,0)$  是奇异点, 在那里这方程失去意义, 切面不复存在.

4) 维维亚尼曲线(图 127):  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = Rx$ .

切线由方程组 [参阅 (13)]

$$xX + yY + zZ = R^2, (2x - R)X + 2yY = Rx$$

表示着. 这方程组只在奇异点  $(R, 0, 0)$  不再表示直线.

5) 螺旋面:  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$ .

按照公式 (16), 切面方程为

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & c \end{vmatrix} = 0.$$

运用曲面方程, 这方程可以化简成为

$$\sin v \cdot X - \cos v \cdot Y + \frac{u}{c} \cdot Z = uv.$$

### 236. 平面曲线的奇异点 在此处我们将更详细地讨论由隐式方程

$$F(x, y) = 0$$

给定的曲线在它的奇异点  $(x_0, y_0)$  附近的性质. 我们并不想彻底解决这一问题, 只是希望向读者介绍奇异点的几种主要类型. 这时, 我们假定函数  $F$  是连续的且有连续的一、二阶偏导数. 不失一般性, 可以假设  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , 这不过把原点移至受检点. 于是有

$$F(0, 0) = 0, F'_x(0, 0) = 0, F'_y(0, 0) = 0.$$

引入记号

$$a_{11} = F''_{x^2}(0, 0), a_{12} = F''_{xy}(0, 0), a_{22} = F''_{y^2}(0, 0).$$

假定  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  中至少有一数不为零, 我们将应用  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  的符号来把奇异点分类. 本目的研究与 197 的研究密切相关.



$$1^\circ \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

在这情形, 我们知道, 函数  $F(x, y)$  在原点有极值. 这就是说, 在这点的充分小邻域内  $F > 0$  或  $F < 0$  (须除去原点本身, 在那里函数等于 0). 换句话说, 在所说的邻域内, 除原点以外没有曲线的任何一个点: 这时原点是曲线的孤立点.

可用下例说明这一情形:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{或} \quad (x^2 + y^2)(x + y - 1) = 0.$$

原点属于这两曲线, 且在这二曲线上都是孤立点. 但第一曲线全部只由一个点组成, 而第二曲线则除这点以外还包含着并不经过这点的直线  $x + y = 1$ .

$$2^\circ \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0.$$

如同 197, 在原点的邻域内可以把  $F(x, y)$  表示为下面的形式:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \{ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 \},$$

当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时, 式中的一切  $\alpha \rightarrow 0$ , 或引入极坐标  $\rho, \varphi$ :

$$F(x, y) = \frac{\rho^2}{2} \{ a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + \alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi \}.$$

在所考察的情形, 若再假定  $a_{22} \neq 0$ , 则三项式  $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$  有不同的实根  $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ , 并且可以分解成因式  $a_{22}(t - t_1)(t - t_2)$ . 令  $\varphi_1 = \operatorname{arctg} t_1, \varphi_2 = \operatorname{arctg} t_2$  于是  $t_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, t_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$ . 现在容易把括号  $\{\dots\}$  内的前三项变换形式成为:

$$\begin{aligned} & a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \\ &= a_{22} \cos^2 \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1)(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_2). \end{aligned} \quad (18)$$

由此很明显, 经过原点而与  $x$  轴成夹角  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  的直线——为了简明起见, 称它们为直线  $(\varphi_1)$  及  $(\varphi_2)$ ——分平面为二组对顶角, 在其中一组对顶角内, 上述三项式保持正号, 而在另一组对顶角内保持负号<sup>①</sup>(图 136).

现在把直线  $(\varphi_1)$  及  $(\varphi_2)$  放在两对任意狭的对顶角内——两对对顶角各包含在直线  $(\varphi_1 - \varepsilon)$  与  $(\varphi_1 + \varepsilon)$  或  $(\varphi_2 - \varepsilon)$  与  $(\varphi_2 + \varepsilon)$  之间 (这些角见图 136 中的阴影部分). 取以原点为心而有充分小的半径  $r_\varepsilon$  的圆, 可以断定——除去上述画着阴

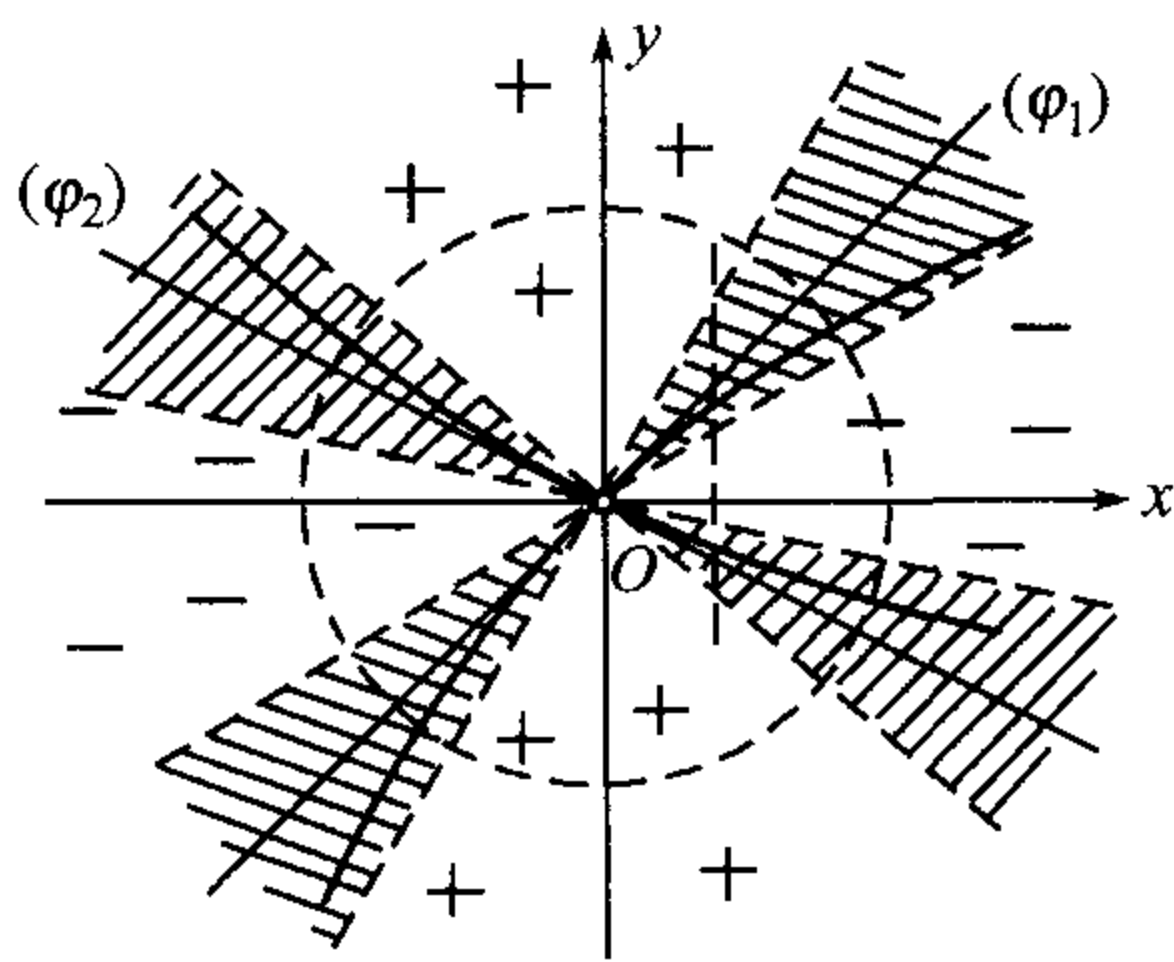


图 136

<sup>①</sup>此处我们比 197, 2° 内所说的略为深入了些: 在那里我们只要断定有二直线存在, 在这二直线上三项式有异号, 就已够了.



影的角——圆内有两组对顶角, 在其中每一组内函数  $F(x, y)$  本身保持一定的符号: 在其中之一组内为正, 在另一组内为负 (见图 136). 实际上, 因为当角在区间

$$(\varphi_1 - \varepsilon, \varphi_1 + \varepsilon) \text{ 及 } (\varphi_2 - \varepsilon, \varphi_2 + \varepsilon)$$

以外变动时, 三项式 (18) 不变为 0, 故它的绝对值必大于某一正数  $m_\varepsilon$ . 另一方面, 在  $\rho$  充分小时  $\alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi$  的绝对值将小于  $m_\varepsilon$ . 由此推得我们的论断 (参阅 197,  $1^\circ$  内的论断).

现在考察圆内画着阴影的二对对顶扇形, 例如以直线  $(\varphi_1 - \varepsilon)$  及  $(\varphi_1 + \varepsilon)$  为界的那一对. 因为在这些直线上函数有相反的符号, 故在与上述扇形相交的每一铅直线上, 必能求得一点, 在该点  $F(x, y)$  等于 0, 即这点是我们曲线上的点. 这由连续函数的性质[80]可知, 只要把它应用于  $y$  (当固定  $x$  的值时) 的函数  $F(x, y)$ <sup>①</sup>.

这样, 在每一对画着阴影的扇形之内必有经过原点的曲线的一支, 同时在扇形之外而属于圆的范围内却没有曲线的点. 由于  $\varepsilon$  是任意的, 显然, 在原点这些曲线支各与直线  $(\varphi_1)$  及  $(\varphi_2)$  相切.

可是, 在上述的铅直线上使  $F(x, y) = 0$  的是否只有一点, 这问题尚未解决. 假如能找出两个这种点, 则按照罗尔定理 [111], 在那一铅直线上位于那两点之间必能找出使  $F'_y(x, y) = 0$  的点. 于是, 要证明它是唯一的, 我们就只需证明, 至少在原点的充分近处, 不可能成立这种等式.

试假定其反面, 设对于某一点序列  $\{(x_n, y_n)\}$  有  $F'_y(x_n, y_n) = 0$ , 式中的  $x_n \rightarrow 0$  且  $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = t_1$ . 对于函数  $F'_y(x, y)$  应用有限增量公式 [183(10)]:

$$\begin{aligned} 0 &= F'_y(x_n, y_n) - F'_y(0, 0) \\ &= F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n) \cdot x_n + F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n) \cdot y_n \quad (0 < \theta_n < 1) \end{aligned}$$

或

$$F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n) + F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n) \cdot \frac{y_n}{x_n} = 0.$$

使它趋于极限, 最后得  $a_{12} + a_{22}t_1 = 0$  或  $t_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ , 这是不正确的: 因为这种  $t_1$  的值只有在三项式  $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$  有等根时才能够得到.

从刚才所讲的顺便推得, 在原点的充分近处, 除了原点本身以外, 上述二支曲线上再没有一个是奇异点了.

仿此可以详尽地说明, 当  $a_{22} = 0$ , 但  $a_{11} \neq 0$  或  $a_{11} = a_{22} = 0$ , 但  $a_{12} \neq 0$  的情形; 只需注意, 在最后情形, 坐标轴本身即为直线  $(\varphi_1)$  及  $(\varphi_2)$ .

因此, 在  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$  的假定之下, 点  $(0, 0)$  显出是曲线的二重点: 曲线的二支在这点相交, 每一支在交点各有自己的切线. 这两切线的斜率, 恒由方程  $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2 = 0$  确定; 只是若  $a_{22} = 0$ , 必须认为它除有限根以外还有无穷根.

<sup>①</sup>比较 206 关于隐函数的存在定理 1 的证明.



可以用我们已熟悉的曲线

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0 \quad [\text{双纽线, 图126}],$$

$$x^3 + y^3 - 2axy = 0 \quad [\text{笛卡儿叶形线, 图117}]$$

作为例题, 原点就是它们的二重点. 在第一曲线的情形, 有  $a_{11} = -4a^2, a_{12} = 0, a_{22} = 4a^2, t_1 = 1, t_2 = -1$ , 于是坐标角的分角线便是在原点的二切线. 在第二曲线的情形:  $a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} = -3a, t_1 = 0, t_2 = \infty$ , 即以  $x$  轴和  $y$  轴为二切线.

$$3^\circ \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

在这里也假设  $a_{22} \neq 0$ . 二次三项式  $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$  在这时有二重根  $t_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ . 如同上面那样令  $\varphi_1 = \arctgt_1$ , 经过原点作出与  $x$  轴组成角度  $\varphi_1$  的直线. 把它放在直线  $(\varphi_1 - \varepsilon)$  与  $(\varphi_1 + \varepsilon)$  之间的对顶角内 (图 137 有阴影的部分). 由类似于以前所应用的推论, 可以证明, 在有阴影的区域之外但在原点的充分近处, 函数  $F(x, y)$  保持确定的符号, 在两侧都相同: 是正或负, 视  $a_{22} > 0$  或  $a_{22} < 0$  而定. 今在直线  $(\varphi_1 \pm \varepsilon)$  上函数有同号, 故不能应用柯西定理.

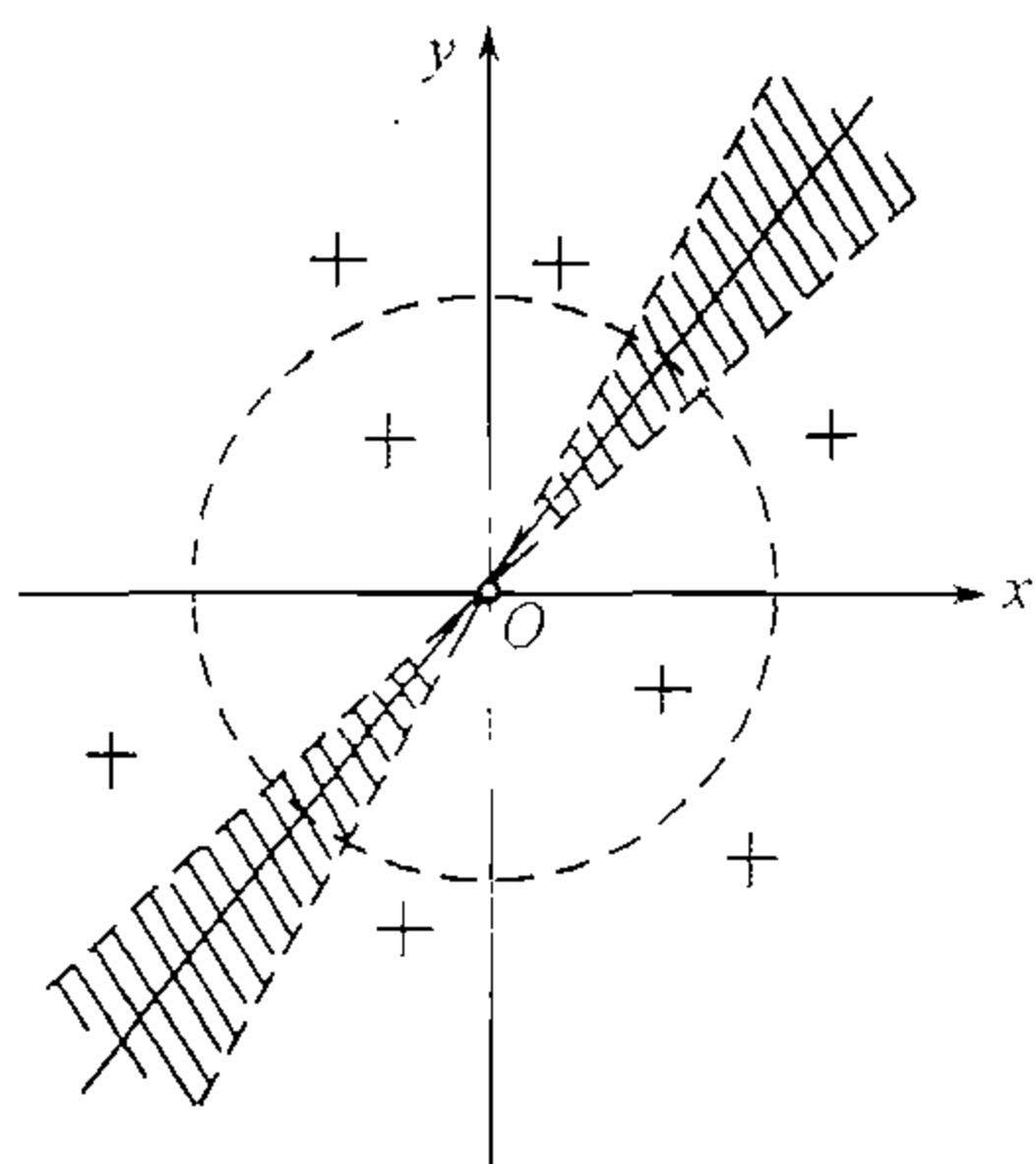


图 137

我们不再深入研究这一情形, 因为这需要更复杂的讨论和高阶导数, 我们仅以列举各种基本可能性为限.

a) 在原点的近处, 除它本身以外再没有曲线上其他的点: **孤立点** (如同  $1^\circ$  的情形).

例:

$$x^4 + y^2 = 0 \quad \text{或} \quad (x^4 + y^2)(x + y - 1) = 0.$$

对于这二“曲线”, 原点是孤立点.

б) 在画着阴影的二对顶角内 (在原点的充分近处) 每一铅直线上有曲线的二点, 曲线的二支都经过原点且在该点有公切线  $(\varphi_1)$ : **二重点** (如同  $2^\circ$  的情形).

例:

$$x^4 - y^2 = 0, \quad \text{即} \quad y = \pm x^2$$

是在原点与  $x$  轴相切的二抛物线.

в) 在画着阴影的二角的一个角内完全没有曲线的点, 而在另一角内有二支曲线, 它们在原点有公共切线  $(\varphi_1)$ , 并且好像是终止于原点. 在这里我们遇到奇异点的一种新类型: **歧点 (或尖点)**. 按照在这点相遇的二支是在公切线的异侧或同侧, 歧点又



可分为第一类及第二类两种.

曲线

$$y^2 - x^3 = 0$$

(半立方抛物线, 图 115) 可以作为在原点有第一类型歧点的曲线的例子. 比较稀有的第二类型歧点可于下例见之:

$$x^5 - (y - x^2)^2 = 0 \quad \text{或} \quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x} \quad (x \geq 0).$$

曲线的二支都在原点与  $x$  轴相切, 并且都位于  $x$  轴的上侧 (至少在原点近处是如此)(图 138).

若  $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ , 就必须考察高阶导数. 在这情形可能有更复杂的奇异点 (三重点 或一般地说,  $n$  重点等等).

**237. 曲线用参变量表示式的情形** 关于用参变量方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

给定的平面曲线的奇异点再说几句话.

设在  $t = t_0$  时有

$$x'_0 = \varphi'(t_0) = 0 \quad \text{及} \quad y'_0 = \psi'(t_0) = 0,$$

但二阶导数  $x''_0$  及  $y''_0$  之中至少有一个, 例如  $x''_0$  异于零.

经过曲线上与参变量的值  $t_0$  及  $t$  相对应的两点  $(x_0, y_0)$  及  $(x, y)$  引一割线. 它的方程可以写成:

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0}.$$

但按照泰勒公式 [具有佩亚诺式的余项, 124(10a)] 因为  $x'_0 = y'_0 = 0$ , 就有

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}(x''_0 + \alpha)(t - t_0)^2, \\ y - y_0 &= \frac{1}{2}(y''_0 + \beta)(t - t_0)^2, \end{aligned}$$

式中  $\alpha$  及  $\beta$  当  $t \rightarrow t_0$  时趋于 0. 把它代入割线方程, 从二分母中约去  $\frac{1}{2}(t - t_0)^2$  后, 就化成

$$\frac{X - x_0}{x''_0 + \alpha} = \frac{Y - y_0}{y''_0 + \beta},$$

在此处可以求这式在  $t \rightarrow t_0$  时的极限<sup>①</sup>, 由这种方法就得出切线方程:

$$\frac{X - x_0}{x''_0} = \frac{Y - y_0}{y''_0} \quad \text{或} \quad Y - y_0 = \frac{y''_0}{x''_0}(X - x_0). \quad (19)$$

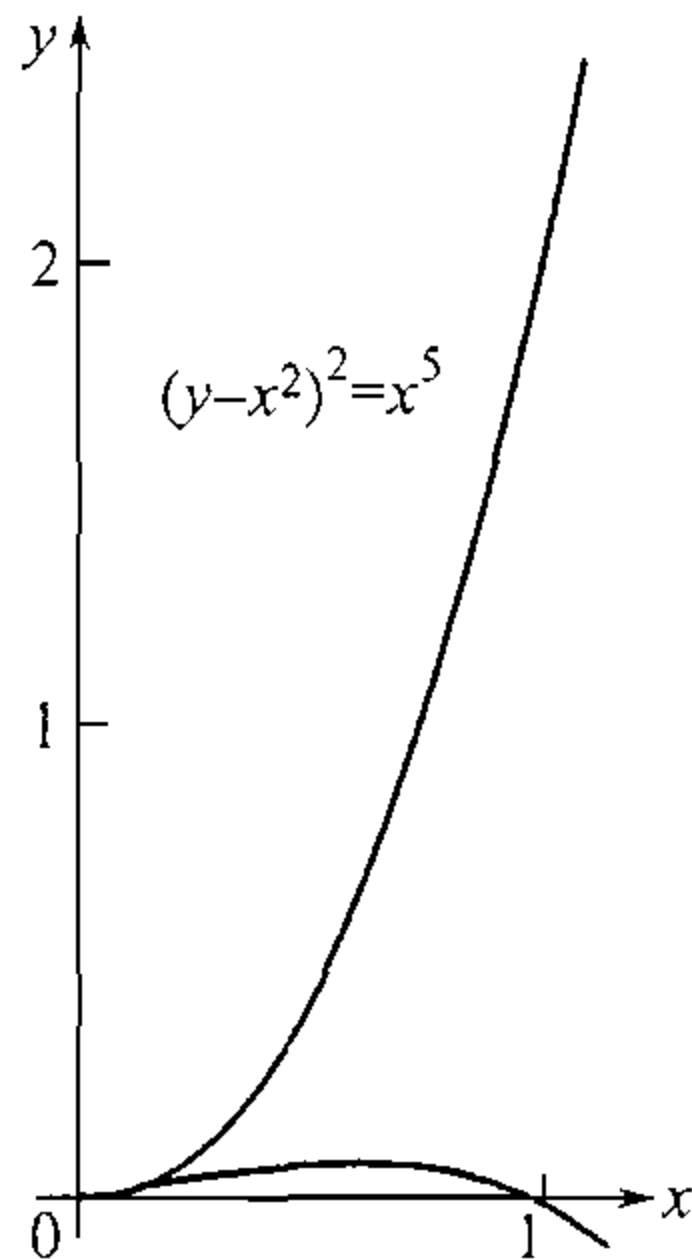


图 138

<sup>①</sup> 参阅在 234 目内的附注. 当被考察的点是单点时, 那段附注在这里也适用.



我们曾假定  $x_0'' \neq 0$ ; 例如设  $x_0'' > 0$ . 则函数  $x = \varphi(t)$  在  $t = t_0$  时有极小值 [137], 即在  $t$  值接近于  $t_0$  时  $x > x_0$  (在  $t < t_0$  及  $t > t_0$  时都是如此). 这样, 对应于  $t < t_0$  及  $t > t_0$  的二支曲线在点  $(x_0, y_0)$  相接合; 它们有 (斜的或水平的) 公切线, 且都在铅直线  $x = x_0$  的右侧. 换句话说, 在歧点 (图 139). 这是用参变量表示的曲线的奇异点的基本情形.

要略为深入一步确定这歧点是哪一类型, 也是容易的. 为此目的, 引进三阶导数, 把增量  $x - x_0$  及  $y - y_0$  写成

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}x_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}(x_0''' + \tilde{\alpha})(t - t_0)^3, \\ y - y_0 &= \frac{1}{2}y_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}(y_0''' + \tilde{\beta})(t - t_0)^3, \end{aligned}$$

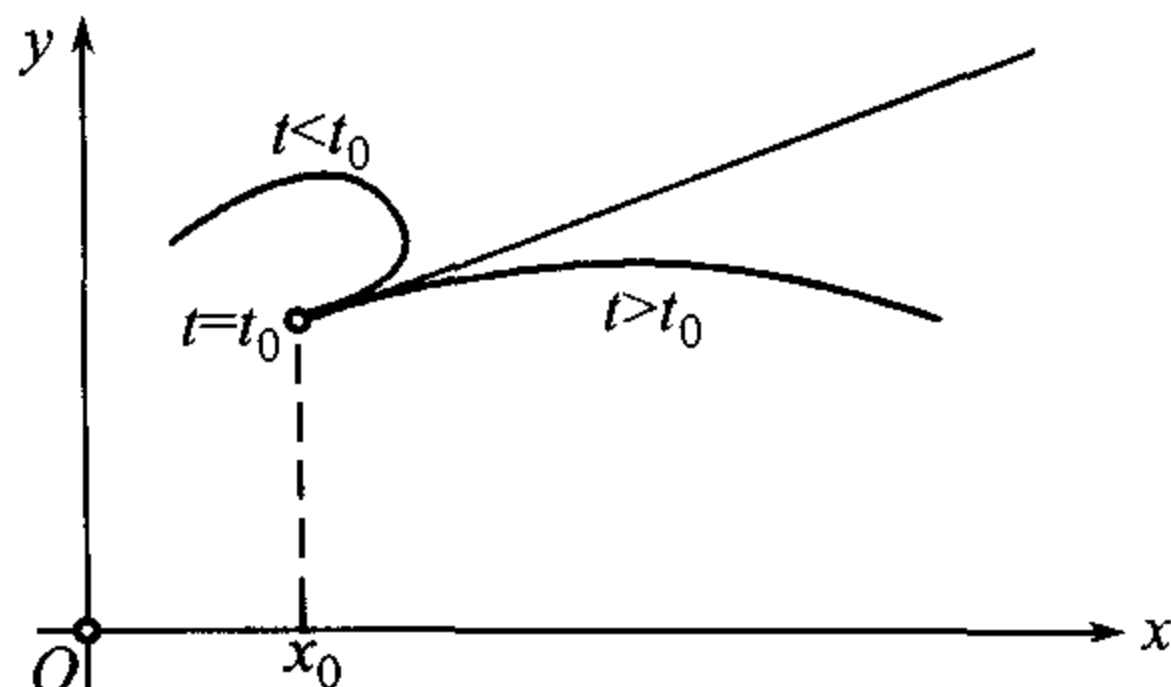


图 139

式中  $\tilde{\alpha}$  及  $\tilde{\beta}$  在  $t \rightarrow t_0$  时仍趋于 0.

利用方程 (19) 算出切线上的横标为  $x$  的点的纵标  $Y$ , 得

$$Y - y_0 = \frac{y_0''}{x_0''}(x - x_0) = \frac{1}{2}y_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y_0''}{x_0''}(x_0''' + \tilde{\alpha})(t - t_0)^3.$$

最后, 作出对应于同一横标  $x$  的纵标  $Y$  和  $y$  的差:

$$-y = \frac{1}{6} \left( \frac{x_0'''y_0'' - x_0''y_0'''}{x_0''} + \tilde{\gamma} \right) (t - t_0)^3,$$

式中  $\tilde{\gamma}$  仍表示一个在  $t \rightarrow t_0$  时的无穷小.

现在只要  $x_0'''y_0'' - x_0''y_0''' \neq 0$  (这通常是成立的), 则当  $t < t_0$  及  $t > t_0$  时, 即对于在点  $(x_0, y_0)$  相遇的二支曲线, 差  $Y - y$  显然将有异号 (当然须假定, 我们的讨论以充分接近于  $t_0$  的  $t$  值为限). 故曲线的二支位于切线的两侧, 我们就证实它是第一类歧点.

我们已屡次遇见这类奇异点的例子: 旋轮线、圆外或圆内旋轮线、圆的渐伸线, 它们都有这种歧点 (图118 ~ 121).

在例外的情形, 可以出现  $x_0'''y_0'' - x_0''y_0''' = 0$ ; 那时  $Y - y$  的展开式将从  $t - t_0$  的四次或更高次的幂开始. 若这首项的幂是偶数次, 则被考察的奇异点是第二类歧点.

### §3. 曲线的相切

**238. 曲线族的包络** 若二曲线有公共点  $M_0$  且在这点有公切线, 则称二曲线在点  $M_0$  相切. 本节专门讲述关于平面曲线相切的一些问题.

在考察曲线族的包络之前, 先讨论曲线族的概念. 我们曾屡次遇见那样的曲线方程, 在它里面除了动点的流动坐标  $x$  及  $y$  以外还有一个或几个参变量出现. 在有



一个参变量, 如  $a$  的情形, 方程形如

$$F(x, y, a) = 0. \quad (1)$$

左端是三元函数, 其中变元  $a$  我们另外给以名称, 只因为它起了特殊的作用: 要得出具体的曲线, 参变量  $a$  的值必须固定. 当这数值变动时 (通常在某一区间之内), 一般说来, 将得出形状或位置不同的曲线.

一切这些曲线的集合就称为带有一个参变量的曲线族, 而方程 (1) 就称为曲线族的方程.

有时偶然遇见, 对于此类曲线族有一曲线存在, 它与曲线族内的每一曲线切于一点或几点, 而且它的全部即由这些切点组成 (图 140). 这种曲线称为所给定曲线族的包络. 我们即将指出, 怎样确定包络是否存在, 以及如果存在又怎样求出.

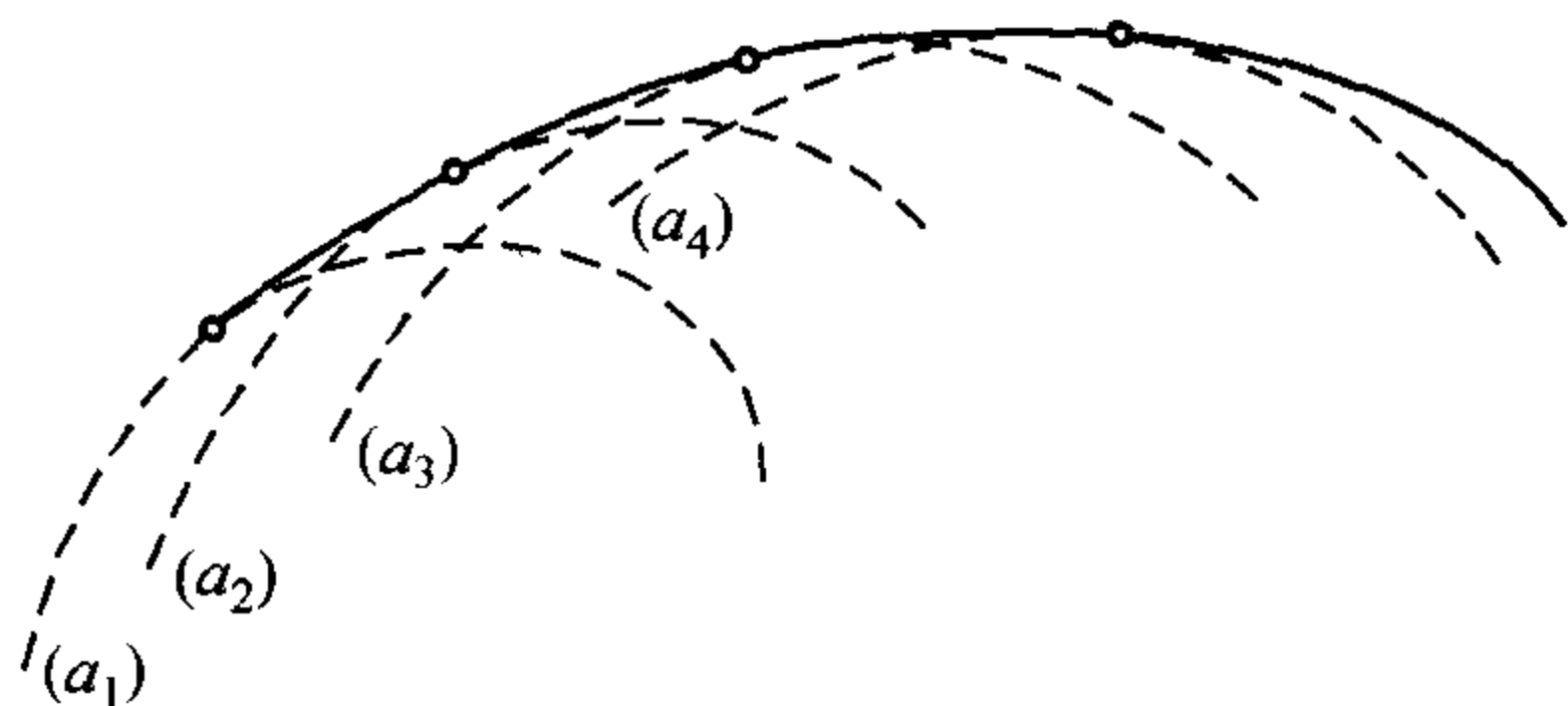


图 140

为此目的, 首先假设包络存在.

为了简单起见, 假定所说的包络 (准确些说, 是包络的各支) 与曲线族内的每一曲线只相切于一点. 于是这切点的坐标就由族中曲线的指定数, 即参变量  $a$ , 单值地确定着:

$$x = \varphi(a), \quad y = \psi(a). \quad (2)$$

由于包络全部由切点组成, 这二方程就给出包络的参变量方程.

我们假定函数  $F$  的偏导数及函数  $\varphi$  及  $\psi$  的导数都存在且连续.

点 (2) 又位于由同一参变量  $a$  所确定的曲线 (1) 上, 因此就有关于  $a$  的恒等式成立:

$$F(\varphi(a), \psi(a), a) = 0. \quad (3)$$

求它关于  $a$  的全微分, 得 [181, 185]<sup>①</sup>

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_a da = 0, \quad (4)$$

其中诸导数是用 (3) 内所导出的各变元的数值计算而得, 而  $dx$  及  $dy$  则表示函数 (2) 的微分.

<sup>①</sup>在此处顺便说及, 我们也利用函数  $F$  的偏导数的连续性.



现在我们要用解析方法表达包络在点 (2) 与曲线 (1) 相切的事实. 曲线 (1) 的切线 [参阅 230(5)]

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) = 0 \quad (5)$$

与曲线 (2) 的切线 [230(7)]

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} \quad (6)$$

应当重合. 这二直线重合的条件可以写成

$$F'_x dx + F'_y dy = 0. \quad (7)$$

这时如同上述,  $x$  及  $y$  取 (2) 中的数值, 而  $dx$  及  $dy$  是函数 (2) 的微分.

要注意, 只有假定被考察点并非二曲线的奇异点时, 方程 (5) 及 (6) 才实际上表示二曲线的切线. 虽然, 即使这点是这一或那一曲线的奇异点, 等式 (7) 仍然成立.

比较 (7) 与 (4) 并注意及  $da$  是任意数, 就得到  $F'_a = 0$ , 即

$$F'_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0. \quad (8)$$

恒等式 (3) 及 (8) 指出, 我们的未知函数 (2) 应当恒等地关于  $a$  满足方程组

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'_a(x, y, a) = 0. \quad (9)$$

因此, 若包络存在, 它的参变量方程 (2) 即可由方程组 (9) 解出  $x$  及  $y$  而求得.

若视  $a$  为变量时这方程组没有可以表为  $a$  的函数的解, 则事情很明显, 包络根本不存在. 现在假定解方程组 (9) 的结果得到方程组 (2), 表示一个没有奇异点<sup>①</sup>的曲线. 试问这曲线是否就是曲线族 (1) 的包络呢?

因为函数 (2) 满足方程组 (9), 故恒等式 (3) 及 (8) 成立. 于前一式施行微分而得 (4), 与 (8) 比较, 就得出等式 (7). 若点 (2)(不论哪一个  $a$ ) 不是对应曲线 (1) 的奇异点, 则方程 (5) 确实表示曲线 (1) 的切线, 而等式 (7) 就说明这切线与曲线 (2) 的切线 (6) 相重合. 在这情形, 曲线 (2) 确实是曲线族的包络.

在特殊情形, 例如, 若给定曲线根本没有奇异点, 则可保证曲线 (2) 一定是曲线族的包络.

反之, 若这种奇异点是有的, 且当  $a$  变动时它们的轨迹是曲线 (2), 则与它对应的函数  $\varphi$  及  $\psi$  必然满足方程组 (9)<sup>②</sup>, 虽然在这情形, 曲线 (2) 可能不是包络.

因此, 在有奇异点的情形, 由解方程组 (9) 的结果所得的曲线 (2) 就必须再加以检验: 它可能是包络, 也可能是曲线族中各曲线的奇异点的轨迹, 最后, 甚至可能一部分是包络而一部分是奇异点的轨迹.

<sup>①</sup>当存在个别的奇异点时, 我们的讨论仅以不包含奇异点的参变量的变动区间为限.

<sup>②</sup>对于它们 (3) 成立, 因此 (4) 也成立. 其后, 如同本文前面所述, (7) 也成立; 与 (4) 比较, 就得出 (8).



通常在求包络时, 并非达到方程组 (9) 即止, 而是还要做下去 —— 从它们消去  $a$ . 换句话说, 要求得形如

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (10)$$

的关系式, 其中已不含有  $a$ ; 这个关系式就是一个必要而且充足的条件, 对于每一对  $x, y$  的值, 可以找出这样一个  $a$  的值, 使得三者同时满足方程组 (9).

由解方程组 (9) 所得出的曲线 (2) 的一切点都应当满足方程 (10). 因此, 若方程 (10) 不表示任何曲线, 则立即知道没有包络. 至若方程 (10) 表示一曲线 (它称为曲线族的判别曲线), 则如上所述, 它尚需经过检定. 在它的组成内应当出现包络 (如果存在的话), 也应当有奇异点的轨迹 (若有这种点存在). 此外, 在这里还可能有一种麻烦, 必须用检定来除去它: 就是在判别曲线的组成内可能有曲线族中的一条或几条特殊曲线参加在内. 当判别曲线的无穷多个点对应着同一个  $a$  值, 与它们同时满足方程组 (9), 就是如此<sup>①</sup>.

上述一切最好用例题来说明.

### 239. 例题 1) 求圆族

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \text{常数})$$

(图 141) 的包络.

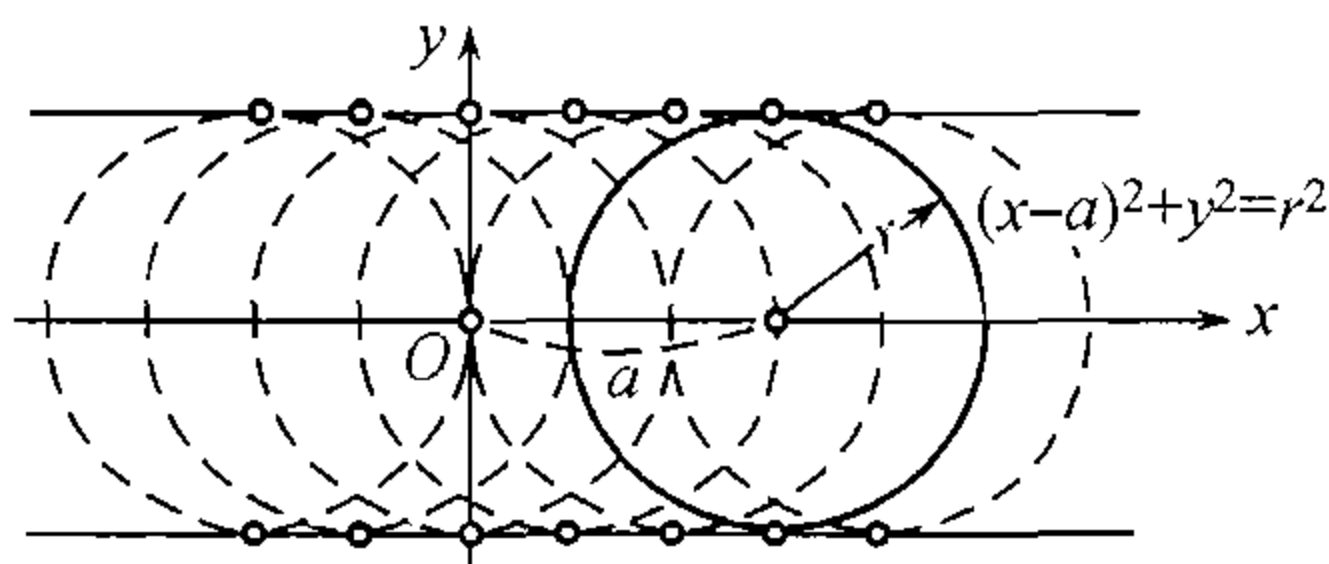


图 141

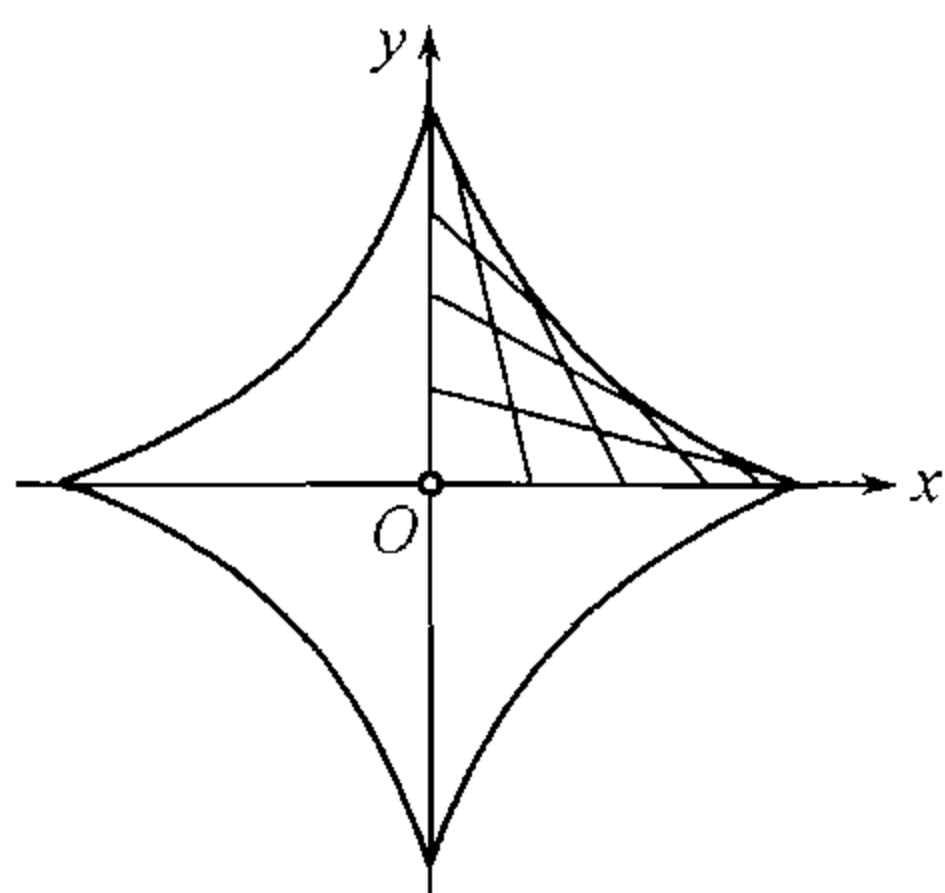


图 142

关于  $a$  微分, 得  $-2(x - a) = 0$ . 消去  $a$ , 得  $y^2 - r^2 = 0$ , 即得  $y = \pm r$ : 平行于  $x$  轴的二直线, 显然便是包络<sup>②</sup>.

<sup>①</sup>若直接考察方程组 (9), 则这种可能性就不存在了, 因为仅在明知  $a$  是变量时方可由方程组 (9) 解得判别曲线的参变量方程.

<sup>②</sup>若取圆族的方程为

$$x - a \pm \sqrt{r^2 - y^2} = 0,$$

则关于  $a$  微分的结果就成为  $-1=0$ ; 由于这等式的不可能, 似乎将得出没有包络的结论. 然而这结论是不正确的, 因为一切所讲的理论都假定了曲线族方程左端的偏导数存在且连续, 而此处 (正是当  $y = \pm r$  时) 却没有关于  $y$  的有限导数.



2) 相距为定长  $a$  的两点分别沿二坐标轴而滑动 (图 142), 求其各种位置的联线的包络. 取动直线的垂线与  $x$  轴所夹的角  $\theta$  作为参变量, 直线方程就可以写成

$$\frac{x}{\sin \theta} + \frac{y}{\cos \theta} = a.$$

对  $\theta$  施行微分:

$$-\frac{x}{\sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{y}{\cos^2 \theta} \sin \theta = 0$$

或

$$\frac{x}{\sin^3 \theta} = \frac{y}{\cos^3 \theta}.$$

但此式也可写成

$$\frac{\frac{x}{\sin \theta}}{\sin^2 \theta} = \frac{\frac{y}{\cos \theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{\frac{x}{\sin \theta} + \frac{y}{\cos \theta}}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = a,$$

由此

$$x = a \sin^3 \theta, \quad y = a \cos^3 \theta.$$

读者由这些方程当能认出它是星形线的参变量表示式 [224.4):  $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ ], 它就是本题内的包络.

对于星形线的这一性质, 我们已遇见过一次 [231.3)].

3) 在许多场合, 包络好像就是这族曲线所占有的一部分平面的境界线一样. 但这并不永远如此, 举例说明, 如:

$$y = (x - a)^3$$

图 (143).

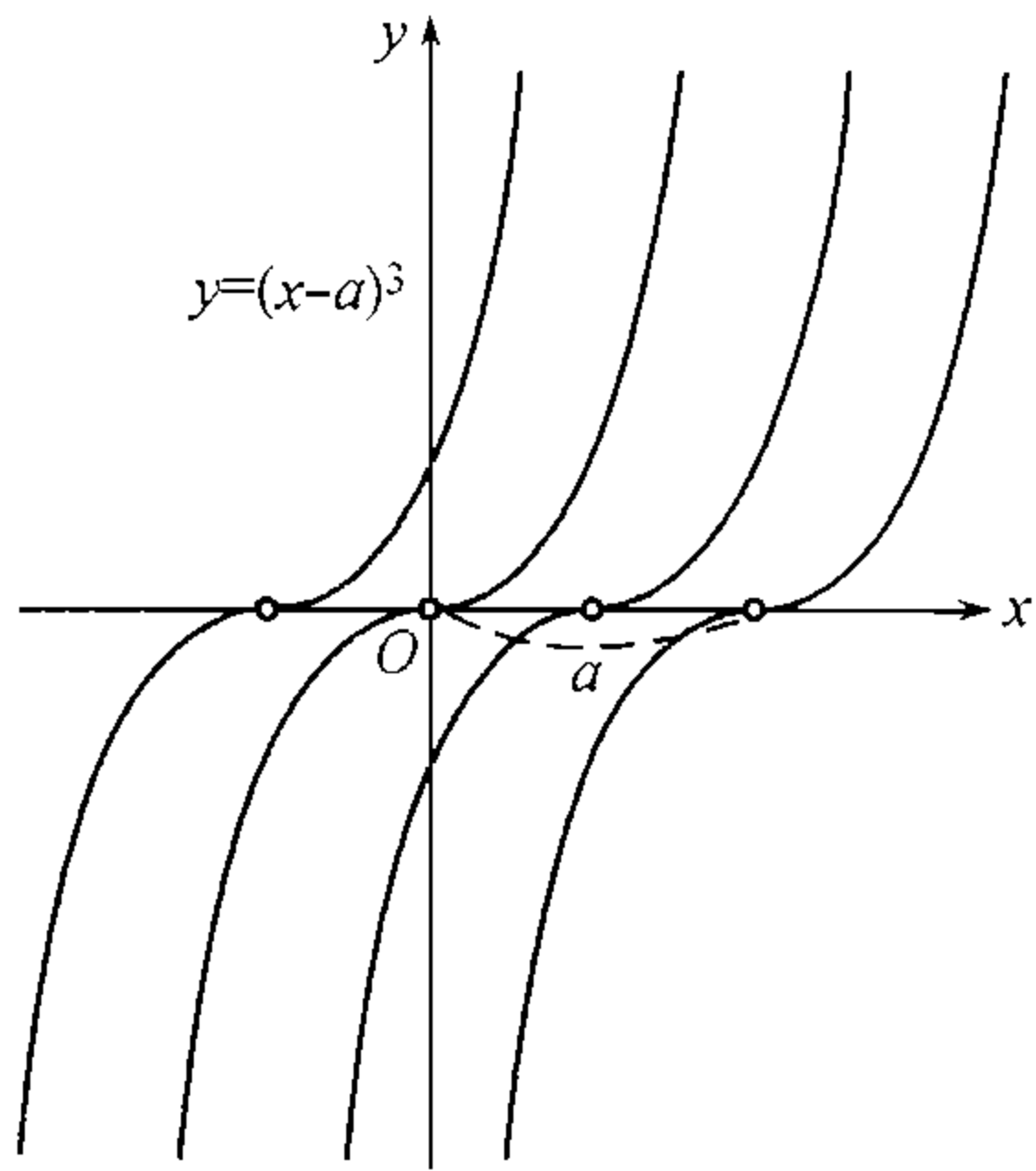


图 143

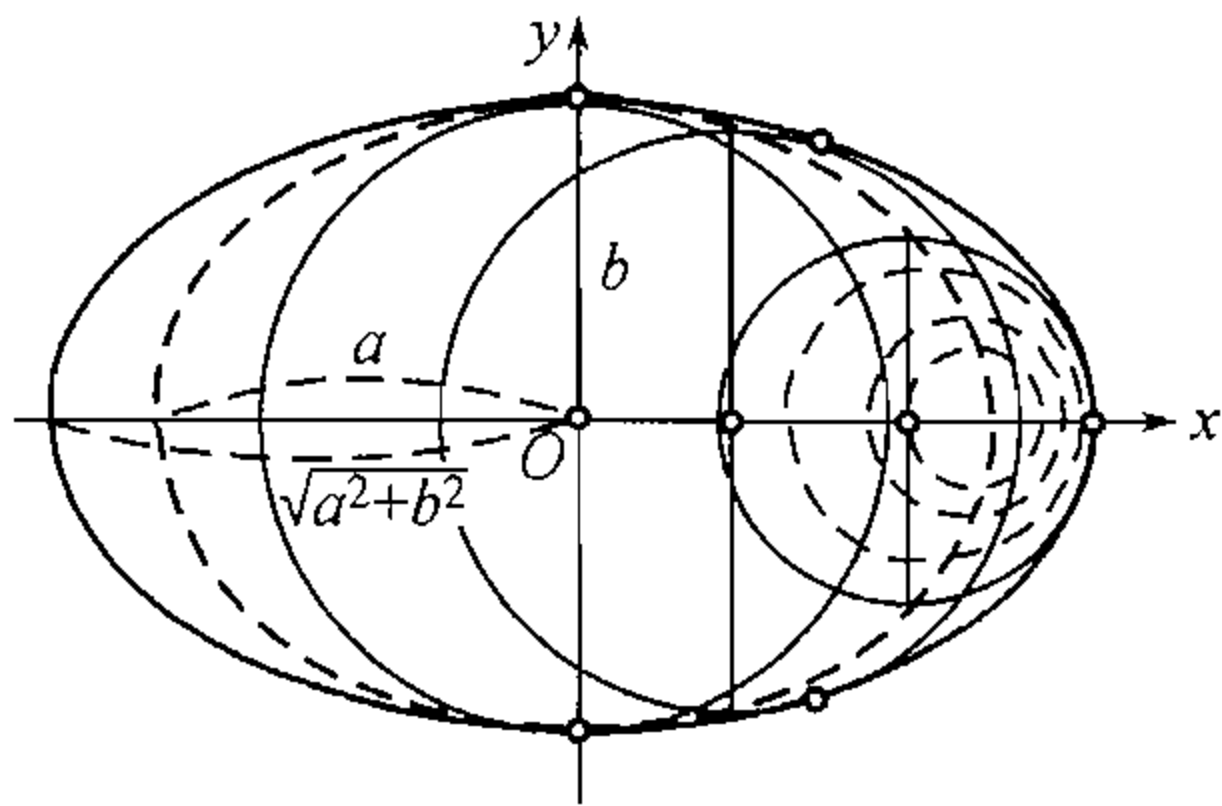


图 144

在这里, 与全族曲线相交的  $x$  轴是包络. 类似于此的情况还可在更复杂的例题内看出.

4) 求抛物线族  $y = a^2(x - a)^2$  的包络.

把这方程与方程

$$2a(x - a)^2 - 2a^2(x - a) = 2a(x - a)(x - 2a) = 0$$



联立, 求得  $x = a(y = 0)$ , 或  $x = 2a(y = a^4)$ , 于是判别曲线由直线  $y = 0$  及曲线  $16y = x^4$  组成. 前者与一切抛物线在其顶点相切. 后者与每一抛物线有三个公共点: 在  $x = 2a$  时与它相切, 在  $x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$  时与它相交.

### 5) 考察椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

以椭圆内平行于  $y$  轴的弦为直径而作圆, 试求这圆族的包络 (图 144).

取圆心的横标  $t$  作为参变量, 把这圆族的方程写成

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2) = 0,$$

其中  $t$  在区间  $[-a, a]$  内变动. 就有

$$F'_t = -2(x - t) + \frac{2b^2}{a^2}t = 0, \quad \text{由此有} \quad t = \frac{a^2}{a^2 + b^2}x.$$

把这  $t$  的值代入方程  $F = 0$  内, 我们得到包络方程如下:

$$\left(x - \frac{a^2x}{a^2 + b^2}\right)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^4x^2}{(a^2 + b^2)^2}\right) = 0$$

或经过变换后:

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

我们得一椭圆. 它与已给椭圆有相同的对称轴.

稀奇的是: 这椭圆并不与圆族内的一切圆相切. 若不由方程  $F = 0$  及  $F'_t = 0$  消去  $t$ , 而从它们解出用  $t$  表达  $x$  及  $y$ :

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a^2}t, \quad y = \pm \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 + b^2)t^2},$$

则这情况就容易注意到了. 实际上, 由此立即看出,  $y$  的表达式只是在  $|t| \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  时始能取实数值. 这就是说, 仅仅与上述  $t$  值对应的一部分圆族有包络存在.

这个有教训意义的例子告诉我们: 包络用参变量表示法可能是更便利的, 因为由它们容易看出, 对于给定曲线族的那一部分确实有包络存在.

### 6) 同心圆族

$$x^2 + y^2 = a \quad (a \geq 0)$$

无包络: 关于  $a$  微分立即得出不可能相等的等式  $0 = 1$ .

### 7) 考察两个半立方抛物线族

$$(a) \quad (y - a)^2 - x^3 = 0$$

及

$$(b) \quad y^2 - (x - a)^3 = 0$$

(图 145). 判别曲线为

$$(a) \quad x = 0, \quad (b) \quad y = 0,$$



在两种情形都是奇异点的轨迹. 但在 (6) 的情形它同时又是包络; 在 (a) 的情形却没有包络.

8) 另一种半立方抛物线族

$$(y-a)^2 - (x-a)^3 = 0$$

(图 146) 给出这种类型的更复杂的例子. 在这里, 判别曲线分解为两直线:  $y = x$  及  $y = x - \frac{4}{27}$ . 前者只是奇异点的轨迹, 而后者是包络.

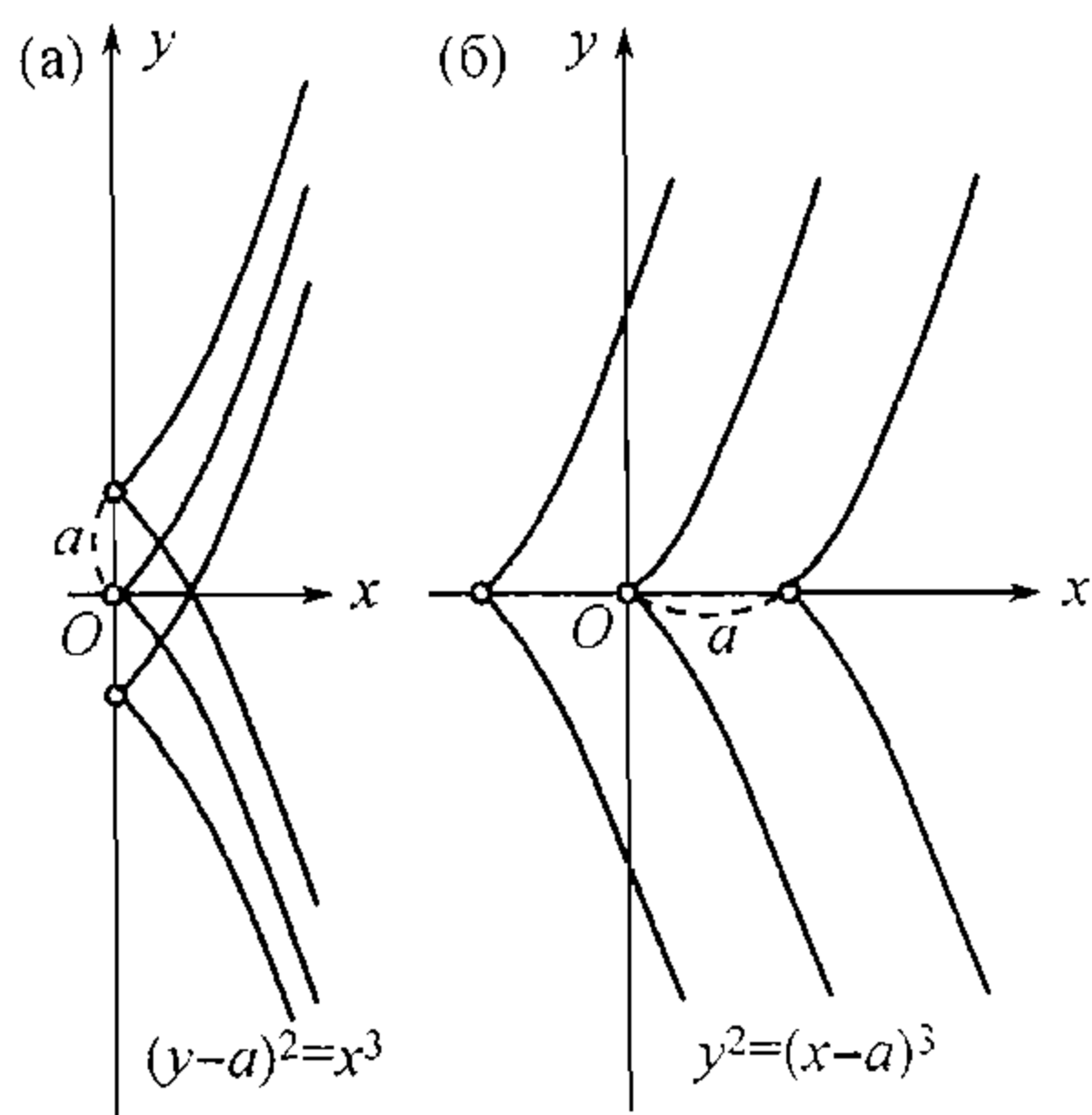


图 145

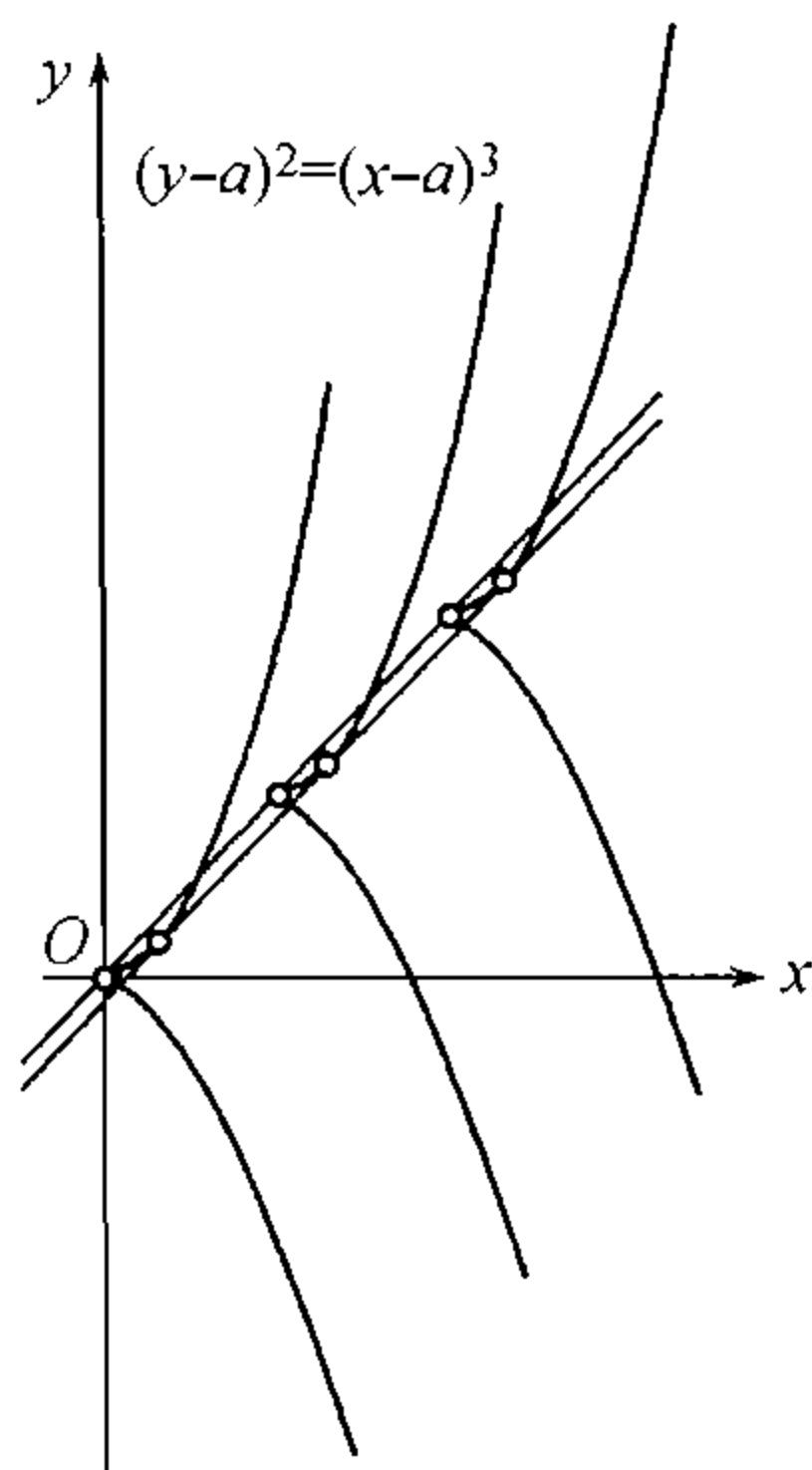


图 146

9) 最后, 考察直线族

$$4(1+t)x = t^2y.$$

若对  $t$  施行微分, 得  $4x = 2ty$ , 从二方程消去  $t$ , 结果为

$$x(x+y) = 0.$$

这方程代表二直线:  $x = 0$  及  $y = -x$ , 它们是给定线束内 (在  $t = 0$  及  $t = -2$  时) 的成员. 它们之中的任何一条既不是包络, 也不是奇异点的轨迹. 在这情形并无包络.

这例题说明我们前面所曾指出的可能性: 方程 (10) 并不代表包络, 而是代表曲线族内的一条或几条曲线. 假如我们不消去  $t$ , 而企图用  $t$  作为参变量去表达  $x$  及  $y$ , 则显然是不可能的.

**240. 特征点** 与包络的概念密切关联的, 是另一有趣的几何概念——特征点. 从曲线族

$$F(x, y, a) = 0$$

内取出由参变量的值  $a$  所确定的一条曲线. 给  $a$  以一增量  $\Delta a$ ; 与参变量值  $a + \Delta a$  对应的是曲线族内“接近”于前者的另一曲线

$$F(x, y, a + \Delta a) = 0.$$



可能遇见, 在  $\Delta a$  充分小时二曲线相交于一点或几点. 当  $\Delta a$  趋于零时, 这些交点将怎样沿着第一曲线移动. 若在这时交点中的某一点趋于确定的极限位置, 则这极限点就称为原曲线上的特征点(图 147). (读者注意, 特征点不仅与它所在的那一曲线有关系, 并且与全曲线族有关系. 对于单独一条曲线而言特征点是毫无意义的.)

上述曲线的交点应当满足方程组

$$F(x, y, a) = 0, \quad F(x, y, a + \Delta a) = 0$$

或与它们等价的方程组

$$F(x, y, a) = 0, \quad \frac{F(x, y, a + \Delta a) - F(x, y, a)}{\Delta a} = 0. \quad (11)$$

使  $\Delta a$  趋向于零, 我们就得出已经熟悉的方程组 (9):

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'_a(x, y, a) = 0,$$

这样, 在  $a$  值给定时, 特征点的坐标应当满足这方程组.

准确些说, 若固定交点的坐标  $x$  及  $y$ , 则代替 (11)(应用拉格朗日公式) 可以写成:

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'_a(x, y, a + \theta \Delta a) = 0 \quad (0 < \theta < 1).$$

若在  $\Delta a \rightarrow 0$  时坐标  $x, y$  的极限各为  $\bar{x}, \bar{y}$ , 则于上列等式取极限, 由于函数  $F$  及  $F'_a$  的连续性, 容易证实特征点的坐标  $\bar{x}, \bar{y}$  确能满足方程组 (9).

现在假设在族内的每一曲线上有特征点存在. 那时就可以提出关于特征点的轨迹的问题. 若这轨迹就是形如 (2) 的曲线, 则该方程组内所出现的函数  $\varphi(a), \psi(a)$  应当满足方程组 (9), 就是说, 它们可以由这方程组关于  $x, y$  求解而得出. 同样, 那轨迹上的所有点也都满足方程 (10), 即这轨迹必然列入判别曲线的组成内.

由刚才所讲的可以明白, 若特征点存在, 它的轨迹就是包络或奇异点的轨迹的全部或一部分.

容易证实, 在前段的例题 1)、2)、4)、5) 内特征点的轨迹与包络重合. 这在某种意义上, 是一般可以遇见的情形. 但在例 7)(a) 内特征点的轨迹只是奇异点的轨迹. 而在例 3) 及 7)(b) 内, 曲线之间根本没有交点 (虽然包络存在).

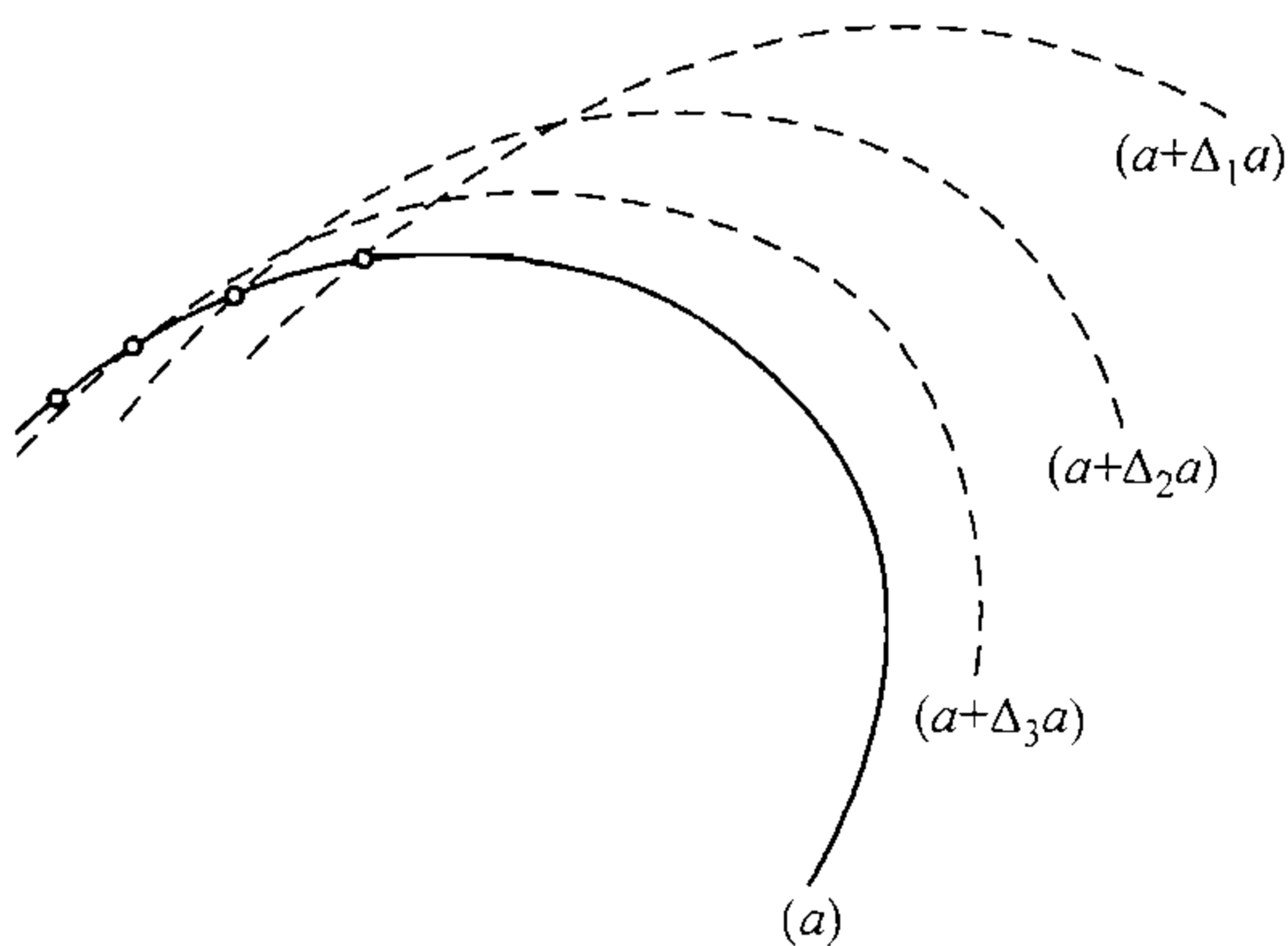


图 147



**241. 二曲线相切的阶** 考察在点  $M_0$  相切的二曲线.

若二曲线用显式方程  $y = f(x)$  及  $Y = g(x)$  给定, 又  $M_0$  有横标  $x_0$ , 则纵标及切线斜率的互相重合可以这样写出:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0).$$

为了要表出所考察的两曲线在点  $M_0$  的邻域内互相接近的程度, 可以在二曲线上各取横标为  $x$  的点  $M$  及  $m$  (图 148), 而求无穷小线段

$$mM = Y - y = g(x) - f(x) = \varphi(x)$$

关于基本无穷小  $x - x_0$  的阶. 若这阶等于  $n+1$  (或大于  $n+1$ ), 就说二曲线在点  $M_0$  相切的阶为  $n$  (或高于  $n$ ).

我们看到, 当相切关系存在时, 恒有

$$\varphi(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = g'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

设在点  $x_0$  函数  $f(x)$  及  $g(x)$  有直到  $(n+1)$  阶为止的所有导数, 而且

$$f''(x_0) = g''(x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0),$$

则

$$\varphi''(x_0) = g''(x_0) - f''(x_0) = 0, \dots,$$

$$\varphi^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

关于导数  $f^{(n+1)}(x_0)$  及  $g^{(n+1)}(x_0)$  的数值, 暂时尚未作出任何假定. 现在把带有佩亚诺式余项的泰勒公式 [124(10a)] 应用于函数  $\varphi(x)$ :

$$mM = Y - y = \varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (12)$$

于是我们看到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{mM}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = \frac{g^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.$$

这样, 如果  $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$ , 则二曲线有  $n$  阶的相切, 如果有  $f^{(n+1)}(x_0) = g^{(n+1)}(x_0)$ , 则相切的阶高于  $n$ . 由此 (假定一切提到的导数都存在) 推得:

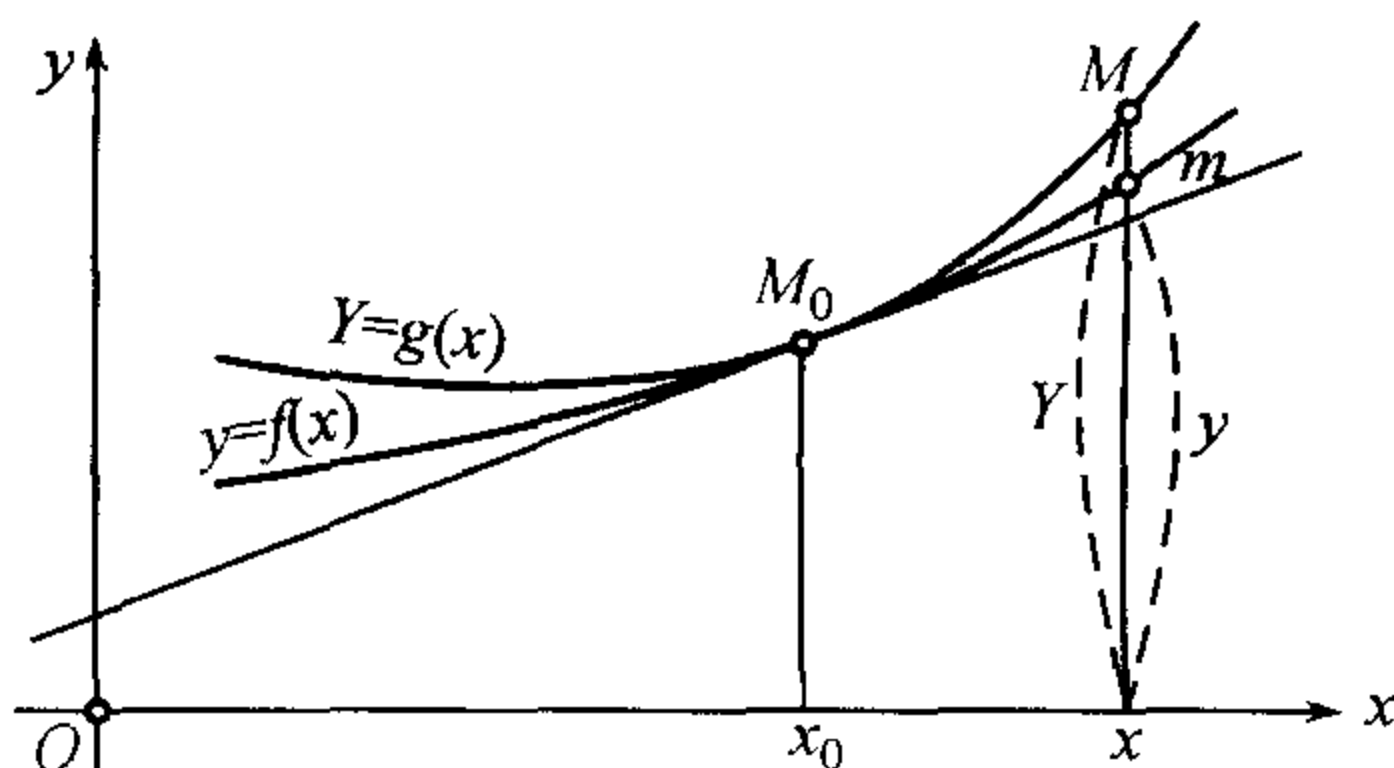


图 148



为了使曲线  $y = f(x)$  与  $Y = g(x)$  在横标为  $x_0$  的点有  $n$  阶相切, 条件

$$f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), \quad (13)$$

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0) \quad (14)$$

获得满足是必要而且充分的. (若最后的不等式不能证明, 就只能断定相切的阶不低于  $n$ .)

对于相切的阶确实等于  $n$  的情形, 由 (12) 可直接推得, 当  $n$  为偶数时在点  $M_0$  相切的二曲线彼此相交, 当  $n$  为奇数时则不相交.

**附注** 在上述条件的指示之下, 我们再回到相切的阶的定义. 这定义乍看来似乎与所选的坐标系有关. 但事实上, 二曲线相切的阶并不依赖于坐标系的选择 (只要坐标轴不平行于公切线), 因此这样建立的概念确实是几何概念.

若把坐标系旋转任意角度  $\alpha$ , 则新坐标  $\bar{x}, \bar{y}$  可以借助于已知的变换公式用旧坐标  $x, y$  来表达:

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

设在旧坐标系之下给定曲线  $y = f(x)$ ; 若在上列方程组内把  $y$  理解为就是这函数, 它们就给出曲线在新坐标系下的参变量表示式, 以  $x$  为参变量. 显然, 导数

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = \cos \alpha + \frac{dy}{dx} \sin \alpha, \quad \frac{d\bar{y}}{dx} = -\sin \alpha + \frac{dy}{dx} \cos \alpha$$

不能同时变为 0, 故在新表示式之下没有一个点是奇异点, 由是显然前一导数在我们所讨论的点不为 0 (因为不然则曲线在这点的切线将平行于  $\bar{y}$  轴!). 因此, 在这点的邻域内曲线也能用新坐标系下的显式方程  $\bar{y} = f(\bar{x})$  来表示.

现在容易看出 [比较 121]

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{-\sin \alpha + \frac{dy}{dx} \cos \alpha}{\cos \alpha + \frac{dy}{dx} \sin \alpha}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\cos \alpha + \frac{dy}{dx} \sin \alpha\right)^3},$$

而一般

$$\frac{d^k\bar{y}}{d\bar{x}^k} = R_k \left( \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ky}{dx^k} \right),$$

式中  $R_k$  是有理函数的记号. 由此很明显的, 只要对于  $x$  的二函数  $y$ , 一组等式 (13) 成立, 则对于对应的  $\bar{x}$  的二函数  $\bar{y}$ , 类似的一组等式亦必成立. 恰好与此相同, 当 (13) 成立时, 由不等式 (14) 也能推演出对于新函数的同样的不等式, 因为 —— 在相反的情形 —— 逆变换使我们带来的不是不等式 (14) 而是等式.

由此上述命题的证明即已完成.



242. 曲线之一用隐式表示的情形 现在考察当第二曲线用隐式方程

$$G(x, y) = 0 \tag{15}$$

给定时的情形. 设被考察点  $M_0(x_0, y_0)$  并不是这曲线的奇异点, 也就是设  $G'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . 于是在这点的邻域内方程 (15) 确定单值函数  $y = g(x)$ , 为了规定相切的阶就可以利用已知的条件 (13)[及 (14)].

但因为在这情形我们没有函数的显式  $g(x)$ , 故这些条件倘若只需利用已给函数  $G$  来表达将更为方便.

为此目的, 请注意函数  $g(x)$  及其导数  $g'(x), g''(x), \dots, g^{(n)}(x)$  的数值都可由方程 (15) 以及由那些方程——在  $y$  理解为  $g(x)$  之下把 (15) 对  $x$  施行微分所得出的那些方程 [209]:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} G(x, \underline{g(x)}) &= 0, & G'_x(x, g(x)) + G'_y(x, g(x))\underline{g'(x)} &= 0, \\ G''_{x^2} + 2G''_{xy}g'(x) + G''_{y^2}[g'(x)]^2 + G'_y\underline{g''(x)} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ G^{(n)}_{x^n} + \dots + G'_y\underline{g^{(n)}(x)} &= 0 \end{aligned}$$

相继地而且单值地确定.

因此, 若 (当  $x = x_0$  时) 在这些等式内把各处的  $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n)}(x_0)$  都对应地换成  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ , 则得出一组条件

$$\begin{aligned} G(x_0, \underline{f(x_0)}) &= 0, & G'_x(x_0, f(x_0)) + G'_y(x_0, f(x_0))\underline{f'(x_0)} &= 0, \\ G''_{x^2} + 2G''_{xy}f'(x_0) + G''_{y^2}[f'(x_0)]^2 + G'_y\underline{f''(x_0)} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ G^{(n)}_{x^n} + \dots + G'_y\underline{f^{(n)}(x_0)} &= 0 \end{aligned}$$

这组条件与那组条件 (13)是完全等价的.

为了把它们表示为更为明显的形式, 引入记号

$$\Phi(x) = G(x, f(x)). \tag{16}$$

那时这些条件就可以改写成

$$\Phi(x_0) = 0, \quad \Phi'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad \Phi^{(n)}(x_0) = 0. \tag{17}$$

<sup>①</sup>在每一方程内下面画着横线的就是可以由这方程单值确定的数量, 只要在它以前的诸数量都已确定. 这时下面引用的方程组也适用.



因此,当条件 (17)(在有横标为  $x_0$  的点) 成立, 曲线 (15) 与曲线  $y = f(x)$  将有不低于  $n$  阶的相切. 不难推知, 若还有

$$\Phi^{(n+1)}(x_0) \neq 0, \quad (18)$$

则二曲线的相切确为  $n$  阶.

**243. 密切曲线** 现在假定给我们的不是曲线 (15), 而是带有  $n+1$  个参变量的曲线族

$$G(x, y, \overbrace{a, b, \dots, l}^{n+1}) = 0. \quad (19)$$

那么自然会想到一个问题: 能否适当选取参变量的值, 使从这曲线族内得出一曲线, 它与已给曲线  $y = f(x)$  在其定点  $M_0(x_0, f(x_0))$  达到可能的最高阶相切 (对于已给曲线族而言).

这样的曲线就称为给定曲线在点  $M_0$  的密切曲线.[准确些应当说是, 在已给曲线族内的密切曲线, 因为对于一条个别的曲线 (15) 这术语并无意义.]

为了判定密切曲线, 我们引入类似于 (16) 的记号:

$$\Phi(x, a, b, \dots, l) = G(x, f(x), a, b, \dots, l),$$

并且写出类似于 (17) 的一系列条件:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x_0, a, b, \dots, l) = 0, \Phi'_x(x_0, a, b, \dots, l) = 0, \dots \\ \Phi_{x^n}^{(n)}(x_0, a, b, \dots, l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

我们就得到一组含有  $n+1$  个未知数  $a, b, \dots, l$  的  $n+1$  个方程. 通常这方程组能单值地确定一组参变量的值, 从而就可求出不低于  $n$  阶相切的密切曲线.

这时通常总有

$$\Phi_{x^{n+1}}^{(n+1)}(x_0, a, b, \dots, l) \neq 0,$$

于是相切的阶确实等于  $n$ . 这种情况 (在有  $n+1$  个参变量时) 认为是正常的.

在那些例外的点, 同时还成立等式

$$\Phi_{x^{n+1}}^{(n+1)}(x_0, a, b, \dots, l) = 0, \quad (21)$$

就说它是超密切点. 如果把等式 (20) 及 (21) 一齐看成是含有  $n+2$  个未知数  $x_0, a, b, \dots, l$  的  $n+2$  个方程的方程组, 这些点就可以求出.

**例题 1) 密切直线** 直线族用含有二参变量的方程

$$y = ax + b$$



表达. 因此, 在一般情形之下所能得到的相切的最高阶是一阶.

在这里如果把  $y$  理解为  $f(x)$ , 就有:

$$\Phi(x, a, b) = y - ax - b, \quad \Phi'_x(x, a, b) = y' - a, \quad \Phi''_{x^2}(x, a, b) = y''.$$

设当  $x = x_0$  时  $y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0$ , 则得出用以确定参变量  $a$  及  $b$  的方程

$$y_0 - ax_0 - b = 0, \quad y'_0 - a = 0.$$

由此得  $a = y'_0, b = y_0 - y'_0 x_0$ . 把这些值代入直线方程内, 得出方程

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0),$$

读者不难认出它就是切线方程.

因此, 密切直线就是切线.

刚才曾指出, 相切的阶一般地说是一阶. 在个别的点, 附加条件  $y''_0 = 0$  成立 (例如在拐点), 则相切的阶还能提高.

2) 密切圆<sup>①</sup> 圆族用含有三个参变量  $\xi, \eta, R$  的方程

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

表达. 相切的最高阶一般是二阶.

因为, 若仍把  $y$  理解为  $f(x)$ , 在此处有

$$\begin{aligned} \Phi(x, \xi, \eta, R) &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2, \\ \frac{1}{2}\Phi'_x(x, \xi, \eta, R) &= x - \xi + (y - \eta)y', \\ \frac{1}{2}\Phi''_{x^2}(x, \xi, \eta, R) &= 1 + y'^2 + (y - \eta)y'', \end{aligned}$$

故参变量可由方程

$$\begin{aligned} (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 &= R^2, \\ x_0 - \xi + (y_0 - \eta)y'_0 &= 0, \\ 1 + y_0'^2 + (y_0 - \eta)y''_0 &= 0 \end{aligned}$$

确定.

从最后二式 (假定  $y''_0 \neq 0$ ) 求出圆心的坐标:

$$\xi = x_0 - y'_0 \frac{1 + y_0'^2}{y''_0}, \quad \eta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y''_0}, \quad (22)$$

然后从第一式可得半径

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''_0|}. \quad (23)$$

依照这些元素就能确定密切圆.

按照 241 内所讲的, 通常, 切线并不与曲线相交, 而密切圆刚好相反, 它与曲线相交. 只是在个别的点相切的阶反常地提高时, 就可以出现例外情形.

<sup>①</sup>在本文前后, 圆这一字经常理解为圆周的意义.



**244. 密切曲线的另一求法** 设给定曲线  $y = f(x)$  及含有  $n+1$  个参变量的曲线族 (19). 在曲线  $y = f(x)$  上任意取  $n+1$  点, 其横标为  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . 为了使族中的一曲线经过这些点, 必须使  $n+1$  个条件:

$$\Phi(x_1, a, b, \dots, l) = 0, \quad \Phi(x_2, a, b, \dots, l) = 0, \quad \dots, \quad \Phi(x_{n+1}, a, b, \dots, l) = 0$$

获得满足. 通常由此就能单值地确定诸参变量的值; 用  $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}$  来表示它们.

现在假定, 当如此取出的  $n+1$  个点按照任意规律趋于曲线上横标为  $x_0$  的某一确定点时, 参变量的值  $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}$  也趋于确定极限  $a, b, \dots, l$ . 也可以说, 曲线族中经过这  $n+1$  个点的曲线逐渐变形而趋于**极限曲线**.

为了要求出它, 可以如此考虑. 已知  $x$  的函数

$$\Phi(x, \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l})$$

在  $x$  的  $n+1$  个值:  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$  都等于 0. 于是按照罗尔定理 [111], 一阶导数在  $n$  个值  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n$  都等于 0, 二阶导数在  $n-1$  个值  $x''_1 < x''_2 < \dots < x''_{n-1}$  都等于 0,  $\dots$ ,  $(n-1)$  阶导数在二值  $x_1^{(n-1)} < x_2^{(n-1)}$  等于 0, 最后,  $n$  阶导数在某一值  $x_1^{(n)}$  等于 0; 同时上述的一切值都位于  $x_1$  与  $x_{n+1}$  之间.

这样, 就成立  $n+1$  个等式:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}) &= 0, \quad \Phi'_x(x'_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}) = 0, \\ \Phi''_{x_2}(x''_2, \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}) &= 0, \quad \dots, \quad \Phi^{(n)}_{x_1}(x_1^{(n)}, \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{l}) = 0. \end{aligned}$$

若现在同时令  $x_1 \rightarrow x_0, x_2 \rightarrow x_0, \dots, x_{n+1} \rightarrow x_0$ , 则  $\tilde{a} \rightarrow a, \tilde{b} \rightarrow b, \dots, \tilde{l} \rightarrow l$ , 而且显然也有  $x'_1 \rightarrow x_0, x''_1 \rightarrow x_0, \dots, x_1^{(n)} \rightarrow x_0$ . 在上面写着的等式内取极限, 我们仍得到已经熟悉的用以确定密切曲线的方程组 (20).

因此, 若曲线族中经过给定曲线上  $n+1$  个点的曲线有极限位置存在, 则这极限曲线就是密切曲线.

由于这关系, 有时就说 (不太严密, 但是逼真), 密切曲线 —— 取自含有  $n+1$  个参变量的曲线族内 —— 是“经过给定曲线上  $n+1$  个无限接近的点的曲线”. 特殊情形是, 切线经过曲线上二个无限接近的点, 而密切圆则经过三个无限接近的点.

## §4. 平面曲线的长<sup>①</sup>

**245. 引理** 我们考察用参变量方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

<sup>①</sup>虽然实质上这是关于积分学的问题, 但是这里我们便须讨论它, 因为在下面一节我们就要用到曲线弧长的概念及其性质. 对于曲线弧长计算本身我们要等到第二卷才讲.



给定的 (非闭的或闭的) 平面曲线, 其中函数  $\varphi$  和  $\psi$  在这里暂时只假定为连续. 设在曲线上没有重点, 因此, 每一个点只由参变量  $t$  的一个值 (除去 —— 如果曲线是闭的 —— 曲线的两个重合的端点)<sup>①</sup> 得到. 在这些假设下的曲线叫做简单连续曲线.

为了要对这样的曲线建立长的概念, 我们由几个辅助命题开始. 设  $t_0 \leq t' \leq t'' \leq T$ , 而与参数值  $t'$  和  $t''$  相应的两个点是  $M'$  和  $M''$ .

**引理1** 对于任何  $\delta > 0$  可以找到这样的  $\eta > 0$ , 使得在  $t'' - t' < \eta$  时弦长  $\overline{M'M''} < \delta$ .

事实上, 由于 (1) 中函数  $\varphi$  和  $\psi$  的 (一致) 连续性, 对于  $\delta$ , 可以找到这样的  $\eta$ , 使得在  $|t'' - t'| < \eta$  时, 同时有

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

由此

$$\overline{M'M''} = \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} < \delta.$$

还成立下面的引理:

**引理2** 在非闭曲线的情形, 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在这样的  $\delta > 0$ , 使得只要弦长  $\overline{M'M''} < \delta$ , 立刻得出对应于这弦的端点的参变量数值的差  $t'' - t'$  也将  $< \varepsilon$ .

假定和我们的结论相反; 于是对于某个  $\varepsilon > 0$ , 在任何  $\delta > 0$  时, 可以找到这样的两个点  $M'(t')$  和  $M''(t'')$ , 使得  $\overline{M'M''} < \delta$  同时  $t'' - t' \geq \varepsilon$ . 取收敛于 0 的序列  $\{\delta_n\}$ , 并轮流地命  $\delta = \delta_n (n = 1, 2, \dots)$ , 我们得出两个点列  $\{M'_n(t'_n)\}$  和  $\{M''_n(t''_n)\}$ , 对于它们

$$\overline{M'_n M''_n} < \delta_n, \quad \text{但} \quad t''_n - t'_n \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots).$$

按布尔查诺 — 魏尔斯特拉斯引理 [41], 不失一般性, 这时可以假设

$$t'_n \rightarrow t^*, \quad t''_n \rightarrow t^{**}$$

(这是容易验证的, 必要时讨论部分序列), 显然

$$t^{**} - t^* \geq \varepsilon,$$

所以  $t^* \neq t^{**}$ . 同时对于对应的点  $M^*$  和  $M^{**}$  有  $\overline{M^* M^{**}} = 0$ , 即这两个点应当重合, 这是不可能的, 因为曲线没有重点也不是闭的. 由得出的矛盾, 证明就完成了.

对于闭曲线引理的论断不一定成立: 在  $t'$  充分接近于  $t_0$ , 而  $t''$  充分接近  $T$  时, 弦  $M'M''$  也可以任意小.

<sup>①</sup>参看 233 目的脚注.



**246. 曲线的方向** 我们设点  $A$  是参数值  $t = t_0$  所对应的, 而点  $B$  是参数值  $t = T$  所对应的, 这时把  $A$  叫做曲线的起点, 而  $B$  叫做曲线的终点. 一般曲线的点  $M$  依参变量  $t$  增加的次序排列, 即异于  $A$  和  $B$  而在它们之间的两点, 我们认作对应较大的参变量值的点是较后面的点. 这样就确定了“曲线的方向”. 可是, 这个定义在形式上显出与特殊的参变量方程 (1) 有关. 我们证明, 曲线的方向概念实际上与曲线的具体给定法无关.

我们由比较简单的情形, 非闭曲线的情形开始来看.

如果曲线  $\widehat{AB}$  是非闭的, 除了表示式 (1) 外还具有表示式 (也没有重点)

$$x = \varphi^*(u), \quad y = \psi^*(u) \quad (u_0 \leq u \leq U), \quad (1^*)$$

其中函数  $\varphi^*$  和  $\psi^*$  仍是连续的, 并且值  $u = u_0$  对应于点  $A$ , 而值  $u = U$  对应于点  $B$ , 则两种表示式在曲线上确定出同一方向.

每一个值  $t$  对应于曲线的某个点, 这个点又单值地定出值  $u$ ; 相反地, 每个值  $u$  对应于一个确定的值  $t$ . 这样,  $u$  是  $t$  的单值函数:  $u = \omega(t)$ , 当  $t$  在  $t_0$  与  $T$  之间变化时, 函数  $\omega(t)$  取得它的每个值各只一次. 特别是,  $\omega(t_0) = u_0$ , 而  $\omega(T) = U$ .

按引理 1, 两个充分接近的值  $t$  对应于曲线上任意相近的两个点, 于是——按引理 2——它们对应于任意相近的两个值  $u$ , 即函数  $u = \omega(t)$  也是连续的.

由此可以得出, 这个函数是单调增加的 (狭义的). 事实上, 如果对于  $t_0 < t' < t''$  有  $u' = \omega(t') > u'' = \omega(t'') > u_0 = \omega(t_0)$ , 则按已知的连续函数的性质 [82]——在  $t_0$  与  $t'$  之间可以找到值  $t'''$ , 对于它  $\omega(t''') = u''$ , 因此, 函数  $u = \omega(t)$  取得了值  $u''$  两次 (在  $t = t''$  和  $t = t'''$  时), 由此矛盾就证明了上面的论断.

现在, 既然确立了  $u = \omega(t)$  是随  $t$  而增加, 已经很明显, 点依参变量  $t$  的增加次序的排列完全等价于它依参变量  $u$  的增加次序的排列.

因此, 这个方向——它可以叫做曲线由点  $A$  到点  $B$  的方向——完全是一个几何概念.

类似地, 以  $-t'$  代替  $t'$ , 并将点依参变量  $t'$  的增加排列, 我们确立了关于曲线由点  $B$  向点  $A$  的方向; 显然, 这个方向也可以由点的位置依参变量  $t$  减小而得到. 当然, 这个方向也与曲线的特别选取的表示式无关.

最后, 转到关于闭曲线的方向问题. 我们在其上取任意两个 (异于  $A$ ) 点  $C$  和  $D$ , 并设它们对应的两个参变量的值是  $t = t_1$  和  $t = t_2 > t_1$ , 于是由参变量的值  $t$  确立上面点的排列, 点  $D$  在  $C$  之后. 可以证明, 用任何参变量表示式定出的曲线的每个方向, 只要保持点  $C$  和  $D$  的这一次序, 必与以前一致. 事实上, 如果值  $t = t_0^*$  而  $t = T^*$  (其中  $t_0 < t_0^* < t_1$ , 而  $t_2 < T^* < T$ ), 对应于点  $A^*$  和  $B^*$ , 那么对于 (非闭的) 弧  $A^*B^*$  类似的结论可以由前面所述推出; 但  $t_0^*$  可以取得使任意接近于  $t_0$ , 而  $T^*$  可以取得使任意接近于  $T$ , 所以它对于整个曲线也成立.



因此,可以谈论关于由点  $A$  起经点  $C$  和  $D$  到  $A$  的方向,它与曲线的参变量表示式的选取无关.同样地,可以建立由点  $A$  经  $D$  和  $C$  到  $A$  的方向.

**247. 曲线的长·弧长的可加性** 我们由曲线的表示式 (1) 出发,曲线上的方向则由参变量  $t$  的增加而确定.在曲线上取一系列的点:

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n = B, \quad (2)$$

使得它们沿着指定的方向排列,并对应于递增的参变量的值

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n. \quad (3)$$

依次用直线连接这些点 (图 149),我们就得到曲线  $\widehat{AB}$  的内接折线  $M_0M_1 \dots M_{n-1}M_n$ .回忆前段阐述过,曲线的方向概念——因而内接折线的概念——与参变表示式 (1) 的特殊选取无关.曲线  $\widehat{AB}$  上的一可能的内接折线周长  $p$  的集合的上确界  $S$ ,叫做曲线  $\widehat{AB}$  的长:

$$S = \sup\{p\}.$$

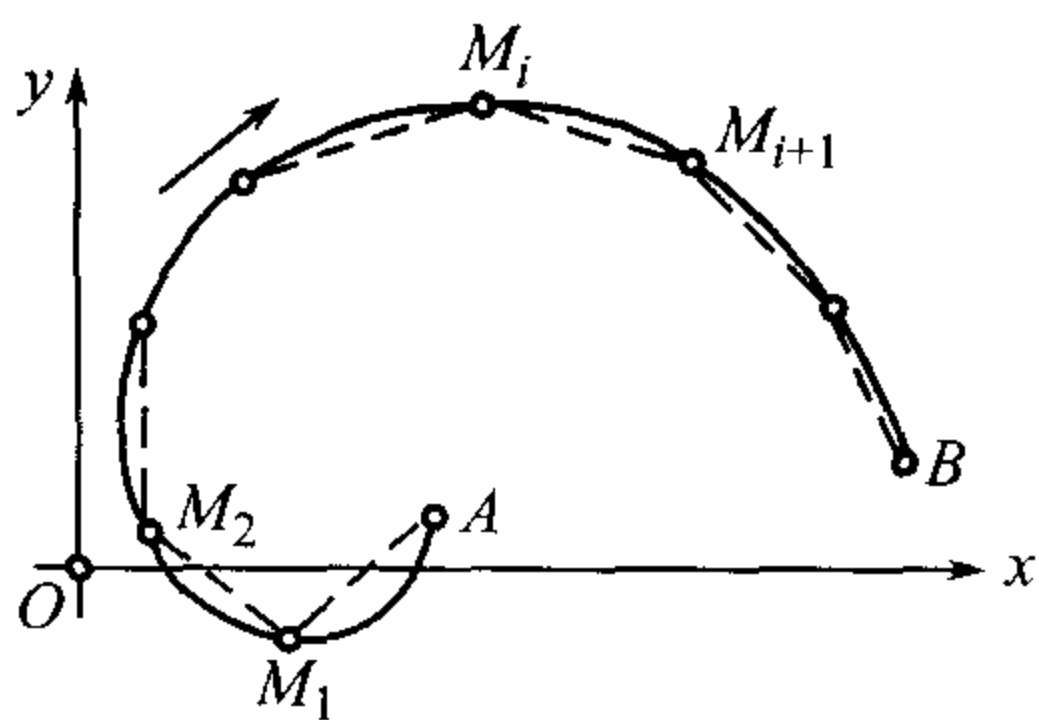


图 149

如果这个数  $S$  有限,则曲线叫做可求长的<sup>①</sup>.

由曲线的长的定义得出,曲线  $\widehat{AB}$  的任何内接折线的周长不超过曲线的长;特别是,连接曲线的起点和终点的弦  $\widehat{AB}$  的长更是如此.

现在我们在曲线  $\widehat{AB}$  上取  $A$  与  $B$  之间的一点  $C$ ,使它对应于  $t_0$  与  $T$  之间的一个值  $t = \bar{t}: t_0 < \bar{t} < T$ .

如果曲线  $\widehat{AB}$  是可求长的,则弧  $\widehat{AC}$  和  $\widehat{CB}$  各个都是可求长的.反之,由这两段弧的可求长性推出整个曲线  $\widehat{AB}$  是可求长的.分别用  $S, S'$ , 和  $S''$  来表示弧  $\widehat{AB}, \widehat{AC}$  和  $\widehat{CB}$  的长,这时就有

$$S = S' + S''. \quad (4)$$

要证明 (4),我们首先假设曲线  $\widehat{AB}$  是可求长的,对应于弧  $\widehat{AC}$  和  $\widehat{CB}$  的任意内接折线的周长为  $p'$  和  $p''$ .将这两个折线合在一起,作曲线  $\widehat{AB}$  的具有周长

$$p' + p'' = p$$

的内接折线.因为  $p \leq S$ ,即

$$p' + p'' \leq S. \quad (5)$$

所以显然分别有

$$p' \leq S \quad \text{和} \quad p'' \leq S.$$

<sup>①</sup>读者应注意到明确曲线的方向概念与内接折线概念的重要性.如果  $M_i$  可以不论取在什么地方,则上确界  $S$  永远是  $+\infty$ .



因此, 集合  $\{p'\}$  和  $\{p''\}$  有上界(因  $S$  为有限!), 因而弧  $\widehat{AC}, \widehat{CB}$  是可求长的, 因为它们有有限长

$$S' = \sup\{p'\}, \quad S'' = \sup\{p''\}.$$

按上确界的性质 [11], 周长  $p'$  和  $p''$  可以取得 —— 互不依赖地 —— 与上确界任意接近. 因而由 (5) 取极限就得:

$$S' + S'' \leq S. \quad (6)$$

现在假设已知弧  $\widehat{AC}$  及  $\widehat{CB}$  是可求长的. 作曲线  $\widehat{AB}$  的任意内接折线. 设它有周长  $p$ . 如果点  $C$  是折线的一个顶点, 则它将原来的折线分成了两个折线, 具有周长  $p'$  和  $p''$ , 各自内接于弧  $\widehat{AC}$  和  $\widehat{CB}$ . 如果  $C$  不是所取折线的一个顶点, 则我们将  $C$  加到原有的顶点中, 这样做的结果折线的周长只可能增大 (图 150); 如图所示, 新的折线被分成两个. 在每种情形, 都有

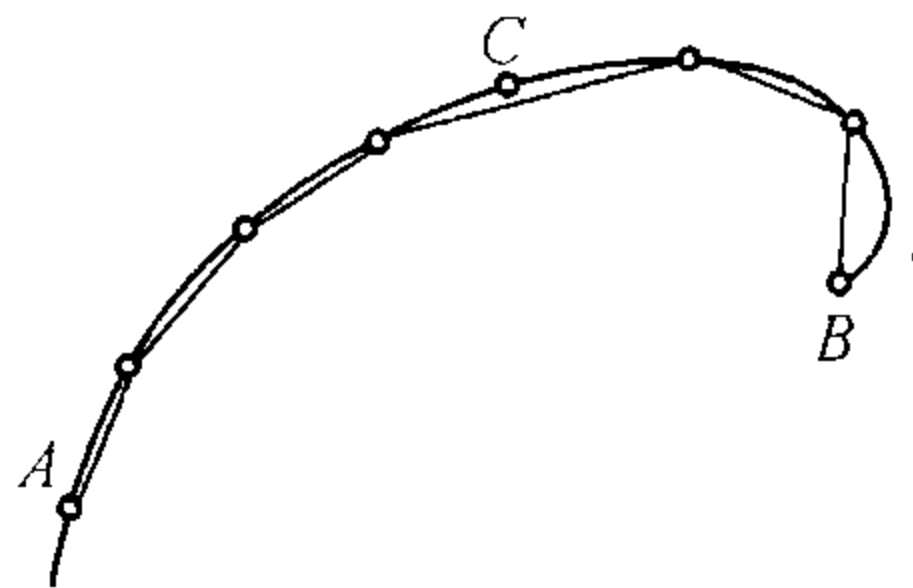


图 150

$$p \leq p' + p'' \leq S' + S''.$$

集合  $\{p\}$  有上界 ( $S'$  和  $S''$  为有限), 因而曲线  $\widehat{AB}$  是可求长的, 并且它的长

$$S = \sup\{p\} \leq S' + S''.$$

最后, 把这个不等式与 (6) 相比较, 就得出所要求的等式 (4).

因此, 上述的曲线的弧长概念具有可加性[比较 21,3)].

所证明的论断容易推广到任意多个部分弧的情形.

**248. 可求长的充分条件 · 弧的微分** 到现在为止, 我们考虑了简单连续曲线(1)的一般情形. 要给出曲线可求长的方便的充分条件<sup>①</sup>和研究弧长的其他性质, 我们回到本章中常用的关于存在连续导数  $\varphi'(t)$  和  $\psi'(t)$  的假设. 我们证明, 在所作的假设下, 曲线 (1) 是可求长的.

我们考察由 (3) 中参变量的值确定的 (2) 中的点为顶点的折线. 点  $M_i$  的坐标就是

$$x_i = \varphi(t_i) \quad \text{和} \quad y_i = \psi(t_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

于是折线的周长  $p$  可以写成

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

<sup>①</sup>可求长的最一般的 (必要而且充分的) 条件, 读者在第三卷中可以找到.



但按有限增量公式 [112]

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$y_{i+1} - y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = \psi'(\bar{\tau}_i) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

所以, 结果

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \cdot (t_{i+1} - t_i). \quad (7)$$

如果分别用  $L$  和  $\bar{L}$  表示函数  $|\varphi'(t)|$  和  $|\psi'(t)|$  在区间  $[t_0, T]$  上的最大值, 则由 (7) 不难得出估值:

$$p \leq \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot (T - t_0). \quad (8)$$

集合  $\{p\}$  就有了上界, 就是说, 曲线有有限长  $S$ , 即是可求长的, 这就是所要证的.

因为  $S = \sup\{p\}$ , 所以由 (8) 顺便也就得出  $S$  的上界的估值:

$$S \leq \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot (T - t_0), \quad (9)$$

它就是我们现在所需要的. 但是我们还将要估计下界; 如果分别用  $l$  和  $\bar{l}$  表示函数  $|\varphi'(t)|$  和  $|\psi'(t)|$  在区间  $[t_0, T]$  上的最小值, 则由 (7) 得出与 (8) 类似的不等式:

$$p \geq \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0).$$

因而更有

$$S \geq \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0). \quad (9^*)$$

如果改变  $t$ , 曲线上点  $M(t)$  的位置也随之而改变, 则变弧  $\widehat{AM}$  的长  $s$  是参变量  $t$  的函数; 我们把它记成

$$s = s(t).$$

给自变量  $t$  一个正的增量  $\Delta t$ : 点  $M$  沿着曲线朝着  $B$  变到位置  $M'$  (图 151). 量  $s$  也得到一个正的增量  $\Delta s$ , 它等于弧长  $\widehat{MM'}$  (按前目证明的弧长可加性), 因此,  $s(t)$  是增函数.

现在我们不考察区间  $[t_0, T]$ , 而考察区间  $[t, t + \Delta t]$ , 将估值 (9) 和 (9\*) 应用于长为  $\Delta s$  的弧  $\widehat{MM'}$ :

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot \Delta t \leq \Delta s \leq \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot \Delta t,$$

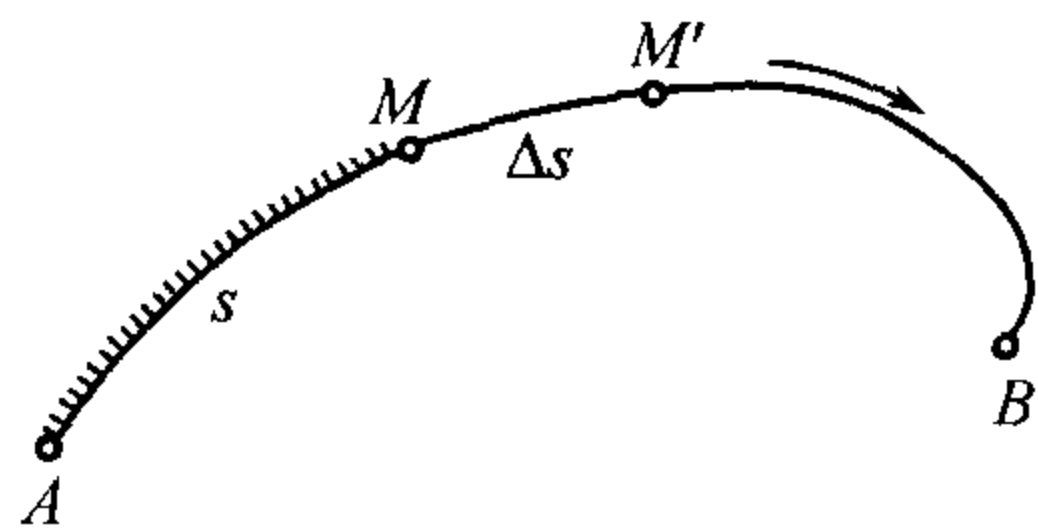


图 151

而这里的  $l$  和  $L$  ( $\bar{l}$  和  $\bar{L}$ ) 我们可以理解成函数  $|\varphi'(t)|$  ( $|\psi'(t)|$ ) 在区间  $[t, t + \Delta t]$  上的最小值和最大值. 由此

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sqrt{L^2 + \bar{L}^2},$$



又因 —— 按导数的连续性 —— 在  $\Delta t \rightarrow 0$  时  $l$  和  $L$  两数都  $\rightarrow |\varphi'(t)|$ , 而  $\bar{l}$  和  $\bar{L}$  两数都  $\rightarrow |\psi'(t)|$ , 所以上面不等式中的两个根式趋于同一极限

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}.$$

因此, 比  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  也趋于同一极限; 容易看出, 这对于  $\Delta t < 0$  也正确. 所以我们得出结论: 变弧的长  $s = s(t)$  是参变量  $t$  的可微分函数; 它关于参变量的导数用公式

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

来表达, 或者, 简单地

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}. \quad (10)$$

如果将这个等式取平方, 并且各项再乘以  $dt^2$ , 则得出特别简单的公式

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (11)$$

这个公式还具有明显的几何意义. 如图 152, 在 (斜边为曲线的) 直角三角形  $MNM_1$  中, “直角边” 是点  $M$  的两个坐标增量:  $MN = \Delta x$ ,  $NM_1 = \Delta y$ , 而 “斜边” 是弧  $\widehat{MM_1} = \Delta s$ , 它是弧  $\widehat{AM} = s$  的增量. 如果不考察增量本身, 而考察它的主要部分 —— 微分 —— 则成立著名的 “毕达哥拉斯定理”.

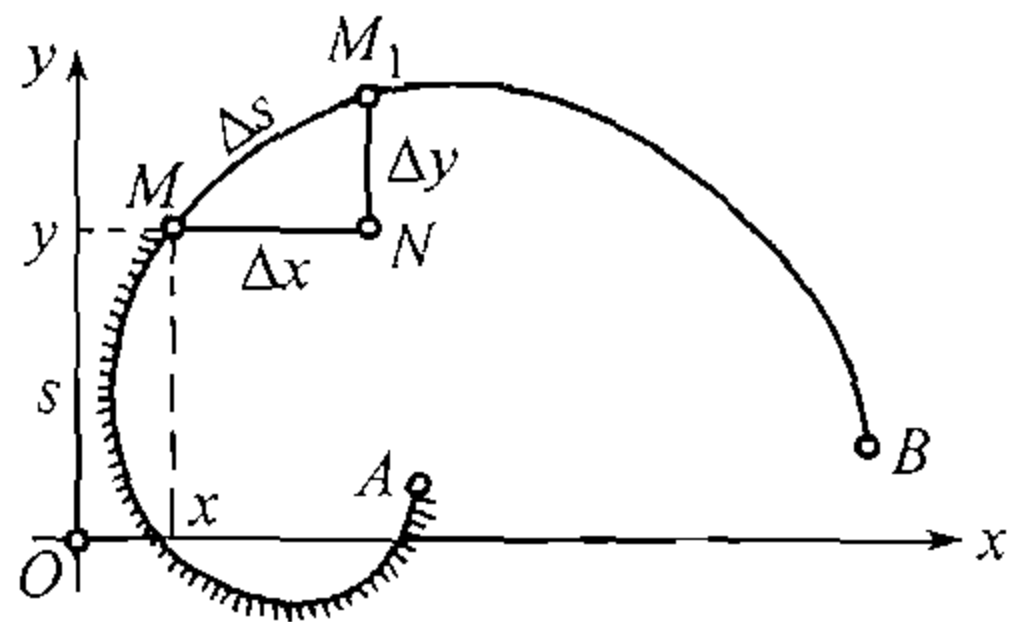


图 152

指出曲线由各种特殊形式给定时重要的公式 (10) 的特殊情形是有益的. 例如, 如果曲线用笛卡儿坐标系中显式方程  $y = f(x)$  给出, 则起着 “参变量” 作用的是  $x$ , 弧  $s$  依赖于  $x$ :  $s = s(x)$ , 而公式就取如下形状:

$$s'_x = \sqrt{1 + y_x'^2}. \quad (10a)$$

如果曲线由极坐标方程  $r = g(\theta)$  给出, 则我们知道, 这 and 它用参变量方程给定等价:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

其中参变量是  $\theta$ ; 弧在这时是  $\theta$  的函数:  $s = s(\theta)$ . 因为, 显然

$$x'_\theta = r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta, \quad y'_\theta = r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta,$$

所以

$$x_\theta'^2 + y_\theta'^2 = r_\theta'^2 + r^2,$$

而公式 (10) 就变成

$$s'_\theta = \sqrt{r_\theta'^2 + r^2}. \quad (10b)$$



计算弧长的起点不一定就是弧的一个端点,有时取它的内点来作起点还比较方便.在这个情形,自然地,在参变量增加的方向截取的弧作为正,而在另一方向的弧作为负,相应地,前一种情形弧长用正号,后一种情形用负号.这个量  $s$  就是带有正负号的弧.为了简单起见,我们就将它简称为弧.公式 (10)、(11)、(10a)、(10b) 在一切情形都成立.

[应当注意,如果计算弧长不像通常所作那样在参变量增加的那个方向选作正向,而是在参变量减小的方向选作正向,则在公式 (10)、(10a)、(10b) 中的根式前须加以负号.]

**249. 用弧作为参变量 · 切线的正向** 因为变弧  $s = s(t)$  是参变量  $t$  的连续单调增函数,所以也可以反过来,把  $t$  看成是  $s$  的单值连续函数:  $t = \omega(s)$ , 式中的  $\varepsilon$  从 0 变动至所考察的曲线的全长  $S$  [83]. 把这  $t$  的表达式代入方程 (1), 我们就得到流动坐标  $x$  及  $y$  作为  $s$  的函数的表达式:

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s).$$

$$y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

无疑地,弧  $s$  起着点  $M$  的“曲线横标”的作用,它是确定这点位置的最自然的参变量.

注意到,计算弧时的起点  $A$  可以不是所论曲线弧的某一端点;所以如同上面已解释过的一样,弧  $s$  可以取正值,也可以取负值.

设由 (1) 表示的曲线上的点  $M$  是普通点,于是 [参阅 (10)]

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} > 0;$$

因此 [94] 对于对应的  $s$  值 (及其邻近) 也存在着连续导数

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}},$$

从而,也存在着连续导数

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s).$$

由基本公式 (11), 认为一切微分都是对  $s$  而取的, 就得到

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \quad (12)$$

这样,若点  $M$  是曲线在原表示式 (1) 之下的普通点,则换成参变量  $s$  以后它必定仍是普通点.其次,公式 (12) 可用以证明下面的简单命题:



设  $M$  是曲线上的普通点. 若用  $M_1$  表示这曲线上的动点, 则在  $M_1$  趋于  $M$  时, 弦长  $MM_1$  与弧长  $\widehat{MM_1}$  的比将趋于 1:

$$\lim_{\widehat{MM_1} \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\widehat{MM_1}} = 1^{\textcircled{1}}. \quad (13)$$

采用弧作为参变量, 并设点  $M$  对应于弧值  $s$ , 而点  $M_1$  对应于弧值  $s + \Delta s$ . 设它们的坐标各为  $x, y$  及  $x + \Delta x, y + \Delta y$ . 则

$$\widehat{MM_1} = |\Delta s|, \text{ 而 } MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

于是

$$\frac{MM_1}{\widehat{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

求上式右端在  $\Delta s \rightarrow 0$  时的极限, 根据 (12) 就得到所求的结果.

在此以前, 我们曾用曲线在其 (普通) 点  $M$  的切线的斜率  $\operatorname{tg} \alpha$  来确定切线的位置, 但对于切线上的二相反方向并未加以区别:  $\operatorname{tg} \alpha$  对于两者都是一样的. 然而在某些研究中, 须要固定其中一个方向.

假想在曲线上已选定起点及计算弧的一定方向; 我们就取用以确定曲线上点的位置的弧作为参变量.

设弧  $s$  对应于上述的点  $M$ . 若给  $s$  以一正的增量  $\Delta s$ , 则弧  $s + \Delta s$  确定另一点  $M_1$ , 它位于  $M$  的使弧增加的一侧. 取割线的方向从  $M$  向  $M_1$ , 这有向割线与  $x$  轴的正向所组成的角用  $\beta$  表示. 把线段  $MM_1$  投影到坐标轴上 (图 153), 按照投影理论的已知定理, 得

$$\operatorname{prj}_x MM_1 = \Delta x = MM_1 \cos \beta,$$

$$\operatorname{prj}_y MM_1 = \Delta y = MM_1 \sin \beta,$$

由此

$$\cos \beta = \frac{\Delta x}{MM_1},$$

$$\sin \beta = \frac{\Delta y}{MM_1}.$$

因为  $\widehat{MM_1} = \Delta s$ , 故这些等式可以改写成:

$$\cos \beta = \frac{\Delta x}{\Delta s} \frac{\widehat{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin \beta = \frac{\Delta y}{\Delta s} \frac{\widehat{MM_1}}{MM_1}. \quad (14)$$

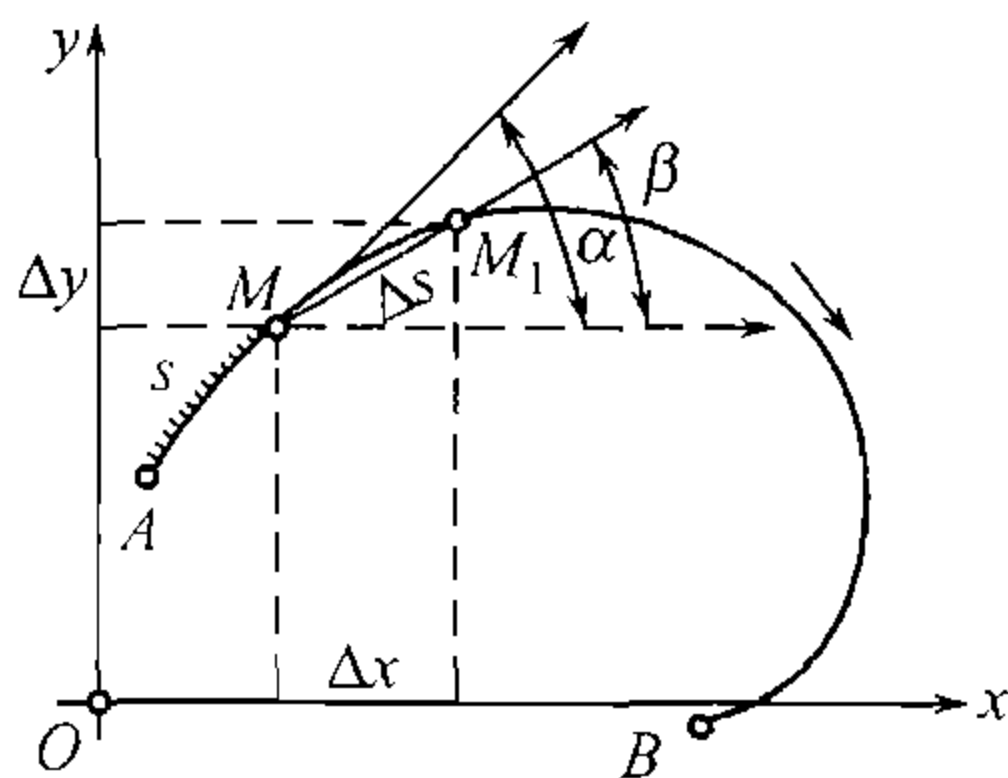


图 153

<sup>①</sup>为了简单起见, 我们就写  $MM_1$  来代表“线段  $MM_1$  的长”, 写  $\widehat{MM_1}$  来代表“弧  $\widehat{MM_1}$  的长”.



我们把切线上向弧增加的一侧的方向称为切线的正向; 说得更准确些, 它被定义为: 有着前已规定方向的射线  $MM_1$  在  $\Delta s \rightarrow 0$  时的极限位置. 若切线的正向与  $x$  轴的正向所组成的角用  $\alpha$  表示, 则从 (14) 取极限并计及 (13), 就得到

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}. \quad (15)$$

这些公式确定了角  $\alpha$  已经准确至只有  $2k\pi$  之差 ( $k$  是整数), 因此, 实际上已固定了切线的二可能方向之一, 即以之为正向.

附注 在 245 ~ 249 关于平面曲线所述的一切, 不需重大的改变就可以适用于空间曲线的情形:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (1^*)$$

曲线长的概念可以用和 247 中相同的一些说法来建立. 在函数  $\varphi, \psi, \chi$  存在连续导数时, 长为有限, 因而曲线是可求长的. 变弧的长 (由曲线的起点到参变量所对应的变量  $t$ )

$$s = s(t),$$

关于  $t$  是可微的, 并且它关于  $t$  的导数由公式

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} \quad (10^*)$$

来表达. 由此得出弧的微分公式:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (11^*)$$

在没有奇异点的情形 [228], 曲线可以改用这样的参变量表示式, 其中弧  $s$  本身起着参变量的作用. 最后, 可以建立切线正向的概念, 它的方向余弦由公式

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \quad (15^*)$$

来表达.

## §5. 平面曲线的曲率

250. 曲率的概念 仍设已给简单曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

这里函数  $\varphi$  及  $\psi$  假定为连续同时具有一阶和二阶导数. 我们来考察这曲线没有奇异点的弧.



若在它的每一点作一条切线 (取正向), 则由于曲线的“弯曲性”, 这切线将随着切点的移动而回转; 曲线本质上异于直线即在于此, 因为直线的切线 (与直线相重合) 对于一切点都保持着同一方向.

曲线在各点的“弯曲程度”或“曲率”就成为表征曲线形态的重要元素; 这曲率可以用数字表达出来.

设  $\widehat{MM_1}$  (图 154) 是曲线的弧; 考察在这弧的两端所作的 (正向的) 切线  $MT$  及  $M_1T_1$ .

自然, 可以用单位弧长上切线回转的角度, 即比式  $\frac{\omega}{\sigma}$  来表征曲线的曲率, 这里的角  $\omega$  系用弧度来量度, 而弧长  $\sigma$  系用选定的单位长来量度. 这个比式称为曲线弧的平均曲率.

在曲线的各段上, 它的平均曲率一般说来是不同的. 可是有 (唯一的) 一种曲线, 它的平均曲率处处相同: 这就是圆<sup>①</sup>.

实际上, 对于圆有 (图 155)

$$\frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega}{R\omega} = \frac{1}{R},$$

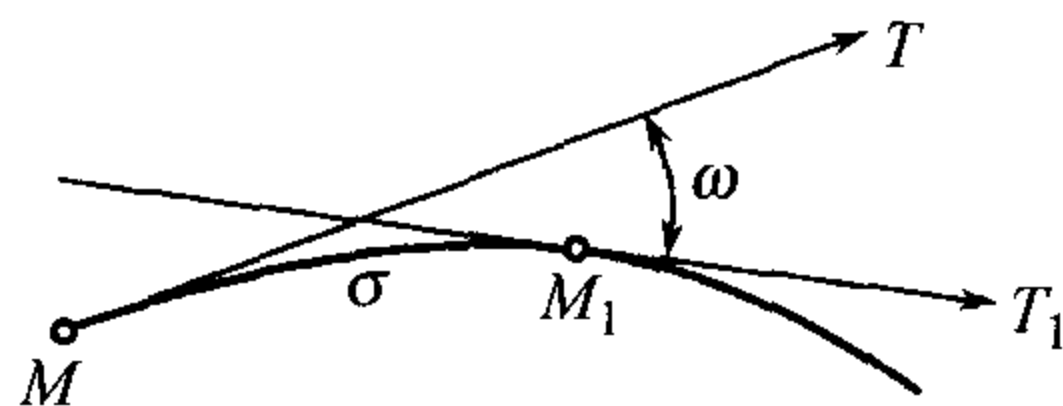


图 154

不论哪一段圆弧都是一样.

由弧  $\widehat{MM_1}$  的平均曲率的概念就可过渡到在一点的曲率的概念.

若当点  $M_1$  沿曲线而趋于  $M$  时, 弧  $\widehat{MM_1}$  的平均曲率趋于一极限, 这极限就称为曲线在点  $M$  的曲率.

用字母  $k$  表示曲线在给定点的曲率, 就有

$$k = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sigma}.$$

对于圆显然有  $k = \frac{1}{R}$ , 即圆的曲率是其半径的倒数.

**附注** 平均曲率及在给定点的曲率的概念, 完全类似于动点的平均速度及在给定时刻的速度的概念. 可以说, 平均曲率表示在某一弧上切线的方向的平均变化率, 而在一点的曲率表示在达到给定点的时刻这切线的方向的真正变化率.

现在转而推演曲率的解析表达式, 由这表达式就可以从曲线的参变量表示式算出曲率.

首先假定以弧作为参变量. 我们知道 [249], 只要曲线的弧没有奇异点, 这种表示法总是可以实现的.

<sup>①</sup>自然, 直线没有算在内, 它的曲率恒为零.



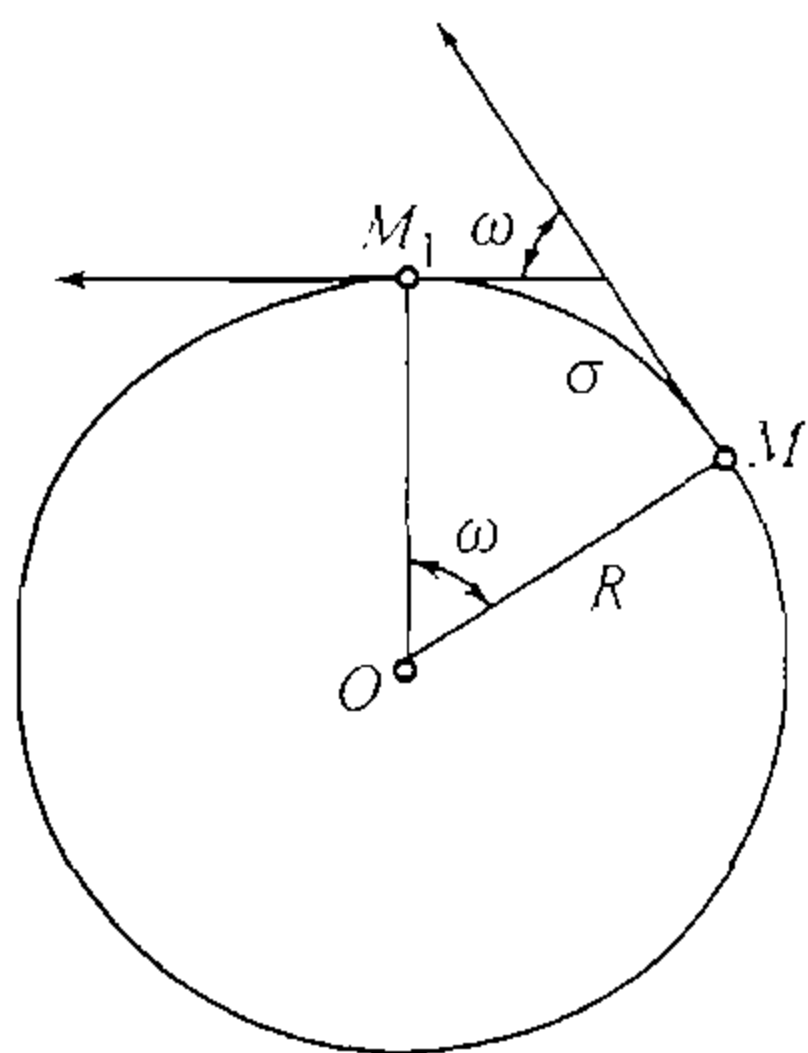


图 155

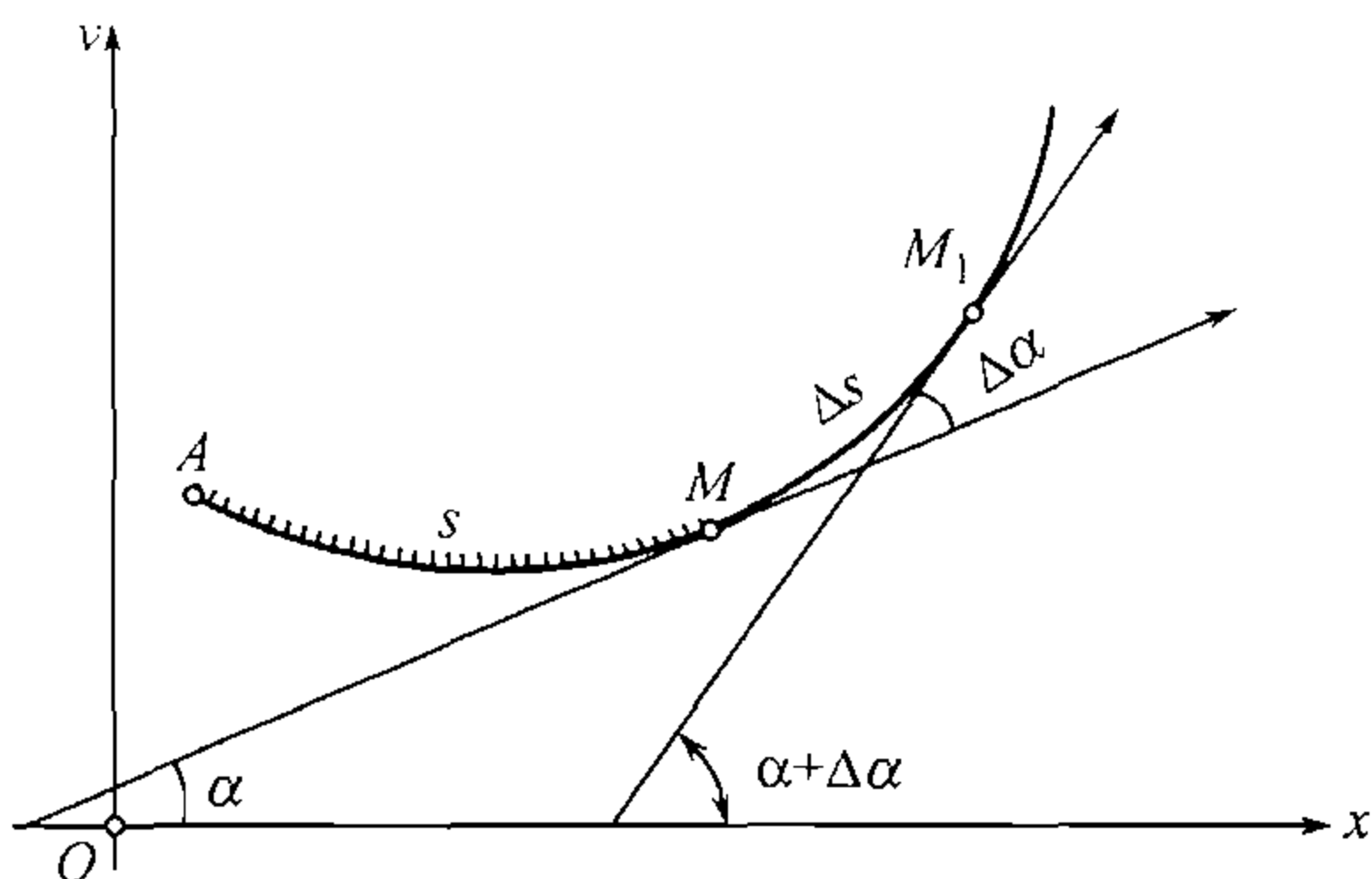


图 156

在曲线上取一点  $M$  (当然假定它不是奇异点), 设它与弧值  $s$  对应. 给  $s$  以任意增量  $\Delta s$ , 得到另一点  $M_1(s + \Delta s)$  (图 156). 由  $M$  移至  $M_1$  时, 切线的倾角的增量  $\Delta\alpha$  就是两切线间的夹角  $\omega$ :  $\omega = \Delta\alpha$ .

因为  $\sigma = \Delta s$ , 故平均曲率等于  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ .

使  $\widehat{MM_1} = \Delta s$  趋于零, 就得到曲线在点  $M$  的曲率的表达式

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (2)$$

重要的是, 注意到这公式不论符号的正负都是对的. 因为按照我们的定义, 曲率不为负数, 而这公式的右边也可能得出负的结果.

事实上,  $\Delta\alpha$  及  $\Delta s$  都可以取负值, 因此严格地说来, 必须写成:

$$\omega = |\Delta\alpha|, \quad \sigma = |\Delta s|,$$

而最后

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

这附注以后必须注意.

为了使公式 (2) 代成便于直接计算的形式同时也可证明曲率的存在, 转而考察任一由参变量表示式 (1) 所给定的曲线.

因为所考察的点  $M(t)$  不是奇异点, 因而  $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$ ; 所以不失普遍性, 可设  $x_t' = \varphi'(t) \neq 0$ .

现在把公式 (2) 改写成另外的形式:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha_t'}{s_t'}. \quad (3)$$



但  $s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}$  [248(10)] 现在只需求出  $\alpha'_t$ . 因为 [106(11)]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{而} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'_t}{x'_t},$$

故

$$\alpha'_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \frac{x'_t y''_{t2} - x''_{t2} y'_t}{x'^2_t} = \frac{x'_t y''_{t2} - x''_{t2} y'_t}{x'^2_t + y'^2_t}. \quad (4)$$

把  $s'_t$  及  $\alpha'_t$  的值代入 (3) 内, 就得出最后的公式:

$$k = \frac{x'_t y''_{t2} - x''_{t2} y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

这公式是完全适合于计算的, 因为在它里面出现的一切导数都容易由曲线的参变量方程计算出来.

若曲线用显式方程  $y = f(x)$  给定, 这公式就变成:

$$k = \frac{y''_{x2}}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5a)$$

最后, 若已给曲线的极坐标方程:  $r = g(\theta)$ , 则通常可以采用  $\theta$  作为参变量, 而把它变成直角坐标的参变量表示式. 于是利用 (5) 就得到

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2_{\theta} - r r''_{\theta2}}{(r^2 + r'^2_{\theta})^{\frac{3}{2}}}. \quad (5b)$$

**251. 曲率圆及曲率半径** 在研究许多问题时, 用一个圆周 —— 其曲率与曲线在某点的曲率相同 —— 来近似地代替在该点邻近的曲线, 常有便利之处.

若一圆

1) 与曲线在其上一点  $M$  相切;

2) 它的凹向与曲线在这点的凹向相同<sup>32)</sup>;

3) 它的曲率与曲线在点  $M$  的曲率相同 (图 157): 我们就称它为曲线在给定点  $M$  的**曲率圆** ①.

曲率圆的中心  $C$  简称为 (曲线在给定点的) **曲率中心**, 而这圆的半径简称为 (曲线在给定点的) **曲率半径**.

由曲率圆的定义可以明了, 曲率中心恒位于曲线在被考察点 (在凹曲一侧) 的法线上. 若曲线在给定点的曲率用  $k$  表示, 则在 [250] 对于圆周曾有公式:  $k = \frac{1}{R}$ , 可知曲率半径显然就是

$$R = \frac{1}{k}.$$

①第 481 页脚注也适用于此.

<sup>32)</sup>严格说来, 第 2) 点需要更确切的叙述, 读者可在 253 目末尾找到它.



利用前目内关于曲率的各种不同的表达式, 我们立刻可以写出曲率半径的一系列公式:

$$R = \frac{ds}{d\alpha},$$

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_t' y_{t2}'' - x_{t2}' y_t'},$$

$$R = \frac{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_{x2}''},$$

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_\theta'^2 - r r_{\theta2}''}, \quad (75)$$

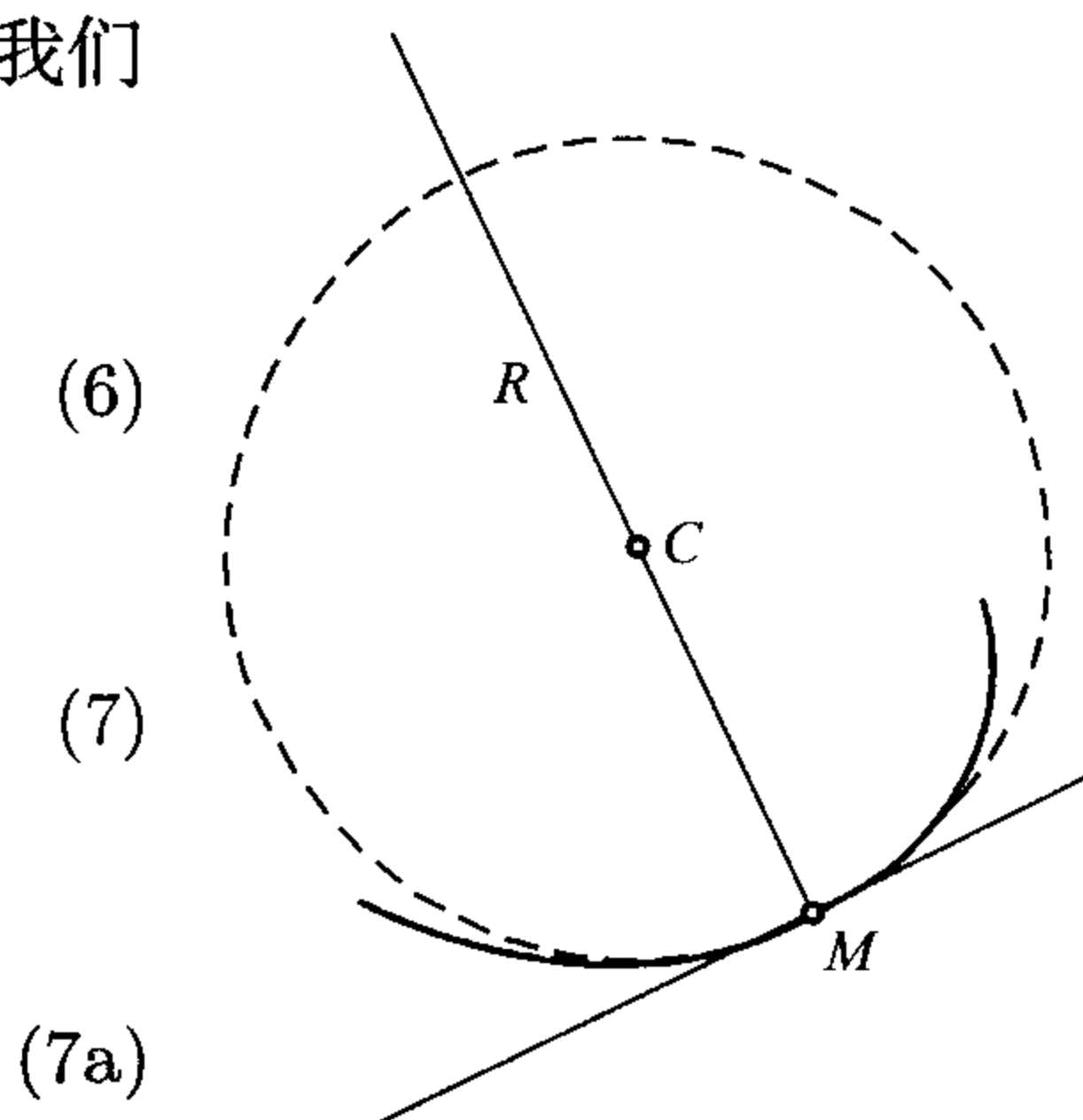


图 157

它们可以应用于各种对应的情形.

如同上面计算曲率时一样, 由这些公式所求得的曲率半径都带着符号. 可是在这里我们不打算弃去符号, 而要设法建立它的几何意义.

为此目的, 引入曲线的法线正向的概念. 我们在 249 内曾经说明切线上向弧增加的方向被认作切线的正向. 至于法线的正向我们选取这样的方向, 它与 (正向) 切线间的相互关系恰如  $y$  轴与  $x$  轴的相互关系一样. 例如, 当坐标轴照通常处置时, 法线正向可由切线正向逆时针方向旋转角度  $+\frac{\pi}{2}$  而得到.

现在若把曲率半径  $R = MC$  看成位于法线上的有向线段, 那么自然, 如果它是在法线的正向上截取的, 就应给以正号, 在相反的情形就应给以负号. 如图 158, 在曲线 (I) 的情形曲率半径就有正号, 在曲线 (II) 的情形有负号.

我们断定由上列公式所求得的曲率半径的符号完全遵照刚才所给出的规定. 可是必须特别着重指出, 在一切情形中, 常假定计算弧的正向是对应于参变量 ( $t, x$  或  $\theta$ ) 增加的方向.

要证实上述的话, 对于曲线用显式表示法的情形比较简单些: 在这里 (图 158) 切线向右, 因此法线向上. 若  $y_{x2}'' > 0$  (在所考察的以及——由于连续性——和它邻近的点), 则 [143] 曲线也向上凹, 而曲率半径  $R$  为正; 按照公式 (7a) 也可求得它是正的. 反之, 在  $y_{x2}'' < 0$  时曲线向下凹, 曲率半径为负, 在这情形它也完全与公式 (7a) 相符合.

对于其他公式也可同样表明.

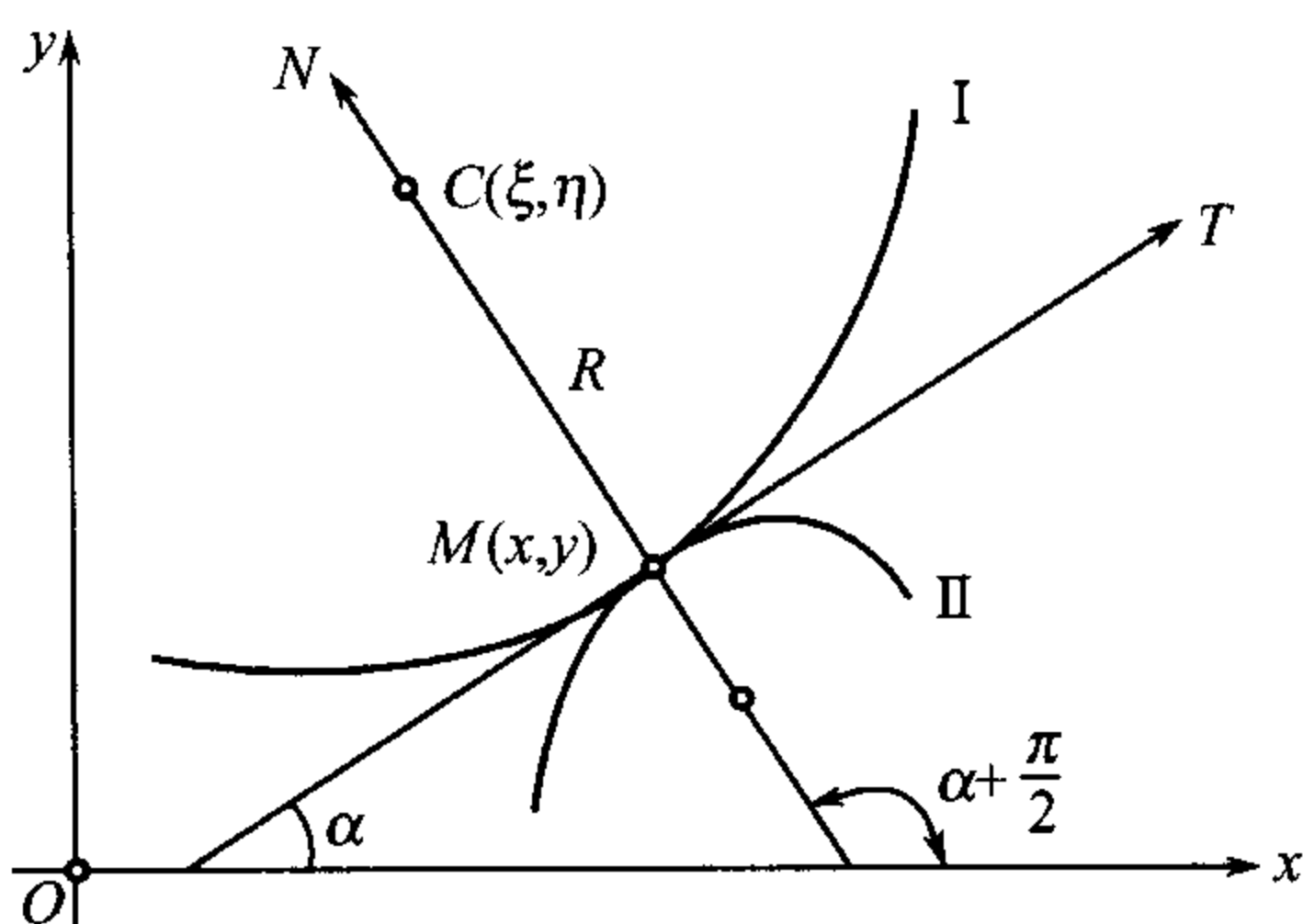


图 158



252. 例题 1) 悬链线:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

(图 41).

在这情形 [比较 99,28)]

$$\sqrt{1 + y_x'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a};$$

另一方面,

$$y_{x^2}'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

因此 [参阅 (7a)]

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

因为, 不难看出法线长  $n = MN$  也有同样的表达式, 故可用这样的作图法来求曲率中心  $C$ : 在法线上与  $MN$  (见图) 相反的 (正的) 一侧截取等于  $MN$  之长的线段, 即得曲率中心  $C$ .

2) 星形线:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(图 116).

可以不必解方程, 但按照隐函数的微分法而求出导数  $y_x'$  及  $y_{x^2}''$ :

$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} y' = 0 \quad \text{或} \quad x^{\frac{1}{3}} y' + y^{\frac{1}{3}} = 0,$$

由此

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}};$$

其后又有

$$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y' + \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y' + x^{\frac{1}{3}} y'' = 0,$$

由此

$$y'' = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3xy^{\frac{2}{3}}} y' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}.$$

把  $y'$  及  $y''$  的数值代入公式 (7a) 内, 就得到

$$R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

3) 旋轮线:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

(图 118).

因为 [231,4)]  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ , 故  $d\alpha = -\frac{1}{2}dt$ ; 又从另一方面, 容易算出

$$x_t' = a(1 - \cos t), \quad y_t' = a \sin t, \quad x_t'^2 + y_t'^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

于是

$$s_t' = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 2a \sin \frac{t}{2}, \quad \text{即} \quad ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$



在这种情形, 关于  $R$  的计算可以利用基本公式 (6):

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a \sin \frac{t}{2} dt}{-\frac{1}{2} dt} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

若回忆在 231,4) 内导出的法线长  $n$  的表达式, 就看出

$$R = -2n.$$

由此可得曲率中心  $C$  的作图法, 这从图内看得很清楚.

4) 圆的渐伸线:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

(图 121).

在此处  $\alpha = t$  [231,6)], 于是  $d\alpha = dt$ . 另一方面

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = a^2 t^2;$$

由此

$$s'_t = at, \quad ds = at dt.$$

因此同样简捷地得到

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = at = MB.$$

这样, 切点  $B$  (细线与圆离开的点) 也就是渐伸线在点  $M$  的曲率中心. 渐伸线的曲率中心的轨迹正是原来的圆.

(这一特殊现象的一般形式我们将在 255 内考察.)

5) 对数螺线:  $r = ae^{m\theta}$  (图 134).

我们有  $r'_\theta = mr$ ,  $r''_{\theta^2} = m^2 r$ . 把它代入公式 (76) 内, 就求得

$$R = \frac{(r^2 + m^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2 r^2 - m^2 r^2} = r \sqrt{1 + m^2}.$$

但  $m = \operatorname{ctg} \omega$  [233,3)], 于是  $R$  的表达式可以写成

$$R = \frac{r}{\sin \omega},$$

而这样直接从图上看得明白, 它就是极法线长  $n_p = NM$ . 因此, 曲率中心就是点  $N$ ; 这就不难给出对数螺线的曲率中心的简易作图法.

6) 心脏形线:  $r = a(1 + \cos \theta)$  (图 135).

在此处有  $r'_\theta = -a \sin \theta$ ,  $r''_{\theta^2} = -a \cos \theta$ . 容易算出

$$r^2 + r'^2_{\theta} = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

还要计算

$$r'^2_{\theta} - rr''_{\theta^2} = a^2(1 + \cos \theta) = 2a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$



按照公式 (7a) 立刻求得

$$R = \frac{4}{3}a \cos \frac{\theta}{2}.$$

回想到 [233,4)] 心脏形线的极法线长的表达式, 可见有

$$R = \frac{2}{3}n_p.$$

7) 双纽线:  $r^2 = 2a^2 \cos^2 2\theta$  (图 126).

我们在 233,5) 内已曾看见, 在这一情形  $\alpha = 3\theta + \frac{\pi}{2}$ , 于是  $d\alpha = 3d\theta$ . 那么按照公式 (6) 立刻得出

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{3}s'_\theta = \frac{1}{3}\sqrt{r^2 + r'^2_\theta} = \frac{1}{3}n_p = \frac{2a^2}{3r}.$$

因为双纽线的法线我们是会作的, 故由此得出曲率中心的作图法

8) 抛物线:  $y^2 = 2px$ .

在这里利用隐函数的微分法, 继续求得

$$yy'_x = p, \quad yy''_{x^2} + y'^2_x = 0, \quad \text{由此} \quad y^3 y''_{x^2} = -p^2.$$

现在按照公式 (7a),

$$R = \frac{(1 + y'^2_{x^2})^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}} = \frac{[y^2 + (yy'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y^3 y''_{x^2}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p^2} \quad (y > 0).$$

回想到 [231,1)] 法线长  $n = \sqrt{y^2 + p^2}$ , 就得到

$$R = -\frac{n^3}{p^2}.$$

9) 椭圆及双曲线:  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

微分这等式二次:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'_x}{b^2} = 0, \quad \text{由此} \quad yy'_x = \mp \frac{b^2 x}{a^2};$$

其次, 有

$$yy''_{x^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} - y'^2_x, \quad \text{或} \quad y^3 y''_{x^2} = -\frac{b^4}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \right) = -\frac{b^4}{a^2}.$$

由此得

$$R = -\frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \quad (y > 0).$$

我们已知 [231,2)] 在这情况下法线长的表达式

$$n = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2},$$

于是

$$R = -\frac{a^2}{b^4} n^3.$$

大家知道, 对于椭圆以及对于双曲线, 半参数  $p$  表法为:  $p = \frac{b^2}{a}$ . 因此在这里就得出  $R$  的最后表达式, 与在抛物线的情形所求得的  $R$  有相同的形式.



故三种圆锥曲线的曲率半径都与法线长的立方成比例.

10) 末了再就一个实际问题讲几句话. 在这问题内, 恰巧是要利用曲率沿着曲线变动的事实, 要讲的就是在设计铁路转弯时必须应用的所谓转向曲线.

力学内证明过, 当质点沿着曲线运动时会产生离心力, 其数量由公式

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

确定, 式中  $m$  是点的质量,  $v$  是它的速度, 而  $R$  就是曲线在被考察点的曲率半径.

假如铁轨的直线部分直接连接圆弧状的弯曲部分 (图 159a), 则当由直线轨道走上弯曲轨道时就要突然产生离心力, 因而发生剧烈震动, 这对于进行着的列车以及路面构造都是有害的. 要避免这种情形, 就必须把轨道的直线部分与圆弧部分用某种转向曲线 (图 159b) 连接起来. 沿着这种转向曲线, 曲率半径将从无穷大 —— 在与直线部分接合的点 —— 逐渐减小至等于圆半径的数值 —— 在与圆弧接合的点, 与此对应, 离心力亦将逐渐增大.

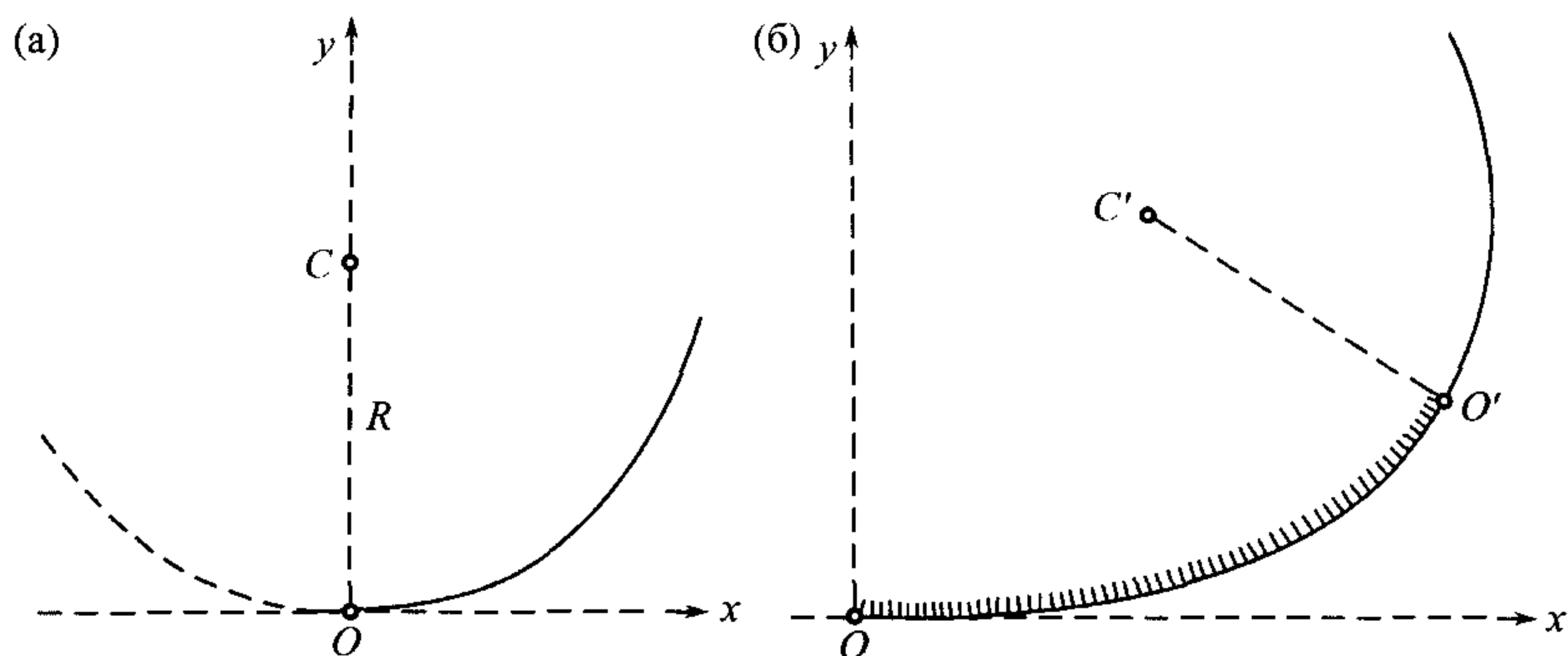


图 159

可以利用立方抛物线  $y = \frac{x^3}{6q}$  作为转向曲线. 在这一情形, 显然有

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

于是得到曲率半径的表达式

$$R = \frac{q}{x} \left( 1 + \frac{x^4}{4q^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

在  $x = 0$  时  $y' = 0$  而  $R = \infty$ , 因此我们的曲线在原点与  $x$  轴相切且曲率为零<sup>①</sup>.

有时双纽线也用来作为转向曲线.

**253. 曲率中心的坐标** 现在将导出求曲率中心的坐标的公式. 用  $x$  及  $y$  表示曲线上被考察点  $M$  的坐标, 而用  $\xi$  及  $\eta$  表示与它对应的曲率中心  $C$  的坐标.

<sup>①</sup>用微分学的方法 [134、135] 容易证明,  $R$  只在  $x = 0.946\sqrt{q}$  以前是渐减的; 在  $x$  取这值时  $R$  有极小值  $1.390\sqrt{q}$ . 故这曲线只有这部分被利用于实际方面.



曲率半径  $R = MC$  (图 158) 位于与  $x$  轴组成  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  之角的有向法线上. 把线段  $MC$  分别投影于  $x$  轴及  $y$  轴上, 按照投影理论的基本定理将有

$\alpha$  为切线倾角!

$$\xi - x = R \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -R \sin \alpha,$$

$$\eta - y = R \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = R \cos \alpha.$$

由此得曲率中心的坐标为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - R \sin \alpha, \\ \eta &= y + R \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

利用我们从前导出的公式 [251(6); 249(15)]

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds},$$

刚才所得的表达式就可以改写成:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \frac{dy}{d\alpha}, \\ \eta &= y + \frac{dx}{d\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

若曲线由参变量方程 (1) 给定, 那么, 回忆到  $\alpha'_t$  的表达式 (4), 就很容易把公式 (9) 变换成下式:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_{t2}'' - x_{t2}'' y_t'} y_t', \\ \eta &= y + \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_{t2}'' - x_{t2}'' y_t'} x_t'. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

我们看出, 在此处  $\xi$  及  $\eta$  也如同  $x$  及  $y$  一样可以表示为参变量  $t$  的函数.

在曲线由显式方程  $y = f(x)$  给定的情形, 公式 (10) 取特殊形式:

$$\xi = x - \frac{1 + y_x'^2}{y_{x2}''} y_x', \quad \eta = y + \frac{1 + y_x'^2}{y_{x2}''}. \quad (10a)$$

公式 (10) 也可用在曲线由极坐标方程  $r = g(\theta)$  给定的情形, 如同平常情形, 选角  $\theta$  作为参变量.

把刚才得出的公式 (10a) 与 137 (图 62) 的问题中所得法线上的界点的公式相比较, 就看出前述的界点重合于曲率中心.

若把公式 (10a) 及 (17a) 与 243 的公式 (22) 及 (23) 相比较, 还能得出更重要的结果: 曲线在给定点的曲率圆不是别的, 而就是密切圆. 换句话说 [244], 曲率圆就是经过曲线上三点的圆当这三点趋向于给定点而与它重合时的极限位置.

当然, 这结果可以预知: 在已给曲线与圆周为二级相切的情形, 二曲线在切点的纵标  $y$  以及它的二导数  $y_x'$  及  $y_{x2}''$  有相同的数值, 于是它们在这点的凹曲方向及曲率的数值都将重合, 因为这两件东西只与上述二导数有关.



**254. 渐屈线及渐伸线的定义; 渐屈线的求法** 若点  $M(x, y)$  沿已给曲线而移动, 则与它对应的曲率中心  $C(\xi, \eta)$  一般说来也画成某一曲线. 已给曲线的曲率中心的轨迹称为它的**渐屈线**. 反之, 原曲线对于自己的渐屈线来说, 就称为它的**渐伸线**.

前日用参变量  $t$  (或  $x$ ) 所表示曲率中心  $C$  的坐标  $\xi, \eta$  的表达式 (10) 或 (10a) 可以看成是现成的渐屈线的参变量方程. 有时, 从它们消去参变量而用隐式方程

$$F(\xi, \eta) = 0$$

表达渐屈线更为有利.

**例题** 1) 求抛物线  $y^2 = 2px$  的渐屈线.

利用上面 [252, 8)] 得出的结果:

$$yy'_x = p, \quad y^3 y''_{x^2} = -p^2.$$

按照公式 (10a) 求出曲率中心的坐标

$$\begin{aligned} \xi &= x - yy'_x \frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = 3x + p = \frac{3y^2}{2p} + p, \\ \eta &= y + y \frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = y - \frac{y}{p^2} (y^2 + p^2) = -\frac{y^3}{p^2}. \end{aligned}$$

于是, 抛物线的渐屈线的参变量方程 (式中的  $y$  为参变量) 就是

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p, \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

从这二方程消去  $y$ , 先有

$$y^2 = \frac{2p}{3}(\xi - p), \quad y^3 = -p^2 \eta,$$

由此, 最后得

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

我们看到, 抛物线的渐屈线是半立方抛物线 (图 160).

2) 求椭圆  $x = a \cos t, y = b \sin t$  的渐屈线.

我们有

$$\begin{aligned} x'_t &= -a \sin t, & x''_{t^2} &= -a \cos t, \\ y'_t &= b \cos t, & y''_{t^2} &= -b \sin t. \end{aligned}$$

把它们代入公式 (10), 就得

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos t - \frac{b \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \\ \eta &= -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t. \end{aligned}$$



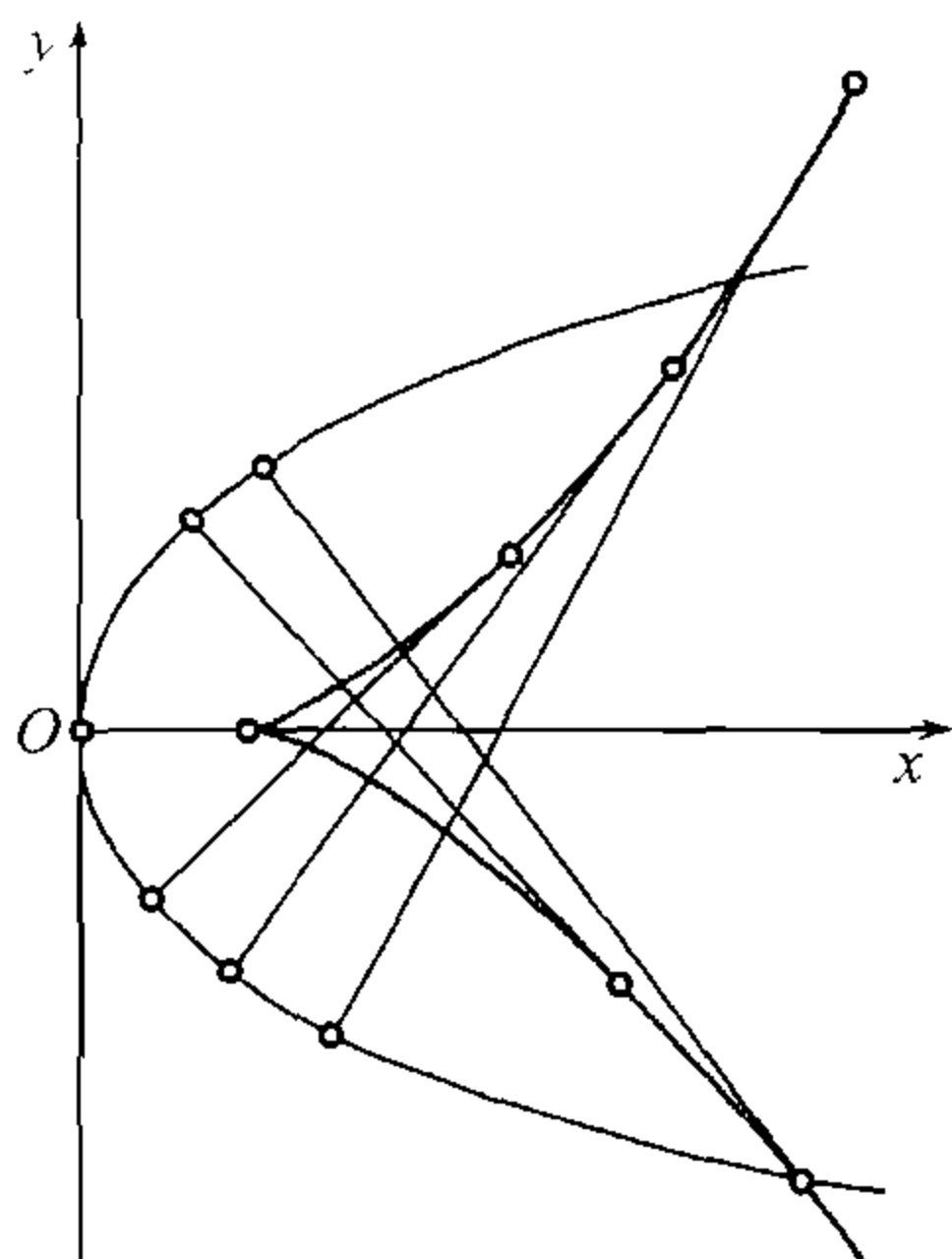


图 160

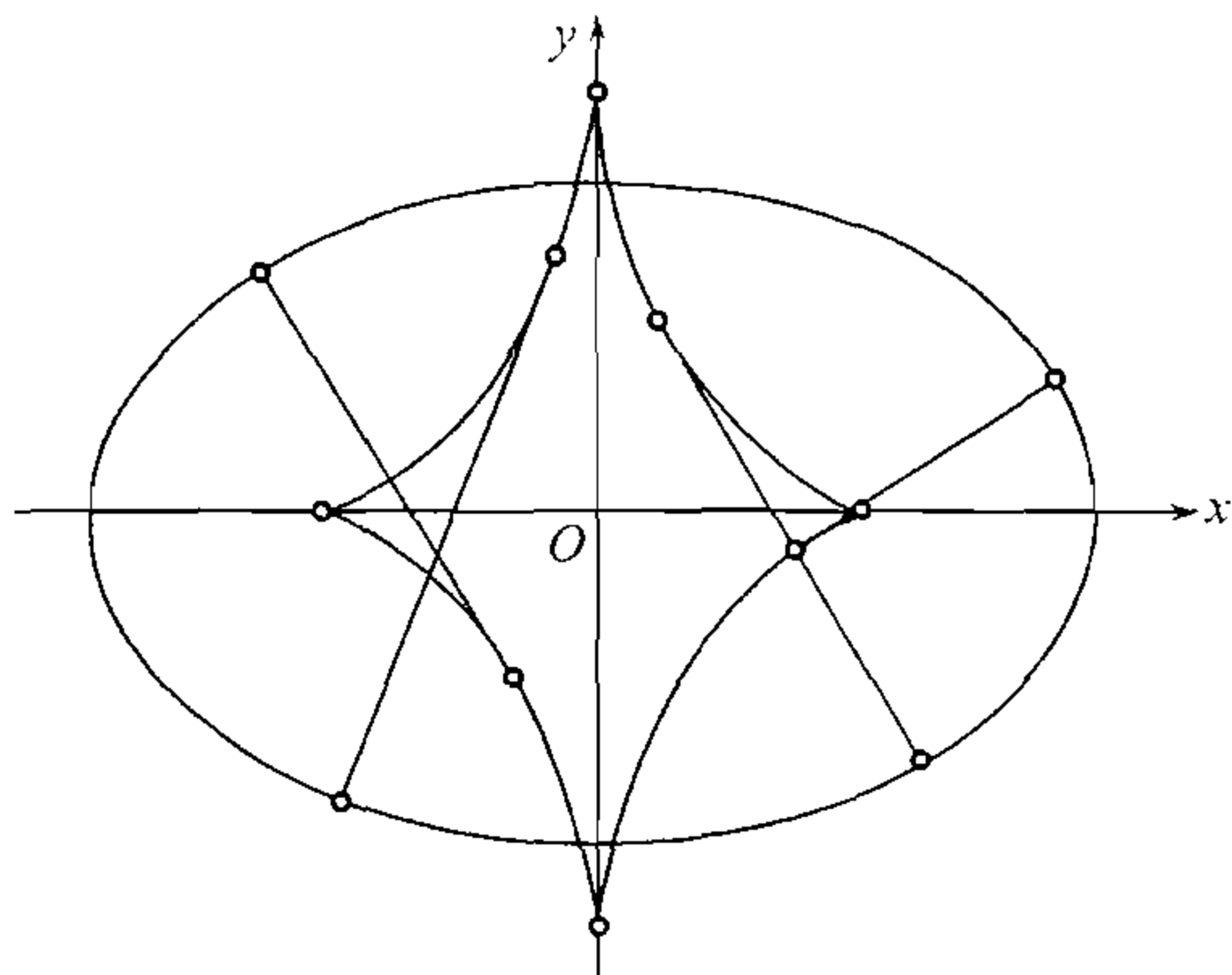


图 161

这就是椭圆的渐屈线的参变表示式. 消去  $t$ , 就得到这曲线的隐式方程

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \quad (\text{式中 } c^2 = a^2 - b^2).$$

这曲线颇似星形线, 它由星形线沿铅垂方向拉长而得出 (图 161).

类似于此, 但只借助于双曲函数 (代替三角函数), 就求得双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐屈线

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \quad (\text{式中 } c^2 = a^2 + b^2).$$

3) 求星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  的渐屈线.

我们在 252,2) 内已有:

$$y'_x = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{a^2}{3x^4y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

把它们代入公式 (10a), 化简之后得到

$$\xi = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

由这些方程, 连同星形线本身的方程, 可以用下列方法消去  $x$  及  $y$ :

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \quad \xi - \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \\ (\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} &= 2\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 2a^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

若把坐标轴回转  $45^\circ$ , 则新坐标  $\xi_1, \eta_1$  可以用旧坐标  $\xi, \eta$  来表达, 其公式为

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad \eta_1 = -\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

于是在新坐标系下所求渐屈线的方程为

$$\xi_1^{\frac{2}{3}} + \eta_1^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$



我们得知这便是星形线的方程. 这样, 星形线的渐屈线是放大一倍的星形线, 它的两轴可由原来的两轴旋转  $45^\circ$  而得到 (图 162).

4) 求旋轮线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  的渐屈线.

因为我们知道 [231, 4)] 对于旋轮线有

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad d\alpha = -\frac{1}{2}dt,$$

故利用公式 (9) 较为便利. 把  $d\alpha$  的值代入, 得

$$\xi = x + 2y'_t, \quad \eta = y - 2x'_t$$

或

$$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = -a(1 - \cos t).$$

令  $t = \tau - \pi$ , 所得的参变量方程可以改写成

$$\xi = -\pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

由此很清楚, 旋轮线的渐屈线仍是旋轮线, 它与原曲线为合同形, 但向左 (平行于  $x$  轴, 在负向) 移动一段距离  $\pi a$ , 再向下 (平行于  $y$  轴, 亦在负向) 移动一段距离  $2a$ .

建议读者去证明, 圆外或圆内旋轮线的渐屈线亦与原曲线为合同形, 且可由原曲线回转而得.

5) 求对数螺线  $r = ae^{m\theta}$  的渐屈线.

在 252, 5) 内所指出的曲率中心的几何作图法使我们容易确定曲率中心的极坐标  $r_1$  及  $\theta_1$  就是 (参阅图 134)

$$r_1 = n_p = r \operatorname{ctg} \omega = mr, \quad \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

从这些方程及螺线方程本身消去  $r$  及  $\theta$ , 即得渐屈线方程

$$r_1 = mae^{m(\theta_1 - \frac{\pi}{2})} = a_1 e^{m\theta_1}.$$

把极轴旋转一适当的角度, 可以使这方程与原方程全等; 这样, 对数螺线的渐屈线是由原曲线绕极点回转一角度而得出的对数螺线.

至于已给曲线的渐伸线的作图法, 待我们研究渐屈线及渐伸线的几个性质以后再回过头来讨论.

## 255. 渐屈线及渐伸线的性质 我们已有渐屈线的参变表示(8)

$$\xi = x - R \sin \alpha, \quad \eta = y + R \cos \alpha,$$

其中  $x, y, R, \alpha$  都认作参变量的函数. 现在假定  $x$  及  $y$  有关于参变量的 (连续的) 三阶导数<sup>①</sup>; 那么可以对表达式 (8) 施行微分:

$$d\xi = dx - R \cos \alpha d\alpha - dR \sin \alpha,$$

$$d\eta = dy - R \sin \alpha d\alpha + dR \cos \alpha.$$

<sup>①</sup>须注意, 在  $R$  内已出现有它们的二阶导数.

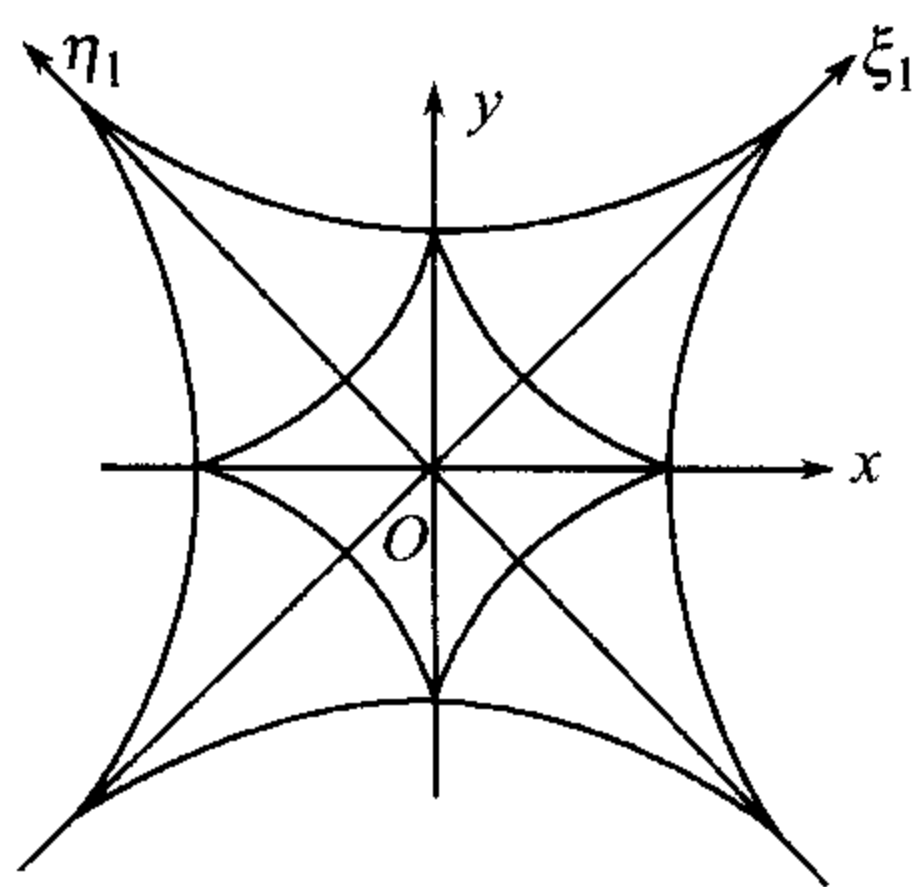


图 162



注意到

$$\begin{aligned} R \cos \alpha d\alpha &= \frac{ds}{d\alpha} \frac{dx}{ds} d\alpha = dx, \\ R \sin \alpha d\alpha &= \frac{ds}{d\alpha} \frac{dy}{ds} d\alpha = dy, \end{aligned}$$

最后得

$$d\xi = -\sin \alpha dR, \quad d\eta = \cos \alpha dR. \quad (11)$$

现在限于考察这样的一段曲线, 在这段曲线上  $R$  既不变为零, 也不变成无穷大, 并且  $dR$  也不等于零. 由此在给定曲线上以及在它的渐屈线上除去了奇异点的可能性. 因为  $dR \neq 0$ . 故曲率半径  $R$  单调地变动; 或是增大, 或是减小.

以公式 (11) 中的一式除另一式, 即得:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

于是渐屈线的切线斜率与渐伸线的切线斜率互为负倒数, 故两切线互相垂直. 因此:

1° 渐伸线的法线是渐屈线 (在前者的曲率中心) 的切线.

取渐伸线的法线族; 它依赖于一个参变量 (例如, 确定此曲线上点的位置的参变量). 由已证明的事实, 显然可知, 渐屈线就是这法线族的包络.

作为练习, 建议读者由另一方法去证实: 从法线方程

$$(X - x)x'_t + (Y - y)y'_t = 0$$

着手 (式中的  $x, y, x'_t, y'_t$  都是参变量  $t$  的函数), 用 **238** 的方法求出包络, 并证明它重合于渐屈线 (10). 还可以证明, 曲率中心是法线上的特征点, 即给定法线与无限接近于它的另一法线的交点的极限位置.

现在转而考察渐屈线上的弧  $\sigma$ . 把 (11) 内的二等式各自平方然后相加, 并且计及 **248** 内关于弧的微分公式 (11), 就得到

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2,$$

由此

$$d\sigma = \pm dR \quad (12)$$

或 (因  $dR \neq 0$ )

$$\frac{d\sigma}{dR} = \pm 1.$$

因为这比式是参变量的连续函数, 它不能从数值  $-1$  跳越到  $+1$  (而不经中间数值), 故它在全段曲线上只能等于其中之一数. 换句话说, 等式 (12) 的右边在全段曲线上只能具一种符号, 正或负.



这符号视渐屈线上计算弧的方向如何选择而定. 若如此选择计算弧的方向, 使  $\sigma$  随着曲率半径  $R$  一同增大, 则在公式 (12) 内须取正号; 若弧  $\sigma$  增大时而  $R$  反而减小, 则取负号.

今用第一种假定, 则有

$$dR = d\sigma, \text{ 由此 } R - \sigma = c = \text{常数}, \quad (13)$$

我们就得到

2° 曲率半径与渐屈线的弧长相差为常数.

这样, 在渐伸线上两点的曲率半径之差等于对应的两曲率中心之间的渐屈线的弧长. 由此可得计算渐屈线弧长的巧妙方法.

上面已证明的渐屈线的性质还可以很清楚地用机械方法来说明. 为了使叙述简化, 假设曲率半径  $R$  (它不等于零且在被考察的全段上保持同一符号) 处处为正, 这只要在渐伸线上适当选定计算弧的方向就可以办到. 其次, 若在渐屈线上从对应于最小曲率半径的点  $P$  开始计算弧长, 我们就有  $\sigma > 0$ . 在这些条件之下, 等式 (13) 内的常数  $c$  就也取正值.

现在想象在渐屈线上由端点  $Q$  至起点  $P$  (图 163) 绕着一条柔软而无弹性的细线; 它在起点  $P$  处沿切线方向离开渐屈线而达到渐伸线上与  $P$  相距  $c$  的对应点  $A$ . 把细线从渐屈线上揭起, 但仍保持着伸直的状态. 设  $QNM$  是它的一个任意位置; 因为  $NM$  比  $PA = c$  增大之值为弧长  $\widehat{PN} = \sigma$ , 故  $NM$  便是曲率半径  $R$ , 就是说点  $M$  位于渐伸线上.

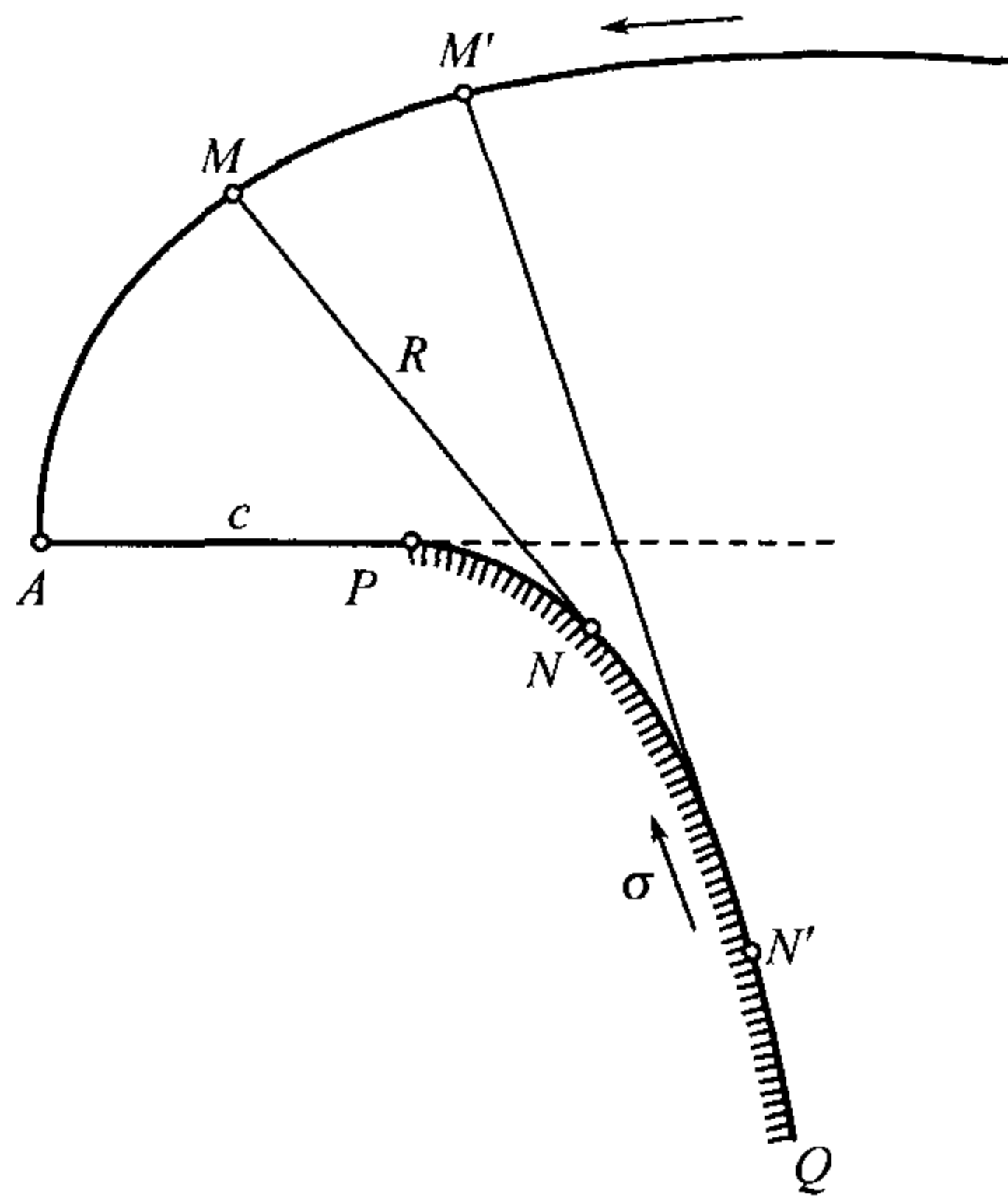


图 163

因此: 渐伸线可以由预先绕在渐屈线上的细线的展开方法而画出<sup>①</sup>. 也可以这样说, 当直线  $AP$  沿着渐屈线并无滑动地滚转时, 其上  $A$  点所描的轨迹就是渐伸线.

末了, 再引出渐屈线的曲率半径  $\rho$  的公式.

用  $\beta$  表示渐屈线的切线与  $x$  轴所成的角, 显然就有:

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}, \text{ 于是 } d\beta = d\alpha. \quad (14)$$

因此 [参阅 (13) 及 (14)]

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{dR}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} \frac{dR}{ds} = R \frac{dR}{ds}. \quad (15)$$

<sup>①</sup>渐屈线及渐伸线两个术语的起源即在于此, 意即“卷起”及“展开”.



须记住, 这公式系假定  $\sigma$  随着  $R$  一同增大; 在相反的情形, 上式右端就必须放上负号.

又若认为  $\sigma$  随着  $s$  一同增大, 则可以把公式写成

$$\rho = R \left| \frac{dR}{ds} \right|, \quad (16)$$

这样就把  $\frac{dR}{ds} > 0$  ( $R$  随着  $s$  一同增大) 及  $\frac{dR}{ds} < 0$  ( $s$  增大而  $R$  减小) 两种情形合并在一起.

**256. 渐伸线的求法** 我们看到, 每一渐伸线可以沿着自己的渐屈线而由缠绕于渐屈线上的细线的展开, 或 —— 本质上与此相同 —— 用直线沿着渐屈线滚转 (并无滑动) 的方法而重新得到.

现在将证明逆命题: 若直线在给定曲线上滚转 (并无滑动), 则其上任一点的轨迹成为此曲线的渐伸线. [这样, 每一曲线有无数条渐伸线.]

设曲线  $PN$  (图 164) 由参变量方程

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t)$$

给定, 而且  $\varphi$  及  $\psi$  有一阶及二阶连续导数; 再假设在被考察的曲线段上没有重点, 或一般地说没有奇异点. 曲线弧  $\sigma$  由点  $P$  量起.

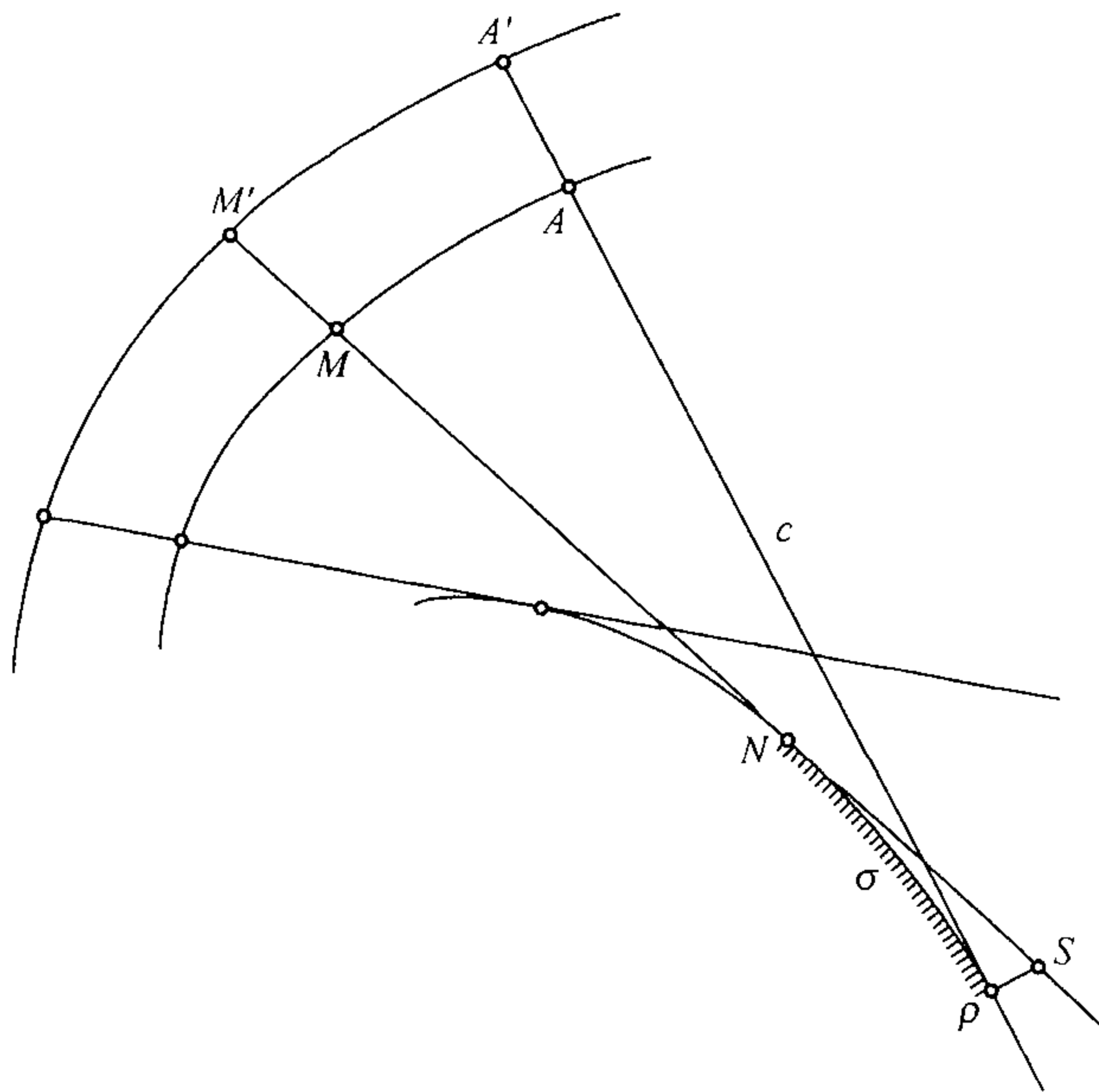


图 164

在点  $P$  的切线上向弧渐增的一侧取任意点  $A$ , 它与  $P$  的距离 (连同应有的符号) 用  $c$  表示, 并且当直线  $PA$  在给定曲线上滚转 (并无滑动) 时记下它的轨迹. 当



直线在某一新位置时, 那时  $N$  成为切点, 点  $P$  移到  $S$  而  $A$  移至  $M$ ; 显然

$$SN = \widehat{PN} = \sigma, \text{ 于是 } NM = c - \sigma.$$

若点  $N$  及  $M$  的坐标各用  $(\xi, \eta)$  及  $(x, y)$  来表示, 而直线  $SN$  与  $x$  轴之间的角用  $\beta$  来表示, 则把线段  $NM$  投影于两轴上, 不难得出:

$$x = \xi + (c - \sigma) \cos \beta, \quad y = \eta + (c - \sigma) \sin \beta. \quad (17)$$

这就给出所求轨迹的参变量表示式.

对它们施行微分, 求得

$$dx = d\xi - \cos \beta d\sigma - (c - \sigma) \sin \beta d\beta,$$

$$dy = d\eta - \sin \beta d\sigma + (c - \sigma) \cos \beta d\beta.$$

因为 [参阅 249(15)]

$$\cos \beta = \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \sin \beta = \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad (18)$$

故这些结果化简而得

$$dx = -(c - \sigma) \sin \beta d\beta, \quad dy = (c - \sigma) \cos \beta d\beta.$$

把  $d\beta = 0$  或  $\sigma = c$  的情形<sup>①</sup>除外; 那么, 这两公式两边各自相除, 就得到

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

由此已很明显, 两曲线上的对应切线互相垂直, 于是给定曲线确实成为所作曲线的法线族的包络, 即它的渐屈线. 这就是说, 所作曲线是给定曲线的渐伸线, 这便是所要证明的.

前面考察过的圆的渐伸线 [225,8); 比较 252,4)] 可以作为用上述方法求渐伸线的例子.

<sup>①</sup>与它们对应的是所作曲线上的奇异点.



# 附录 函数扩充的问题

解析开拓?

**257. 一元函数的情形** 考察定义在某一 (有限的或无穷的) 区间  $\mathcal{X}$  内, 或更一般地, 在由有限个这种区间所组成的区域  $\mathcal{X}$  内<sup>①</sup> 的函数  $f(x)$ . 若函数  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内为连续, 且在这区域内它有直至  $n$  阶 ( $n \geq 1$ ) 为止的连续导数, 则说, 它在区域  $\mathcal{X}$  内属于  $C^n$  类.

这时须注意, 若  $\mathcal{X}$  含有某区间的任一端点, 则关于这点应有单侧导数<sup>②</sup>.  
今设函数  $f(x)$  在并不包括全部数轴的某一区域  $\mathcal{X}$  内属于  $C^n$  类 ( $n = 1, 2, \dots$ ). 假定在任何与  $\mathcal{X}$  有重叠部分的区域  $\mathcal{X}^*$  内存在着也属于  $C^n$  类的函数  $f^*(x)$ , 它在区域  $\mathcal{X}^*$  与  $\mathcal{X}$  的公共部分内与  $f(x)$  全等; 那么, 这函数  $f^*$  便将函数  $f$  保持着类而扩充至  $\mathcal{X}^*$ .

这样把函数扩充至更广的区域是否永远可能? 对这一问题的回答如下.

**定理** 任一在闭域<sup>③</sup>  $\mathcal{X}$  内属于  $C^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 类的函数  $f(x)$  可以保持着类而扩充至全数轴  $\mathcal{X}^* = (-\infty, +\infty)$ .

今将证明, 在这里函数的扩充可以简单地借助于整多项式而实现. 为此目的, 预先作出下列的附注.

我们已在 **123** 内知道, 在点  $x = \alpha$  处  $n$  次多项式

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - \alpha) + \frac{c_2}{2!}(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x - \alpha)^n \tag{1}$$

<sup>①</sup>这里的区域是一维区域 —— 译者注.  
<sup>②</sup>或即 —— 在已给条件之下是同一件事情 —— 当  $x$  从区间内部向此端点接近时诸导数的极限值.  
<sup>③</sup>即由一个或几个形如  $[a, b], [a, +\infty), (-\infty, b]$  的闭区间所组成的区域.



和它的  $n$  个导数的值依次为  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ .

其次再设要找一个这样的多项式, 它在  $x = \alpha$  这点满足如上所述的条件, 除此以外, 它自己及它的  $n$  个导数在另一点  $x = \beta$  又须具有预先给定的数值  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ . 取所求多项式成如下的形式:

$$p(x) + (x - \alpha)^{n+1}q(x), \quad (2)$$

式中  $p(x)$  就是多项式 (1), 而  $n$  次多项式  $q(x)$  则尚待确定. 不论怎样选择  $q(x)$ , 多项式 (2) 在点  $x = \alpha$  处总能满足已知的条件. 对多项式 (2) 逐次微分  $n$  次, 然后在这多项式及它的导数内令  $x = \beta$ ; 使所得的表达式依次等于  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ , 我们就得出一组关于  $q(\beta), q'(\beta), q''(\beta), \dots, q^{(n)}(\beta)$  的线性方程, 由此即可相继确定这些数值. 再根据这些数值, 利用类似于 (1) 的公式, 就不难确定  $q(x)$  [比较 130].

现在回到上述命题的证明. 设在一般情形, 区域  $\mathcal{X}$  系自左向右标以序号的闭区间  $\mathcal{X}_k (k = 1, 2, \dots, m)$  所组成. 在这些区间内令函数  $f^* = f$ , 并用下面的方法补充它的定义. 若区间  $\mathcal{X}_1$  的左端  $a_1$  是有限数, 则在  $x < a_1$  时, 令  $f^*$  等于形如 (1) 的多项式, 其中

$$c_0 = f(a_1), c_1 = f'(a_1), \dots, c_n = f^{(n)}(a_1).$$

类似于此, 函数  $f$  也可以由  $\mathcal{X}_m$  向右扩充, 仅需这区间的右端  $b_m$  是有限数. 最后, 对界于  $\mathcal{X}_k$  与  $\mathcal{X}_{k+1}$  之间的区间  $(b_k, a_{k+1}) (k = 1, 2, \dots, m-1)$  我们使  $f^*$  恒等于那种多项式, 它以及它的  $n$  个导数在点  $x = b_k$  及  $x = a_{k+1}$  处都具有与函数  $f$  及它的导数相同的数值. 不难看出, 如此确定的函数  $f^*$  就在全区域  $\mathcal{X}^* = (-\infty, +\infty)$  内实现了所要求的扩充.

**258. 关于二维空间的问题** 谈到多元函数, 情况就复杂了. 我们以后仅以讨论二元函数为限. 在这一情形所得出的结果也可以适用于任何个变元的一般情形.

我们将考察二维空间内的区域  $\mathcal{M}$ , 它可以被理解为开域, 或是开域而附加它的周界  $\mathcal{L}$  的一部或全部 (在最后的情形, 就成为闭域).

在这情形下要推广  $C^n$  (当  $n \geq 1$  时) 类的函数的定义, 我们碰到了特殊的困难. 这由于在域界  $\mathcal{L}$  上的点, 一种或另一类型的偏导数可能是根本无法定义的. 例如, 若区域  $\mathcal{M}$  是闭圆  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则在点  $(0, \pm 1)$  就不能说及关于  $x$  的偏导数, 因为在  $y = \pm 1$  时, 对  $x = 0$  的值已不能加上任何增量, 以免立刻越出函数的定义域的范围; 类似于此, 在点  $(\pm 1, 0)$  关于  $y$  的偏导数也无意义.

当说及 (有一定的阶, 有一定类型的) 偏导数在区域  $\mathcal{M}$  内为连续时, 我们约定, 在区域的界点  $M_0$ , 这导数<sup>①</sup> 只能理解为在内点  $M$  算出的同名导数当  $M$  趋向于  $M_0$  时的极限值 —— 不管它在事实上是否导数.

<sup>①</sup>在这时仍保持它的通常的记法.



在以后进一层的叙述, 将说明上述的极限值——对于很广泛的一类区域来说——同时也就是真正的导数, 只要点  $M_0$  关于区域的位置允许我们得以说及被考察的类型的导数就成. 并且, 对于最简单的矩形区域的情形, 我们立刻就将证明这事实.

因此, 设函数  $f(x, y)$  本身以及到  $n(n \geq 1)$  阶为止的一切导数在某一矩形  $M$  中都为连续, 又点  $M_0(x_0, y_0)$  位于直线  $y = y_0$  的某一线段上, 这线段是  $M$  的周界 (图 165) 并且属于  $M$ .

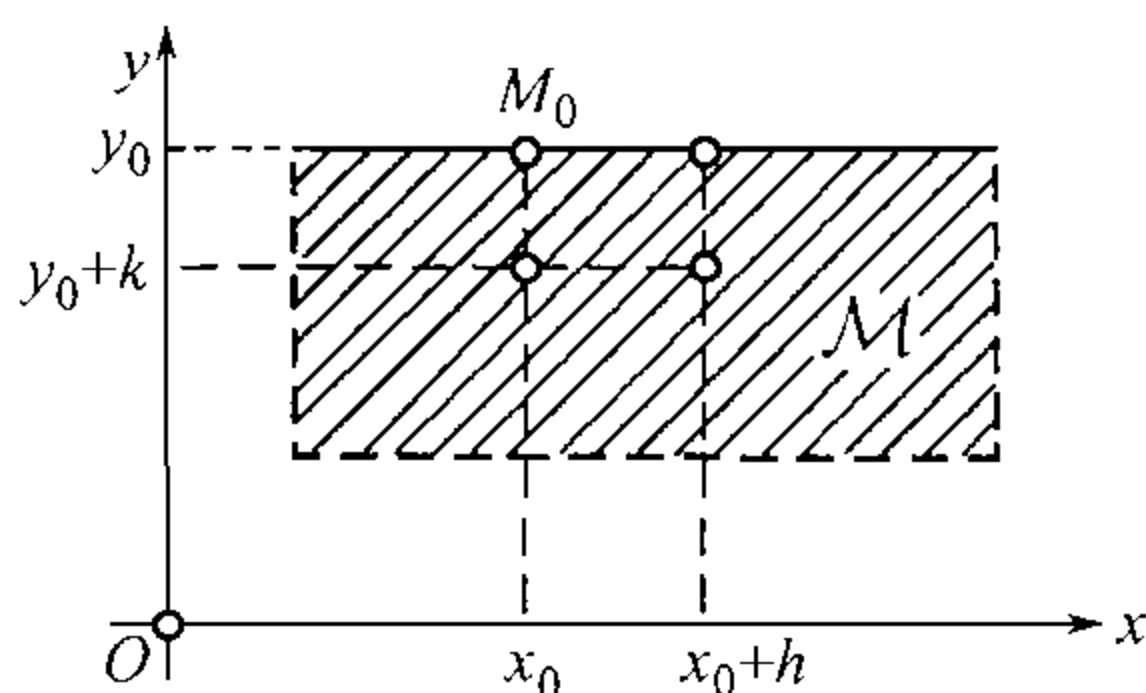


图 165

从导数  $f'_y$  开始, 对于它问题较为简单. 按照拉格朗日公式 [112], 增量的比式

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1),$$

当  $k \rightarrow 0$  时恰趋于极限值  $f'_y(x_0, y_0)$ , 这样, 它显然就是通常意义下的导数<sup>33)</sup>[比较 113]. 至若关于导数  $f'_x$ , 则与它对应的增量的比式本身可以看成是个极限

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h}.$$

但末一表达式又可按照拉格朗日公式变换成为

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} = f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) \quad (0 < \theta < 1).$$

在  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  时它趋于极限值  $f'_x(x_0, y_0)$ . 又按照 168 的定理, 由于在  $k \rightarrow 0$  时的单重极限存在, 这二重极限同时也就是累次极限:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \end{aligned}$$

于是在这里  $f'_x(x_0, y_0)$  原来只是被定义为导数的极限值的, 也就成为真正的导数. 上述的话可以逐步移用于高阶导数.

因此, 上面总结出来的条件允许我们现在说及在任何区域  $M$  中的连续导数, 而不论属于这区域的界点关于这区域是怎样分布的. 兹称函数  $f(x, y)$  在二维区域  $M$  中属于  $C^n(n \geq 1)$  类, 如果它在  $M$  中为连续, 且有一切类型的直至  $n$  阶为止的各阶连续导数. 今设区域  $M$  并不包括全平面; 若在与  $M$  有重叠部分的任何区域  $M^*$  中有也属于  $C^n$  类的函数  $f^*$  存在, 它在  $M$  与  $M^*$  的公共部分中与  $f$  全等, 则我们就说, 它把函数  $f$  保持着类而扩充至  $M^*$ . 在这里自然会提出问题: 这样扩充至更广的区域, 特别是全平面, 是否恒为可能? 我们将指出, 对于闭域  $M$  这问题的答案是肯

<sup>33)</sup>准确地说, 是单侧导数.



定的, 仅需它的周界满足某种简单条件就成. 而且, 为了叙述的简化, 我们将永远假定区域  $M$  是有界的, 虽然最后的命题对于无界区域也成立.

上述的结果基本上属于惠德纳 (H. Whitney) 及赫金斯 (M. R. Hestenes).

**259. 辅助命题** 为了简化基本定理的证明, 我们将先证明几个引理.

**引理 1** 假设  $\varphi(u, v)$  是在区域  $\mathcal{P}$  中属于  $C^n (n \geq 1)$  类的函数,  $\mathcal{P}$  由不等式<sup>①</sup>

$$a < u < b, \quad 0 \leq v < \Delta$$

确定. 则必有函数  $\varphi^*$  存在, 它把函数  $\varphi$  保持着类而扩充至全矩形

$$\mathcal{P}^* = (a, b; -\Delta, \Delta).$$

我们将由下面  $n+1$  个线性方程的方程组:

$$(-1)^k \lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \lambda_2 + \cdots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k \lambda_{n+1} = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n) \quad (3)$$

来确定  $n+1$  个数字  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ . 这是可以做到的, 因为方程组的行列式就是对于互不相等的数字  $-1, -\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{n+1}$  的范德蒙德行列式, 大家知道它异于 0.

今在  $\mathcal{P}^*$  中如此确定函数  $\varphi^*(u, v)$ : 在  $v \geq 0$  时令  $\varphi^*(u, v) = \varphi(u, v)$ , 而在  $v < 0$  时令

$$\varphi^*(u, v) = \lambda_1 \varphi(u, -v) + \lambda_2 \varphi\left(u, -\frac{1}{2}v\right) + \cdots + \lambda_{n+1} \varphi\left(u, -\frac{1}{n+1}v\right). \quad (4)$$

若  $u_0$  是  $u$  在  $(a, b)$  之内的任意值, 则根据条件 (3) 中对应于  $k = 0$  的第一式, 首先有

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow -0}} \varphi^*(u, v) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1}) \varphi(u_0, 0) = \varphi(u_0, 0).$$

由此得证函数  $\varphi^*$  在矩形  $\mathcal{P}^*$  中位于直线  $v = 0$  上的那些点的连续; 它在  $\mathcal{P}^*$  中其余各点之为连续是很明显的. 现在转而讨论函数  $\varphi^*$  的导数在  $\mathcal{P}^*$  中的存在与连续的问题; 在这里也只需考察直线  $v = 0$  上的诸点. 对于一切导数

$$\frac{\partial^{i+k} \varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k} \quad (1 \leq i+k \leq n) \quad (5)$$

我们先证明极限等式

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow -0}} \frac{\partial^{i+k} \varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k} = \frac{\partial^{i+k} \varphi(u_0, 0)}{\partial u^i \partial v^k} \quad (6)$$

<sup>①</sup>开区间  $(a, b)$  也可以是无穷区间; 完全同样地, 正数  $\Delta$  也可以为  $+\infty$ .



成立. 为此目的, 只需对  $u$  微分等式 (4) $i$  次, 再对  $v(v < 0)$  微分  $k$  次, 得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\partial v^k} &= (-1)^k\lambda_1\frac{\partial^{i+k}\varphi(u,-v)}{\partial u^i\partial v^k} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,-\frac{1}{2}v\right)}{\partial u^i\partial v^k} + \cdots \\ &\quad + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1}\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,-\frac{1}{n+1}v\right)}{\partial u^i\partial v^k}.\end{aligned}$$

在  $u \rightarrow u_0$  而  $v \rightarrow -0$  时取极限. 由于等式 (3), 结果我们也就得到 (6).

因此, 不论从  $v > 0$  一侧或从  $v < 0$  的一侧对于任何导数 (5) 都保证存在唯一的极限值. 此外, 如果取它这个极限值作为直线  $v = 0$  的点上导数 (5) 的值, 则得到在整个  $\mathcal{P}^*$  上连续的函数. 但点  $(u_0, 0)$  是  $\mathcal{P}^*$  的内点, 因而这里应当是真正意义的导数. 关于这方面我们可以根据前段证明过的话: 所说的极限值同时也是平常的导数.

函数  $\varphi^*$  也就是函数  $\varphi$  在  $\mathcal{P}^*$  上所求的扩充.

**引理 2** 设函数  $f(x, y)$  在某一有界开域  $\mathcal{M}^{(1)}$  中属于  $C^n$  类. 若对这区域的周界  $\mathcal{L}$  上的每一点可以作一邻域, 使函数  $f$  在这邻域内可以有保持着类的扩充, 则这种扩充也可能及于全平面  $\mathcal{E}$ .

对于闭域  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{L}^{(34)}$  中的任一点  $M$ , 或则能找出一邻域, 函数  $f$  在它里面是有定义的而且属于  $C^n$  类, 或则能找出一邻域, 使在其中  $f$  可以保持着类而被扩充<sup>②</sup>. 这邻域可以取作, 例如, 中心在  $M$  而半径为  $3r$  的开圆  $\sigma = \mathcal{K}(M, 3r)$ . 这样, 全部闭域  $\overline{\mathcal{M}}$  不仅能用这些圆  $\sigma$  所组成的系  $\Sigma$  来覆盖住, 而且能用半径为其三分之一的圆  $\sigma = \mathcal{K}(M, r)$  所组成的系  $\Sigma$  来覆盖住.

因为区域  $\mathcal{M}$  因之  $\overline{\mathcal{M}}$  都是有界的, 故可以应用博雷尔引理 [175], 用从  $\Sigma$  中取出的有限系

$$\Sigma_m = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$$

来覆盖  $\overline{\mathcal{M}}$ . 在这里

$$\sigma_i = \mathcal{K}(M_i, r_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

同时我们还要考察圆

$$\sigma_i = \mathcal{K}(M_i, 2r_i), \quad \sigma_i'' = \mathcal{K}(M_i, 3r_i).$$

很容易作出在  $\mathcal{E}$  中属于  $C^n$  类的函数  $h_i(M) = h_i(x, y)$ , 使

在  $\sigma_i$  中有  $h_i(M) = 0$ , 而在  $\mathcal{E} - \sigma_i'$  中有  $h_i(M) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

<sup>①</sup>我们甚至并未假定这区域是联通域, 而且现在也未说及它的周界的形状.

<sup>②</sup>视  $M$  是属于开域  $\mathcal{M}$  还是属于它的周界  $\mathcal{L}$  而定.

<sup>34)</sup>这里的加号意味着两个集的并.



例如, 可以这样定义 —— 用 257 的方法 —— 在全区间  $-\infty < t < +\infty$  内属于  $C^n$  类的函数  $h(t)$ , 使

$$\text{在 } t \leq 1 \text{ 时 } h(t) = 0, \quad \text{而在 } t \leq 2 \text{ 时 } h(t) = 1,$$

而后再令

$$h_i(M) = h\left(\frac{\overline{MM_i}}{r_i}\right).$$

借助于函数  $h_i$  再作出函数

$$H_1 = H_1(M) = 1 - h_1,$$

$$H_i = H_i(M) = h_1 h_2 \cdots h_{i-1} (1 - h_i) \quad (1 < i \leq m);$$

它们同样是在  $\mathcal{E}$  中属于  $C^n$  类的函数, 显然,

$$\text{在 } \sigma_i \text{ 中 (对于一切 } j > i) H_j = 0, \quad (7)$$

$$\text{在 } \mathcal{E} - \sigma'_i \text{ 中} \quad H_i = 0, \quad (8)$$

因为在  $\sigma_i$  中因子  $h_i$  等于零, 而在  $\mathcal{E} - \sigma'_i$  中因子  $(1 - h_i)$  等于 0. 今

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 + \cdots + H_i &= (1 - h_1) + h_1(1 - h_2) + \cdots + h_1 h_2 \cdots h_{i-1} (1 - h_i) \\ &= 1 - h_1 h_2 \cdots h_i, \end{aligned}$$

故在  $\sigma_i$  中

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_i = 1, \quad (9)$$

因为在那里因子  $h_i$  等于零.

现在设  $\varphi_i$  在  $\sigma''_i$  中与函数  $f$  或与上述的  $f$  的扩充为全等, 而在  $\sigma''_i$  之外, 属于  $\mathcal{M}$  的诸点令  $\varphi_i = f$ , 在其他诸点令  $\varphi_i = 0$ . 函数  $\varphi_i H_i$  在  $\mathcal{E} - \sigma'_i$  内等于零 [参阅 (8)], 而且显然, 在全平面  $\mathcal{E}$  上属于  $C^n$  类. 最后, 令在  $\mathcal{E}$  中的一切点

$$f^* = \sum_{j=1}^m \varphi_j H_j.$$

函数  $f^*$  已由这等式定义于全平面内, 且同时显然是属于  $C^n$  类的函数.

在  $\mathcal{M}$  内取出任一点  $M$ , 它必属于某一圆  $\sigma_i$ . 因为全部  $\varphi_j(M) = f(M)$ , 此外, 在这点 [由于 (9) 及 (7)]

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_i = 1, \quad \text{而在 } j > i \text{ 时 } H_j = 0,$$

故  $f^*(M) = f(M)$ . 这样,  $f^*$  确是所求的函数.



**260. 关于扩充的基本定理** 现在我们已经有条件可以证明在二元函数的情形关于扩充的定理, 但须对区域的周界加以限制.

我们约定由方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (10)$$

表达而无重点及奇异点的曲线, 称为  $C^n (n \geq 1)$  类的平滑曲线, 式中在某一区间  $\mathcal{T}$  内变动, 而函数  $\varphi, \psi$  在这区间内属于  $C^n$  类.

**定理 1** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $\mathcal{M}$  中属于  $C^n (n \geq 1)$  类,  $\mathcal{M}$  的周界  $\mathcal{L}$  也由属于  $C^n$  类的一条或几条 (互不相交的) 平滑曲线所组成, 则这函数可以保持着类而扩充至于全平面  $\mathcal{E}$ .

设  $M_0(x_0, y_0)$  是周界  $\mathcal{L}$  上的任意点; 为简单起见, 就认为  $x_0 = y_0 = 0$ . 这点必位于构成  $\mathcal{L}$  的某一条曲线上, 而且是它的普通点. 在这种情形, 不失普遍性, 可以假设在点  $M_0$  的邻域内, 曲线可用显式方程  $y = g(x)$  来表示, 式中的  $g$  也属于  $C^n$  类, 并且区域  $\mathcal{M}$  位于曲线的上侧, 即 (在  $M_0$  的邻近) 由不等式  $y \geq g(x)$  来确定 (图 166a).

施行变元的变换, 令

$$x = u, \quad y = g(u) + v.$$

这时函数  $f(x, y)$  就变成函数

$$\varphi(u, v) = f(u, g(u) + v),$$

它在点  $u = v = 0$  的邻近, 就是在  $v \geq 0$  时 (图 166b) 是属于  $C^n$  类. 于是, 按照引理 1, 函数  $\varphi$  就可以保持着类而扩充至于数值  $v < 0$  (常以充分接近于原点的部分为限). 若这一扩充由函数  $\varphi^*(u, v)$  实现, 那么, 还原成旧变元, 容易看出, 函数

$$f^*(x, y) = \varphi^*(x, y - g(x))$$

就给出函数  $f$  在点  $M_0$  的某一邻域内的扩充.

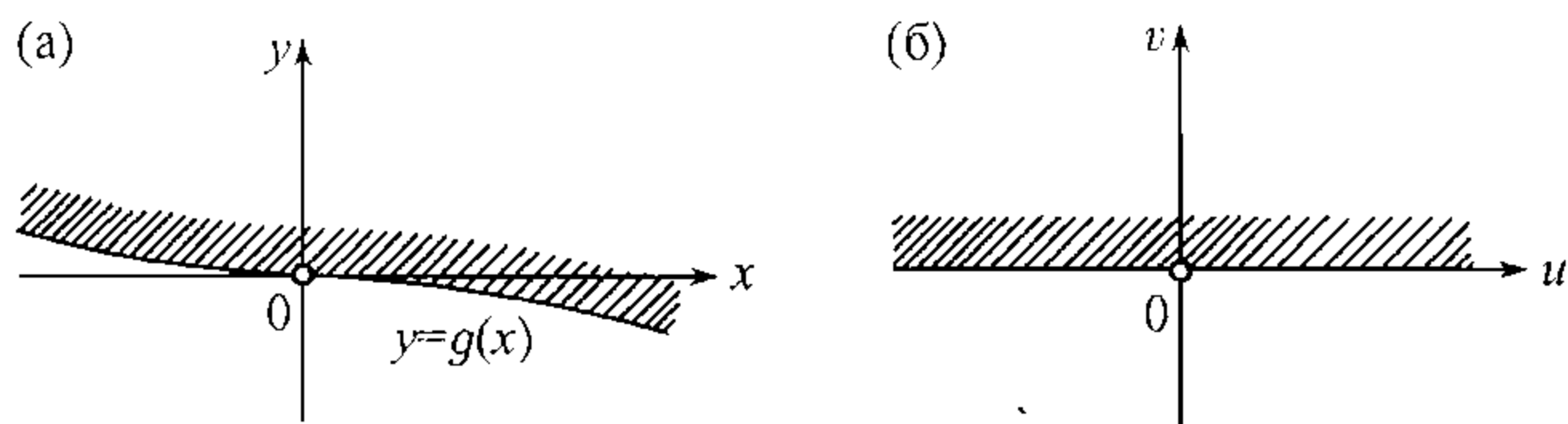


图 166

根据引理 2, 我们现在可以下结论说, 函数  $f$  确实可以保持着类而扩充至于全平面  $\mathcal{E}$ .



**261. 推广到一般情况** 然而所得结果, 在实用的需要上终嫌不够, 因为经常会遇到周界上有着“角点”的区域. 现约定, 由几个彼此组成角度互相连接 (不等于 0 及  $\pi$ ) 的属于  $C^n$  类的平滑曲线弧所构成的曲线, 称为属于  $C^n$  类的逐段平滑曲线.

**定理 2** 若区域  $M$  的周界  $\mathcal{L}$  系由一条或几条不相交的属于  $C^n$  类的逐段平滑曲线所组成, 定理 1 的结论仍保持有效.

我们已经知道在周界  $\mathcal{L}$  上的任一点 (不是角点) 总可以作一邻域, 在这邻域内函数  $f$  可以有保持着类的扩充. 现在将证明对于角点  $M_0(x_0, y_0)$  也是如此.

在这里仍取  $x_0 = y_0 = 0$ ; 不失普遍性, 也可以假定, 在原点相接的两弧在这点各有切线, 其一条切线重合于  $x$  轴的正向部分, 另一条切线与  $x$  轴组成一个角度 (图 167). 在这种情形, 在原点的充分近处这两弧分别由方程

$$y = g(x) \quad \text{及} \quad x = h(y)$$

来表达, 而且  $g'(0) = 0$ ; 函数  $g$  及  $h$  都属于  $C^n$  类.

运用换元法, 令

$$x = u + h(v), \quad y = g(u) + v. \quad (11)$$

因为这些函数的雅可比式

$$J = \begin{vmatrix} 1 & h'(v) \\ g'(u) & 1 \end{vmatrix} = 1 - g'(u)h'(v)$$

在点  $u = v = 0$  等于 1, 故方程组 (11) 在一切变元的零值的邻域内可以有单值的解

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y), \quad (12)$$

而且函数  $\lambda, \mu$  也属于  $C^n$  类 [209].

在  $v = 0$  及  $u \geq 0$  时, 由 (11) 得  $y = g(x)$  及  $x \geq 0$ , 因此对应于第一段弧的是  $u$  轴的正向部分; 同样可以证实对应于第二段弧的是  $v$  轴的正向部分.

显然, 在这种变换之下, 由这些弧在  $xy$  平面上划分原点的邻域而成的二角状区域, 各对应于  $u$  轴及  $v$  轴的正向部分在  $uv$  平面上划分原点的邻域而成的二个——“凹的”及“凸的”——直角状区域 (图 168, a 及 b).

把表达式 (11) 代入函数  $f$ , 得到变换后的函数

$$\varphi(u, v) = f(u + h(v), g(u) + v),$$

在上述的两直角状区域的某一个内 (哪一个则视情形而定), 有定义而且属于  $C^n$  类.

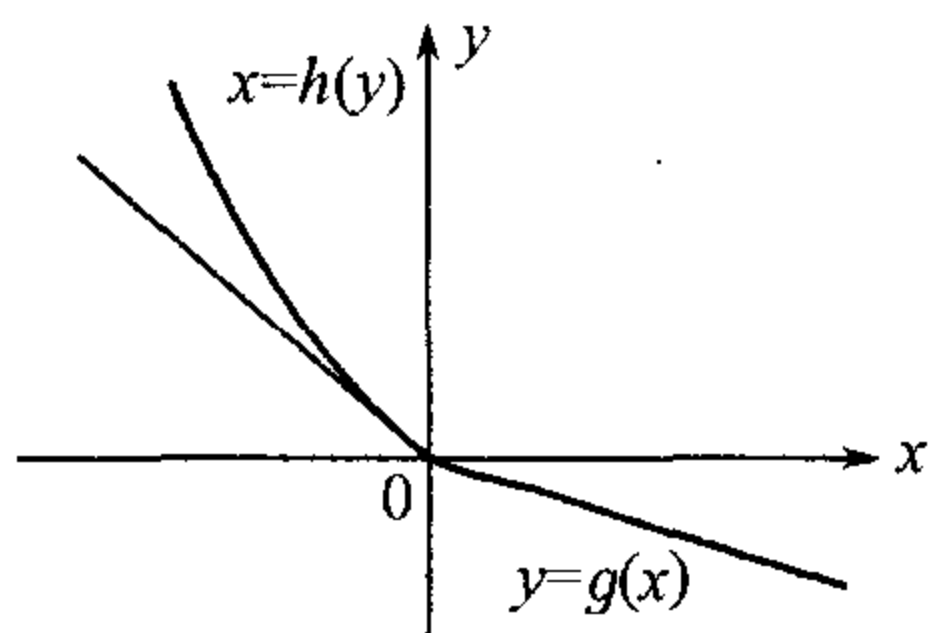


图 167



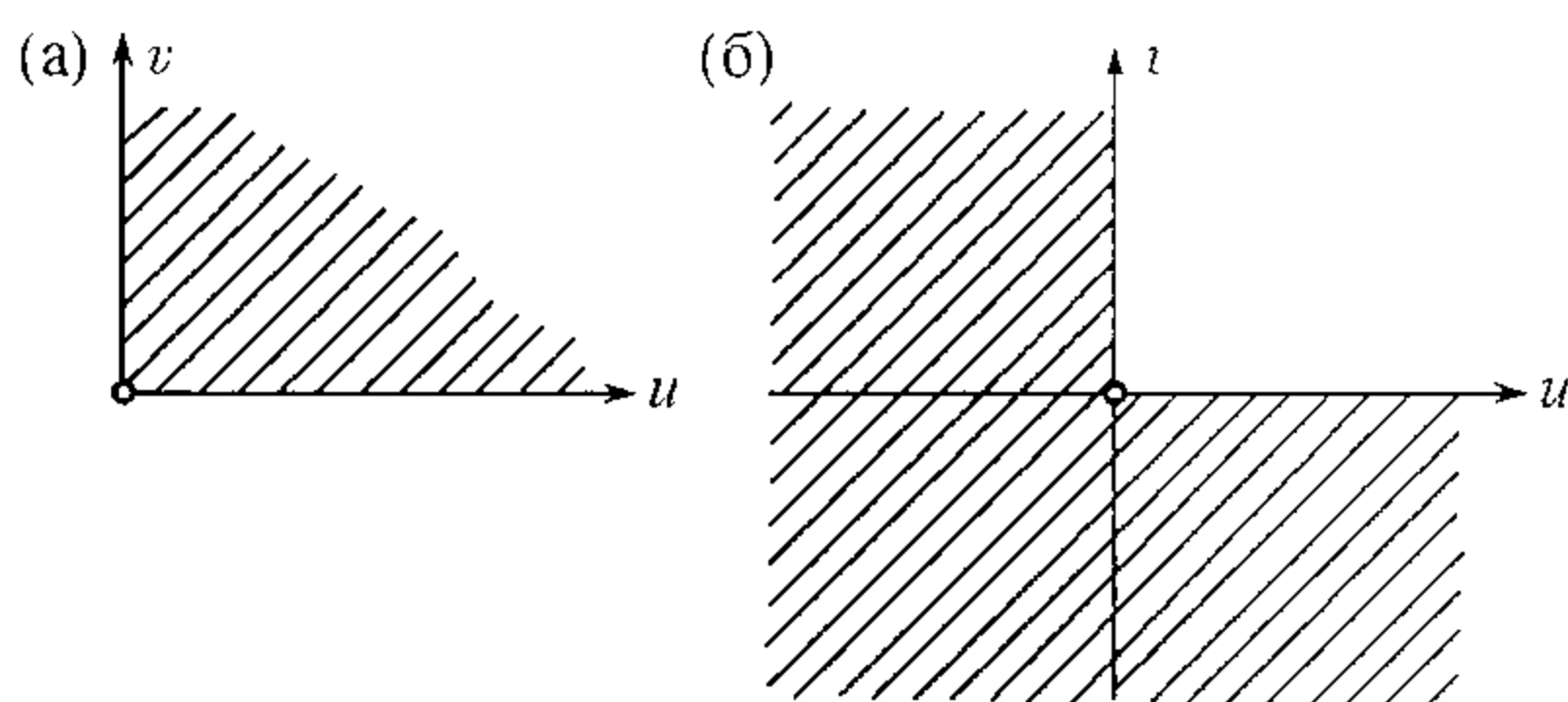


图 168

若讲到“凸的”直角状区域(图 168,a),则按照引理 1. 首先可以把函数  $\varphi$  扩充到第 IV 象限,以后再把所得函数(把  $u$  及  $v$  对调)扩充到第 II 及 III 象限,即扩充到原点的全邻域.

若讲到“凹的”直角状区域(图 168,b),情况较为复杂. 这时首先,根据引理 1(但变换  $u$  的符号),把函数  $\varphi$  从左半平面扩充到右半平面<sup>①</sup>. 这样就得到函数  $\varphi_1$ ——在原点的全邻域内. 以后再在下半平面内考察函数  $\psi = \varphi - \varphi_1$ . 利用证明引理 2 时所指出的方法,把它扩充到上半平面,这就给出函数  $\psi_1$ ——也在原点的全邻域内. 但在第 III 象限内  $\psi_1 = \psi = \varphi - \varphi_1 = 0$ ,那时,依照上述方法的特性,显见在第 II 象限内也有  $\psi_1 = 0$ . 现在若在原点的邻域内令  $\varphi^* = \psi_1 + \varphi_1$ ,则在第 II 及 III 象限内有  $\psi_1 = 0$  及  $\varphi_1 = \varphi$ ,于是就有  $\varphi^* = \varphi$ ,而在第 IV 象限内因有  $\psi_1 = \psi = \varphi - \varphi_1$ ,故仍然有  $\varphi^* = (\varphi - \varphi_1) + \varphi_1 = \varphi$ . 这样,所作的函数  $\varphi^*$  已把  $\varphi$  扩充至于原点的全邻域.

用逆变换 (12) 还原成旧变元,则得函数  $f$  的扩充

$$f^*(x, y) = \varphi^*(\lambda(x, y), \mu(x, y)).$$

如同定理 1, 根据引理 2, 证明就此完成.

**262. 总结** 已证明的关于函数扩充的定理有多种多样的应用. 我们在这里仅指出, 由于它的帮助, 使一系列在分析上有局部性的 (即有关于定点的邻域的) 公式及定理可以推广到被考察区域周界上的点, 而不是如通常一样只限于区域的内点.

例如, 设在 (上面所考察那种类型的) 有周界  $\mathcal{L}$  的闭域  $\mathcal{M}$  中定义着函数  $z = f(x, y)$ , 它连同它的导数  $f'_x$  及  $f'_y$  都为连续. 则当点  $(x_0, y_0)$  位于  $\mathcal{M}$  内部时, 成立熟知的 [178] 函数的全增量公式:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>①</sup>始终仅以原点的邻近为限.



式中  $\alpha$  及  $\beta$  随同  $\Delta x$  及  $\Delta y$  趋于零. 当点  $(x_0, y_0)$  位于周界  $\mathcal{L}$  上时, 证明这公式时所引用的论断一般已不能应用. 但只需限制  $\Delta x$  及  $\Delta y$ , 使点  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  不超出  $\mathcal{M}$  的限界, 则这公式仍为正确. 要证明这事现在是很容易了, 我们只要首先写出对于函数  $f^*$  的公式,  $f^*$  就是把  $f$  推广至全平面所得的函数, 而以后 —— 像所指出的, 限于区域  $\mathcal{M}$  中的点 —— 再还原成原来的函数  $f$  就成.

在一切情形之下, 若其结论系以公式 (13) 为根据, 我们现在就可对原来的结果作出重要的补充.

如此, 在前述关于函数  $f$  的假定之下,  $f$  显出不仅是在区域  $\mathcal{M}$  的内点为可微分函数 [179], 而且在这区域的界点也如此, 因此对于由方程  $z = f(x, y)$  表达的曲面, 甚至在它的周界上的点, 我们也有说及它的切平面 [180] 的可能.

我们知道, 复合函数的微分法则 [181] 也以公式 (13) 为基础, 若函数

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (14)$$

有导数, 且点  $(\varphi(t), \psi(t))$  全位于区域  $\mathcal{M}$  的内部, 则对于复合函数  $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ , 我们已有公式

$$z'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t.$$

现在它就可以扩充到当“曲线”(14) 接触到区域  $\mathcal{M}$  的周界时的情形. 还有诸如此的扩充, 等等.

不拟详细阐述, 但再举出一个重要的例子. 设有函数组

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (15)$$

它们连同其导数在  $uv$  平面上某一以  $\mathcal{K}$  为周界的闭域  $\mathcal{P}$  中都为连续; 并设在这区域的某一点  $(u_0, v_0)$ , 雅可比式

$$J = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

异于 0, 若点  $(u_0, v_0)$  位于  $\mathcal{P}$  的内部, 则按照 208 的定理 4, 函数组 (15) 可以有逆转, 于是在点  $(x_0, y_0)$  的邻域内, 其中

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0),$$

可以用变元  $x, y$  的单值函数来表达  $u$  及  $v$ :

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y), \quad (15^*)$$

它们连同自己的导数在上述邻域内都为连续. 这样, 以充分接近于  $u_0, v_0, x_0, y_0$  的  $u, v, x, y$  的数值为限, 可以说, 关系式 (15) 与 (15\*) 是完全等价的. 这些结论, 如在证明下一命题是有用的: 曲面

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$



[其中  $(u, v)$  在区域  $\mathcal{P}$  中变动]在它的普通点  $M_0$ (对应于  $u = u_0, v = v_0$ ) 的邻近可以用显式方程来表达 [228]. 但对于曲面的周界上的点, 我们的结论已不能应用, 因为在  $uv$  平面上, 点  $(u_0, v_0)$  不能位于区域  $\mathcal{P}$  的周界  $\mathcal{K}$  上.

但是现在, 利用函数  $\varphi$  及  $\psi$  的扩充  $\varphi^*$  及  $\psi^*$ , 我们可以把关于函数组逆转的结果扩充到周界  $\mathcal{K}$  上的点  $(u_0, v_0)$ . 与区域  $\mathcal{P}$  中邻接于点  $(u_0, v_0)$  的一部分相对应, 在  $xy$  平面上就有某一邻接于点  $(x_0, y_0)$  的区域, 在它的范围内总可以有逆转.

上述的几何结果也可以由对应的方式而补充.

以上所举的例题已足够使读者明了这些定理的重要性. 不论对于数学分析本身或是对于其应用都是一样. 关于应用函数扩充定理的其他例题, 将见于第二、三卷.



# 索引

$n$  重点, 468  
 $n$  重极限, 308  
 $n$  维点, 294  
 $n$  维空间, 294, 296

## A

阿基米德公理, 5  
阿基米德螺线, 444, 458

## B

半定的, 367  
包络, 470  
比例法则, 276  
闭, 297, 298  
闭集, 300  
闭域, 300  
变动区域, 74, 291  
变化率, 155  
变换公式, 418  
变量, 28, 54  
变量的极限, 53  
变元, 76, 291  
博雷尔引理, 318  
不等式, 233  
不定乘数法, 406  
不定的, 366

不定式, 44  
不定式的定值法, 46  
布尔查诺-魏尔斯特拉斯, 69  
布尔查诺方法, 70  
部分极限, 68  
部分数列, 68

## C

参变量表示式, 449  
参变量方程, 180  
参变量微分法, 202  
插值法, 221  
长方体, 297  
常量, 28  
乘积, 383  
稠密性, 2  
初等函数, 81  
次法矩, 454  
次切矩, 454

## D

戴德金, 6  
代数函数, 386  
单纯形, 298  
单点, 438



单调, 53  
 单调变量, 54  
 单调函数, 107  
 单侧导数, 172  
 单值函数, 76  
 导数, 155, 156  
 等价无穷小, 113  
 低阶, 110  
 笛卡儿叶形线, 440  
 第二类, 122  
 第一类, 122  
 点变换, 420  
 点的邻域, 298  
 叠置, 302  
 定理, 37, 316, 319  
 定义域, 76, 291  
 独立, 413  
 对数的存在, 24  
 对数函数, 83  
 对数螺线, 446, 458, 503  
 多值函数, 76

## E

二次型, 363  
 二元函数, 291  
 二重点, 467  
 二重极限, 308

## F

法线长, 454  
 反函数, 86  
 反三角函数, 87  
 范德蒙德行列式, 511  
 费马定理, 185  
 分划, 6  
     ~上组, 6  
     ~下组, 6  
 符号规则, 5  
 复合函数, 91, 301  
 复合函数的微分, 354

## G

高阶, 110  
 高阶导数, 191, 344  
 高阶微分, 351  
 高斯, 378  
 根的存在, 21  
 根的算术值, 21  
 公式, 290, 323  
 估计误差, 183  
 孤立点, 465, 467  
 拐点, 256

## H

蚶线, 446, 458  
 函数, 76, 79  
 函数的连续性, 118  
 函数叠置, 91  
 函数方程, 126  
 函数矩阵, 383  
 函数行列式(雅可比式), 380  
 函数有间断, 118  
 弧, 485, 489  
 弧长, 485  
 弧的微分, 486  
 换元法, 418  
 回转面, 453  
 混合导数的定理, 346  
 混合偏导数, 345

## J

基本无穷大, 117  
 基本无穷小, 111  
 极次法矩, 458  
 极次切矩, 458  
 极大值, 234  
 极法线, 458  
 极切线, 458  
 极限, 37  
 极限点, 304



极限曲线, 482  
极小值, 234  
极值, 234, 235, 358  
几何说明, 156, 328  
几何图形, 176  
尖点, 439, 467  
间断, 122  
简单连续曲线, 483  
简谐振动, 171  
减函数, 107  
减小的, 54  
渐近点, 445, 446  
渐近线, 261  
渐屈线, 501  
渐伸线, 501  
角点, 515  
解析表示法, 77  
解析式, 77  
界数, 7  
近似公式, 180  
静止点, 234, 359  
聚点, 92, 299  
绝对极值, 405  
绝对值, 3

## K

卡西尼卵形线, 447  
康托定理, 147  
柯西第二定理, 140  
柯西第一定理, 137  
柯西公式, 190  
柯西余项式, 216  
可求长的, 485, 486  
可微, 175, 328  
克拉披隆, 290, 323  
空间, 448  
空间图形, 293

## L

拉格朗日插值公式, 222

拉格朗日定理, 187  
拉格朗日余项式, 216  
莱布尼茨公式, 196  
勒让德变换, 421, 432  
勒让德多项式, 199  
累次极限, 308  
联合法, 286  
连通“域”, 300  
连续, 316  
连续性  
    实数域的~, 12  
邻域, 92, 297  
螺旋面, 464  
螺旋线, 463  
螺族线, 452  
罗尔定理, 186  
洛必达, 266

## M

密切曲线, 480  
密切直线, 480  
幂函数, 82  
幂指数式, 136  
闵可夫斯基, 233  
闵可夫斯基不等式, 295

## N

内点, 299  
牛顿法则, 279

## O

欧拉公式, 343

## P

判别曲线, 472  
佩亚诺的二级, 209  
偏导数, 321  
偏微分, 323  
平滑曲线, 514  
平均变化率, 155  
平均曲率, 492



平均速度, 152

平面曲线, 436

普通, 122

## Q

奇异点, 437, 464

歧点, 439, 467, 469

齐次函数, 342

切面, 459

切平面, 329

切线, 153, 328, 457, 459

切线变换, 422

切线长, 454

切线的正向, 489, 491

切线法, 279

球, 298

区间, 65

区间的长, 65

区间的右端点, 65

区间的左端点, 65

区间套, 65

区间套的引理, 64

曲率, 491, 492

曲率半径, 494

曲率圆, 494

曲率中心, 494, 499

曲面的解析表示法, 436

曲面方程, 293

曲线, 296, 436, 448

曲线的相切, 469

曲线相切的阶, 477

曲线族, 470

全微分, 326

全微分的求法, 423

全微分应用于近似算法, 340

全增量, 324

## S

三角函数, 84

上极限, 70, 110

实数, 8

~的十进小数近似值, 10

~域的顺序, 8

收敛原理, 66

数集, 12

~的上界, 13

~的上确界, 13

~的下界, 13

~的下确界, 13

~上有界, 13

~下有界, 13

数列, 29

双纽线, 447, 459, 498, 499

双曲函数, 84

双曲螺线, 445, 458

双曲线, 438

速度, 152

算术空间, 295

## T

泰勒公式, 205, 209, 355

特征点, 475

梯度, 338

同阶, 110

凸函数, 249

图像, 80

## W

微分的形式不变性, 179

微分法, 177

维维亚尼, 451

维维亚尼曲线, 464

魏尔斯特拉斯, 316, 319

魏尔斯特拉斯第二定理, 144

魏尔斯特拉斯第一定理, 143

魏尔斯特拉斯定理, 316

无理数, 6

无穷大, 38

无穷大的分阶, 117

无穷区间, 75



无穷小, 32  
 无穷小的引理, 42  
 无限集, 13

## X

西尔维斯特, 364  
 下极限, 70, 110  
 弦线法, 277  
 显式方程, 448  
 相对极值, 404  
 相关函数, 413  
 向上凸, 258  
 向下凸, 258  
 心脏形线, 447, 459  
 星形线, 456, 473, 496, 502  
 形式不变化, 338  
 行列式的微分, 333  
 悬链线, 438, 496  
 旋轮线, 441

## Y

雅可比式, 380  
 沿给定方向的导数, 336  
 一般螺旋面, 453  
 一致连续, 317  
 因变量, 75  
 隐函数, 386  
 有界“点”集, 300  
 有界变量, 38  
 有理分式函数, 82  
 有理数  
   ~的差, 2  
   ~的乘积, 4  
   ~的和, 2  
   ~的商, 4  
 有理数域, 1  
   ~的稠密性, 5  
   ~的序, 2  
 有理整函数, 81

有理指数幂, 21  
 有限增量公式, 188, 334  
 右极限, 92  
 余项, 209  
 余项的二级, 209  
 域界, 300  
 圆的渐伸线, 443  
 圆外及圆内旋轮线, 441  
 跃度, 122  
 运动方程, 153

## Z

增大的, 53  
 增函数, 107  
 增量, 118  
 詹森不等式, 254  
 折线, 296  
 振幅, 145, 316  
 整序变量, 28, 293  
 整序变量的, 37  
 整序变量的极限, 31  
 正(负)定的, 364  
 直径, 318  
 指数函数, 83  
 秩, 414  
 中值定理, 188  
 重点, 438, 449  
 主部, 114  
 主值, 88  
 转向点, 258  
 转向曲线, 499  
 锥面(二次的), 464  
 子数列, 68  
 自变量, 75  
 阻尼振动, 239  
 最小二乘法, 377  
 左极限, 93  
 坐标线, 451







# 校订后记

---

Г. М. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》一书,在我国 20 世纪 50 年代以来的数学教育中曾产生过巨大的影响.大体说来,现在 50 岁以上的数学工作者,鲜有不知此书的,鲜有未读过(参考过)此书的.它内容丰富而论述深刻(虽然从今天看来,处理方法是经典的),使许多学习过数学类各专业的人受益良多.

本书最早的中译本是根据俄文 1951 年第 4 版(一、二卷)和 1949 年版(第三卷)译出的,于 1954 — 1956 年先后由商务印书馆和高等教育出版社出版、印行.1959 年又根据俄文 1958 年版对其中第一卷作过修订.中译本是由多所高等学校的多位数学老师分别翻译,高等教育出版社多位编辑经手的.

这次高等教育出版社在国家自然科学基金委员会天元数学基金的支持下,根据 2003 年印行的俄文版进行修订.由于本书的各位译者大多年事已高(有的已经谢世),高等教育出版社在得到主要译者的首肯后,让我来担任全书的校订工作,这既使我感到荣幸,又感到诚惶诚恐,如履薄冰.在校订过程中,原书各位译者认真仔细的工作作风和高质量的翻译,让我深感敬佩,并得到很多教益.从 2003 年印行的俄文版中,我们看到,担任本书俄文版的校订、编辑工作的圣彼得堡大学的 A. A. 弗洛连斯基教授除改正原先各版中一些印刷错误外,又从读者的角度出发,对书中可能产生不便的地方增加了 122 个注释.他们这种为使经典名著臻于完善的、认真细致的作风值得我们借鉴.

对本书的校订工作主要在两个方面:一方面是在新版中(应是 1959 年以前)作者作了不少的修订与增删,尤其是第二卷与第三卷中改动较多.而由于历史的原因,在 20 世纪 60 年代以后,高等教育出版社与各位译者一直没有机会按新版修订译本.因而这次需要作不少补译的工作.还有就是翻译 122 个编者注的工作.另一方面是,



涉及数学名词、外国数学家的中译名的规范问题. 由于在 1993 年, 全国自然科学名词委员会 (现改称全国科学技术名词委员会) 已颁布了《数学名词》, 所以校订中首先以此为准, 对数学名词、外国数学家中译名作了统一性的订正. 在此范围之外的则以《中国大百科全书·数学卷》、《数学百科全书》(五卷本) 以及张鸿林、葛显良先生编订的《英汉数学词汇》为准. 此外还参考了齐玉霞、林凤藻、刘远图先生合编的《新俄汉数学词汇》. 还有个别的在上述范围之外的名词以及其他一些难于处理的问题, 则是由张小萍、沈海玉、郭思旭三人经商讨后定下来的.

还应当说明的是, 书中有关物理、力学方面的量和单位, 有少数地方与我国现在执行的国家标准不一致. 但是, 改动它们会导致计算过程和结果中数据的改变, 作为译本, 恐怕反而不妥当, 宜保留原作的用法为好. 还有个别数学符号也与我国目前适用的不一致, 也未作改动.

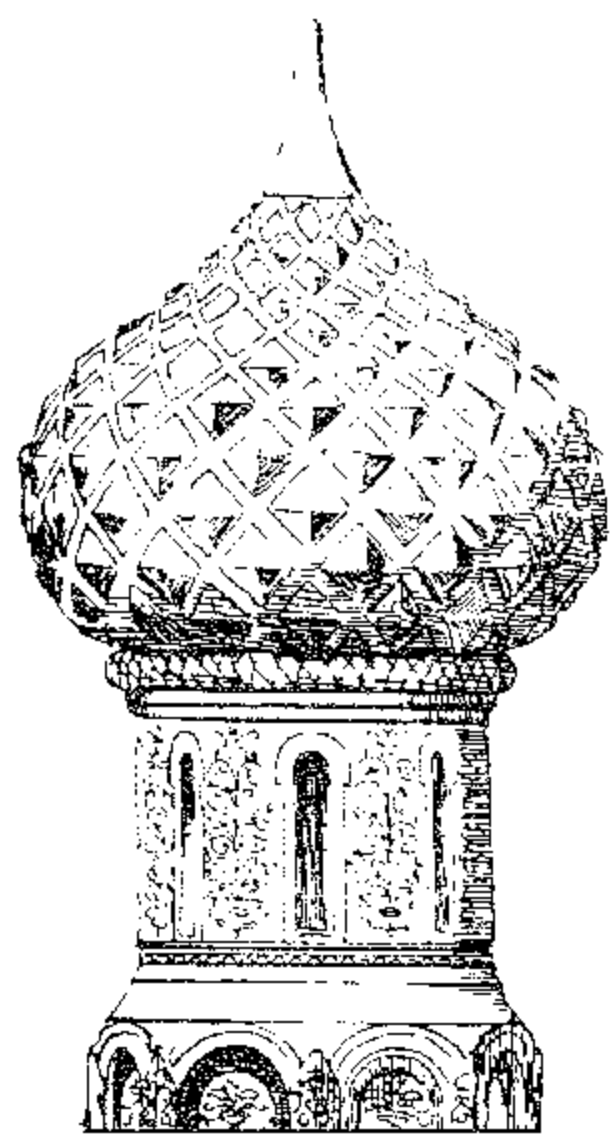
本书的校订过程, 充分体现为一种集体的力量和成果. 首先是本书的策划张小萍编审, 她为本书的修订、出版工作作了周到细致的安排, 并负责一至三卷的终审工作, 作了十分仔细的审阅并提出很多重要意见; 沈海玉先生对一、三卷作了认真的通读加工和校阅, 提出了许多很好的意见; 李植教授和邵常虹老师为本书翻译了俄文版《编者的话》. 在补译过程中, 我经常得到外语分社田文琪编审在俄译中表达方面耐心而宝贵的指教. 对以上各位的指导、合作与帮助, 表示由衷的感谢!

由于个人的水平所限, 虽经努力, 但在新加内容的补译工作方面、在个别译名的确定方面等, 错误和疏漏恐难于避免, 还请读者不吝指正.

郭思旭

2005 年 8 月





● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学  
教材选译

# 微积分学教程

(第二卷) (第8版)

- ☐ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著  
☐ 徐献瑜 冷生明 梁文骐 译  
☐ 郭思旭 校



高等教育出版社  
Higher Education Press



图字: 01-2005-5741 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и  
интегрального исчисления, том 2

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2003  
ISBN 5-9221-0437-3

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT  
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's  
Republic of China

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第2卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥  
尔茨著; 徐献瑜, 冷生明, 梁文骥译. —2版. —北京:  
高等教育出版社, 2006. 1  
ISBN 7-04-018304-8

I.微... II.①菲...②徐...③冷...④梁...  
III.微积分 - 高等学校 - 教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 152525 号

策划编辑 张小萍      责任编辑 赵天夫      封面设计 王凌波  
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
			<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 刷	北京新丰印刷厂		
开 本	787 × 1092 1/16	版 次	1954 年 10 月第 1 版
印 张	43		2006 年 1 月第 2 版
字 数	870 000	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
		定 价	65.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18304-00



# 序

---

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.



经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月



# 编者的话

---

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作,曾多次再版,并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富,诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多,在同类教材中尚无出其右者.很多现代著名数学家都提到,正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱,让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年,其内容却并未过时,现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用.不仅如此,尽管出现了新的一批优秀教材,但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起,其读者群就一直不断扩大,现在还包括许多数理特长中学(译注:在俄罗斯,除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学,还有以数学与物理学为重点培养方向的中学,其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容,学生则要经过特别的选拔.)的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分(不含测度论和一般集合论).数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授,也(全部或大部分)包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用,第二卷研究黎曼积分理论与级数理论,第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例,正如前文所说,通常这些内容非常有趣,其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.



另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基



# 目 录

---

第八章 原函数 (不定积分)	1
§1. 不定积分与它的计算的最简单方法	1
263. 原函数 (即不定积分) 的概念 (1) 264. 积分与面积定义问题 (4) 265. 基本积分表 (6) 266. 最简单的积分法则 (7) 267. 例题 (8) 268. 换元积分法 (12) 269. 例题 (15) 270. 分部积分法 (19) 271. 例题 (20)	
§2. 有理式的积分	23
272. 在有限形状中积分问题的提出 (23) 273. 部分分式与它们的积分 (24) 274. 分解真分式为部分分式 (25) 275. 系数的确定、真分式的积分 (28) 276. 分离积分的有理部分 (30) 277. 例题 (32)	
§3. 某些含有根式的函数的积分	35
278. 形状为 $R\left(x, \sqrt[n]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)}\right)$ 的积分、例题 (35) 279. 二项式微分的积分、例题 (36) 280. 递推公式 (38) 281. 形状为 $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 的表达式的积分、欧拉替换 (41) 282. 欧拉替换的几何解释 (42) 283. 例题 (44) 284. 其他的计算方法 (48) 285. 例题 (54)	
§4. 含有三角函数与指数函数的表达式的积分	56
286. 关于 $R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分 (56) 287. 关于表达式 $\sin^\nu x \cdot \cos^\mu x$ 的积分 (58) 288. 例题 (59) 289. 其他情形的概述 (63)	
§5. 椭圆积分	64
290. 一般说明及定义 (64) 291. 辅助变换 (66) 292. 化成标准形式 (68) 293. 第一、第二与第三类椭圆积分 (70)	



<b>第九章 定积分</b>	<b>73</b>
§1. 定积分的定义与存在条件	73
294. 处理面积问题的另一方法 (73) 295. 定义 (74) 296. 达布和 (76) 297. 积分的存在条件 (78) 298. 可积函数的种类 (80) 299. 可积函数的一些性质 (81) 300. 例题及补充 (83) 301. 看作极限的下积分与上积分 (84)	
§2. 定积分的一些性质	85
302. 沿定向区间的积分 (85) 303. 可用等式表示的一些性质 (87) 304. 可用不等式表示的一些性质 (88) 305. 定积分看作积分上限的函数 (91) 306. 第二中值定理 (93)	
§3. 定积分的计算与变换	95
307. 借助于积分和的计算 (95) 308. 积分学的基本公式 (98) 309. 例题 (100) 310. 基本公式的另一导出法 (102) 311. 递推公式 (103) 312. 例题 (104) 313. 定积分的换元公式 (107) 314. 例题 (108) 315. 高斯公式、蓝登变换 (113) 316. 换元公式的另一导出法 (115)	
§4. 定积分的一些应用	116
317. 沃利斯公式 (116) 318. 带余项的泰勒公式 (117) 319. 数 $e$ 的超越性 (118) 320. 勒让德多项式 (119) 321. 积分不等式 (122)	
§5. 积分的近似计算	123
322. 问题的提出、矩形及梯形公式 (123) 323. 抛物线型插值法 (125) 324. 积分区间的分割 (127) 325. 矩形公式的余项 (128) 326. 梯形公式的余项 (130) 327. 辛卜森公式的余项 (130) 328. 例题 (132)	
<b>第十章 积分学在几何学、力学与物理学中的应用</b>	<b>137</b>
§1. 弧长	137
329. 曲线长的计算 (137) 330. 定义曲线长度的概念及计算曲线长度的另一种途径 (139) 331. 例 (141) 332. 平面曲线的内蕴方程 (146) 333. 例 (149) 334. 空间的曲线的弧长 (151)	
§2. 面积与体积	152
335. 面积概念的定义、可加性 (152) 336. 面积看作极限 (154) 337. 可求积的区域的种类 (156) 338. 面积的积分表达式 (157) 339. 例 (159) 340. 体积概念的定义及其特性 (165) 341. 有体积的立体的种类 (166) 342. 体积的积分表达式 (167) 343. 例 (170) 344. 旋转曲面的面积 (175) 345. 例 (178) 346. 柱面面积 (180) 347. 例 (181)	
§3. 力学与物理学的数量的计算	183
348. 定积分应用的大意 (183) 349. 曲线的静力矩与重心的求法 (185) 350. 例 (187) 351. 平面图形的静力矩与重心的求法 (188) 352. 例 (189) 353. 力学上的功 (190) 354. 例 (191) 355. 平面轴基的摩擦力的功 (193) 356. 无穷小元素求	



和的问题 (194)

#### §4. 最简单的微分方程 . . . . . 198

357. 基本概念、一阶方程 (198) 358. 导数的一次方程、分离变量 (199) 359. 问题 (201) 360. 关于微分方程的构成的附注 (206) 361. 问题 (207)

### 第十一章 常数项无穷级数 . . . . . 211

#### §1. 引言 . . . . . 211

362. 基本概念 (211) 363. 例题 (212) 364. 基本定理 (214)

#### §2. 正项级数的收敛性 . . . . . 216

365. 正项级数收敛的条件 (216) 366. 级数的比较定理 (218) 367. 例题 (219) 368. 柯西判别法与达朗贝尔判别法 (222) 369. 拉阿伯判别法 (224) 370. 例题 (226) 371. 库默尔判别法 (228) 372. 高斯判别法 (230) 373. 麦克劳林-柯西积分判别法 (232) 374. 叶尔马科夫判别法 (235) 375. 补充材料 (237)

#### §3. 任意项级数的收敛性 . . . . . 242

376. 级数收敛的一般条件 (242) 377. 绝对收敛 (243) 378. 例题 (244) 379. 幂级数、幂级数的收敛区间 (246) 380. 用系数表示收敛半径 (247) 381. 交错级数 (249) 382. 例题 (250) 383. 阿贝尔变换 (252) 384. 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法 (253) 385. 例题 (255)

#### §4. 收敛级数的性质 . . . . . 259

386. 可结合性 (259) 387. 绝对收敛级数的可交换性 (260) 388. 非绝对收敛级数的情形 (262) 389. 级数的乘法 (264) 390. 例题 (267) 391. 极限理论中的一般定理 (269) 392. 级数乘法定理的推广 (271)

#### §5. 累级数与二重级数 . . . . . 273

393. 累级数 (273) 394. 二重级数 (276) 395. 例题 (280) 396. 两个变量的幂级数; 收敛区域 (287) 397. 例题 (289) 398. 多重级数 (291)

#### §6. 无穷乘积 . . . . . 291

399. 基本概念 (291) 400. 例题 (292) 401. 基本定理·与级数的关系 (294) 402. 例题 (297)

#### §7. 初等函数的展开 . . . . . 303

403. 展开函数成幂级数; 泰勒级数 (303) 404. 展开指数函数、基本三角函数及其他函数成为级数 (305) 405. 对数级数 (307) 406. 斯特林公式 (308) 407. 二项式级数 (310) 408. 展开  $\sin x$  与  $\cos x$  成无穷乘积 (312)

#### §8. 借助于级数作近似计算 . . . . . 315

409. 一般说明 (315) 410. 数  $\pi$  的计算 (316) 411. 对数的计算 (318) 412. 根式的计算 (320) 413. 欧拉级数的变换 (322) 414. 例题 (323) 415. 库默尔变换 (325) 416. 马尔可夫变换 (328)



§9. 发散级数的求和法 . . . . .	330
417. 引言 (330) 418. 幂级数法 (331) 419. 陶伯定理 (334) 420. 算术平均法 (336) 421. 泊松-阿贝尔法与切萨罗法的相互关系 (337) 422. 哈代-兰道定理 (339) 423. 广义求和法在级数乘法上的应用 (341) 424. 级数的其他广义求和法 (342) 425. 例子 (346) 426. 一般的线性正则求和法类 (349)	
<b>第十二章 函数序列与函数级数 . . . . .</b>	<b>352</b>
§1. 一致收敛性 . . . . .	352
427. 引言 (352) 428. 一致收敛性与非一致收敛性 (354) 429. 一致收敛性的条件 (357) 430. 级数一致收敛性的判别法 (358)	
§2. 级数和的函数性质 . . . . .	361
431. 级数和的连续性 (361) 432. 关于拟一致收敛的附注 (363) 433. 逐项取极限 (365) 434. 级数的逐项求积分 (366) 435. 级数的逐项求导数 (368) 436. 序列的观点 (371) 437. 幂级数的和的连续性 (373) 438. 幂级数积分与微分 (376)	
§3. 应用 . . . . .	378
439. 级数和连续性与逐项取极限的例 (378) 440. 级数的逐项求积分的例 (384) 441. 级数的逐项求导数的例 (393) 442. 隐函数理论中的逐次逼近法 (398) 443. 三角函数的分析定义 (401) 444. 没有导数的连续函数的例子 (403)	
§4. 关于幂级数的补充知识 . . . . .	405
445. 关于幂级数的运算 (405) 446. 把级数代入级数 (408) 447. 例 (410) 448. 幂级数的除法 (415) 449. 伯努利数及含有伯努利数的展式 (417) 450. 利用级数解方程 (421) 451. 幂级数之反演 (424) 452. 拉格朗日级数 (426)	
§5. 复变量的初等函数 . . . . .	430
453. 复数 (430) 454. 复整序变量及其极限 (432) 455. 复变量的函数 (434) 456. 幂级数 (436) 457. 指数函数 (439) 458. 对数函数 (440) 459. 三角函数及反三角函数 (443) 460. 乘方函数 (446) 461. 例 (447)	
§6. 包络级数与渐近级数 · 欧拉-麦克劳林公式 . . . . .	451
462. 例 (451) 463. 定义 (453) 464. 渐近展开的基本性质 (456) 465. 推导欧拉-麦克劳林公式 (459) 466. 对余式的研究 (461) 467. 借助于欧拉-麦克劳林公式进行计算的例 (462) 468. 欧拉-麦克劳林公式的另一种形式 (465) 469. 斯特林公式与斯特林级数 (467)	
<b>第十三章 反常积分 . . . . .</b>	<b>469</b>
§1. 积分限为无穷的反常积分 . . . . .	469
470. 积分限为无穷的反常积分的定义 (469) 471. 积分学基本公式的用法 (471) 472. 例题 (471) 473. 与级数类比 · 最简单的定理 (474) 474. 在正函数情形下积分的收敛性 (475) 475. 一般情形的积分收敛性 (476) 476. 阿贝尔判别法与狄利	



克雷判别法 (477) 477. 把反常积分化为无穷级数 (480) 478. 例题 (482)	
§2. 无界函数的反常积分 . . . . .	488
479. 无界函数的积分的定义 (488) 480. 关于奇点的附注 (490) 481. 积分学基本公式的用法 · 例题 (491) 482. 积分存在的条件和判断法 (492) 483. 例题 (495) 484. 反常积分的主值 (497) 485. 关于发散积分广义值的附注 (500)	
§3. 反常积分的性质与变形 . . . . .	502
486. 最简单的一些性质 (502) 487. 中值定理 (503) 488. 反常积分的分部积分法 (505) 489. 例题 (505) 490. 反常积分里的变量变换 (507) 491. 例题 (508)	
§4. 反常积分的特别算法 . . . . .	512
492. 几个有名的积分 (512) 493. 用积分和计算反常积分 · 积分限都为有限的情形 (515) 494. 积分带无穷限的情形 (516) 495. 伏汝兰尼积分 (519) 496. 有理函数在正负无穷之间的积分 (521) 497. 杂例和习题 (525)	
§5. 反常积分的近似计算 . . . . .	535
498. 有限区间上的积分 · 奇点分出法 (535) 499. 例题 (536) 500. 关于常义积分的近似计算的附注 (540) 501. 带有无穷限的反常积分的近似计算 (540) 502. 渐近展开的应用 (542)	

## 第十四章 依赖于参数的积分 . . . . . 546

§1. 基本理论 . . . . .	546
503. 问题的提出 (546) 504. 一致趋于极限函数 (546) 505. 两个极限过程的互换 (549) 506. 在积分号下的极限过程 (551) 507. 在积分号下的微分法 (552) 508. 在积分号下的积分法 (554) 509. 积分限依赖于参数的情形 (556) 510. 仅依赖于 $x$ 的因子的引入 (557) 511. 例题 (559) 512. 代数学基本定理的高斯证明 (568)	
§2. 积分的一致收敛性 . . . . .	569
513. 积分的一致收敛性的定义 (569) 514. 一致收敛的条件 · 与级数的联系 (570) 515. 一致收敛的充分判别法 (571) 516. 一致收敛性的其他情形 (573) 517. 例题 (574)	
§3. 积分一致收敛性的应用 . . . . .	578
518. 在积分号下的极限过程 (578) 519. 例题 (581) 520. 含参数的积分的连续性与可微性 (592) 521. 含参数的积分的积分法 (594) 522. 对于一些积分计算的应用 (596) 523. 在积分号下取导数的例题 (601) 524. 在积分号下求积分的例题 (609)	
§4. 补充 . . . . .	617
525. 阿尔泽拉引理 (617) 526. 积分号下取极限 (618) 527. 积分号下取导数 (621) 528. 积分号下取积分 (622)	
§5. 欧拉积分 . . . . .	623
529. 第一型欧拉积分 (623) 530. 第二型欧拉积分 (625) 531. $\Gamma$ 函数的一些最简	



单的性质 (626) 532. 由  $\Gamma$  函数的特性而得的同义定义 (632) 533.  $\Gamma$  函数的其他  
函数特性 (633) 534. 例题 (635) 535.  $\Gamma$  函数的对数导数 (641) 536.  $\Gamma$  函数之叠  
乘定理 (642) 537. 几个级数展式与乘积展式 (643) 538. 例与补充 (645) 539. 若  
干定积分之计算 (650) 540. 斯特林公式 (656) 541. 欧拉常数之计算 (659) 542.  
 $\Gamma$  函数的以 10 为底的对数表的编制 (660)

索 引 . . . . . 663

校订后记 . . . . . 671



# 第八章 原函数 (不定积分)

## §1. 不定积分与它的计算的最简单方法

**263. 原函数 (即不定积分) 的概念** 在科学与技术的许多问题中, 我们所需要的不是由给定的函数求它的导数, 相反地, 是要由一个函数的已知导数还原出这个函数. 在第 91 目中, 假定已知运动的方程  $s = s(t)$ , 即是, 路程随时间而变化的变化规律, 我们用微分法先得出了速度  $v = \frac{ds}{dt}$ , 然后找出加速度  $a = \frac{dv}{dt}$ . 但实际上, 时常需要解决反面的问题: 给定加速度  $a$  是时间  $t$  的函数,  $a = a(t)$ , 要求确定速度  $v$  与所经路程  $s$  依赖于  $t$  的关系. 这样, 就需要由函数  $a = a(t)$  还原出一个函数  $v = v(t)$ , 它的导数就是  $a$ , 然后, 知道了函数  $v$ , 再求一个函数  $s = s(t)$ , 而它的导数就是  $v$ .

我们给出下面的定义:

如果在给定的整个区间上,  $f(x)$  是函数  $F(x)$  的导数, 或  $f(x)dx$  是  $F(x)$  的微分

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx^{①},$$

那么, 在所给定的区间上, 函数  $F(x)$  叫做  $f(x)$  的原函数或  $f(x)$  的积分.

求一个函数的所有的原函数, 叫做求积分, 这是积分学的问题之一; 可以看出, 这是微分学基本问题的反面问题.<sup>35)</sup>

<sup>①</sup>在这情形下也可说函数  $F(x)$  是微分表达式  $f(x)dx$  的原函数 (或积分).

<sup>35)</sup>关于词“积分”的起源参看 294 目的第二个脚注, 在积分学中系统地应用某些名词术语, 其中都含有词“积分”: “不定积分”、“定积分”、“反常积分”等等. 与这些名词术语相应的数学概念以及由其来源得出的问题在今后将仔细予以研究. (此处及今后带序码的脚注是编者注.)



**定理** 如果在某一个区间  $\mathcal{X}$  (有限的或无穷的, 闭的或非闭的) 上, 函数  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 那么, 函数  $F(x) + C$  也是  $f(x)$  的原函数, 其中  $C$  是任意常数. 反过来说, 在区间  $\mathcal{X}$  上  $f(x)$  的每一个原函数可表示成这种形式.

证明只要限于  $\mathcal{X}$  是有限闭区间  $[a, b]$  的情形就够了.

**证明**  $F(x)$  与  $F(x) + C$  同是  $f(x)$  的原函数, 这个情形是十分明显的, 因为  $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ .

现在设  $\Phi(x)$  是函数  $f(x)$  的任何一个原函数, 于是在区间  $[a, b]$  上

$$\Phi'(x) = f(x).$$

因为函数  $F(x)$  与  $\Phi(x)$  在所考虑的区间上有相同的导数, 所以它们只相差一个常数 [131. 推论]

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

这就是所要证明的.

由这定理推知, 为要知道给定函数  $f(x)$  的所有的原函数, 只要求出它的一个原函数  $F(x)$  就够了, 因为它们彼此之间只差一个常数项.

由此, 表达式  $F(x) + C$  是导数为  $f(x)$  或微分为  $f(x)dx$  的函数的一般形状, 其中  $C$  是任意常数. 这表达式称为  $f(x)$  的**不定积分**, 用记号

$$\int f(x)dx$$

来表示<sup>36)</sup>, 这个记号中已暗含有任意常数. 乘积  $f(x)dx$  称为**被积表达式**, 函数  $f(x)$  称为**被积函数**.

**例题** 设  $f(x) = x^2$ ; 不难看出, 这个函数的不定积分是

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

这很容易用反面的演算 —— 微分法 —— 来验证.

我们提醒读者注意, 在“积分”记号  $\int$  下写的是所要求原函数的**微分**, 而不是**导数** (在我们的例题里是  $x^2 dx$ , 而不是  $x^2$ ). 以后在 294 目中将要阐明, 这样的记法是有历史根据的; 而且它还表现着许多优点, 因而保留它是十分合理的.

<sup>36)</sup> 这样一来, 可以说符号  $\int f(x)dx$  是在某个区间上的函数  $f(x)$  **标准原函数** 的表示. 可以有不定积分概念的另外的解释 (同样也是十分通行的); 这种解释是: 符号  $\int f(x)dx$  看作是函数  $f(x)$  的所有原函数的**集合**. 与此相应, 等式  $\int f(x)dx = F(x) + C$  这时应看成是更为复杂的记法  $\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbf{R}\}$  的简化形式; 与不定积分有关的基本公式这时解释为集合的等式. 因此在课文中证明的有关不定积分的关系式, 对符号  $\int f(x)dx$  的这—种或另—种解释都保持其正确性, 读者原则上可持其中任—种看法.



从不定积分的定义直接推出下列的一些性质:

$$1. d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

即是, 记号  $d$  与  $\int$ , 当前者位于后者的前面时, 可互相消去.

2. 因为  $F(x)$  是函数  $F'(x)$  的一个原函数, 我们有

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

这式子可以改写为

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见, 在  $F(x)$  前面的记号  $d$  与  $\int$ . 当  $d$  在  $\int$  后面的时候, 也可把它们消去, 但必须在  $F(x)$  后加上一个任意常数.

回到我们一开始就提出来的那个力学问题上, 现在我们可以写

$$v = \int a(t) dt$$

与

$$s = \int v(t) dt.$$

为了明确起见, 假定我们要讨论的运动是等加速运动, 例如, 在重力作用下的运动; 这时  $a = g$  (沿铅垂线向下的方向为正方向), 并且, 不难了解

$$v = \int g dt = gt + C.$$

我们得到了速度  $v$  的表达式, 在这表达式中, 除时间  $t$  外, 还包含有一个任意常数  $C$ . 在同一时刻, 对于不同的  $C$  的值, 我们将得到速度的不同的值; 因此, 对于问题的完全解决, 我们已有的数据是不够的. 为要得出问题的完全确定的解决, 需要知道在某一时刻速度的数值才够. 例如, 设已知在  $t = t_0$  时速度  $v = v_0$ ; 我们把这些值代入所求得的速度的表达式中

$$v_0 = gt_0 + C,$$

由此

$$C = v_0 - gt_0,$$

现在我们的解就有了完全确定的形状

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

其次, 我们求得路程  $s$  的表达式

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0] dt = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$



(用微分法容易验证, 原函数可以取这样的形式). 例如, 假定在  $t = t_0$  时路程  $s = s_0$  给定, 我们就可以确定新的未知常数  $C'$ ; 求得  $C' = s_0$  之后, 我们便可以写出解的最后形状

$$s = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

习惯上称值  $t_0, s_0, v_0$  为量  $t, s$  与  $v$  的初始值.

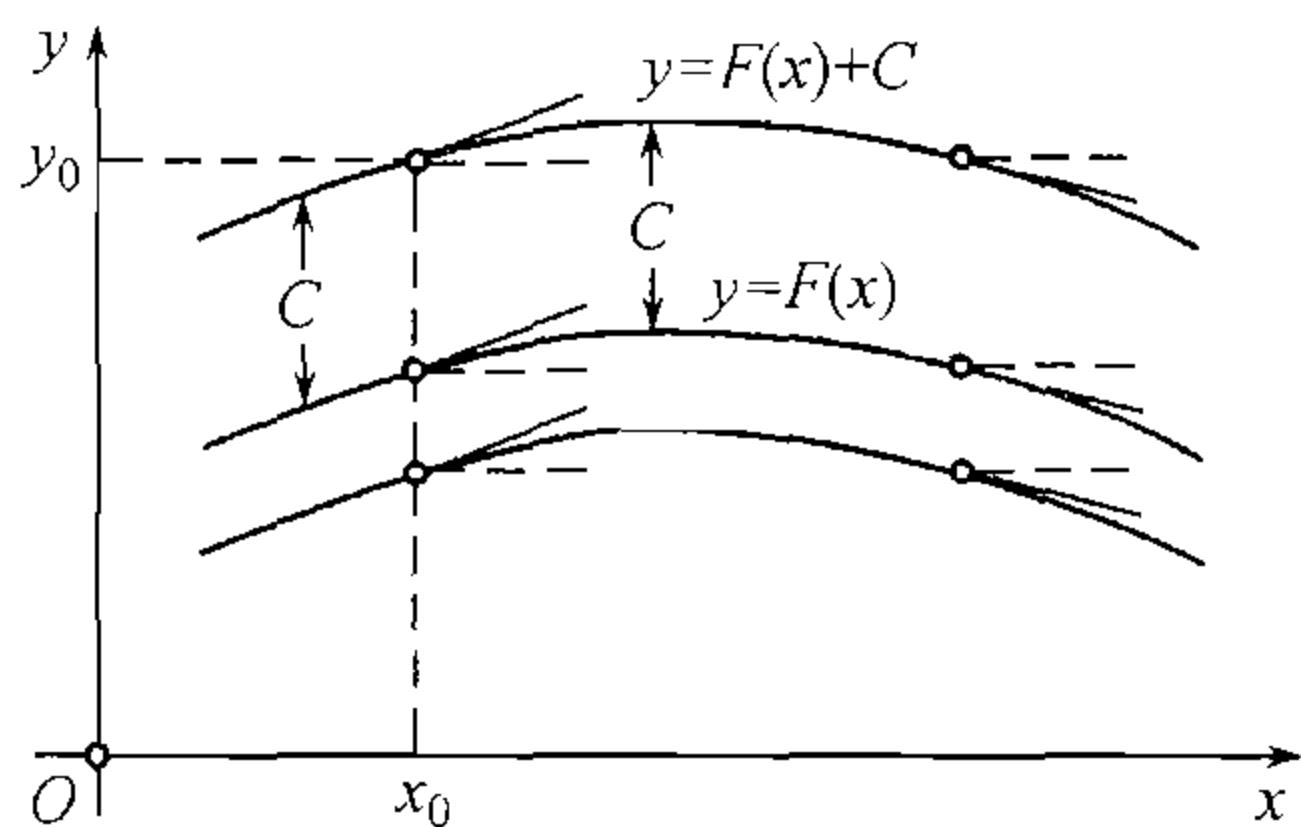


图 1

我们知道, 函数  $y = F(x)$  的导数给出对应图形的切线的斜率. 因此, 可以这样来解释求给定函数  $f(x)$  的原函数  $F(x)$  的问题: 要找出一条曲线  $y = F(x)$ , 使它的切线斜率适合给定的变化规律

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

如果  $y = F(x)$  是这些曲线之一, 那么, 只需把它顺着  $y$  轴作简单的平移, 便可以得到所有其余的曲线 (移动的距离  $C$  是任意的,

图 1). 为要从这族曲线得出一条个别的曲线, 只需给出 (举例来说) 这曲线应当通过的一点  $(x_0, y_0)$  就够了; 初始条件  $y_0 = F(x_0) + C$  就给出  $C = y_0 - F(x_0)$ .

**264. 积分与面积定义问题** 把原函数解释作曲线图形的面积是更为重要的. 因为在历史上原函数概念与面积的确定有极其紧密的联系, 所以我们就在这儿来讲述这个问题 (这儿只利用平面图形的面积的直觉的表示, 而把这个问题的精确提法留到第十章去讲).

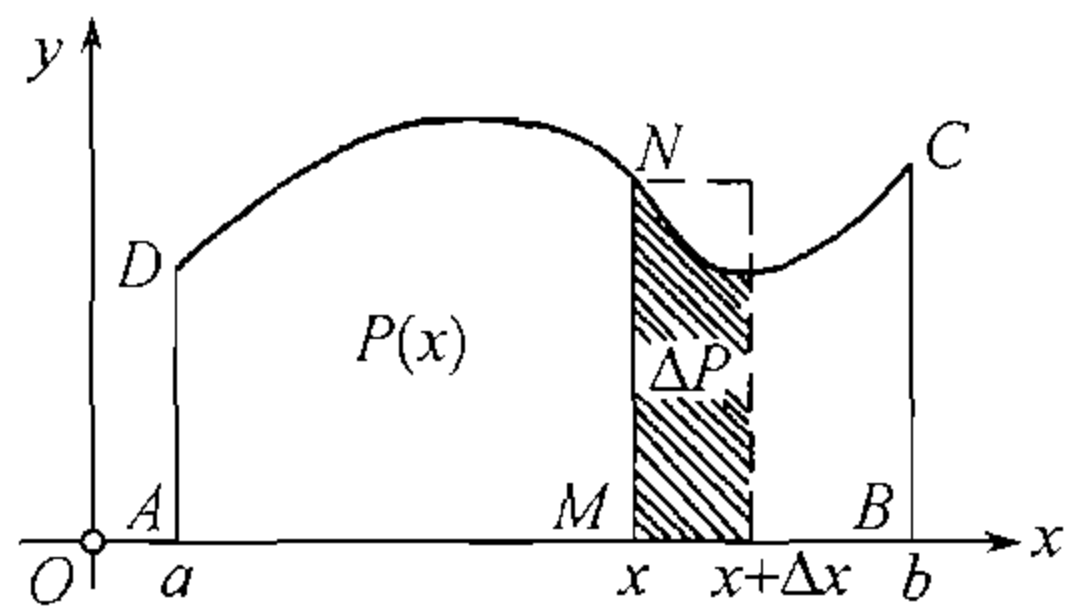


图 2

设给定在区间  $[a, b]$  上只取正 (或非负) 值的连续函数  $y = f(x)$ . 考虑限制在曲线  $y = f(x)$  下,  $x$  轴上及两纵坐标线  $x = a$  与  $x = b$  之间的图形  $ABCD$  (图 2): 我们把这类图形叫做曲边梯形. 想要确定这图形的面积  $P$  的值, 我们研究变动图形  $AMND$  的面积的性质, 这变动图形包含在开始纵坐标线  $x = a$  以及跟区间  $[c, b]$  上任意选出的  $x$  值相对应的纵坐标线之间. 当  $x$  改变时, 这个面积将

随之而变, 并且对应于每一  $x$  有它的一个完全确定的值, 于是曲线梯形  $AMND$  的面积是  $x$  的某一函数; 我们用  $P(x)$  表示它.

我们首先提出求函数  $P(x)$  的导数的问题. 为了这个目的, 我们给  $x$  添上某一个 (比方说, 正的) 改变量  $\Delta x$ ; 此时面积  $P(x)$  将获得改变量  $\Delta P$ .

以  $m$  及  $M$  分别表示在区间  $[x, x + \Delta x]$  上函数  $f(x)$  的最小值与最大值 [84], 并



将面积  $\Delta P$  与底为  $\Delta x$ , 高为  $m$  及  $M$  的矩形的面积加以比较. 显然

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

由此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

如果  $\Delta x \rightarrow 0$ , 那么, 由于连续性,  $m$  与  $M$  趋于  $f(x)$ , 因而

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

这样, 我们就得到一个有名的定理 (通常叫做**牛顿-莱布尼茨定理**)<sup>①</sup>: 变动面积  $P(x)$  对有限的横坐标  $x$  的导数等于有限的纵坐标  $y = f(x)$ .

换句话说, 变动面积  $P(x)$  是给定函数  $y = f(x)$  的原函数. 由于当  $x = a$  时这个原函数变为 0 这一特点, 使得它与原函数族中其他的原函数有所不同. 因此, 如果已知函数  $f(x)$  的任何一个原函数  $F(x)$ , 则按前一目中的定理就有

$$P(x) = F(x) + C,$$

那么, 令  $x = a$ , 就容易定出常数  $C$

$$0 = F(a) + C. \text{ 于是 } C = -F(a).$$

最后

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

特别地, 要求得整个曲边梯形  $ABCD$  的面积  $P$ , 需要取  $x = b$ :

$$P = F(b) - F(a).$$

作为例子, 我们求界限在抛物线  $y = ax^2$  下,  $x$  轴上及对应于给定横坐标  $x$  的纵坐标之间的图形的面积  $P(x)$  (图 3); 因为抛物线交  $x$  轴于坐标轴的原点, 所以, 在这儿  $x$  的开始值为 0. 容易找出函数  $f(x) = ax^2$  的原函数:  $F(x) = \frac{ax^3}{3}$ . 当  $x = 0$  时这个函数恰好变为 0, 所以

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

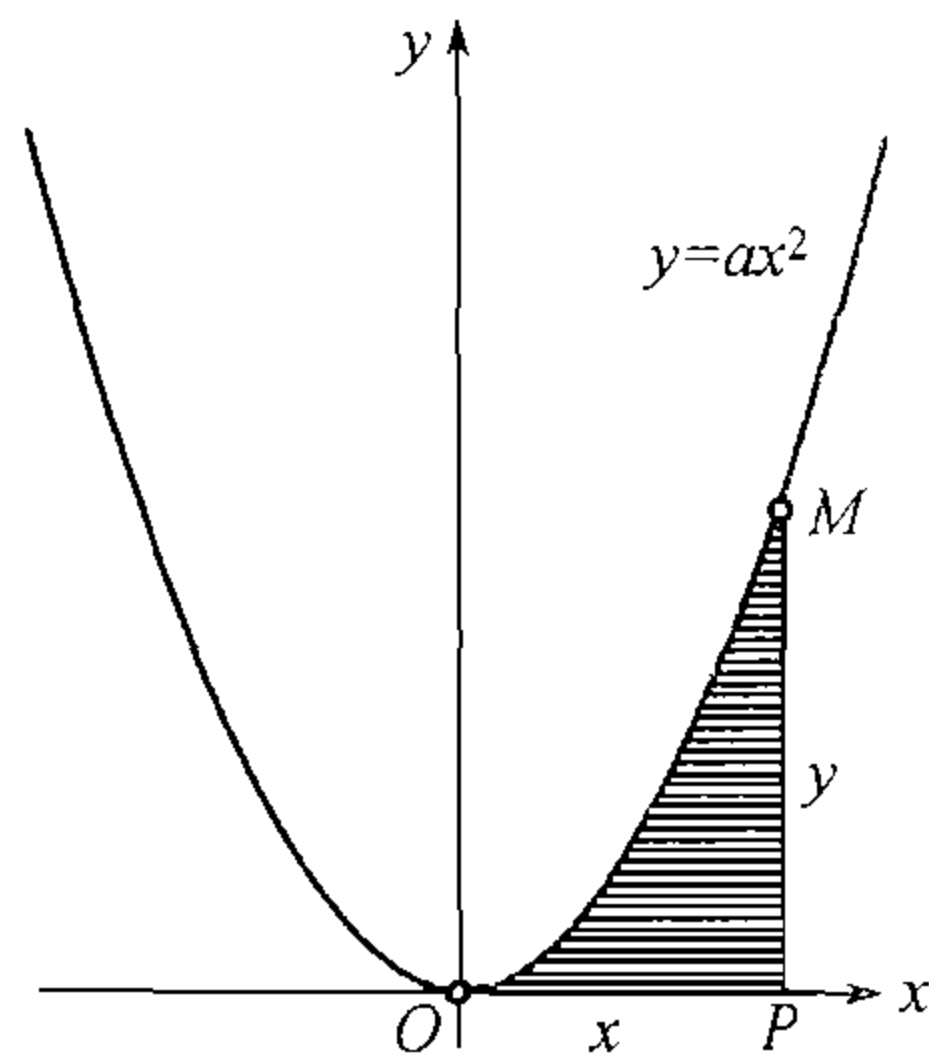


图 3

[比较 32, 4)].

由于在计算积分与求平面图形的面积之间有联系, 通常习惯于把积分计算本身叫作**求积**.

<sup>①</sup>其实, 这个定理 —— 虽然是在另一种形式里 —— 已为牛顿的老师巴洛 (Is. Barrow) 发表过了.



为了把以上所讲的全部事实推广到也取负值的函数的情形, 只要约定把图形中位于  $x$  轴下面那一部分的面积的值算为负值就行了.

这样, 在区间  $[a, b]$  上不管怎样的连续函数  $f(x)$ , 读者总可以把它的原函数想象成给定函数的图形所划出的变动面积的形式. 可是, 把这个几何的解释就认为是原函数存在性的证明, 当然是不可以的. 因为面积概念本身还没有根据.

在下章 [305] 中, 我们可以对下面的重要事实给出严格的并且纯粹分析的证明, 这个事实就是: 在给定区间上的每个连续函数  $f(x)$  都有在这区间上的原函数. 这个断言我们现在就加以采用.

在本章中我们只讲连续函数的原函数. 如果实际给出的函数有间断点, 那么我们将只在它连续的区间上考虑它. 因此, 承认了上述断言之后, 我们就无需每次预先讲明积分是否存在: 我们所考虑的积分总是存在的.

**265. 基本积分表** 由微分学中的每个公式, 这公式建立着某一函数  $F(x)$  的导数是  $f(x)$ , 可以直接导出相当的积分学中的公式

$$\int f(x)dx = F(x) + C^{37)}.$$

现在选出第 95 目中计算初等函数的导数的那些公式, 也选出后来 (对于双曲函数) 推出的一些公式, 就可作出下面的积分表:

1.  $\int 0 \cdot dx = C.$
2.  $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$
3.  $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$
4.  $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$
5.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
6.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$
7.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$   
 $\int e^x dx = e^x + C.$
8.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
9.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$
10.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
12.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
13.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

<sup>37)</sup>类似的记法中总是假设: 函数  $f(x)$  考虑为在某个 (位于其定义域内的) 区间上.



$$14. \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$15. \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$$

关于公式 4, 我们要作一点说明: 它是应用在不包含零的任何区间上的. 实际上, 如果这个区间在零的右方, 就有  $x > 0$ , 而由已知的微分公式  $[\ln x]' = \frac{1}{x}$  即可直接推出

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

如果区间在零的左方, 就有  $x < 0$ , 那么, 用微分法容易证实  $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ , 由此

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

合并这两个公式就得公式 4<sup>38)</sup>.

用积分法则, 还可以将上面所得到的积分表的范围加以扩充.

**266. 最简单的积分法则** I. 若  $a$  是常数 ( $a \neq 0$ ), 则

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

实际上, 把右端的表达式取微分, 我们便得到 [105, I]

$$d[a \cdot \int f(x) dx] = a \cdot d[\int f(x) dx] = a \cdot f(x) dx,$$

所以这个表达式是微分表达式  $a \cdot f(x) dx$  的原函数, 而这正是所要证明的. 因此, 常数因子可以拿到积分记号的外面来.

$$\text{II. } \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

把右端的表达式取微分 [105, II]:

$$d[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx] = d \int f(x) dx \pm d \int g(x) dx = [f(x) \pm g(x)] dx;$$

所以, 该表达式就是微分表达式  $[f(x) \pm g(x)] dx$  的原函数, 这就是所要证明的. 微分式的和 (或差) 的不定积分, 等于每个微分式各自积分的和 (或差).

<sup>38)</sup> 作为对上述的补充, 我们指出: 公式 1-15 中的每一个公式, 在出现于其中的被积函数的定义域内的任意区间上, 都能使用; 同时, 如果想要求出任何一个函数在整个定义域上的所有原函数, 而定义域又不是区间时, 这些公式并非总是成立的. 例如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  定义在除去 0 外的所有实数的集合上 [即  $(-\infty, 0), (0, \infty)$  这两个区间的并], 在这个集合上, 函数

$$F(x) = \ln |x| + \operatorname{sign} x, \text{ 其中 } \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

是  $f(x)$  的一个原函数, 但是函数  $F(x)$  不可能表示为  $\ln |x| + C$  的形式, 其中  $C$  是任意实数. 于是并非  $f(x) = \frac{1}{x}$  在其定义域上所有原函数都可以用公式 4 求出的.



**附注** 关于这两个公式, 我们要注意下面这一点. 这两个公式中的每个不定积分都包含一个任意常数项. 这类等式应了解为等式左右两端之间的差是一个常数. 也可以从字面上来了解这些等式, 但这时所有出现于其中的积分之中有一个积分不再是任意原函数: 这个积分中的积分常数, 在其他几个积分常数选定之后, 就被确定了. 这个重要的附注, 在此后应当加以注意.

III. 若

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$

实际上, 所给的关系式相当于:

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t).$$

但如此, 则

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b) \cdot a = a \cdot f(ax+b),$$

于是

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

即是,  $\frac{1}{a} F(ax+b)$  确是函数  $f(ax+b)$  的一个原函数.

特别时常遇到的情形是  $a=1$  或  $b=0$ , 这时:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C_1,$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} \cdot F(x) + C_2.$$

[实际上, 规则 III 是不定积分中换元法则的极特别的情形. 关于换元法则, 在下面 268 目就要讲到.]

**267. 例题** 1)  $\int (6x^2 - 3x + 5)dx$ .

利用规则 II 与 I(及公式 3,2) 我们有

$$\begin{aligned} \int (6x^2 - 3x + 5)dx &= \int 6x^2dx - \int 3xdx + \int 5dx \\ &= 6 \int x^2dx - 3 \int xdx + 5 \int dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C. \end{aligned}$$

2) 容易积分一般形状的多项式

$$\begin{aligned} &\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)dx \\ &= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \cdots + a_{n-1} \int x dx + a_n \int dx \end{aligned}$$



$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C. \quad (\text{II, I; 3, 2})$$

3)

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 1)^3 dx &= \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) dx \\ &= \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C. \end{aligned} \quad (\text{例题 2})$$

4)

$$\begin{aligned} \int (1 + \sqrt{x})^4 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2) dx \\ &= \int dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6 \int x dx + 4 \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^2 dx \\ &= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C. \end{aligned} \quad (\text{II, I; 3, 2})$$

5)

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx &= \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2} dx = \int \left( \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int dx - \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln x + \frac{1}{x} + C. \end{aligned} \quad (\text{II, I; 3, 2, 4})$$

6)

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{\frac{7}{6}} dx - \int x^{\frac{1}{6}} dx \\ &= \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C. \end{aligned} \quad (\text{II; 3})$$

现在给一些应用规则 III 的例题:

7)

$$(a) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C. \quad (\text{III; 4})$$

$$\begin{aligned} (b) \int \frac{dx}{(x-a)^k} &= \int (x-a)^{-k} dx = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C \\ &= -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k > 1). \end{aligned} \quad (\text{III; 3})$$

8)

$$(a) \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C \quad (m \neq 0) \quad (\text{III; 8})$$

$$(b) \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + C \quad (m \neq 0), \quad (\text{III; 9})$$

$$(B) \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C. \quad (\text{III; 7})$$



9)

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0). \quad (\text{III}; 6)$$

$$(6) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0). \quad (\text{III}; 5)$$

用到全部规则的例题:

10)

$$\begin{aligned} \int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} dx &= \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C. \end{aligned} \quad (\text{II}, \text{III}; 7, 2)$$

11)

$$\int \frac{ax + b}{cx + d} dx.$$

以分母除分子后, 把被积表达式表示成下面的形状

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cx + d}.$$

由此, 所求积分等于

$$\frac{a}{c} x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln |cx + d| + C. \quad (\text{II}, \text{I}, \text{III}; 2, 4)$$

12)

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx = \int \left( 2x - 5 + \frac{6}{x + 1} \right) dx = x^2 - 5x + 6 \ln |x + 1| + C.$$

把分母较复杂的分式求积分时, 先把此分式分解为分母更简单的分式的和, 常会变得容易些. 例如,

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right);$$

因此 [参看例题 7)(a)]

13)

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

这种方法可以说明, 例如, 对更普遍形状的分式

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)}$$

显然,  $(x + a) - (x + b) = a - b$ . 此时有恒等式

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \cdot \frac{(x + a) - (x + b)}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \left( \frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a} \right).$$

由此可见,

14)

$$\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \ln \left| \frac{x + b}{x + a} \right| + C.$$



特别地,

15)

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.$$

$$(b) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C.$$

16)

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} \quad (\text{当 } B^2 - AC > 0 \text{ 时}).$$

分母可分解为这样的实因式:  $A(x - \alpha)(x - \beta)$ , 其中

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

于是, 按照例题 14), 假定  $a = -\beta, b = -\alpha$ , 我们得到

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln \left| \frac{Ax + B - \sqrt{B^2 - AC}}{Ax + B + \sqrt{B^2 - AC}} \right| + C'.$$

有些三角表达式, 经过某些初等变换后, 也可以利用这些简单方法来求积分.

例如, 显然

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2},$$

由此

17)

$$(a) \int \cos^2 mxdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C, \quad (m \neq 0)$$

$$(b) \int \sin^2 mxdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C.$$

用类似的方法, 我们有

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

假定  $m \pm n \neq 0$ , 我们得到下面的积分:

18)

$$(a) \int \sin mx \cos nxdx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x + C,$$

$$(b) \int \cos mx \cos nxdx = \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x + C,$$

$$(c) \int \sin mx \sin nxdx = \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + C.$$



最后考虑几个更复杂的例题.

19)

$$(a) \int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

因为

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^n [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2 \sin x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x,$$

所以被积表达式可以化成  $2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x$ , 所求积分就等于

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C.$$

类似地

$$(b) \int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = x + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin 2kx}{2k} + C.$$

**268. 换元积分法** 现在我们来讲述函数的积分法中最有力的一个积分法——换元积分法或替换法. 下面的简单的说明就是它所根据的基础:

如果已知

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

即有

$$\int g(\omega(x)) \omega'(x) dx = G(\omega(x)) + C.$$

[假定所有在这里出现的函数  $g(t), \omega(x), \omega'(x)$  都是连续的.]<sup>39)</sup>

只要注意  $G'(t) = g(t)$ , 上式就可由复合函数的微分法规则 [98] 直接推出, 即

$$\frac{d}{dx} G(\omega(x)) = G'(\omega(x)) \omega'(x) = g(\omega(x)) \omega'(x).$$

我们也可以换一种方法来表示这同样的事实, 只要先说关系式

$$dG(t) = g(t) dt$$

在以函数  $\omega(x)$  代替自变量  $t$  时保持有效 [106].

设要计算积分

$$\int f(x) dx.$$

在许多情形下, 可以选取这样的  $x$  的函数  $t = \omega(x)$ , 作为新变量, 使得被积表达式可表示成下面的形状

$$f(x) dx = g(\omega(x)) \omega'(x) dx, \quad (1)$$

<sup>39)</sup> 同样假定: 所考虑的变量  $t$  与  $x$  的变化区间  $[\alpha, \beta]$  与  $[a, b]$  由等式  $[\alpha, \beta] = \{\omega(x) : x \in [a, b]\}$  联系着.



这儿  $g(t)$  是求积分时比  $f(x)$  更方便的函数. 于是, 按照上面所讲的, 只要求出积分

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

然后在这积分中作替换  $t = \omega(x)$ , 就得到所要求的积分了. 通常简单地写成

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt, \quad (2)$$

式中右端积分所表示出的  $t$  的函数中, 已经暗含着上面所作的替换了.<sup>40)</sup>

例如, 求积分

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

因为  $d \sin x = \cos x dx$ , 那么, 令  $t = \sin x$ , 被积表达式就变成

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d \sin x = t^3 dt.$$

我们容易算出最后的表达式的积分:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

剩下只要回到变量  $x$ , 以  $\sin x$  代替  $t$ , 即得:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

读者注意: 在选取简化被积表达式的替换  $t = \omega(x)$  时, 应当记住, 在被积表达式中应找出一个因式  $\omega'(x)dx$ , 使它给出新变量的微分  $dt$  [参看 (1)]. 在上例中, 因式  $\cos x dx = dt$  的存在就决定了可以作替换  $t = \sin x$ .

关于这点, 有一个很好的例子

$$\int \sin^3 x dx;$$

这儿正因为缺少上述的因式, 作替换  $t = \sin x$  就会是不合适的. 如果试一试从被积表达式中分出因式  $\sin x dx$ , 或者更好一些以  $-\sin x dx$  作为新变量的微分, 那么, 由此得到替换  $t = \cos x$ ; 因为剩下的表达式

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

可用这替换加以简化, 所以这个替换是正确的. 我们有

$$\int \sin^3 x dx = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

<sup>40)</sup> 读者应特别注意以楷体 (原文指斜体 —— 译注) 表示的句子, 因为无此则等式 (2) 失去意义.



在技巧相当熟练后, 作替换时变量  $t$  可以不写出来. 例如, 在积分

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x$$

中, 心里想象着把  $\sin x$  看作新变量, 一下子就可得到所求结果. 类似地,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

这里, 替换  $t = \frac{x}{a}$  只需在心里暗暗记住就行了.

读者现在会看出, 第 266 目中的规则 III, 实质上就是化成线性替换  $t = ax + b$ :

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} \int f(t) dt.$$

有时, 运用替换法的方式与上述方式不同. 即是, 在被积表达式  $f(x)dx$  中直接以新变量  $t$  的函数  $x = \varphi(t)$  代替  $x$ , 于是得到表达式

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt.$$

显然, 如果在这个表达式中作替换  $t = \omega(x)$ , 其中  $\omega(x)$  是  $\varphi(t)$  的反函数, 就会回到原来的被积表达式  $f(x)dx$ . 所以, 像在前面写出等式 (2) 那样, 在算出右端积分之后, 应当令  $t = \omega(x)$ .

作为例子, 求积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

如果令  $x = t^6$  (为的是“消去”所有的根式), 即得  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ ,  $dx = 6t^5 dt$ , 并且

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 6 \left\{ \int dt - \int \frac{dt}{1 + t^2} \right\} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

现在剩下只要依公式  $t = \sqrt[6]{x}$  回到变量  $x$ , 最后得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C.$$

更有兴趣的例子是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$



在根号内的平方差 (其中第一项是常数) 提示给我们一个三角函数替换  $x = a \sin t$ ①. 我们有

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, dx = a \cos t dt$$

并且

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

但我们已经知道积分

$$a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right] + C$$

[267, 17)(a)]. 为了变回  $x$ , 我们代入  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ ; 若利用

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t \cdot a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2},$$

可以使第二项的变换更容易些. 最后

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

寻求合适的替换法的技巧靠多做练习. 关于这点, 虽然不能给出一般的提示, 但是, 使这个寻求更加容易的个别的特殊说明, 读者可在下目中找到. 在标准情况下的替换在本教程中将直接指出.

### 269. 例题

$$1) (a) \int e^{x^2} x dx, \quad (b) \int \frac{x dx}{1+x^4}, \quad (B) \int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx,$$

(a) 解 设  $t = x^2$ , 我们有  $dt = 2x dx$ , 因此

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

(b) 提示 作同样的替换. 答案  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$ .

在两种情形中, 积分都有如下的形状

$$\int g(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int g(x^2) d(x^2),$$

其中  $g$  是积分时较便利的函数; 对于这些积分, 作替换  $t = x^2$  是十分自然的. 类似地, 形状如

$$\int g(x^3) x^2 dx = \frac{1}{3} \int g(x^3) d(x^3)$$

的积分采用替换  $t = x^3$ . 如此类推. 按照最后的型式可处理第三个积分.

(B) 答案  $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C$ .

①应当指出: 我们认为  $x$  在  $-a$  与  $a$  之间变化, 而  $t$  在  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间变化. 因此  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ .



$$2) \int (ax^2 + \beta)^\mu x dx \quad (\mu \neq -1).$$

解 这儿可令  $t = x^2$ ; 但是可更简单地一下子取  $u = ax^2 + \beta$ , 因为因式  $x dx$  与  $du = 2ax dx$  只差一个数字系数. 这样, 我们有

$$\int (ax^2 + \beta)^\mu x dx = \frac{1}{2a} \int u^\mu du = \frac{1}{2a(\mu+1)} u^{\mu+1} + C = \frac{1}{2a(\mu+1)} (ax^2 + \beta)^{\mu+1} + C.$$

$$3) (a) \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad (b) \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad (B) \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

提示 所有这些积分都有如下的形状

$$\int g(\ln x) \frac{dx}{x} = \int g(\ln x) d \ln x,$$

因而取替换  $t = \ln x$ .

答案 (a)  $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$ ; (b)  $\ln \ln x + C$ ; (B)  $-\frac{1}{\ln x} + C$ .

4) 形状为

$$\int g(\sin x) \cos x dx, \quad \int g(\cos x) \sin x dx, \quad \int g(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

的积分, 分别地取替换

$$t = \sin x, \quad u = \cos x, \quad v = \operatorname{tg} x.$$

例如,

$$(a) \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sin x + C;$$

$$(b) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C;$$

$$(B) \int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{A^2 \operatorname{tg}^2 x + B^2} = \int \frac{dv}{A^2 v^2 + B^2} \\ = \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \frac{Av}{B} + C = \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{B} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

$$5) (a) \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}, \quad (b) \int \operatorname{ctg} x dx, \quad (B) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx, \quad (r) \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

解 (a) 如果令  $t = x^2 + 1$ , 则分子  $2x dx$  恰好给出  $dt$ ; 积分可化成

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(x^2 + 1) + C.$$

我们指出, 当所给出的积分有如下的形状

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}$$

时, 也就是说, 在被积表达式中分子是分母的微分时, 替换  $t = f(x)$  常可一下子就达到目的.

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$



按照这个范式, 我们有

$$(6) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C \quad [\text{比较4)(6)}];$$

$$(B) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x} + 1)}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C;$$

$$(r) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

6) 由上题 (r) 的结果, 容易得到两个有用的积分:

$$(a) \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$(6) \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d \left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7)

$$(a) \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x} d \operatorname{arctg} x = \frac{2}{3} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$(6) \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2 + 1} = \operatorname{arctg} e^x + C;$$

$$(B) \int \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \operatorname{tg} \frac{1}{x} d \frac{1}{x} = \ln \left| \cos \frac{1}{x} \right| + C \quad [\text{参看4)(6)}].$$

现在给几个包含二项式  $a^2 - x^2$ ,  $x^2 + a^2$  与  $x^2 - a^2$  的表达式的积分的例子. 在这些情形下, 以新变量  $t$  的三角函数或双曲函数代替  $x$ , 并利用下列的关系式

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t},$$

常有很多的便利.

$$8) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

作替换:  $x = a \operatorname{tg} t$  ①,  $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$ ,  $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ , 于是

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cos t) + C \quad [\text{参看 267, 17)(a)}].$$

现在回到变量  $x$ , 令  $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ , 并通过  $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$  表示出  $\sin t$  与  $\cos t$ . 最后得

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

①假定  $t$  在  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间变化即可.



$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

这儿采用双曲替换较为便利. 作为例子, 讨论减号的情形. 令  $x = a \operatorname{ch} t$  (当  $x$  与  $t > 0$  时),  $dx = a \operatorname{sh} t dt$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t$ . 积分可简单地化成  $\int dt = t + C$ . 为了变回  $x$ , 回想一下双曲余弦函数的反函数表达式 [49, 3)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left( \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C',$$

其中常数  $C'$  包含有  $-\ln a$  这一项.

$$10) (a) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (b) \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (B) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在所给情况中, 三角替换或双曲替换都是可以同样简单地达到目的. 作为例子, 在第二个积分中取  $x = a \sec t$ ,  $dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t}$ , 于是  $x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t$ , 并且

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

作替换:  $x = a \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$ , 把这个积分化成下面这样 [参看 6)(a)]:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C.$$

但是

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

所以最后得到

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C.$$

最后再讨论两个换元积分法的例子, 此处所作替换不如上述那些情况来得自然, 但可迅速地达到目的.

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \quad (a \geq 0).$$

令  $\sqrt{x^2 + a} = t - x$  并取  $t$  作为新的变量. 平方后, 等式两端的  $x^2$  可以消去, 结果是

$$x = \frac{t^2 - a}{2t},$$

于是

$$\sqrt{x^2 + a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt.$$

最后得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C. [\text{比较 9)]}$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}} \quad (\alpha < x < \beta).$$

令  $x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ), 其中  $\varphi$  是新变量; 于是

$$x - \alpha = (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi, \quad \beta - x = (\beta - \alpha) \cos^2 \varphi,$$

$$dx = 2(\beta - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$



这样一来,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2 \int d\varphi = 2\varphi + C = 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

**270. 分部积分法** 设  $u = f(x)$  与  $v = g(x)$  两个都是  $x$  的函数, 具有连续导数  $u' = f'(x), v' = g'(x)$ . 在这情形下, 依乘积的微分法则,  $d(uv) = u dv + v du$  或  $u dv = d(uv) - v du$ . 表达式  $d(uv)$  的原函数, 显然是  $uv$ ; 所以得到公式

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

这个公式就是**分部积分法则**. 它能把表达式  $u dv = uv' dx$  的积分归结为表达式  $v du = vu' dx$  的积分.

例如, 设要求积分  $\int x \cos x dx$ . 令

$$u = x, dv = \cos x dx, \text{ 于是 } du = dx, v = \sin x^{\textcircled{1}},$$

并且, 依公式 (3).

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned} \quad (4)$$

由此可见, 分部积分法使我们能够以简单的函数  $\sin x$  来代替复杂的被积函数  $x \cos x$ . 顺便说说, 在求  $v$  之时, 必须把表达式  $\cos x dx$  求积分, 故称**分部积分法**.

在应用公式 (3) 来计算所提出的积分时, 必须分被积表达式成为两个因式;  $u$  及  $dv = v' dx$ , 其中第一个因式在公式 (3) 右端取积分时要被微分, 而第二个因式则被积分, 必须极力设法使微分  $dv$  不难积分, 还要设法使  $du$  代替  $u$ 、 $v$  代替  $dv$  时总合起来可将被积表达式简化. 例如, 在上面所讨论的例子中, 比方说取  $x dx$  作为  $dv$ , 而取  $\cos x$  作为  $u$ , 就显然是不合适的.

在计算熟练后就不必引进记号  $u$  及  $v$ , 而可以直接应用公式 [比较 (4)].

分部积分法则应用的范围比换元法受到更多的限制. 但有许多类积分, 例如

$$\int x^k \ln^m x dx, \int x^k \sin b x dx, \int x^k \cos b x dx, \int x^k e^{ax} dx$$

等等, 只有借助于分部积分法来计算.

重复应用分部积分法则, 便得到所谓**分部积分法的推广公式**.

假定, 函数  $u$  与  $v$  在所考虑区间上有直到第  $(n+1)$  阶的各阶连续导数:  $u', v', u'', v'', \dots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$ .

<sup>①</sup>因为就我们的目的来说, 只要有一种方法能表示  $\cos x dx$  是  $dv$  就够, 那么, 就没有必要写出包含一个任意常数的  $v$  的最普遍的表达式. 这点说明在以后应当加以注意.



在公式 (3) 中以  $v^{(n)}$  代替  $v$ , 我们有

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int u dv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)} du = uv^{(n)} - \int u' v^{(n)} dx.$$

类似地,

$$\begin{aligned} \int u' v^{(n)} dx &= u' v^{(n-1)} - \int u'' v^{(n-1)} dx, \\ \int u'' v^{(n-1)} dx &= u'' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)} dx, \\ &\dots\dots\dots \\ \int u^{(n)} v' dx &= u^{(n)} v - \int u^{(n+1)} v dx. \end{aligned}$$

以  $+1$  及  $-1$  轮流地乘这些等式, 并且把它们按项加起来, 消去左右两端相同的积分, 我们得到上面所说的公式:

$$\begin{aligned} \int uv^{(n+1)}dx &= uv^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots \\ &\quad + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx. \end{aligned} \quad (5)$$

当被积表达式的因式中之一是整多项式时, 利用这个公式是特别方便的. 如果  $u$  是  $n$  次多项式, 那么,  $u^{(n+1)}$  恒等于 0, 于是左端的积分可得到最后的表达式:  
我们来讲一些例子.

### 271. 例题

1)  $\int x^3 \ln x dx$ .

微分  $\ln x$  可得到简化, 故设

$$u = \ln x, dv = x^3 dx, \text{ 于是 } du = \frac{dx}{x}, v = \frac{1}{4} x^4$$

因而

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

2) (a)  $\int \ln x dx$ , (б)  $\int \operatorname{arctg} x dx$ , (в)  $\int \arcsin x dx$ .

在所有的情形中都采用  $dx = dv$ , 我们得到

$$(a) \quad \int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\begin{aligned} (б) \quad \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int x d \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \quad [\text{参看 } 269, 5)(a)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (в) \quad \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d \arcsin x = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad [\text{参看 } 269, 2)]. \end{aligned}$$



$$3) \int x^2 \sin x dx.$$

我们有

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) dx^2 = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

这样一来, 我们已经把所求积分化成已知的积分了 [270, (4)]; 以它的值代入, 得到

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

分部积分法则在这里总共用了两次.

同样地, 重复应用这个法则, 可计算积分

$$\int P(x) e^{ax} dx, \quad \int P(x) \sin bx dx, \quad \int P(x) \cos bx dx,$$

其中  $P(x)$  是  $x$  的整多项式.

4) 如果利用分部积分法的推广公式, 就可以立即得出这种形状的积分的普遍表达式.

令  $v^{(n+1)} = e^{ax}$ , 即有

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3}, \text{ 等等.}$$

于是, 若  $P(x)$  是  $n$  次多项式, 依公式 (5), 我们得到

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[ \frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \cdots \right] + C.$$

类似地, 如果取  $v^{(n+1)} = \sin bx$ , 那么

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \quad v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3}, \text{ 等等.}$$

由此有公式

$$\int P(x) \sin bx dx = \sin bx \cdot \left[ \frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \cdots \right] - \cos bx \left[ \frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \cdots \right] + C.$$

用同样的方式可建立公式

$$\int P(x) \cos bx dx = \sin bx \cdot \left[ \frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \cdots \right] + \cos bx \cdot \left[ \frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \cdots \right] + C.$$

5)  $\int x^3 \ln^2 x dx$ . 我们有

$$\int \ln^2 x d\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{4} \int x^4 d \ln^2 x = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x dx,$$

我们已把问题化成例题 1) 的积分了. 最后得到

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln^2 x dx &= \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right) + C \\ &= \frac{1}{4} x^4 \left( \ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right) + C. \end{aligned}$$



例如, 依次计算积分

$$\int x^k \ln^m x dx,$$

其中  $k$  是任意实数 ( $k \neq -1$ ), 而  $m = 1, 2, 3, \dots$ . 如果令  $u = \ln^m x$ , 而把分部积分公式应用到这个积分, 就得到递推公式

$$\int x^k \ln^m x dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x - \frac{m}{k+1} \int x^k \ln^{m-1} x dx,$$

用这公式计算所考虑的积分时, 能化为计算同一类型的积分, 但是  $\ln x$  的指数少了一次.

可是, 替换  $t = \ln x$  还可以把所考虑的积分引向在 3) 及 4) 中已经研究过的积分  $\int t^m e^{(k+1)t} dt$  的形状.

6) 下列积分是一些很有趣的例子

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

若把分部积分法应用到它们上 (两种情形下都取, 比方说,  $dv = e^{ax} dx, v = \frac{1}{a} e^{ax}$ ), 就得到

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

可见这两个积分中的每一个都能用另一个表达出来<sup>①</sup>.

但若以第二个公式代入第一个公式中的第二个积分, 就得到对于第一个积分的方程, 由这方程可确定

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

类似地可得出第二个积分

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C'.$$

7) 作为应用分部积分法的最后的一个例子, 我们导出计算积分

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

的递推公式.

令  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, dv = dx$ , 于是  $du = -\frac{2nx \cdot dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, v = x$ . 应用公式 (3), 我们得到

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx.$$

<sup>①</sup>如果把积分了解为确定的原函数 [比较 266 中的附注], 那么, 想要在第二个公式中有与在第一个公式中同样的函数, 严格说来, 我们还必须在右端加进某一常数. 当然, 它会把常数  $C$  与  $C'$  吸收到最后的表达式里去.



最后一个积分可变成如下的形式:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.\end{aligned}$$

将这表达式代入上面的等式中去, 得到关系式

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

于是

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \quad (6)$$

所得到的公式把积分  $J_{n+1}$  的计算化为下标少 1 的积分  $J_n$  的计算. 已知积分

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

[267, 9)(6); 我们取它的诸值中的一个], 依这公式, 当  $n=1$  时, 得出

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

[这个结果我们已在前面用另一方法得到过, 参看 269, 8)]. 在公式 (6) 中, 令  $n=2$ , 我们就得到

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

如此下去. 这样, 可算出下标是任何自然数  $n$  的积分  $J_n$ .

## §2. 有理式的积分

**272. 在有限形状中积分问题的提出** 我们已经熟悉了计算不定积分的一些初等方法. 这些方法并未事先给出为要计算给定的积分所应遵循的确切途径, 而只是提供给计算者以很多技巧. 在本节与下面几节中, 我们要详细讨论若干类重要的函数并对于它们的积分建立起完全确定的计算程序.

现在我们要说明: 在上述各种类的函数的积分中使我们感到兴趣的是, 要根据什么样的法则, 才能得出它们的积分.

分析中首先应用着的各种各样类型的函数在 51 目中已经描述过; 这就是所谓的初等函数及可利用有限次四则运算与重复 (不取极限步骤) 通过初等函数表示出来的那些函数.

在第三章中我们已看到过, 一切这样的函数是可微分的并且它们的导数仍属于同样的类型. 它们的积分却是另外的一种情况: 属于上述类型的函数的积分函数, 时常是不属于本类中, 即不能经过有限次上述运算, 用初等函数表示出来. 例如

$$\begin{aligned}&\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \\ &\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}\end{aligned}$$



就属于显然不能表示成有限形状的积分之列; 类似的其他例子将在下面 [280、289、290 等目] 引进.

特别强调, 所有这些积分都真实地存在的<sup>①</sup>, 但它们只是全然崭新的函数, 并且不能被化成我们叫做初等函数的那些函数<sup>②</sup>.

比较为数不多的, 可以在有限形状中施行积分法的那些一般的函数类型, 都是我们所熟悉的; 下面我们就要用最新的方法来研究这些类型. 很重要的有理函数类型应当放在它们中的第一位.

**273. 部分分式与它们的积分** 因为从有理假分式中可删去容易积分的整式部分, 所以只需研究真分式 (它的分子的幂次数低于分母的幂次数) 的积分就够了.

我们在这里讨论真分式中的部分分式; 这就是下列四种类型的分式:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

(k=2,3,...) (m=2,3,...)

其中  $A, M, N, a, p, q$ , 都是实数; 此外, 对于 III 与 IV 类型的分式, 假定三项式  $x^2 + px + q$  没有实根, 于是

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad \text{或} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

I 与 II 类型的分式我们已经会积分了 [267, 7)]

$$A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln |x-a| + C,$$

$$A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

至于 III 与 IV 类型的分式, 用下面的替换可使它们的积分变为容易. 由表达式  $x^2 + px + q$  中分出一个二项式的完全平方

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

最后一个圆括弧中的表达式, 依假定, 是正数, 可令它等于  $a^2$ , 如果取

$$a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

<sup>①</sup>参看 264 目中关于这点所讲的. 我们在下面 305 目中还要讲到这点.

<sup>②</sup>为了帮助读者领会这一事实, 我们提醒他, 有理函数的积分函数

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

本身已经不是有理函数了. 如是, 如果对我们来说 “初等的” 只是有理函数, 那么, 上述的 “初等” 函数的积分已经不会通过 “初等” 函数表示出来, 而是 “非初等的” 新性质的函数—— $\ln x$  与  $\arctg x$  了!



的话. 现在作替换

$$x + \frac{p}{2} = t, dx = dt, x^2 + px + q = t^2 + a^2, Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

在情形 III 即有

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \end{aligned}$$

或者, 变回  $x$  并以  $a$  的值代替  $a$ :

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

对情形 IV, 同样的替换给出

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m} dt \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}. \end{aligned} \quad (1)$$

用替换  $t^2 + a^2 = u, 2tdt = du$ , 容易算出右端的第一个积分:

$$\int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{u^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C. \quad (2)$$

右端第二个积分, 对任何  $m$ , 依照 271 目递推公式 (6) 可以算出. 然后, 为要回到变量  $x$ , 只要在最后结果中令  $t = \frac{2x + p}{2}$  就行了.

这样就完全解决了关于部分分式的积分问题.

**274. 分解真分式为部分分式** 现在我们来讲代数学范围中的一个定理, 但它在有理分式的积分定理中有重大的作用: 每个真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

可被表示成有限个部分分式的和的形状.

分解真分式成为部分分式与分解它的分母  $Q(x)$  成素因式有密切的联系. 大家知道, 每个实系数整多项式可以 (并且是唯一地) 被分解成  $x - a$  与  $x^2 + px + q$  类型的实因式; 同时, 假定二次式实因式没有实根, 因而不能再分解成线性的实因式. 把



相同的实因式 (假如有的话) 合并起来, 并为简单起见, 假定多项式  $Q(x)$  的最高次项的系数等于 1, 于是可把这个多项式的分解式概括地写成下面的形状

$$Q(x) = (x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^m \cdots, \quad (3)$$

其中  $k, \cdots, m, \cdots$ , 是自然数.

注意, 如果多项式  $Q(x)$  的次数是  $n$ , 那么, 显而易见地, 所有指数  $k$  的总和, 加上两倍 所有指数  $m$  的总和, 就刚好给出  $n$ :

$$\Sigma k + 2\Sigma m = n. \quad (4)$$

为了证明这定理, 先建立下面两个辅助命题:

1° 考虑任何包含在分母的分解式中而指数  $k \geq 1$  的线性因式  $x - a$ , 因而

$$Q(x) = (x - a)^k Q_1(x).$$

其中多项式  $Q_1$  已不再被  $x - a$  所整除. 于是给定的真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^k Q_1(x)}$$

可被表示成如下的真分式的和的形状

$$\frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} Q_1(x)} \textcircled{1},$$

其中第一项是部分分式, 而第二项的分母包含的因式  $x - a$  的幂次数比先前为低.

为了证明, 只须这样选择数  $A$  及多项式  $P_1(x)$ , 使恒等式

$$P(x) - AQ_1(x) = (x - a)P_1(x)$$

成立就够了.

我们首先这样确定  $A$ , 使得左边被  $x - a$  除尽; 为此 (按照著名的贝祖 (Bezout) 定理), 只要对于  $x = a$  使它的值为零就够了; 于是得到下面的表达式:

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

正因为  $Q_1(a) \neq 0$ , 所以这表达式有意义 (仍依照贝祖定理). 在上述的  $A$  选定时, 多项式  $P_1$  可作为一个商简单地确定出来.

2° 现在设  $x^2 + px + q$  是包含在分母的分解式中而指数  $m \geq 1$  的二次式因式中的任何一个, 于是在这次可令

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x),$$

①字母  $P, Q$  (带不同的下标) 在这里表示整多项式, 而字母  $A, M, N$  是常数.



其中多项式  $Q_1$  不能被三项式  $x^2 + px + q$  整除. 于是给定的真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}$$

可以写作真分式的和的形状

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)},$$

其中第一项也是部分分式, 而第二项分母所含上述三项式的次数又降低了.

为了证明, 只需这样选择数  $M, N$  与多项式  $P_1(x)$ , 使它们满足恒等式

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = (x^2 + px + q)P_1(x).$$

我们这样来确定  $M$  及  $N$ , 在这次是使左边部分被二次三项式  $x^2 + px + q$  所整除. 设以这三项式除  $P$  与  $Q_1$  后的余式分别为  $\alpha x + \beta$  与  $\gamma x + \delta$ . 于是问题变成了以  $x^2 + px + q$  整除表达式

$$\begin{aligned} & \alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) \\ &= -\gamma Mx^2 + (\alpha - \delta M - \gamma N)x + (\beta - \delta N). \end{aligned}$$

实际上, 在这里作除法之后, 在余式中即有

$$[(p\gamma - \delta)M - \gamma N + \alpha]x + [q\gamma M - \delta N + \beta].$$

我们应使这两个系数都等于零, 于是, 为了确定  $M$  及  $N$ , 我们得到线性方程组; 它的行列式

$$\begin{vmatrix} p\gamma - \delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2$$

异于零. 其实, 当  $\gamma \neq 0$  时可把它写成下面的形状

$$\gamma^2 \left[ \left( -\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 + p \cdot \left( -\frac{\delta}{\gamma} \right) + q \right];$$

但在方括弧中的表达式是三项式  $x^2 + px + q$  在点  $x = -\frac{\delta}{\gamma}$  的值, 因而不可能是零, 因为这个三项式没有实根. 当  $\gamma = 0$  时行列式变成  $\delta^2$ , 在这情形下  $\delta$  显然不是零, 因为多项式  $Q_1$  不为  $x^2 + px + q$  所整除.

用上述方法定出  $M$  及  $N$  的值后, 多项式  $P_1$  在这里也不难作为一个商而确定出来.

现在来证明最初所说的定理. 这个证明转化为重复应用命题 1° 及 2°, 它们保证由给定的真分式继续分出部分分式一直到分完为止的可能性.



如果包含在  $Q$  中的因式  $x - a$  只有一次幂, 那么, 由于  $1^\circ$  (当  $k = 1$  时), 我们有形如

$$\frac{A}{x - a}$$

的唯一的部分分式与它相当.

如果在  $x - a$  的幂次指数  $k > 1$  的情形, 那么, 根据  $1^\circ$  分出部分分式

$$\frac{A_k}{(x - a)^k}$$

之后, 对于剩下的分式我们重新应用  $1^\circ$ , 分出部分分式

$$\frac{A_{k-1}}{(x - a)^{k-1}},$$

如此下去, 直到由分解分母所得到的因式  $x - a$  完全消失时为止. 由此可见, 在所考虑的情形中, 对应于因式  $(x - a)^k (k > 1)$  的就是  $k$  个部分分式组成的式子:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}. \quad (5)$$

我们把同样的推理轮流应用到剩下的线性因式中的每一个上去, 直到完全用尽分母或者在它的分解式中只留下一些二次式因式时为止.

与此类似, 利用  $2^\circ$ , 对于二次因式  $x^2 + px + q$ , 如果它只是一次幂, 我们就只有一个形如

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

的部分分式与它相当; 如果这因式的指数  $m > 1$ , 则有由  $m$  个部分分式组成的式子:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}. \quad (6)$$

如果还有其他二次式因式, 同样可以作出与它们相应的部分分式; 这就完成了定理的证明.

**275. 系数的确定、真分式的积分** 由上可见, 若已知分解式 (3), 我们就能知道分解所给分式  $\frac{P}{Q}$  为部分分式时那些部分分式的分母. 现在要讲关于确定分子的问题, 即是, 定出系数  $A, M, N$  的问题. 因为 (5) 式中分式的分子包含  $k$  个系数, 而 (6) 式中分式的分子包含  $2m$  个系数, 于是由 (4) 它们的总个数是  $n$ .

为了定出上述的系数, 通常采取下述的待定系数法. 如已知分式  $\frac{P}{Q}$  的分解式的形状, 把它的右端分子系数写成文字系数. 所有部分分式的公分母显然是  $Q$ ; 把这些部分分式加起来, 就得到一个真分式<sup>①</sup>. 现在如果弃去左右两端的分母, 得到两个

<sup>①</sup>有理真分式的和永远是真分式.



恒等的  $(n-1)$  次的  $x$  的多项式. 右端多项式中次数不同的系数都是  $n$  个文字系数的齐次线性多项式; 使它们与多项式  $P$  的相当的数字系数相等, 最后得到  $n$  个线性方程的方程组, 由这些方程就可以定出文字系数. 由于分解成部分分式的可能性已经预先建立, 上述的方程组无论何时就都不可能是矛盾的.

不但如此, 因为无论怎样的一组常数项 (多项式  $P$  的系数), 上述的方程组都有解, 所以它的行列式一定异于 0. 换个说法, 就是方程组永远是确定的. 这个简单的说明顺便就证明了真分式分解成部分分式的唯一性. 现在举一个例子来说明上面所讲的事实.

设给定分式  $\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ . 按照普遍定理它有分解式

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

我们由恒等式

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)$$

确定系数  $A, B, C, D, E$ . 使左右两端同幂次的  $x$  的系数相等, 得到五个方程的方程组

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+C=0, \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\ x^0 & A-2C-2E=13. \end{array}$$

由此

$$A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4.$$

最后

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

我们刚才建立的代数的事实对积分有理分式有直接的应用. 像我们在第 273 目中见到过的那样, 部分分式可在有限形状中被积分出来. 现在我们同样可以讲到任何有理分式. 如果我们详细考察那些函数, 整多项式与真分式的积分函数可通过这些函数表示出来, 那么就可以说出一个更确切的结果:

任何有理函数的积分函数, 可借助于有理函数, 对数函数及反正切函数, 在有限形状中表示出来.

例如, 回到刚才讨论的例子并回忆 273 目的公式, 我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$



276. 分离积分的有理部分 有一个奥斯特洛格拉得斯基 (М. В. Остроградский) 方法. 利用这个方法可将有理真分式的求积分大大地简化. 这个方法使我们能用纯粹代数的方法来分离积分的有理部分.

我们在 [273] 中看到, 当积分类型 II 与 IV 的部分分式时, 在积分中可得到有理项. 在第一种情形, 积分函数一下子就可写出

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \quad (7)$$

现在我们要来确定: 积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx \quad \left(m > 1, q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$$

的有理部分有什么样的形状.

采用我们已经熟悉的替换  $x + \frac{p}{2} = t$  后, 利用等式 (1), (2) 及 271 目中当  $n = m-1$  时的递推公式 (6). 如果回到原变量  $x$ , 就得到

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

其中  $M', N'$  与  $\alpha$  表示常数系数. 仍按这个公式, 以  $m-1$  代替  $m$ , 对于最后一个积分我们得出 (如果  $m > 2$  的话)

$$\int \frac{\alpha dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

如此下去, 直到右端积分中三项式  $x^2+px+q$  的指数变成 1 时为止. 所有分离出的有理项都是真分式. 把它们合并在一起, 得到形如

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+px+q} \quad (8)$$

的结果, 其中  $R(x)$  是次数低于分母的整多项式<sup>①</sup>, 而  $\lambda$  是常数.

设有既约的真分式  $\frac{P}{Q}$ , 又设它的分母已分解成素因式 [参看 (3)]. 于是这个分式的积分函数可表示成形如 (5) 与 (6) 的分式的积分的和的形状. 如果  $k$  (或  $m$ ) 大于 1, 则所有 (5) [或 (6)] 中分式的积分函数, 除第一项外, 都按公式 (7) [或 (8)] 变换形状. 把所有这些结果合并起来. 最后得到形如

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (9)$$

的公式. 积分函数的有理部分  $\frac{P_1}{Q_1}$  是由上面所分离出的有理部分相加而得到的; 所以, 首先它是一个真分式, 而它的分母有分解式

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdots (x^2+px+q)^{m-1} \cdots$$

<sup>①</sup>参看前一脚注.



至于留在积分记号里面的分式  $\frac{P_2}{Q_2}$ , 可由类型 I 及 III 的分式相加而得到, 因而它也是真分式, 并且

$$Q_2(x) = (x - a) \cdots (x^2 + px + q) \cdots$$

显然 [参看 (3)],  $Q = Q_1 Q_2$ .

公式 (9) 就叫做奥斯特洛格拉得斯基公式.

取微分后, 可以把它表示成等价的形式:

$$\frac{P}{Q} = \left[ \frac{P_1}{Q_1} \right]' + \frac{P_2}{Q_2}. \quad (10)$$

我们看到过, 如果已知多项式  $Q$  的分解式 (3), 则多项式  $Q_1$  与  $Q_2$  容易求得. 但它们可不用这个分解式而被定出. 实际上, 因为导数  $Q'$  包含  $Q$  被分解时得出的所有的素因式只是指数少 1, 于是  $Q_1$  是  $Q$  与  $Q'$  的最大公约式, 因而可由这些多项式来定出, 例如, 依辗转相除法定出. 如果  $Q_1$  是已知的, 则  $Q_2$  可由以  $Q_1$  除  $Q$  的简单除法定出.

现在来确定公式 (10) 中分子  $P_1$  与  $P_2$ . 对于这也利用待定系数法.

用  $n, n_1, n_2$  分别表示多项式  $Q, Q_1, Q_2$  的次数, 于是有  $n_1 + n_2 = n$ ; 此时多项式  $P, P_1, P_2$  的次数将不高于  $n - 1, n_1 - 1, n_2 - 1$ . 令  $P_1$  与  $P_2$  为带文字系数的  $n_1 - 1$  与  $n_2 - 1$  次多项式; 所有这些系数将是  $n_1 + n_2$  个, 即  $n$  个. 将 (10) 中的微分计算出来, 则为

$$\frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

现在要证第一个分式永远可以化成分母是  $Q$ , 分子保持是整式的分式. 即是

$$\frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 \frac{Q_1' Q_2}{Q_1}}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 H}{Q_1 Q_2},$$

如果  $H$  表示商  $\frac{Q_1' Q_2}{Q_1}$  的话. 但这个商可以表示成整多项式的形状. 实际上, 如果  $k \geq 1$  而  $Q_1$  内含有  $(x - a)^k$ , 那么,  $Q_1'$  内必含有  $(x - a)^{k-1}$ , 而  $Q_2$  内又有  $x - a$ ; 这样的结论对于  $m \geq 1$  时的因式  $(x^2 + px + q)^m$  也可以适用. 因此  $H$  的分子能被分母整除, 以后就可把  $H$  了解为  $(n_2 - 1$  次的) 整多项式.

消去公分母  $Q$ , 得到两个  $(n - 1$  次的) 多项式的恒等式

$$P_1' Q_2 - P_1 H + P_2 Q_1 = P.$$

由此, 像上面一样, 为了定出  $n$  个文字系数, 我们得到  $n$  个线性方程的方程组.

因为不管对怎样的  $P$ , 分解式 (10) 的可能性是确立的, 所以上述方程组对于任何常数项都是相容的. 由此, 自然得出结论, 它的行列式异于 0, 亦即是方程组一定



是确定的, 而分解式 (10)——在上述分母  $Q_1$  与  $Q_2$  的情形下——只可能是唯一的<sup>①</sup>.

例题 设要求分离积分

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx$$

的有理部分. 我们有

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} = \left[ \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1} \right]' + \frac{dx^2 + ex + f}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

由此

$$4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 = (2ax + b)(x^3 + x^2 + x + 1) - (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + (dx^2 + ex + f)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

令等式两端  $x$  的同次项的系数相等, 得出方程组, 由它们定出未知数  $a, b, \dots, f$ :

$$\begin{array}{l|l} x^5 & d = 0 (\text{在下面的计算中不再取 } d \text{ 了}), \\ x^4 & -a + e = 4, \\ x^3 & -2b + e + f = 4, \\ x^2 & a - b - 3c + e + f = 16, a = -1, b = 1, c = -4, \\ x^1 & 2a - 2c + e + f = 12, d = 0, e = 3, f = 3. \\ x^0 & b - c + f = 8. \end{array}$$

于是, 所求积分

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx &= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

在这个例子中计算最后一个积分是容易一下子作出的. 在其他的情形, 必须再分解部分分式. 虽然如此, 这个步骤仍可以跟上面的步骤合并起来.

**277. 例题** 现在再举一些积分有理函数的例子.

$$1) \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$$

在这里可用一个极简单的变换分解成部分分式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>参看 274 目关于真分式分解成部分分式时类似的说明.



答案  $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

2)  $\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx.$

我们有

$$\frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + \frac{3}{2}} + \frac{C}{x - \frac{5}{2}},$$

由此推得恒等式

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} = A\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + B\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + C\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

可以换一种作法而不用使等式左右两端  $x$  的同次项系数相等的办法. 在这恒等式中依次令  $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ; 立即得到  $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{8}, C = \frac{3}{8}$  (因为每次右端都只剩下一项).

答案

$$\frac{1}{4} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{8} \ln \left| x + \frac{3}{2} \right| + \frac{3}{8} \ln \left| x - \frac{5}{2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3} \right| + C' \textcircled{1}.$$

3)  $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

因为

$$x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

于是可得出分解式为

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

由恒等式

$$1 = (Ax + B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (Cx + D)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

得到方程组

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0, \\ x^1 & A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0, \\ x^0 & B + D = 1, \end{array}$$

由此

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) + C. \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 显然常数  $C'$  与常数  $C$  相差  $-\frac{1}{2} \ln 2$ .



利用反正切函数的加法公式 [50], 这个结果可表示成这样的形式

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C'.$$

可是, 必须指出, 这个表达式只各别地在区间  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, \infty)$  上适合, 因为在点  $x = \pm 1$  处它失去意义. 对于这些区间, 常数  $C'$  分别等于

$$C - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, C, C + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

常数的跳跃式的改变补足了函数本身在  $x = \pm 1$  处的间断.

$$4) \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^3} dx.$$

采用分离积分的有理部分的办法. 我们有

$$Q_1 = (x^2 - 2x + 2)^2, \quad Q_2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2).$$

于是

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^3} = \left( \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x^2 - 2x + 2)^2} \right)' + \frac{e}{x-1} + \frac{fx + g}{x^2 - 2x + 2}.$$

并且, 我们同时已经把这个表达式分成部分分式, 但还需把它积分 (在分离积分的有理部分之后). 恒等式

$$\begin{aligned} 2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20 &= (3ax^2 + 2bx + c)(x^2 - 2x + 2)(x-1) \\ &\quad - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot 2(2x-2)(x-1) \\ &\quad + e(x^2 - 2x + 2)^3 + (fx + g)(x-1)(x^2 - 2x + 2)^2 \end{aligned}$$

导出方程组

$$\begin{array}{l|l} x^6 & e + f = 0, \\ x^5 & -a - 6e - 5f + g = 0, \\ x^4 & -a - 2b + 18e + 12f - 5g = 2, \\ x^3 & 8a + 2b - 3c - 32e - 16f + 12g = -4, \\ x^2 & -6a + 4b + 5c - 4d + 36e + 12f - 16g = 24, \\ x^1 & -4b + 8d - 24e - 4f + 12g = -40, \\ x^0 & -2c - 4d + 8e - 4g = 20, \end{array}$$

由此

$$a = 2, b = -6, c = 8, d = -9, e = 2, f = -2, g = 4.$$

答案

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2\operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

$$5) \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)^3} dx.$$

分离积分的有理部分, 我们有

$$Q_1 = (x+1)(x^2 + x + 1)^2, \quad Q_2 = (x+1)(x^2 + x + 1).$$



找出分解式

$$\left[ \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x+1)(x^2+x+1)^2} \right]' + \frac{fx^2 + gx + h}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

由方程组

$$\begin{array}{l|l} x^7 & f = 0, \\ x^6 & -a + g = 1, \\ x^5 & a - 2b + 3g + h = -1, \\ x^4 & 5a - b - 3c + 5g + 3h = 1, \\ x^3 & 4a + 3b - 3c - 4d + 5g + 5h = 2, \\ x^2 & 3b + c - 5d - 5e + 3g + 5h = 3, \\ x^1 & 2c - d - 7e + g + 3h = 3, \\ x^0 & d - 3e + h = 3, \end{array}$$

找出

$$a = -1, b = 0, c = -2, d = 0, e = -1, f = g = h = 0.$$

所以, 在这里积分全部变成自身的有理部分:

$$-\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} + C.$$

### §3. 某些含有根式的函数的积分

**278. 形状为  $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$  的积分<sup>①</sup>、例题** 上面我们已经学会在有限形状中求有理微分式的积分. 在以后积分这些或那些种类微分表达式的基本方法是寻求这样的替换  $t = \omega(x)$  (其中  $\omega$  本身能用初等函数表示出来), 这替换会把被积表达式化成有理函数的形状. 我们把这个方法叫做**有理化被积表达式法**.

作为它的应用的第一个例子, 我们考虑形如

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx \quad (1)$$

的积分, 其中  $R$  表示两个自变量的有理函数,  $m$  是自然数, 而  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是常数.

令

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

则积分变成

$$\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt;$$

<sup>①</sup>我们约定永远用字母  $R$  表示它自己的变量的有理函数.



在这儿微分式已经是有理函数的形状, 因为  $R, \varphi, \varphi'$  都是有理函数. 依上节的法则算出这个积分, 以  $t = \omega(x)$  代入后, 就变回到旧的变量了.

更普遍的积分

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots\right) dx$$

可化为形如 (1) 的积分, 其中所有的指数  $r, s, \dots$  都是有理数; 只要把这些指数化成公分母  $m$ , 就可在积分号后得到  $x$  与根式  $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$  的有理函数.

例题 1)  $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$

这里的分式线性函数  $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ , 特别地, 容易化成线性函数. 令  $t = \sqrt{x+1}, dx = 2t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx &= 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt = \int \left( \frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

这儿剩下的事只是以  $t = \sqrt{x+1}$  代入了.

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}.$

令  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2};$

于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} &= \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \left( -\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

此处  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

## 279. 二项式微分的积分、例题 形如

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

的微分式叫做二项式微分, 其中  $a, b$  是任何常数, 而指数  $m, n, p$  是有理数. 要来弄清楚这些表达式可在有限形状中求积分的情况.

一个这样的情况是很明显的: 如果  $p$  是整数(正的, 零或负的), 那么, 所考虑的表达式就属于上目研究过的类型. 就是, 如果用  $\lambda$  表示分数  $m$  及  $n$  的分母的最小公倍数, 我们在这里就有形如  $R(\sqrt[\lambda]{x})dx$  的表达式, 于是作替换  $t = \sqrt[\lambda]{x}$  就可把它有理化了.



现在用  $z = x^n$  来变换给定的表达式. 于是

$$x^m(a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n}(a + bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz,$$

并为简明起见, 令

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

即有

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^q dz. \quad (2)$$

如果  $q$  是整数, 我们就重新得到已研究过的类型的表达式. 实际上, 如果通过  $\nu$  来表示分数  $p$  的分母, 那么, 变换后的表达式就有  $R(z, \sqrt[\nu]{a + bz})$  的形状. 若作替换

$$t = \sqrt[\nu]{a + bz} = \sqrt[\nu]{a + bx^n}$$

也可以一下子将表达式  $R(z, \sqrt[\nu]{a + bz})$  有理化

最后, 改写 (2) 中第二个积分成这样:

$$\int \left( \frac{a + bz}{z} \right)^p z^{p+q} dz.$$

容易看出, 在  $p + q$  是整数时我们也得到研究过的情况: 变换后的表达式有  $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a + bz}{z}}\right)$  的形状, 用替换

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[\nu]{ax^{-n} + b}.$$

可把给定积分中的被积表达式一下子有理化.

由此可见, 如果

$$p, q, p + q$$

中有一个是整数, 或者(同样地)

$$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$$

中有一个是整数, 等式 (2) 的两个积分都可按有限形状表示出来.

这些可积性的情形, 其实牛顿早已知道. 可是, 只在 19 世纪中叶切比雪夫 (Chebeshev) 才建立这个著名的事实: 在有限形状中二项微分没有其他可积的情形.

考虑一些例题.

$$1) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

这里  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$ ; 因为

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{4}} = 2.$$



所以这是第二种可积的情形. 察觉到  $\nu = 3$  之后, 令 (依一般的规则)

$$t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}, x = (t^3 - 1)^4, dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt;$$

于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4 (4t^3 - 7) + C \text{ 等等.}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = \int x^0 (1 + x^4)^{-\frac{1}{4}} dx.$$

这次  $m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4}$ ; 因为  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ , 所以是第三种可积的情形. 这里  $\nu = 4$ ; 令

$$t = \sqrt[4]{x^{-4} + 1} = \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}, x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1 + x^4} &= tx = t(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}} \\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} &= - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C \text{ 等等.} \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^5}} = \int x^{-1} (1 + x^5)^{-\frac{1}{3}} dx.$$

在此  $m = -1, n = 5, p = -\frac{1}{3}$ ; 是第二种情形  $\frac{m+1}{n} = 0; \nu = 3$ . 令

$$t = \sqrt[3]{1 + x^5}, x = (t^3 - 1)^{\frac{1}{5}}, dx = \frac{3}{5} t^2 (t^3 - 1)^{-\frac{4}{5}} dt;$$

我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^5}} &= \frac{3}{5} \int \frac{t dt}{t^3 - 1} = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2 + t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2 + t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \text{ 等等.} \end{aligned}$$

**280. 递推公式** 因二项式微分的积分总能 [参看 (2)] 变换成如下的形状:

$$J_{p,q} = \int (a + bz)^p z^q dz, \quad (3)$$

所以, 在以后我们就限于考虑这些积分.

我们要建立一系列递推公式, 借助于它们, 一般说来, 积分 (3) 可以表示成类似的积分  $J_{p',q'}$ , 其中  $p'$  及  $q'$  与  $p$  及  $q$  只相差一个任意整数.

积分恒等式

$$\begin{aligned} (a + bz)^{p+1} z^q &= a(a + bz)^p z^q + b(a + bz)^p z^{q+1}, \\ \frac{d}{dz} [(a + bz)^{p+1} z^{q+1}] &= (p+1)b(a + bz)^p z^{q+1} + (q+1)(a + bz)^{p+1} z^q, \end{aligned}$$



我们得到

$$\begin{aligned} J_{p+1,q} &= aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1}, \\ (a+bz)^{p+1}z^{q+1} &= (p+1)bJ_{p,q+1} + (q+1)J_{p+1,q}. \end{aligned}$$

由此得到头两个公式

$$(I) \quad J_{p,q} = -\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,q} \quad (p \neq -1);$$

$$(II) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(q+1)} - b\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,q+1} \quad (q \neq -1).$$

它们使我们能够把  $p$  或  $q$  增加 1(如果它异于  $-1$  的话).

从这两个等式解出  $J_{p+1,q}$ ,  $J_{p,q+1}$  并分别以  $p-1$  及  $q-1$  代替  $p$  及  $q$ , 我们得到公式

$$(III) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^pz^{q+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q} \quad (p+q \neq -1);$$

$$(IV) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,q-1} \quad (p+q \neq -1).$$

它们使我们能够把  $p$  或  $q$  减少 1(如果和数  $p+q$  异于  $-1$  的话).

如果无论  $p$  或  $q$ , 或  $p+q$  都不是整数 (于是积分  $J_{p,q}$  不能通过初等函数在有限形状中表示出来), 则递推公式可以无限制地继续应用下去. 借助于它们, 可以把参数  $p$  及  $q$  变成, 例如, 真分式.

现在讲一个对我们更有趣的情形, 即当积分可在有限形状中求得时的情形. 在此可假定指数  $p$  或  $q$  是整数, 因为整数  $p+q$  的情形可用替换  $z = \frac{1}{u}$  化成整数  $q$  的情形.

这时继续应用上述公式, 就可把整数指数  $p$  或  $q$  化成 0(假如它是正数的话) 或化成  $-1$ (假如它是负数的话). 这样, 通常就或者把积分作完了, 或者 —— 在任何情形下 —— 把积分大大地简化了.

### 例题

1) 考虑积分<sup>①</sup>

$$H_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (m \text{ 是整数}).$$

这里  $n=2, p=-\frac{1}{2}$ ; 所以当  $m$  是奇数时,  $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}$  是整数, 而当  $m$  是偶数时, 数  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$ , 于是在所有情形下积分都可在有限形状中求得. 用替换  $z = x^2$

<sup>①</sup>类似地, 也可以研究积分

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}} dx, \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$



可把原式化成

$$\frac{1}{2} \int (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{1}{2} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}}.$$

如果假定  $m > 1$ , 把公式 (IV) 应用到所得的积分上去, 就得到

$$J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} = -2 \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{m-1}{2}}}{m} + \frac{m-1}{m} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-3}{2}},$$

或者, 回到原来给定的积分,

$$H_m = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

把  $m$  的值减少 2 的这个公式, 继续把  $H_m$  的计算当  $m$  是奇数时化成

$$H_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C;$$

或者当  $m$  是偶数时, 化成

$$H_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

现设  $m < -1$ , 于是  $m = -\mu, \mu > 1$ . 这回应用公式 (II)

$$J_{-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}} = 2 \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}},$$

由此

$$H_{-\mu} = -\frac{x^{-(\mu-1)} \sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1} H_{-(\mu-2)}.$$

借助于这个公式, 我们有可能把  $\mu$  的值减少 2, 因而, 有可能继续把  $H_{-\mu}$  的计算当  $\mu$  是奇数时化成

$$H_{-1} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C;$$

或者当  $\mu$  是偶数时, 化成

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

2) 如果对于积分<sup>①</sup>

$$J_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \int (a^2 + z)^{-(n+1)} z^{-\frac{1}{2}} dz = J_{-(n+1), -\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

应用公式 (I):

$$J_{-(n+1), -\frac{1}{2}} = + \frac{(a^2 + z)^{-n} z^{\frac{1}{2}}}{na^2} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_{-n, -\frac{1}{2}},$$

那么, 变回到  $J_n$ , 我们就得到已经知道的递推公式 [271, (6)]:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n.$$

<sup>①</sup>类似地, 也可以研究积分  $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$ .



281. 形状为  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  的表达式的积分、欧拉替换 现在来考虑很重要的积分类型

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx. \quad (4)$$

当然假定二次三项式没有等根, 于是它的根号不能用有理表达式来替代. 我们研究三种替换, 即所谓欧拉替换, 利用它们, 总能把此处的被积表达式有理化.

第 I 种替换应用在  $a > 0$  的情形下. 此时假定

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} \textcircled{1}.$$

将这等式两端平方, (消去  $ax^2$  项后), 得到  $bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x$ , 于是

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt.$$

欧拉替换的全部妙处正是在于: 为了定出  $x$ , 就得到一个一次方程, 于是  $x$  与根式  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  同时可用  $t$  有理地表示出来.

如果把所得的表达式代入 (4), 问题就变成积分  $t$  的有理函数了. 在结果中变回到  $x$  时, 必须令  $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}$ .

第 II 种替换应用在  $c > 0$  时. 在这种情形下可令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \textcircled{2}.$$

如果平方后, 消去两端的  $c$  并约去  $x$ , 就得到  $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{ct}$ ——又是  $x$  的一次方程. 由此

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{(a - t^2)^2} dt.$$

将这些代入 (4), 显然, 被积表达式就被有理化了. 积分后, 在结果中令

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}.$$

附注 I 上面所考虑的情形中 ( $a > 0$  及  $c > 0$ ), 用替换  $x = \frac{1}{z}$  可将其中的一种变成另一种. 因而总可以避免使用第 II 种替换.

最后, 第 III 种替换适用于这种情形: 如果二次三项式  $ax^2 + bx + c$  有 (相异的) 实根  $\lambda$  与  $\mu$ . 如所周知, 此时这个三项式可分解成线性因式

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

①也可以令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{ax}$ .

②或者  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$ .



令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

平方并约去  $x - \lambda$ , 在这里也得到一次方程  $a(x - \mu) = t^2(x - \lambda)$  于是

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2} dt$$

等等.

**附注 II** 在所作的假定下, 根式  $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)}$  (为明确起见, 比方说, 认定  $x > \lambda$ ) 可变成如下的形状

$$(x - \lambda) \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

因而在所考虑的情况下

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R_1 \left( x, \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}} \right).$$

于是我们在实质上就是要处理第 278 目中所研究过的那类微分式了. 可把第 III 种欧拉替换写成如下的形式

$$t = \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

这跟 278 目中已经讲过的替换是同样的.

现在我们指出, 为了要在所有可能情况下实现 (4) 中被积表达式的有理化, 只用 I 及 III 两种欧拉替换就足够了. 实际上, 如果三项式  $ax^2 + bx + c$  有实根, 那么, 如我们已看到过的, 就用第 III 种替换. 如果没有实根, 即是,  $b^2 - 4ac < 0$ , 则三项式

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

在变量  $x$  的一切值下都与  $a$  有相同的符号.  $a < 0$  的情形对我们是没有兴趣的, 因为此时根式完全没有实值. 在  $a > 0$  的情形, 就用第 I 种替换.

由这些讨论同时得到一般的断言: 类型 (4) 的积分总可在有限形状中求得, 并且, 为了表示出它们, 除了可用来表示有理微分式的积分的那些函数外, 只再需用二次根式就够了.

**282. 欧拉替换的几何解释** 表面上如此矫揉造作的欧拉替换, 可以完全由直观的几何观点得出.

考虑二次曲线

$$y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{或} \quad y^2 = ax^2 + bx + c.$$



如果在这曲线上取任意点  $(x_0, y_0)$ , 于是

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c, \quad (5)$$

那么, 通过这点的割线  $y - y_0 = t(x - x_0)$  刚刚交曲线于一点  $(x, y)$ . 这交点的坐标可用简单的计算找出. 从曲线及割线的方程中消去  $y$ , 就得到

$$[y_0 + t(x - x_0)]^2 = ax^2 + bx + c,$$

由此, 注意到 (5),

$$2y_0t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)$$

或者, —— 约去  $x - x_0$  ——

$$2y_0t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b.$$

这样, 第二个交点的横坐标  $x$ , 随之纵坐标  $y$ , 都可用变动的斜率  $t$  的有理函数表示出来. 这时适当地变化  $t$ , 显然可使点  $(x, y)$  描出全部曲线.

现在, 关系式

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = t(x - x_0)$$

显然定出把情形 (4) 中的被积表达式有理化的那个替换.

设三项式  $ax^2 + bx + c$  有实根  $\lambda$  及  $\mu$ ; 这就是说, 我们的曲线交  $x$  轴于点  $(\lambda, 0)$  及  $(\mu, 0)$ ; 例如, 取它们中的第一点作为点  $(x_0, y_0)$ , 我们得到第 III 种欧拉替换

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

如果  $c > 0$ , 则曲线交  $y$  轴于点  $(0, \pm\sqrt{c})$ ; 取其中的一个作点  $(x_0, y_0)$ , 我们得到第 II 种欧拉替换

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c} = tx.$$

最后, 实质上在同样的思想程序下, 只要我们取曲线的无穷远点作点  $(x_0, y_0)$ , 就得到第 I 种欧拉替换. 即是, 假定  $a > 0$  (在这情形下曲线是双曲线), 考查双曲线的渐近线  $y = \pm\sqrt{ax}$ , 并用平行于渐近线的直线  $y = t \pm \sqrt{ax}$  与曲线相交 (这两条直线是通过上述无穷远点的). 每条这样的直线交曲线于第二点  $(x, y)$ , 它的坐标是  $t$  的有理函数. 由此得到替换

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}.$$



283. 例题 我们已经知道属于所考虑的类型的基本积分 [269, 9) 及 12); 268]:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

从它们出发, 可以计算别的一些积分.

1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$ . 在计算这个积分时我们分成两种情形:  $\alpha > 0$  及  $\alpha < 0$ .

如果  $\alpha > 0$ , 那么容易把积分变成基本积分的第一种 (在  $\frac{\beta}{\alpha} = \pm a^2$  时)

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}} \right| + C.$$

还可以  $\alpha$  乘对数函数的自变量, 这就引进一个补充项  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \alpha$ , 因而只影响到  $C$ . 最后得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \ln |\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}| + C' \quad (\alpha > 0). \quad (6)$$

如果  $\alpha < 0$ , 于是  $\alpha = -|\alpha|$ , 我们可把根式改写成  $\sqrt{\beta - |\alpha|x^2}$  的形状. 为了使根式一般地能有实值, 必须在这里假定  $\beta > 0$ . 积分可变成基本积分中的第二种 (在  $\frac{\beta}{|\alpha|} = a^2$  时), 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} x \right) + C \quad (\alpha < 0). \quad (7)$$

许多别的积分可用初等方法化成积分 (6) 及 (7), 例如

2)  $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx$ , 可用分部积分法求得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx &= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int x d\sqrt{\alpha x^2 + \beta} = x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx \\ &= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx \\ &= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \end{aligned}$$

在右端我们重新得到了要计算的积分; 把它移到左端并以 2 除全部等式, 我们得到

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \quad (8)$$

要得到最后结果, 只看  $\alpha > 0$  或  $\alpha < 0$ , 而把最后那个积分用它的表达式 (6) 或 (7) 代入即可.

3) (a)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$ , (б)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$ , (в)  $\int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}}$

可用简单的替换  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$  化成已经知道的积分, 我们有 (为明确起见, 设  $x$  及  $t > 0$ ):

$$(a) \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}}$$



——以后的计算可看  $\beta$  的符号依公式 (6) 或 (7) 作出. 其次,

$$(6) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = - \int \frac{tdt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} = -\frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha + \beta t^2} + C = -\frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{\beta x} + C,$$

也类似地

$$(B) \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} = - \int \frac{tdt}{(\alpha + \beta t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} + C = \frac{1}{\beta} \frac{x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} + C.$$

4) 被积表达式的恒等的变换可把下面的积分化成已经计算过的积分. 例如:

$$(a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad (6) \int \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{x} dx, \quad (B) \int \frac{x^2}{(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

我们有

$$(a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = \frac{1}{\alpha} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$$

或者, 利用公式 (8),

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{2\alpha} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \frac{\beta}{2\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} \text{ 以下略 [参看 1)].}$$

然后

$$(6) \int \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{x} dx = \int \frac{\alpha x^2 + \beta}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = \alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} + \beta \int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}};$$

积分中的第一个一下子就可得到, 第二个在 3) 中已经计算过. 最后,

$$(B) \int \frac{x^2}{(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} \text{ [参看 1) 及 3)].}$$

5) 如果在根式中的是完全二次三项式  $ax^2 + bx + c$ , 用线性替换把它化成二项式常是有利的. 分出完全平方

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + 4ac - b^2],$$

令  $t = 2ax + b$ . 用这样方法, 例如, 从公式 (6) 及 (7), 当  $a > 0$  时就得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + C. \end{aligned} \quad (6^*)$$

而当  $a < 0$  时

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad (7^*)$$

6) 现在转到欧拉替换. 在 269, 12) 中事实上我们已经把第 I 种替换应用到计算积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$



上, 虽然第二个基本积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

对我们来说从粗浅的讨论就是已知的, 但作为一个练习, 我们还是把欧拉替换应用到这个积分上去.

(a) 如果先利用第 III 种替换  $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$ , 则

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4atdt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1},$$

因而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

因为恒等式

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \quad (-a < x < a)$$

成立, 所以这个结果只是形式和我们已经知道的结果不同.

读者在以后应当注意: 由于积分时所用的计算方法不同, 就可能得到不同形式的积分函数.

(6) 如果应用第 II 种替换  $\sqrt{a^2 - x^2} = xt - a$  到同一积分上去, 则类似地可得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -2 \operatorname{arctg} t + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$$

这里我们碰到另一个有趣的情况<sup>①</sup>: 这个结果只是各别地对区间  $(-a, 0)$  及  $(0, a)$  适用, 因为在点  $x = 0$  处, 表达式

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

失去意义. 这个表达式当  $x \rightarrow -0$  及  $x \rightarrow +0$  时的极限是不同的: 它们分别等于  $\pi$  及  $-\pi$ , 如果对于上述两区间选择不同的常数  $C$  的值, 使得它们中的第二个比第一个大  $2\pi$ , 而在  $x = 0$  时取其左右极限的公共值作为这个函数的值. 就可以作出在整个区间  $(-a, a)$  上的连续函数.

然而这次我们得到的不过是在另一种形式的旧的结果, 因为恒等式

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} - \pi, & \text{对于 } 0 < x < a; \\ \arcsin \frac{x}{a} + \pi, & \text{对于 } -a < x < 0 \end{cases}$$

成立.

$$7) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

(a) 首先应用第 I 种替换:  $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ ,

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \quad dx = 2 \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = \int \left[ \frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right] dt \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{2t - 1} + 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t - 1| + C. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>比较 277 目例题 3).



如果在这里以  $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$  代入, 最后就得到

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = -\frac{3}{2} \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} - \frac{3}{2} \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| \\ + 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - x + 1}| + C.$$

(6) 现在应用第 II 种替换:  $\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$ ,

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}, dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt, \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}, x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t - 1}.$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t - 1)(t + 1)^2} dt = \int \left[ \frac{2}{t} - \frac{1}{2} \frac{1}{t - 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{t + 1} - \frac{3}{(t + 1)^2} \right] dt \\ = \frac{3}{t + 1} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{3}{2} \ln |t + 1| + C'.$$

这儿以  $t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$  代入; 在显然的简化后, 得到

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1} + 2 \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} + 1| \\ - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 1| - \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1| + C'.$$

这个表达式虽然在形式上与先前所得的不同, 但在  $C = C' + \frac{3}{2}$  时可把它们看作是相同的.

$$8) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

(a) 因为在根号内表达式的根是实数, 所以可应用第 III 种替换  $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$ ; 这里  $-a < x < a$  及  $t > 0$ . 我们有

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, dx = \frac{4at dt}{(t^2 + 1)^2}, \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}, x^2 + a^2 = \frac{2a^2(t^4 + 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

并且

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{2t^2 + 2}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{2a^2} \int \left[ \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right] dt \\ = \frac{1}{a^2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(t\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(t\sqrt{2} - 1)] + C,$$

为要得到最后结果, 在此还须代入

$$t = \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}.$$

利用反正切函数的和的公式以及明显的关系式

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a} = -\operatorname{arctg} a \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时}),$$

可给所得结果以更简单的形式

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C_1 \left( \text{这儿 } C_1 = C + \frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}} \right).$$



(5) 如果应用第 II 种替换  $\sqrt{a^2 - x^2} = tx - a$  到同一积分上去, 就得到

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1)t + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)t] + C',$$

在此  $t = \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ . 这个结果各别地对区间  $(-a, 0)$  及  $(0, a)$  适合; 容易了解, 当  $x$  变到 0 时改变常数  $C'$  的值, 就可使它在整个区间  $(-a, a)$  上是适合的. 最后, 如果依反正切函数的和的公式把它变形, 它就与上述结果相同.

$$9) \int \frac{dx}{(x^2 + \lambda)\sqrt{x^2 + \mu}}.$$

用第 I 种替换:  $\sqrt{x^2 + \mu} = t - x$ . 我们有

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda)\sqrt{x^2 + \mu}} = 2 \int \frac{2tdt}{t^4 + 2(2\lambda - \mu)t^2 + \mu^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 2(2\lambda - \mu)u + \mu^2}.$$

这样一来, 问题就化成计算初等积分了; 在结果中必须以替换

$$u = t^2 = (x + \sqrt{x^2 + \mu})^2$$

代入.

**284. 其他的计算方法** 欧拉替换虽然原则上在所有情况下解决了在有限形状中计算类型 (4) 的积分的问题, 但有时 —— 在应用它们时 —— 甚至简单的微分式也引起繁复的计算. 由于所讨论的这种类型的积分的重要性, 我们要指出它们的另一些计算方法.

为简明起见, 令

$$Y = ax^2 + bx + c \quad \text{及} \quad y = \sqrt{Y}.$$

凡有理函数  $R(x, y)$  都可以表示成  $x$  及  $y$  的两个整多项式的商. 如果处处都以  $Y$  代替  $y^2$ , 我们便把  $R(x, y)$  化成

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y}$$

的形状, 其中  $P_i(x)$  是整多项式. 以表达式  $P_3(x) - P_4(x)y$  乘这公式的分子及分母 (并重新以  $Y$  代替  $y^2$ ) 后, 我们得到  $R$  的新形式

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)y.$$

右端第一项的积分我们已经会表示成有限形状; 所以, 我们只需研究第二项, 以  $y$  乘并除这一项, 最后得到这样的表达式

$$R^*(x) \frac{1}{y} = R^*(x) \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

我们就要研究它的积分



首先从有理函数  $R^*(x)$  中分离出整式部分  $P(x)$ , 而把真分式部分分解成部分分式 [274]. 在这样的情形下, 所得表达式的积分被化成为计算下列三种类型的积分:

$$\text{I. } \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

这儿所有的系数都是实数, 而三项式  $x^2 + px + q$  的根是虚根. 我们分别来讨论它们中的每一个.

I. 令 (对于  $m = 0, 1, 2, \dots$ )

$$V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{x^m}{\sqrt{Y}} dx.$$

容易建立这种积分的递推公式. 为了这一目的, 认定  $m \geq 1$ , 取导数

$$\begin{aligned} (x^{m-1}\sqrt{Y})' &= (m-1)x^{m-2}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}} \\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2 + bx + c) + x^{m-1}(2ax + b)}{2\sqrt{Y}} \\ &= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}} \end{aligned}$$

并积分所得恒等式

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}.$$

在此取  $m = 1$ , 我们得到

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}V_0;$$

然后令  $m = 2$  (并利用  $V_1$  的表达式), 得到

$$V_2 = \frac{1}{4a^2}(2ax - 3b)\sqrt{Y} + \frac{1}{8a^2}(3b^2 - 4ac)V_0.$$

再这样进行下去, 我们得到普遍公式

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0,$$

其中  $p_{m-1}(x)$  是  $(m-1)$  次多项式, 而  $\lambda_m =$  常数. 这样一来, 整个积分  $V_m$  就化成  $V_0$  了.

如果在积分 I 中多项式  $P(x)$  是  $n$  次的, 这积分就是积分  $V_0, V_1, \dots, V_n$  的线性组合; 也就是说, 依上述公式, 可写成

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}} dx = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{Y}} \quad (9)$$



的形状, 其中  $Q(x)$  是一个  $(n-1)$  次的多项式, 而  $\lambda =$  常数.

通常用待定系数法来确定多项式  $Q(x)$  及常数  $\lambda$ . 微分 (9) 并以  $\sqrt{Y}$  乘所得到的等式, 我们得到

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax + b) + \lambda.$$

如果在此处以文字系数的  $(n-1)$  次多项式代替  $Q(x)$ , 在等式两端就都是  $n$  次多项式. 使它们的系数相等, 得到  $n+1$  个线性方程的方程组, 多项式  $Q(x)$  的  $n$  个系数及常数  $\lambda$  就可由这些方程确定出来<sup>①</sup>.

附注 用公式 (9) 能从积分

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}} dx$$

中分离出代数部分. 类似的分离法对于一般形状的积分

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}} dx$$

也可以被作出, 这儿  $R$  是任意有理函数的记号. 我们不再讨论这积分了.

## II. 积分

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{Y}}$$

可用替换  $x - \alpha = \frac{1}{t}$  化成刚才讨论过的类型. 实际上, 我们有

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2},$$

于是 (为明确起见认定  $x > \alpha$ , 于是  $t > 0$ )

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} = - \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}.$$

如果  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ , 即  $\alpha$  是三项式  $Y$  的根, 问题就更被简化了, 我们得到第 278 目中研究过的积分类型.

III. (a) 现在我们来讲最后的积分. 我们先考虑一个特殊情形: 三项式  $ax^2 + bx + c$  与三项式  $x^2 + px + q$  只相差一个因子  $a$ . 此时所求积分有下面的形状

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} dx.$$

<sup>①</sup>从所证明的事实中可明白看出, 这个方程组对常数项的任何值都是相容的, 而在这样的情况下, 它的行列式一定异于 0, 因而方程组总是确定的. 由此顺带着建立了 (9) 的表示法的唯一性 (参看 28 页与 31 ~ 32 页).



容易把这积分表示成两个积分的和:

$$\frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}},$$

其中第一个积分可用替换  $t = ax^2 + bx + c$  立即求出.

为了计算积分

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} = \int \frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}},$$

作所谓阿贝尔 (N.H.Abel) 替换

$$t = (\sqrt{Y})' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

最为方便.

将等式两端平方并以  $4Y$  去乘, 得到等式

$$4t^2Y = (Y')^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2,$$

以  $4a$  乘等式

$$Y = ax^2 + bx + c$$

后, 于其中减去上式, 结果得到

$$4(a - t^2)Y = 4ac - b^2,$$

由此

$$Y^m = \left(\frac{4ac - b^2}{4}\right)^m \frac{1}{(a - t^2)^m}. \quad (10)$$

现在微分等式

$$t\sqrt{Y} = ax + \frac{b}{2},$$

我们得到

$$\sqrt{Y}dt + t^2dx = adx,$$

于是

$$\frac{dx}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{a - t^2} \quad (11)$$

从 (11) 及 (10)

$$\frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m (a - t^2)^{m-1} dt,$$

因而, 最后得到

$$\int \frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m \int (a - t^2)^{m-1} dt. \quad (12)$$



这样, 整个问题就变成计算多项式的积分了.

特别地, 例如, 当  $m = 1$  时, 就有

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{4ac - b^2} \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

(6) 在一般情形中, 为了更对称起见, 令

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + p'x + q'),$$

并且现在我们可以假定, 括弧中的三项式不恒等于  $x^2 + px + q$ . 摆在我们面前的问题就是: 这样变换变量  $x$ , 使得在两个三项式中同时消去了一次项.

先设  $p \neq p'$ . 此时借助于分式线性替换

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \quad (13)$$

在适当选取系数  $\mu$  与  $\nu$  之后, 就可以达到我们的目的. 我们有

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2 + [2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t + 1)^2},$$

并且对于第二个三项式也是类似的. 未知系数由条件

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0, \quad 2\mu\nu + p'(\mu + \nu) + 2q' = 0$$

或

$$\mu + \nu = -2\frac{q - q'}{p - p'}, \quad \mu\nu = \frac{p'q - pq'}{p - p'}$$

定出. 由此可见,  $\mu$  与  $\nu$  是二次方程

$$(p - p')z^2 + 2(q - q')z + (p'q - pq') = 0$$

的根. 为使这些根是相异实数<sup>①</sup>, (必要且) 充分的条件是

$$(q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0; \quad (14)$$

我们将证明它是满足的.

改写上述条件为等价形式

$$[2(q + q') - pp']^2 > (4q - p^2)(4q' - p'^2). \quad (14^*)$$

<sup>①</sup>当  $\mu = \nu$  时替换失去意义, 因为它变成  $x = \mu$  了.



已知  $4q - p^2 > 0$  (因三项式  $x^2 + px + q$  有虚根), 假如同时  $4q' - p'^2 < 0$  的话, 于是不等式 (14\*) 显然被满足. 现在只需研究  $4q' - p'^2 > 0$  的情形. 这时  $q > 0, q' > 0$  并且  $4\sqrt{qq'} > pp'$ , 于是我们依次有<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} [2(q + q') - pp']^2 &\geq [4\sqrt{qq'} - pp']^2 \\ &= (4q - p^2)(4q' - p'^2) + 4(p\sqrt{q'} - p'\sqrt{q})^2 \\ &\geq (4q - p^2)(4q' - p'^2). \end{aligned}$$

这里两次不等号跟等号联在一起, 但等号不可能同时发生在两种情形中: 如果  $q \neq q'$ , 则等号在第一种情形中一定没有; 而在  $q = q'$  时, 在第二种情形中等号一定没有. 所以, 不等式 (14\*) 与 (14) 就被证明了.

作替换后, 我们把所求的积分变换成下面的形状

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}},$$

这儿  $P(t)$  是  $2m - 1$  次多项式 (并且  $\lambda > 0$ ), 再将 (当  $m > 1$  时) 真分式

$$\frac{P(t)}{(t^2 + \lambda)^m}$$

分解成部分分式, 我们得到形如

$$\int \frac{At + B}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} dt \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

的积分的和.

在  $p = p'$  的例外情形, 消去一次项的步骤可更简单地达到——作替换  $x = t - \frac{p}{2}$ , 我们就直接得到刚才所述那种形状的积分.

所得的积分, 自然, 被分解成两个:

$$\frac{A}{\alpha} \int \frac{\alpha t dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

其中第一个容易用替换  $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$  求得. 把我们已经熟悉的阿贝尔替换

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}}$$

应用到第二个积分上去. 由 (11), 即有

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \frac{du}{\alpha - u^2};$$

<sup>①</sup> 因为  $\frac{q + q'}{2} \geq \sqrt{qq'}$ .



此外, 容易算出

$$t^2 + \lambda = \frac{(\beta - \alpha\lambda)u^2 + \lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha - u^2)}.$$

因此

$$\int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \alpha^m \int \frac{(\alpha - u^2)^{m-1}}{[(\beta - \alpha\lambda)u^2 + \lambda\alpha^2]^m} du,$$

于是所求积分就变成有理函数的积分了.

**附注** 在本目中我们除了指出计算类型 (4) 的积分的许多新方法外, 上面的全部讨论还给出在第 281 目末尾所表述的断言以不依赖于从前的讨论的证明.

### 285. 例题

1)  $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$

令

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + d \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

由此

$$x^3 - x + 1 = (2ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (ax^2 + bx + c)(x + 1) + d.$$

方程组

$$3a = 1, \quad 5a + 2b = 0, \quad 4a + 3b + c = -1, \quad 2b + c + d = 1$$

引出值  $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{5}{6}, c = \frac{1}{6}, d = \frac{5}{2}$ . 这样, 如果考虑到 283 目例 5), 最后就得到

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

2)  $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}}.$

替换  $x - 1 = \frac{1}{t}$  (比方说, 如果  $x > 1$  及  $t > 0$  的话) 把积分化成下面的形状

$$- \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - 2t^2}}.$$

这个积分容易用初等方法求出 [参看 283, 4)].

**答案**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin t\sqrt{2} + C \\ &= \frac{1}{4(x-1)^2} \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x-1} + C. \end{aligned}$$

3)  $\int \frac{dx}{(2x^2 - x + 2)^{\frac{7}{2}}}.$

阿贝尔替换

$$t = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$



能把积分变换成下面的形式:

$$\frac{64}{3375} \int (2-t^2)^2 dt;$$

在此可以重作 284 目 III(a) 的对特殊情形的一般计算, 或者利用现成的公式 (12).

答案

$$\frac{64}{3375} \left\{ 2 \frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6} \frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{160} \frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{\frac{5}{2}}} \right\} + C.$$

$$4) \int \frac{(x+3)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

分式线性替换

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}$$

给出

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\mu^2 \pm \mu + 1)t^2 + [2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2]t + (\nu^2 \pm \nu + 1)}{(t+1)^2}.$$

要求满足

$$2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2 = 0$$

或满足  $\mu + \nu = 0, \mu\nu = -1$  的  $\mu$  及  $\nu$ , 例如,  $\mu = 1, \nu = -1$ , 我们有

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}, \quad x+3 = \frac{4t+2}{t+1}, \quad x^2-x+1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2}$$

并且

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1},$$

如果 —— 为明确起见 —— 认定  $t+1 > 0$  (即  $x < 1$ ) 的话, 这样一来,

$$\int \frac{(x+3)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{(8t+4)dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

所得积分可分成两个积分:

$$8 \int \frac{t dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} + 4 \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

第一个积分容易用替换  $u = \sqrt{3t^2+1}$  计算出来, 并且等于  $\sqrt{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + C'$ . 把阿贝尔替换

$$u = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$$

应用到第二个积分上, 把它化成下面的形状

$$12 \int \frac{du}{27-8u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u} \right| + C''.$$

剩下的事只是变回变量  $x$  了.

$$5) \int \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} dx.$$



提示 把被积函数表示成下面的形状

$$\begin{aligned} & \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} - \frac{2x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= (2x^3 - x^2 + 3x - 3) + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^4 + 3x^2 - 3x + 3}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}; \end{aligned}$$

再把 284 目中 I 的方法应用到第三项, 而把替换  $x+1 = \frac{1}{t}$  应用到最后一项.

#### §4. 含有三角函数与指数函数的表达式的积分

286. 关于  $R(\sin x, \cos x)dx$  的积分 这种形状的微分式总可以用替换  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$  把它有理化. 实际上,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

于是

$$R(\sin x, \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

由此可见, 类型

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

的积分总可在有限形状中求得; 对于它的表达, 除在积分有理微分式时所遇到的那些函数外, 只再需要三角函数就够了.

对类型 (1) 的积分说来是万能的上述替换, 有时会引出复杂的计算. 下面指出一些可借助于更简单的替换而能达到目的的情形. 我们先作出下面的来自代数学范围内的初等说明.

如果有理整式或分式函数  $R(u, v)$  在变更它的一个自变量, 例如,  $u$  的符号时, 它的值不改变, 即是, 如果

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

则这个有理函数可以化成只包含有  $u$  的偶次幂的形状

$$R(u, v) = R_1(u^2, v).$$

相反地, 如果在变更  $u$  的符号时函数  $R(u, v)$  也改变符号, 即是, 如果

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

则这个函数可以化成下面的形状

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u;$$



这可立即由上述的说明推出, 如果把它应用到函数  $\frac{R(u, v)}{u}$  上去的话.

I. 现在设当  $u$  改变符号时  $R(u, v)$  变更符号; 此时

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = -R_0(1 - \cos^2 x, \cos x) d \cos x,$$

用替换  $t = \cos x$  就可以达成有理化.

II. 类似地, 如果当  $v$  改变符号时  $R(u, v)$  变更符号, 则

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = R_0^*(\sin x, 1 - \sin^2 x) d \sin x,$$

于是在这里作替换  $t = \sin x$  就是合适的.

III. 最后, 假定当  $u$  与  $v$  的符号同时改变时, 函数  $R(u, v)$  不变更自己的值

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

在这情形下, 以  $\frac{u}{v}$  代替  $u$ , 即有

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

依函数  $R$  的性质, 如果改变  $u$  与  $v$  的符号 (比值  $\frac{u}{v}$  在此并不改变),

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

这时, 像我们知道的,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

所以

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right),$$

这简直就是

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\operatorname{tg} x).$$

这里作替换  $t = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$  就达到了目的, 因为

$$R(\sin x, \cos x)dx = \tilde{R}(t) \frac{dt}{1 + t^2} \text{ 等等.}$$

**附注** 必须说明, 任何样的有理表达式  $R(u, v)$ , 总可以被表示成上面研究过的特别类型的三种表达式的和的形状. 例如, 可令

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

这些表达式中的第一个在改变  $u$  的符号时变更符号, 第二个在改变  $v$  的符号时变更符号, 而第三个在  $u$  与  $v$  同时改变符号时保持原来的值不变. 把表达式  $R(\sin x, \cos x)$  分成适当的几项后, 就可以把替换  $t = \cos x$  应用到它们中的第一种表达式上去, 替换  $t = \sin x$  应用到第二种上去, 最后, 替换  $t = \operatorname{tg} x$  应用到第三种上去. 由此可见, 对于计算类型 (1) 的积分, 这三种替换已经足够了.



287. 关于表达式  $\sin^\nu x \cdot \cos^\mu x$  的积分 我们认定  $\nu$  及  $\mu$  是有理数, 而变量  $x$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上变化. 此时替换  $z = \sin^2 x, dz = 2 \sin x \times \cos x dx$  给出

$$\begin{aligned}\sin^\nu x \cos^\mu x dx &= \frac{1}{2} \sin^{\nu-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} 2 \sin x \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz,\end{aligned}$$

于是问题变成二项式的积分了 [279]:

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2} \int (1 - z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz = \frac{1}{2} J_{\frac{\mu-1}{2}, \frac{\nu-1}{2}}. \quad (2)$$

回忆二项式可积性的情形, 我们现在看到: 1) 如果  $\frac{\mu-1}{2}$  (或  $\frac{\nu-1}{2}$ ) 是整数, 亦即, 如果  $\mu$  (或  $\nu$ ) 是奇数, 或是 2) 如果  $\frac{\mu+\nu}{2}$  是整数, 亦即, 如  $\mu+\nu$  是偶数, 则使我们感到兴趣的积分可在有限形状中求得.

特别地, 两个指数  $\mu$  及  $\nu$  都是整数时也属于这里的情形; 然而, 此时表达式  $\sin^\nu x \cos^\mu x$  对于  $\sin x$  与  $\cos x$  是有理的, 即是属于上目中已经研究过的那种表达式一类了.

在这种情形, 如果指数  $\nu$  (或  $\mu$ ) 是奇数, 则用替换  $t = \cos x$  (或  $t = \sin x$ ) 立即可以得到有理化. 如果两个指数  $\nu$  与  $\mu$  都是偶数 (如果它们都是奇数, 也是一样的), 则对于同一目的可以应用替换  $t = \operatorname{tg} x$  或  $t = \operatorname{ctg} x$ .

我们指出, 如果指数  $\nu$  及  $\mu$  都是正偶数, 那么最好是根据公式

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

选用其他方法. 即是, 如果  $\nu = 2n, \mu = 2m$ , 则当  $\nu \geq \mu$  时写

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x = \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^{2m} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{n-m},$$

而当  $\nu < \mu$  时

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x = \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^{2n} \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{m-n}.$$

在展开的形状下可得到形如

$$C \sin^{\nu'} 2x \cos^{\mu'} 2x$$

的诸项的和, 其中  $\nu' + \mu' \leq n + m = \frac{\nu + \mu}{2}$ . 指数  $\nu', \mu'$  中至少有一个是奇数的那些项, 容易依上面指出的方法积分出来. 我们对其余各项作同样的分解, 变成  $\sin 4x$  与  $\cos 4x$ , 如此下去. 因为在每次分解时指数的和至少减少一半, 于是演算步骤可迅速地完成.



回到上面所建立的关系式 (2). 我们现在可以利用二项式的积分的递推公式 [280], 来建立所考虑类型积分的递推公式. 在此令  $a = 1, b = -1, p = \frac{\mu-1}{2}, q = \frac{\nu-1}{2}$ .

用这样的方法可得到下面的公式 (当然, 它们可以独立地被推出来):

$$(I) \quad \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = -\frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu+2} x dx \quad (\mu \neq -1),$$

$$(II) \quad \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} \int \sin^{\nu+2} x \cos^{\mu} x dx \quad (\nu \neq -1),$$

$$(III) \quad \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu-2} x dx \quad (\nu+\mu \neq 0),$$

$$(IV) \quad \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = -\frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu-2} x \cos^{\mu} x dx \quad (\nu+\mu \neq 0).$$

这些公式普遍地使我们能把指数  $\nu$  及  $\mu$  增加或减少 2 (除去所指出的例外以外). 如果两个指数  $\nu$  及  $\mu$  都是整数, 则继续应用递推公式, 可以把问题化成下列九个初等积分中之一 (对应于  $\nu$  及  $\mu$  的值等于  $-1, 0$  或  $1$  的不同的组合):

$$1) \int dx = x,$$

$$2) \int \cos x dx = \sin x,$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad 4) \int \sin x dx = -\cos x,$$

$$5) \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}, \quad 6) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x|,$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \quad 8) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x|,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|.$$

### 288. 例题

1)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ . 被积表达式在以  $-\cos x$  代替  $\cos x$  时改变符号. 作替换  $t = \sin x$ :

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int t^2 (1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$



2)  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$ . 被积表达式在以  $-\sin x$  代替  $\sin x$  时改变符号. 作替换  $t = \cos x$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx &= - \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C \\ &= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.\end{aligned}$$

3)  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$ . 被积表达式在以  $-\sin x$  代替  $\sin x$ , 并以  $-\cos x$  代替  $\cos x$  时不改变自己的值. 作替换  $t = \operatorname{tg} x$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C \\ &= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.\end{aligned}$$

4)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ . 这里作与上题同样的替换是合适的, 但利用倍角公式更为简单

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (\cos 2x + 1) = \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4x).$$

于是

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$$

5)  $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$ . 作替换  $t = \sin x$  是合适的, 但使用递推公式 II 更为简单:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

6)  $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ . 作替换  $t = \sin x$  是合适的, 但两次使用递推公式 I 更为简单:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

其次

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

于是

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7)  $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$ . 替换  $t = \cos x$  是合用的, 但利用递推公式 II 与 III 更为简单:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= -\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx, \\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx &= \frac{1}{3} \cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

于是 (在作简化的变换后)

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$



8)  $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}$ . 作替换  $t = \cos x$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

9)  $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ . 因为在改变  $\sin x$  与  $\cos x$  的符号时被积表达式不被改变, 所以替换  $t = \operatorname{tg} x$  是合用的:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{t^2 dt}{(1+t)(1+t^2)^2} \\ &= \int \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

10)  $\int \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \sin x \cos x + C \sin^2 x}$  当  $AC - B^2 > 0$  时. 假定  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , 利用替换  $t = \operatorname{tg} x$  可把积分变成下面的形状

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

答案  $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C'.$

11)  $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(a + bt)(1 + t^2)}$  当  $t = \operatorname{tg} x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) 时. 分解成部分分式

$$\frac{1}{(a + bt)(1 + t^2)} = \frac{A}{a + bt} + \frac{Bt + C}{1 + t^2},$$

为了确定系数  $A, B, C$ , 我们得到方程

$$A + bB = 0, \quad aB + bC = 0, \quad A + aC = 1,$$

由此  $A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad B = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{a}{a^2 + b^2}.$

答案

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{arctg} t + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln \frac{a + bt}{\sqrt{1 + t^2}} + C \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|] + C'. \end{aligned}$$

12) 下面两个积分

$$T_1 = \int \frac{\sin x dx}{a \cos x + b \sin x}, \quad T_2 = \int \frac{\cos x dx}{a \cos x + b \sin x}$$



可化成上题中那样的积分. 然而, 从联系它们的关系式

$$\begin{aligned} bT_1 + aT_2 &= \int dx = x + C_1, \\ -aT_1 + bT_2 &= \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} \\ &= \ln |a \cos x + b \sin x| + C_2 \end{aligned}$$

出发去计算它们更为简单. 由此就得到

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{a^2 + b^2} [bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|] + C, \\ T_2 &= \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|] + C'. \end{aligned}$$

13)  $\frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx$  ( $0 < r < 1, -\pi < x < \pi$ ). 这里应用万能的替换  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , 就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx &= (1-r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} \\ &= \operatorname{arctg} \left( \frac{1+r}{1-r} t \right) + C = \operatorname{arctg} \left( \frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

下面这样的积分也可以化成这种积分

$$\begin{aligned} \int \frac{1-r \cos x}{1-2r \cos x + r^2} dx &= \int \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} \left( \frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

14)  $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ , 假定,  $|a| \geq |b|$  ( $-\pi < x < \pi$ ).

首先设  $|a| > |b|$  并且 (不减普遍性)  $a > 0$ . 作替换  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , 正如刚才所考虑的特别情形一样, 给出

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

可以把这个表达式变形成为下面的形状:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} + C',$$

并且取“+”号, 如果  $0 \leq x < \pi$  的话, 而取“-”号, 如果  $-\pi < x \leq 0$  的话, 常数  $C'$  的值当  $x$  通过 0 时增加  $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ .

现设  $|a| < |b|$  并且  $b > 0$ . 作同样替换:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \int \frac{2dt}{(b+a) - (b-a)t^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-at}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-at}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-at} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-at} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$



这个表达式容易变换成下面的形状:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \right| + C.$$

积分  $\int \frac{dx}{a + b \sin x}$  可用替换  $x = \frac{\pi}{2} \pm t$  化成上述的积分.

15) 最后, 积分  $\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$  也可以化成 14) 的积分. 如果按照条件

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

引进角  $\alpha$ , 则积分可改写成下面的形状

$$\int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2 + c^2} \cos(x - \alpha)};$$

作替换  $t = x - \alpha$ . 但这里, 当然  $|a| \geq \sqrt{b^2 + c^2}$  的情况才是有趣的.

**289. 其他情形的概述** 在 271,4) 中我们已经见过, 怎样去积分形如

$$P(x)e^{ax} dx, \quad P(x) \sin bxdx, \quad P(x) \cos bxdx$$

的表达式, 其中  $P(x)$  是整多项式. 要特别指出, 分式表达式

$$\frac{e^x}{x^n} dx, \quad \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \frac{\cos x}{x^n} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

已不能在有限形状中求积分.

利用分部积分法, 容易对这些表达式的积分建立一些递推公式, 并分别把它们化成三个基本的公式:

$$\text{I. } \int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \text{liy}^{\text{①}} (\text{“积分对数”});$$

$$\text{II. } \int \frac{\sin x}{x} dx = \text{six} (\text{“积分正弦”})$$

$$\text{III. } \int \frac{\cos x}{x} dx = \text{cix} (\text{“积分余弦”})^{\text{②}}.$$

我们已经知道 [271,6)] 积分

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bxdx &= \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \\ \int e^{ax} \cos bxdx &= \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \end{aligned}$$

从它们出发, 可以在有限形状中求出下面的积分

$$\int x^n e^{ax} \sin bxdx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bxdx,$$

①作替换  $x = \ln y$ .

②但是, 在所有三种情形中都还需要固定一个任意常数; 这将在以后作出.



其中  $n = 1, 2, 3, \dots$  就是, 按照分部积分法, 得到

$$\begin{aligned}\int x^n e^{ax} \sin bx dx &= x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \\ &\quad - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx \\ \int x^n e^{ax} \cos bx dx &= x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \\ &\quad - \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx.\end{aligned}$$

这些递推公式能把我们关心的积分化成  $n = 0$  的情形.

如果仍然把  $P(\dots)$  了解为整多项式, 那么, 作为最后的结果, 可以断定, 积分

$$\int P(x, e^{a'x}, e^{a''x}, \dots, \sin b'x, \sin b''x, \dots, \cos b'x, \cos b''x, \dots) dx$$

可在有限形状中求得, 其中  $a', a'', b', b'', \dots$  是常数.

问题显然可化成求下面的表达式的积分

$$x^n e^{ax} \sin^{k'} b'x \sin^{k''} b''x \dots \cos^{m'} b'x \dots$$

如果利用初等三角公式

$$\begin{aligned}\sin^2 bx &= \frac{1 - \cos 2bx}{2}, \\ \sin b'x \sin b''x &= \frac{1}{2} [\cos(b' - b'')x - \cos(b' + b'')x]\end{aligned}$$

以及类似它们的一些公式, 就容易把所考虑的表达式分成类型  $Ax^n e^{ax} \times \sin bx$  与  $Bx^n e^{ax} \cos bx$  的许多项, 而我们已经会作这些项的积分了.

## §5. 椭圆积分

**290. 一般说明及定义** 考虑形如

$$\int R(x, y) dx \tag{1}$$

的积分, 其中  $y$  是  $x$  的代数函数, 即 [205] 满足代数方程

$$P(x, y) = 0 \tag{2}$$

(这儿  $P$  是关于  $x$  及  $y$  的整多项式). 这样的一类积分叫做 阿贝尔积分, 在 §3 中所研究的积分

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$



就属于这一类. 实际上, 函数

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

分别满足代数方程

$$(\gamma x + \delta)y^m - (\alpha x + \beta) = 0, \quad y^2 - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

站在几何的观点上来看, 可把阿贝尔积分 (1) 认为是跟方程 (2) 所确定的那种代数曲线相联系着的. 例如, 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \quad (3)$$

是跟二次曲线  $y^2 = ax^2 + bx + c$  联系着的. 积分 (1) 一般地是否可以表示成有限形状, 主要以曲线 (2) 的性质为转移.

如果曲线 (2) 可以表示成这样的参数式

$$x = r_1(t), \quad y = r_2(t),$$

使得函数  $r_1(t)$  与  $r_2(t)$  是有理函数 (在这情形下曲线被叫做有理曲线或单行曲线<sup>①</sup>), 积分 (1) 的被积表达式就能够有理化. 作替换  $x = r_1(t)$  可把它化成下面的形状

$$R(r_1(t), r_2(t))r_1'(t)dt,$$

于是积分就可在有限形状中求得. 上述两种情形就属于这一类. 特别地, 在类型 (3) 的积分中, 被积表达式有理化的可能性正是跟这一事实联系着的, 即二次曲线是有理曲线 [281, 282].

可是, 这类情形在某种意义上是例外的. 在一般情形下曲线 (2) 不是有理的, 而那时可以证明, 积分 (1) 显然不总是, 亦即不是在任何函数  $R$  下, 都能表示成有限形状 (虽然对个别的具体的  $R$  还有这种可能).

在讨论包含着三次或四次多项式的二次根式而自然地与积分 (3) 衔接着的两类重要积分

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})dx, \\ & \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})dx \end{aligned} \quad (4)$$

时, 我们就碰到这些情形. 形如 (4) 的积分 —— 照例 —— 已经不能通过初等函数表示成有限形状. 因为本章主要研究可在有限形状中求得的那些种类的积分, 为了不致中断本章叙述的主要线索, 所以我们把了解它们这一事情放到最后一节.

<sup>①</sup> 可以对有理曲线给出一个纯粹几何上的描述, 但我们不论及这点.



假定在 (4) 中根号内的多项式有实系数. 此外, 我们还总是认定它们没有重根, 因为如不这样, 就有可能从根号内取出一个线性因式到根号外面来; 问题就会化成早已研究过的类型的表达式的积分, 而积分就会表示成有限形状. 最后的情况有时就在没有重根时也可能发生, 例如, 容易验证

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}} dx = x\sqrt{2x^3+1} + C.$$

类型 (4) 的积分通常叫做椭圆积分[这与求椭圆弧长的问题中首先碰见它们这一情形有关, 331,8)]. 但是, 这个名称, 在精确的意义下, 通常只用于不能在有限形状中求得的那些积分; 而其他的积分, 像上面刚刚说到的, 叫做伪椭圆积分.

在随意系数  $a, b, c, \dots$  下表达式 (4) 的积分的研究与造表 (即作出积分值的表), 当然是困难的. 因此, 希望把这些积分化成不多的几种积分, 在它们中间包含尽可能少的随意系数 (参数), 就是自然的了.

这可借助于我们在下面几目中所讨论的初等变换达到目的.

**291. 辅助变换** 1° 我们首先指出, 根号内的多项式限制在四次的情形就够, 因为根号内是三次多项式的情形容易化成这种情形. 实际上, 实系数三次多项式  $ax^3+bx^2+cx+d$  一定有实根 [81], 比方说, 这实根是  $\lambda$ ——因而, 可有实分解式

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

作替换  $x-\lambda=t^2$  (或  $x-\lambda=-t^2$ ) 就得到所要求的结果

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+\dots}) dx = \int R(t^2+\lambda, t\sqrt{at^4+\dots}) 2t dt.$$

往后我们就只讨论包含着根号内是四次多项式的根式的微分式.

2° 按照代数学上著名的定理, 实系数四次多项式可以表示成两个实系数二次三项式的乘积的形状:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'). \quad (5)$$

现在我们设法用合适的替换来同时消去两个三项式中的一次项. 我们已经在 284, III (6) 中讨论过类似的问题了.

如果  $p=p'$ , 那么, 像已经指出过的, 用简单的替换  $x=t-\frac{p}{2}$ , 我们的目的就达到了. 现在设  $p \neq p'$ ; 在这情形下我们也像从前那样, 可利用分式线性替换

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}.$$



对于系数  $\mu$  与  $\nu$ , 能否规定实而相异的值, 犹如我们见到过的那样, 决定于不等式

$$(q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0. \quad (6)$$

在假定所考虑的两个三项式中的一个有虚根时, 这个不等式是成立的这种情形, 我们已经证明过, 并且它在我们的讨论中起着重大的作用. 现在设 (5) 的两个三项式都有实根, 比方说, 第一个有根  $\alpha$  与  $\beta$ , 第二个有根  $\gamma$  与  $\delta$ . 将

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta, \quad p' = -(\gamma + \delta), \quad q' = \gamma\delta,$$

代入 (6) 便可以把它改写成

$$(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0, \quad (6')$$

而为了实现这个不等式, 只要注意不搅乱三项式的根的大小顺序就够了 (例如, 使  $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ ), 这是在我们的权限之内的<sup>①</sup>

这样一来, 适当选取  $\mu$  与  $\nu$ , 借助于所指出的替换, 我们得到

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + \cdots}) dx = \int R\left(\frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \sqrt{\frac{(M + Nt^2)(M' + N't^2)}{(t + 1)^2}}\right) \frac{\mu - \nu}{(t + 1)^2} dt,$$

这也可以 (如果除去退化的情况, 即除去系数  $M, N, M', N'$  中的任何一个为 0 的情况的话) 改写成下面的形状

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}) dt,$$

当  $A, m$  与  $m'$  异于 0 时.

3° 完全仿照第 284 目开头所用的讨论, 可以把这个积分在相差一个有理函数的积分的范围以内化成这样:

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} dt.$$

现在分解有理函数  $R^*(t)$  成为两项

$$R^*(t) = \frac{R^*(t) + R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t) - R^*(-t)}{2}.$$

<sup>①</sup>顺便指出, 把不等式 (6) 表示成 (6') 的形式, 可用来作出当它的根  $\alpha, \beta, \dots$  非实数时那种情形的证明. 如果只是第一个三项式有非实根, 亦即有共轭复数根  $\alpha$  与  $\beta$ , 而数  $\gamma$  与  $\delta$  是实数, 则因子  $\alpha - \gamma$  与  $\beta - \gamma$  将是共轭的, 于是它们的乘积, 如大家所知道的, 是正实数; 对于因子  $\alpha - \delta$  与  $\beta - \delta$  有同样的情形. 如果根  $\alpha, \beta$  与根  $\gamma, \delta$  都是两两共轭的复数, 则因子  $\alpha - \gamma$  与  $\beta - \delta$  也是共轭的, 而  $\alpha - \delta$  与  $\beta - \gamma$  也这样, 于是它们的乘积就又给出正实数了.



第一项当以  $-t$  代替  $t$  时不改变自己的值, 所以, 可化成  $t^2$  的有理函数:  $R_1(t^2)$ ; 第二项在作前述的代换时改变符号, 因而有  $R_2(t^2)t$  的形状<sup>①</sup>. 所考虑的积分可表示成积分的和

$$\int \frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2)t dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}$$

的形式. 但是, 它们中的第二项可用替换  $u = t^2$  立即化成初等积分

$$\frac{1}{2} \int \frac{R_2(u)du}{\sqrt{A(1+mu)(1+m'u)}},$$

这积分可在有限形状中求得. 如此, 只需进一步研究积分

$$\int \frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}. \quad (7)$$

就够了.

**292. 化成标准形式** 最后, 我们要证类型 (7) 的每一积分可以表示成下面的形式

$$\int \frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (8)$$

其中  $k$  是某一正真分数:  $0 < k < 1$ . 我们把这个形式叫做标准形式.

为简明起见, 令

$$y = \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}.$$

不减普遍性, 这里认定  $A = \pm 1$  是可以的; 此外, 为明确起见, 限制  $t$  是正值. 现在考虑  $A, m, m'$  的符号的可能组合并对每种情形指出把积分 (7) 直接化成标准形式的替换.

1)  $A = +1, m = -h^2, m' = -h'^2 (h > h' > 0)$ . 为了使根式有实值, 必须使  $t < \frac{1}{h}$  或  $t > \frac{1}{h'}$ . 我们令

$$ht = z, \text{ 这儿 } 0 < z < 1 \text{ 或 } z > \frac{h}{h'}.$$

在这情形下

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

于是在这里应当取  $\frac{h'}{h}$  来作为  $k$ .

<sup>①</sup>比较在 286 目中关于类似情形的说明.



2)  $A = +1, m = -h^2, m' = h'^2 (h, h' > 0)$ . 为了使根式有实值, 限制  $t < \frac{1}{h}$ . 令

$$ht = \sqrt{1 - z^2}, \text{ 这儿 } 0 < z \leq 1.$$

在这情形下

$$\frac{dt}{y} = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + h'^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2) \left(1 - \frac{h'^2}{h^2 + h'^2} z^2\right)}},$$

于是可以取  $k = \frac{h'}{\sqrt{h^2 + h'^2}}$ .

3)  $A = +1, m = h^2, m' = h'^2 (h > h' > 0)$ .  $t$  的变化不受任何限制.

令

$$ht = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}, \text{ 这儿 } 0 \leq z < 1.$$

在这情形下

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h \sqrt{(1 - z^2) \left(1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2\right)}},$$

于是  $k = \frac{\sqrt{h^2 - h'^2}}{h}$ .

4)  $A = -1, m = -h^2, m' = h'^2 (h, h' > 0)$ .  $t$  的变化受不等式  $t > \frac{1}{h}$  所限制. 取

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \text{ 这儿 } 0 < z < 1,$$

于是

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{\sqrt{h^2 + h'^2} \sqrt{(1 - z^2) \left(1 - \frac{h^2}{h^2 + h'^2} z^2\right)}},$$

因而  $k = \frac{h}{\sqrt{h^2 + h'^2}}$ .

5)  $A = -1, m = -h^2, m' = -h'^2 (h > h' > 0)$ . 变量  $t$  只可能在  $\frac{1}{h}$  与  $\frac{1}{h'}$  之间变化. 令

$$h't = \sqrt{1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2}, \text{ 这儿 } 0 < z < 1.$$

我们有

$$\frac{dt}{y} = -\frac{dz}{h \sqrt{(1 - z^2) \left(1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2\right)}}$$

及  $k = \frac{\sqrt{h^2 - h'^2}}{h}$ . 这就解决了所有可能的情形, 因为在  $A = -1$  且两个数  $m, m' > 0$  的情形下, 根式一般不会有实根. 关于因式  $R_1(t^2)$ , 我们什么也没有提到, 因为在所有的情形下, 它显然可变换成  $z^2$  的有理函数.



还要指出, 考虑积分 (8) 时, 我们可以只限制在值  $z < 1$  的情形中;  $z > \frac{1}{k}$  的情形可用替换  $kz = \frac{1}{\zeta}$  化成这种情形, 这儿  $\zeta < 1$ .

**293. 第一、第二与第三类椭圆积分** 现在只剩下研究形如 (8) 的积分中最简单的一些积分, 所有形如 (8) 的积分都可以化成这些最简单的积分, 因而, 归根到底, 就研究了所有一般的椭圆积分.

从 (8) 的被积表达式具有的有理函数  $R(x)$  中分出整式部分  $P(x)$ , 而把它的真分式部分分解成部分分式. 如果不把分母的共轭复数根合并起来 (像我们在 274 目中所作的那样), 而像实根那样一个一个地考虑它们, 则  $R(x)$  可表示成若干乘幂  $x^n (n = 0, 1, 2, \dots)$  与形如  $\frac{1}{(x-a)^m} (m = 1, 2, 3, \dots)$  这儿  $a$  可以是虚数) 的分式各乘以数字系数之后的和. 由此, 积分 (8) 在一般情况下, 显然是下列积分的线性集合:

$$I_n = \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

与

$$H_m = \int \frac{dz}{(z^2 - a)^m \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

现在讲积分  $I_n$ . 如果对 (容易被验证的) 恒等式

$$\begin{aligned} & \left[ z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} \right]' \\ &= (2n-3) z^{2n-4} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} + z^{2n-3} \frac{2k^2 z^3 - (k^2 + 1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \\ &= \frac{(2n-1)k^2 z^{2n} - (2n-2)(k^2 + 1)z^{2n-2} + (2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \end{aligned}$$

施行积分, 就可得到联系着依次三个积分  $I$  的递推关系式

$$(2n-1)k^2 I_n - (2n-2)(k^2 + 1)I_{n-1} + (2n-3)I_{n-2} = z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}. \quad (9)$$

在这里令  $n = 2$ , 我们通过  $I_0$  与  $I_1$  表示出  $I_2$ ; 如果取  $n = 3$  并以通过  $I_0$  与  $I_1$  表示出的  $I_2$  的表达式来代替  $I_2$ , 则  $I_3$  也可以通过这些积分表示出来. 这样继续下去, 容易确信, 积分  $I_n (n \geq 2)$  的每一个都可通过  $I_0$  与  $I_1$  表示出来, 再考虑到 (9), 就可以建立联系着它们的公式

$$I_n = \alpha_n I_0 + \beta_n I_1 + q_{2n-3}(z) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)},$$

其中  $\alpha_n$  与  $\beta_n$  是常数,  $q_{2n-3}(z)$  是次数为  $2n-3$  的奇次多项式. 由此显然, 如果  $P_n(x)$  是  $x$  的  $n$  次多项式, 则

$$\int \frac{P_n(z^2) dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \alpha I_0 + \beta I_1 + z Q_{n-2}(z^2) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}, \quad (10)$$



其中  $\alpha$  与  $\beta$  是常数, 而  $Q_{n-2}(x)$  是某一个  $x$  的  $(n-2)$  次多项式. 这些常数及多项式  $Q$  的系数的确定, 可按照待定系数法作出 (如果多项式  $P$  具体地给出了的话)[比较 284, I].

我们指出, 从 (9) 出发也可以通过  $I_0$  与  $I_1$  把在负值  $n = -1, -2, \dots$  时的积分  $I_n$  表示出来, 于是在积分  $H_m$  中只限制于  $a \neq 0$  的情形就够了.

现在来讲积分  $H_m$  (比方说, 在实数  $a$  时), 类似地建立对于它们的递推关系式

$$\begin{aligned} & (2m-2)[-a + (k^2+1)a^2 - k^2a^3]H_m - (2m-3)[1 - 2a(k^2+1) + 3k^2a^2]H_{m-1} \\ & + (2m-4)[(k^2+1) - 3k^2a]H_{m-2} - (2m-5)k^2H_{m-3} \\ & = \frac{z}{(z^2-a)^{m-1}} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \end{aligned}$$

并且当  $m$  的值是负及 0 时也是对的. 由此, 所有的  $H_m$  可通过

$$\begin{aligned} H_1 &= \int \frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ H_0 &= \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_0, \\ H_{-1} &= \int \frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0, \end{aligned}$$

亦即, 最后通过  $I_0, I_1$  与  $H_1$  表示出来.

我们强调, 这一切就在参数  $a$  是虚值时也保持有效; 可是我们不在这里引进关于这点的说明, 而介绍读者去看第十二章 §5.

这样, 由于所有我们讨论的结果, 我们得到这样的一般结论: 借助于初等替换——且在只相差可表示成有限形状的那些项的范围以内,——所有椭圆积分可化成<sup>①</sup>下面三个标准积分:

$$\text{与 } \left. \begin{aligned} & \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ & \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \end{aligned} \right\} 0 < k < 1$$

(最后一个积分可从  $H_1$  引用新的参数  $h = -\frac{1}{a}$  代替  $a \neq 0$  而得到). 这些积分, 如刘维尔已经证明过的, 已经不能在有限形状中求得. 勒让德把它分别叫做第一、第二与第三类椭圆积分. 头两类只含有一个参数  $k$ , 而最后一类, 除它以外, 还包含一个 (复数) 参数  $h$ .

<sup>①</sup>虽然为了使任意一个椭圆积分化成上述三个积分的问题能够认为原则上已经被解决, 上面已经给了充分的指示, 但在实际应用时在这条道路上可能遭遇困难. 在专门从事椭圆积分以及相近的一些问题的专论里, 对于这一目的可以找到另外一些实用上方便的方法.



勒让德在这些积分中作替换  $z = \sin \varphi$  ( $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ ) 后, 把它们加以更进一步的简化. 这时它们中的第一个直接变成积分

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (11)$$

第二个变成这样

$$\int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

即是, 化成上述的积分与新的积分:

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (12)$$

最后, 第三个积分在上述的替换下变成

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (13)$$

积分 (11), (12) 与 (13) 也叫做在勒让德形式下的第一、第二与第三类椭圆积分.

它们中的头两个特别重要, 并且经常应用. 如果认定这些积分当  $\varphi = 0$  时变成零, 并以此固定包含在它们中的随意常数, 就可得到两个完全确定的  $\varphi$  的函数, 勒让德分别用  $F(k, \varphi)$  与  $E(k, \varphi)$  来表示它们. 在这里, 除自变量  $\varphi$  外, 包含在这些函数的表达式里面的被叫做模的参数  $k$  也被指出来了.

在不同的  $\varphi$  与不同的  $k$  下的这些函数的庞大的函数值表是勒让德造出来的. 在这些表中, 不仅可解释为角度的幅角  $\varphi$  可用度数表示出来, 而且模  $k$  (小于 1 的正数) 可看作某一角度  $\theta$  的正弦函数, 它在表中也用度数而非用模表示出来.

此外, 这些函数的更深奥的性质被勒让德与另外一些学者研究过, 并建立了许多关于它们的公式, 等等. 由于这个缘故, 勒让德函数  $F$  及  $E$  就归入分析及其应用中与初等函数平等的身份的那一类函数里面了.

积分学的初等部分, 我们现在基本上暂时只限于这一部分, 研究“在有限形状中的积分”. 可是, 以为积分学的问题一般地就限于这些, 那就错误了: 椭圆积分  $F$  及  $E$  就是这种函数的例子, 它们按照自己的积分表达式被大有成效地研究着, 被成功地应用着, 虽然不能通过初等函数在有限形状中表示出来.

在下章我们还要遇到积分  $F$  及  $E$ , 而且一般地, 在本教程以后的部分还将不止一次地遇见它们.



## 第九章 定积分

### §1. 定积分的定义与存在条件

**294. 处理面积问题的另一方法** 我们回到关于曲边梯形  $ABCD$ (图 4) 的面积  $P$  的定义的问题, 这个问题我们已经在第 264 目中研究过. 我们现在要说明解决这个问题的另一个办法<sup>①</sup>.

我们用任意方法分割图形的底边为若干部分, 并画出对应于这些分点的纵坐标, 于是曲边梯形被分成一些小条(见图).

现在用某一个矩形来近似地替代每一个小条, 这个矩形的底边与该小条的底边一样, 它的高度与小条的纵坐标之一相同, 比方说, 与左端的纵坐标相同. 这样, 曲边图形就被许多单个的矩形所组成的阶梯状图形所代替了.

我们用

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b \quad (1)$$

表示分点的横坐标, 第  $i$  个矩形 ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ ) 的底边显然等于差数  $x_{i+1} - x_i$ , 我们用  $\Delta x_i$  来表示这个差数. 至于高度, 则依上面所述, 它等于  $y_i = f(x_i)$ . 所以第  $i$  个矩形的面积是  $y_i \Delta x_i = f(x_i) \Delta x_i$ .

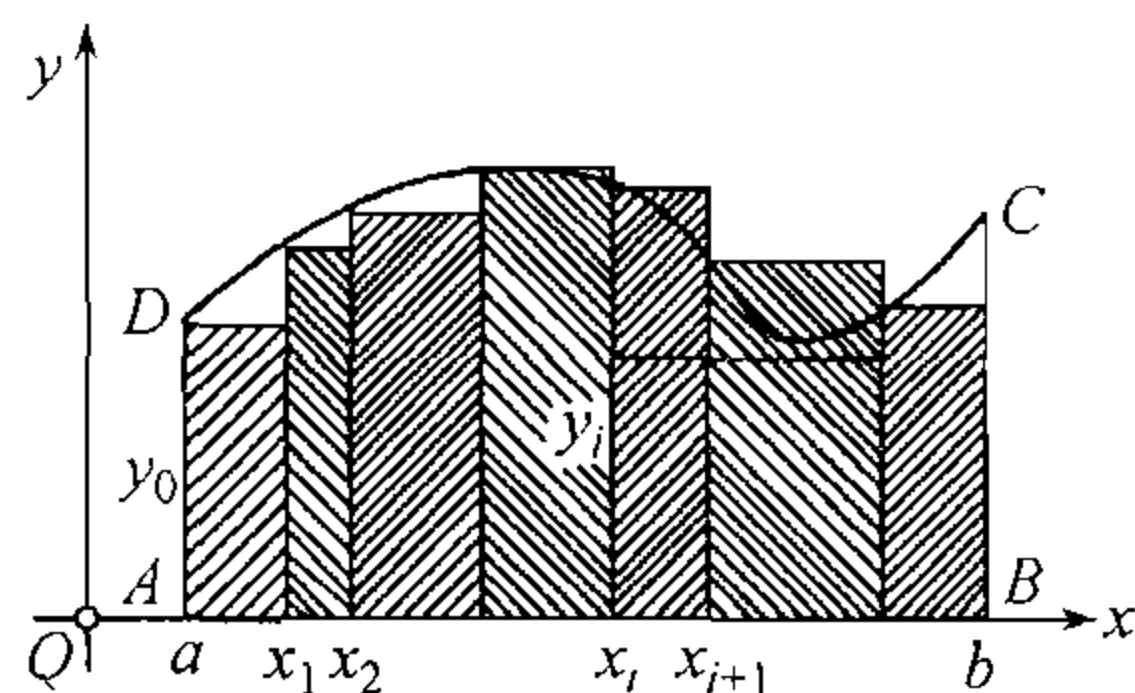


图 4

<sup>①</sup>这就是将 [32,4)] 特例中曾一度应用过的概念, 加以推广.



把所有矩形的面积加起来, 我们得到曲边梯形的面积  $P$  的近似值

$$P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \quad \text{或} \quad P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

当所有的  $\Delta x_i$  无限减少时, 这个等式的误差趋向于零.

假定所有的长度  $\Delta x_i$  同时趋向于零, 则面积  $P$  的准确值就是极限:

$$P = \lim \sum y_i \Delta x_i = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i. \quad (2)$$

我们用同样的方法来计算图形  $AMND$ (图 2) 的面积  $P(x)$ , 只需把线段  $AM$  分成若干部分. 还要指出, 264 目末尾约定, 图形在  $x$ -轴下方部分的面积算作是负的, 这就把  $y = f(x)$  取负值的情形, 也包罗在内了.

为了表示形如  $\sum y \Delta x$  的和(更确切些说——这个和的极限值) 莱布尼茨引进了符号  $\int y dx$ , 其中  $y dx$  相当于和数的标准项, 而  $\int$  是拉丁字 “Summa” 的第一个字母  $S$  的手写体<sup>①</sup>. 因为表示这个极限值的面积也是函数  $y$  的一个原函数, 所以同一符号也保留作原函数的符号. 以后, 随着函数符号的引进, 如果讲的是变动的面积时, 就写

$$\int f(x) dx,$$

而与  $x$  从  $a$  到  $b$  的变化相对应的固定图形  $ABCD$  的面积, 就写成

$$\int_a^b f(x) dx.$$

我们以前利用面积的直觉表示法, 为的是自然地引向形如 (2) 的特殊和 (在历史上这些和正是由于计算面积的问题而被引进的) 的极限的研究. 可是面积概念本身需要论证, 而——如果谈到的是曲边梯形——面积概念正是借助于上述的极限而得到的. 自然, 在这之前应当脱离几何的考虑而研究极限 (2) 本身, 本章就专门来讲这件事情.

形如 (2) 的极限在数学分析及其各种应用中起非常重要的作用. 并且这里所发展的观念, 将以不同的变化形式在整个的课程中不止一次地重复着.

**295. 定义** 设函数  $f(x)$  给定在某区间  $[a, b]$  上. 用任意方法在  $a$  与  $b$  之间插入分点 (1), 把这个区间分成若干部分. 以后即用  $\lambda$  来表示差  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  中最大的一个.

从部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  的每一个区间上任意取一点  $x = \xi_i$ <sup>②</sup>

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

<sup>①</sup>术语“积分”(来自拉丁字 integer=整的)是莱布尼茨的学生与同事约翰·伯努利(Joh. Bernoulli)所提出的; 莱布尼茨最初称之为“和”.

<sup>②</sup>以上我们在所有的情况下都取最小值  $x_i$  作为  $\xi_i$ .



并且做出和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

我们说和  $\sigma$  当  $\lambda \rightarrow 0$  时有 (有限) 极限  $I$ , 如果对每个数  $\varepsilon > 0$  可以找到这样的数  $\delta > 0$ , 使得, 只要  $\lambda < \delta$  (即是, 整个区间分成长度  $\Delta x_i < \delta$  的若干部分), 不等式

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

在数  $\xi_i$  的任意选择之下皆成立.

把这个记作:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (3)$$

像通常那样, 可把“序列说法”的定义与“ $\varepsilon - \delta$  说法”的这一定义相对照.

我们设想, 首先用一种方法, 然后用第二种、第三种等方法逐步作  $[a, b]$  的区间分划. 如果分划对应的序列  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  收敛到零的话, 我们就把这样的区间分划序列叫做基本区间分划序列.

现在可以把等式 (3) 了解为: 不论其中  $\xi_i$  如何选取, 对应于任一基本区间分划序列的和  $\sigma$  的序列, 总是趋于极限  $I$ .

证明两个定义的等价性, 可以采用与 53 目中的同样的思想程序来进行. 第二个定义使我们可以把极限理论的基本概念与定理施用到这个新的极限形状.

如果当  $\lambda \rightarrow 0$  时和  $\sigma$  的 (有限) 极限  $I$  存在, 则这极限  $I$  叫做函数  $f(x)$  在从  $a$  到  $b$  的区间上的定积分, 并以符号

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

来表示; 在这情形下, 函数  $f(x)$  叫做在区间  $[a, b]$  上的可积函数.

数  $a$  与  $b$  分别叫做积分的下限与上限. 在上、下限是常数时定积分是常数.

上述定义是黎曼 (B.Riemann) 的定义, 他首创地把此定义在一般形式下说了出来, 并研究了它的应用范围. 有时就把和  $\sigma$  本身叫做黎曼和<sup>①</sup>; 我们宁可把它叫作积分和, 以便强调它同积分的联系.

现在我们的任务是要阐明一些条件, 在这些条件下积分和  $\sigma$  具有有限极限, 也就是说, 定积分 (4) 存在.

首先应当指出, 所述定义实际上只能应用到有界函数上. 其实, 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上无界的, 那么 —— 在把区间分成若干部分的如何一个分划下 —— 这个函数至少会在这些部分区间中的一个上仍是无界的. 于是靠着在这个部分区间上点  $\xi$  的选取, 可使  $f(\xi)$  任意大, 随之也就可使和  $\sigma$  任意大; 在这些条件下,  $\sigma$  显然不可能存在有限极限. 所以, 可积函数一定是有界的.

<sup>①</sup>实际上柯西早已明白清楚地利用了类似的和的极限, 但只用在连续函数的情况.



因此, 在以后的研究中, 我们总是预先假定所考虑的函数  $f(x)$  是有界的

$$m \leq f(x) \leq M \quad (\text{如果 } a \leq x \leq b).$$

**296. 达布和** 作为研究的辅助工具, 除积分和外, 按照达布 (Darboux) 的方法, 我们再引进另一些类似积分和的但更为简单的和.

用  $m_i$  与  $M_i$  分别表示函数  $f(x)$  在第  $i$  个部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的下确界与上确界, 并作和

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

这些和分别叫做下积分和与上积分和, 或者达布和.

在特别情形, 当  $f(x)$  连续时, 这些和就简直是对应于所取分划的积分和中的最小与最大和, 因为在这情形下, 函数  $f(x)$  在每个区间上都达到自己的确界, 于是按我们所希望的, 可以这样来选取点  $\xi_i$ , 使得

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{或} \quad f(\xi_i) = M_i.$$

现在来讲一般的情形. 由下界与上界定义本身, 有

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

以  $\Delta x_i$  ( $\Delta x_i$  是正的) 乘这些不等式两端并对  $i$  加起来, 得到

$$s \leq \sigma \leq S.$$

在固定的分划下和  $s$  与  $S$  是常数, 可是由于数  $\xi_i$  的随意性, 和  $\sigma$  仍然是变量. 但容易看出, 靠着  $\xi_i$  的选取可使  $f(\xi_i)$  的值与  $m_i$  或  $M_i$  任意接近, 这就是说, 可使和  $\sigma$  与  $s$  或  $S$  任意接近. 这时上面的不等式就引出下面的一般叙述: 在给定的区间分划下, 达布和  $s$  与  $S$  分别是积分和的下确界与上确界.

达布和具有下列的一些简单性质:

**第一个性质** 如果把一些新的点加进既有的分点里去, 则达布下和只可能因此而增大, 而上和只可能因此而减小.

**证明** 为了证明这个性质, 只要讨论在既有的分点中再加进一个分点  $x'$  的情形就够.

设这个点加在点  $x_k$  与  $x_{k+1}$  之间, 于是

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$



如果用  $S'$  表示新的上和, 那么, 这个和仅在这个地方与前面的  $S$  有所不同; 在和  $S$  中对应于区间  $[x_k, x_{k+1}]$  的项是

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

而在新和  $S'$  中对应于这区间是两个项的和

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x'),$$

其中  $\overline{M}_k$  与  $\overline{\overline{M}}_k$  是函数  $f(x)$  在区间  $[x_k, x']$  与  $[x', x_{k+1}]$  上的上确界. 因为这些区间是区间  $[x_k, x_{k+1}]$  的部分区间, 所以

$$\overline{M}_k \leq M_k, \quad \overline{\overline{M}}_k \leq M_k,$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{M}_k(x' - x_k) &\leq M_k(x' - x_k), \\ \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') &\leq M_k(x_{k+1} - x'). \end{aligned}$$

按项把这些不等式加起来, 得到

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \leq M_k(x_{k+1} - x_k).$$

由此推知  $S' \leq S$ . 下和的证明与此类似.

**附注** 因为差  $M_k - \overline{M}_k$  与  $M_k - \overline{\overline{M}}_k$  显然不能超过函数  $f(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上的振幅  $\Omega$ , 所以差  $S - S'$  不能超过乘积  $\Omega(b - a)$ . 如果在第  $k$  区间上取几个新的分点, 这个结果仍然是对的.

**第二个性质** 任何一个达布下和都不超过任何一个上和, 即使是对应于区间的另一分划的上和.

**证明** 用任意方法分割区间  $[a, b]$  成若干部分, 并作这个分划的达布和

$$s_1 \text{ 与 } S_1. \quad (\text{I})$$

现在考虑区间  $[a, b]$  的某一与第一个分划完全没有关系的另一个分划. 对应于这个分划的达布和是

$$s_2 \text{ 与 } S_2. \quad (\text{II})$$

要证的是  $s_1 \leq S_2$ . 为了这一目的, 我们把两种分点联合在一起, 于是得到某一辅助的第三个分划, 对应于它的和是

$$s_3 \text{ 与 } S_3. \quad (\text{III})$$



用加进一些新的分点的办法, 我们从第一个分划得到了第三个分划; 因而, 根据已经证明过的达布和的第一个性质, 有

$$s_1 \leq s_3.$$

现在把第二个与第三个分划比较一下, 可以完全相同地得到

$$S_3 \leq S_2.$$

但  $s_3 \leq S_3$ , 于是由刚才得到的那些不等式, 推出

$$s_1 \leq S_2.$$

这就是所要证明的.

从上面所证明的推知, 下和的整个集合  $\{s\}$  有上界, 例如, 以任何一个上和  $S$  为上界. 在此情形下 [11] 这集合有有限的上确界

$$I_* = \sup\{s\}.$$

此外, 对于无论怎样的上和  $S$ ,

$$I_* \leq S.$$

这样, 因为上和的集合  $\{S\}$  以  $I_*$  为一下界, 所以它有有限的下确界

$$I^* = \inf\{S\},$$

并且, 显然

$$I_* \leq I^*.$$

把所有上述事实互相比, 对任何的达布下和与上和, 有

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S. \quad (5)$$

数  $I_*$  与  $I^*$  分别叫做 达布下积分与上积分[比较下面 301 目].

**297. 积分的存在条件** 借助于达布和, 现在容易说出这个条件.

**定理** 定积分存在的必要与充分条件, 是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0. \quad (6)$$

第 295 目中所说的事实足以阐明这个极限的意义. 例如, 用 “ $\varepsilon - \delta$  说法”, 条件 (6) 就是: 对于如何一个  $\varepsilon > 0$ , 可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使得只要当  $\lambda < \delta$  时 (即是, 区间分成长度  $\Delta x_i < \delta$  的若干部分), 不等式

$$S - s < \varepsilon$$

成立.



**证明 必要性** 假定积分 (4) 存在. 于是对任何一个给定的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使得只要当所有的  $\Delta x_i < \delta$  时,

$$|\sigma - I| < \varepsilon \quad \text{或} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

不管我们在相应区间的范围内怎样选取  $\xi_i$ . 但在给定的区间分划下, 如我们所建立过的, 和  $s$  与  $S$  分别是积分和的下确界与上确界; 所以, 对于它们就有

$$I - \varepsilon \leq s \leq S \leq I + \varepsilon,$$

于是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I, \quad (7)$$

由此就推出 (6).

**充分性** 假定条件 (6) 被满足; 于是由 (5) 立即看出  $I_* = I^*$ , 并且, 如果用  $I$  来表示它们的公共值. 就有

$$s \leq I \leq S. \quad (5^*)$$

如果把  $\sigma$  了解为借助于和  $s, S$  所对应的那一个区间分划而作出的诸积分和值中的一个, 则如我们所知,

$$s \leq \sigma \leq S.$$

按照条件 (6), 如果假定所有的  $\Delta x_i$  充分小, 和  $s$  与  $S$  的差就可小于任意所取的  $\varepsilon > 0$ . 但在这样的情形下, 这对于被包含在  $s$  与  $S$  间的数  $\sigma$  与  $I$  也是对的:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

于是  $I$  是  $\sigma$  的极限, 即是定积分.

如果用  $\omega_i$  表示函数在第  $i$  部分区间上的振幅  $M_i - m_i$ , 那么就有

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

定积分存在的条件就可以改写为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0. \quad (8)$$

通常我们也就应用这种形式.



**298. 可积函数的种类** 我们应用所求得的判别法来确定一些可积函数的种类.

I. 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续的, 则函数  $f(x)$  是可积的.

**证明** 既然函数  $f(x)$  是连续的, 则根据 [87] 康托尔定理的推论, 对于给定的  $\varepsilon > 0$  永远可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使当区间  $[a, b]$  分成长度  $\Delta x_i < \delta$  的若干部分时, 所有的  $\omega_i < \varepsilon$ . 由此

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

因为  $b-a$  是常数, 而  $\varepsilon$  任意小, 所以条件 (8) 被满足, 由此即可推出积分的存在. 还可以稍微推广一下所证的断言:

II. 如果在  $[a, b]$  上的有界函数  $f(x)$  只有有限多个间断点, 则它是可积的.

**证明** 设间断点是  $x', x'', \dots, x^{(k)}$ . 取任意  $\varepsilon > 0$ . 我们用长度皆小于  $\varepsilon$  的诸邻域

$$(x' - \varepsilon', x' + \varepsilon'), (x'' - \varepsilon'', x'' + \varepsilon''), \dots, (x^{(k)} - \varepsilon^{(k)}, x^{(k)} + \varepsilon^{(k)})$$

来包住这些间断点. 在其余的 (闭) 区间上函数  $f(x)$  是连续的, 我们就可把康托尔定理的推论各别地应用到它们的每一个上去. 从按照  $\varepsilon$  所得的数  $\delta$  中挑选出最小的 (我们也用字母  $\delta$  来表示它). 此时它对上述区间中的每一个都是合用的. 同时我们不妨取  $\delta < \varepsilon$ . 现在分割我们的区间  $[a, b]$  成这样的若干部分, 使得它们的长度全都小于  $\delta$ . 所得的部分区间将有两类:

1) 第一类区间, 即整个区间位于所分出的包住间断点的那些邻域外的那种区间. 在它们中函数的振幅  $\omega_i < \varepsilon$ .

2) 第二类区间, 即或是整个地被包在所分出的邻域内部的那种区间, 或是部分地落在这些邻域上的那种区间.

因为已假定函数  $f(x)$  是有界的, 所以它在这些区间的任何一个区间上的振幅不超过它在整个区间  $[a, b]$  上的振幅  $\Omega$ .

把和

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

分成两个和分别分布在第一类及第二类区间上:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{与} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''}.$$

对于第一个和, 正如在上述定理中的一样, 将有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b-a).$$



至于第二个和, 我们指出, 所有整个地落在所分出的邻域内的那种第二类区间的长度总和  $< k\varepsilon$ . 只有部分落在所分出的邻域上的那种区间的数目不可能多于  $2k$  个, 它们长度的总和  $< 2k\delta$ , 也就是说更加  $< 2k\varepsilon$ . 因而

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 3k\varepsilon.$$

这样, 当  $\Delta x_i < \delta$  时, 最后有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon [(b-a) + 3k\Omega].$$

这就证明了我们的断言, 因为包括在方括弧中的是常数. 而  $\varepsilon$  任意小.

最后, 还要指出一种简单的, 不被上述两类函数所包括的可积函数.

III. 单调有界函数  $f(x)$  永远是可积的.

证明 设  $f(x)$  是单调增函数. 此时它在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振幅是

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

给定任何一个  $\varepsilon > 0$  并令

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

一当  $\Delta x_i < \delta$  时, 立即有

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

由此即推知函数的可积性.

**299. 可积函数的一些性质** 由第 297 目中的判别法可以引出可积函数的许多共同性质.

I. 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 则函数  $|f(x)|$  与  $kf(x)$  (其中  $k =$  常数) 在这区间上也都是可积的.

对函数  $|f(x)|$  加以证明. 因为对于区间  $[a, b]$  上任何两点  $x', x''$  有 [17]

$$||f(x'')| - |f(x')|| \leq |f(x'') - f(x')|,$$

所以函数  $|f(x)|$  在这区间上的振幅  $\omega_i^*$  不超过  $\omega_i$  [85]. 由此

$$\sum \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum \omega_i \Delta x_i,$$

并且, 因为后面那个和趋于零 (当  $\lambda \rightarrow 0$  时), 于是第一个和更是趋于零. 这就得到函数  $|f(x)|$  的可积性.



II. 如果两个函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 则它们的和、差与乘积也都是可积的.

我们限于乘积  $f(x)g(x)$  情形的证明.

设  $|f(x)| \leq K, |g(x)| \leq L$ . 在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上取任何两点  $x', x''$ , 考虑差

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x').$$

如果用  $\omega_i, \bar{\omega}_i$  分别表示函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振幅, 显然

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq L\omega_i + K\bar{\omega}_i.$$

但此时 [85] 对函数  $f(x)g(x)$  在这区间上的振幅  $\Omega_i$  就有

$$\Omega_i \leq L\omega_i + K\bar{\omega}_i,$$

由此

$$\sum \Omega_i \Delta x_i \leq L \sum \omega_i \Delta x_i + K \sum \bar{\omega}_i \Delta x_i.$$

因为后面两个函数都趋于零 (当  $\lambda \rightarrow 0$  时), 所以第一个和更是趋于零. 这就证明了函数  $f(x)g(x)$  的可积性.

III. 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 则它在这区间的任何一个部分区间  $[\alpha, \beta]$  上也是可积的. 反之, 如果区间  $[a, b]$  被分割成若干部分区间, 并且分别在每个部分区间上  $f(x)$  是可积的, 则它在整个区间  $[a, b]$  上也是可积的.

**证明** 假定函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 并对这个区间作和数  $\sum \omega_i \Delta x_i$  (认定  $\alpha$  与  $\beta$  包括在分点之中). 如果在这和中略去一些 (正的) 项, 就可得到区间  $[\alpha, \beta]$  上的类似的和; 如果第一个和趋向于零, 这个和就一定趋于零.

现在设, 比方说, 区间  $[a, b]$  被分割成两个部分区间  $[a, c]$  与  $[c, b]$  (其中  $a < c < b$ ), 并且在它们的每一个上函数  $f(x)$  是可积的. 重新取区间  $[a, b]$  的和  $\sum \omega_i \Delta x_i$ , 如果点  $c$  包括在分点中, 则所举出的和, 由区间  $[a, c]$  与  $[c, b]$  的两个类似的和组成, 并且与这两个和一起趋于零. 对于  $c$  不是分点的情形, 这个结论仍然有效的: 把这点归并在分点中后, 我们只改变和中的一项, 而这一项本身显然趋于零.

IV. 如果改变可积函数在有限数个 ( $= k$ ) 点上的值, 则它的可积性并不会被破坏.

证明是显然的, 因为所说的改变牵涉到和  $\sum \omega_i \Delta x_i$  的项数不多于  $k$  项.

容易明了, 积分本身的值在这时并不发生变化. 这由如下的事实得到: 对于两个函数——原有的及改变后的——在积分和中的点  $\xi_i$  总可以如此选取, 使得它们不在使两个函数值不同的那些点上.



**附注** 由于这一性质, 可知即使  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  的有限个点上不确定时, 我们也可以谈到积分  $\int_a^b f(x)dx$ . 同时可以在这些点给我们的函数加上完全任意的值而考虑在整个区间上用这样的方法所确定的函数. 如我们已经见到过的, 无论是这个积分的存在, 或是它的值都不依赖于在函数没有确定的那些点上所加上的函数值.

**300. 例题及补充** 作为练习我们再举一些把 297 目中的判别法应用到具体函数上的一些例子.

1) 回到在 70, 8) 中所考虑的函数: 如果  $x$  是既约真分数  $\frac{p}{q}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{q}$ , 如果  $x$  是区间  $[0, 1]$  的其他的点, 则  $f(x) = 0$ .

设区间  $[0, 1]$  分成长度  $\Delta x_i < \lambda$  的若干部分. 取任意自然数  $N$ , 把所有的部分区间分成两类:

(a) 把包含分母  $q \leq N$  的数  $\frac{p}{q}$  的那些区间列入第一类: 因为这些数只有有限数  $k = k_N$  个, 所以第一类区间的个数就不大于  $2k$ , 而它们长度的总和不超过  $2k\lambda$ .

(b) 把不包含上述数字的那些区间列入第二类; 对于它们, 振幅  $\omega_i$  显然小于  $\frac{1}{N}$ .

如果根据这点把和  $\sum \omega_i \Delta x_i$  分成两个并分别估计每个的值, 就得到结果

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

先取  $N > \frac{2}{\varepsilon}$ , 然后取  $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$ , 即有  $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ , 这就证明了函数的可积性.

这个例子是有趣的, 因为这里的函数有无穷多个间断点, 但仍然是可积的.[不过, 这类的例子可以在定理 III 的基础上建立起来.]

2) 现在重新考虑狄利克雷函数 [46; 70, 7)]

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 && \text{如果 } x \text{ 是有理数, 及} \\ \chi(x) &= 0, && \text{如果 } x \text{ 是无理数.} \end{aligned}$$

因为在区间  $[0, 1]$  的任何部分区间上这个函数的振幅  $\omega = 1$ , 所以  $\sum \omega_i \Delta x_i = 1$ , 于是函数显然不是可积的.

3) 在 297 目中所得出的定积分存在的判别法, 可以表示成下面的形式:

定积分存在<sup>41)</sup>的必要与充分条件, 是对给定的数  $\varepsilon > 0$  与  $\sigma > 0$ , 可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使当所有的  $\Delta x_i < \delta$  时, 对应于振幅

$$\omega_{i'} \geq \varepsilon$$

的那些区间长度的总和

$$\sum_{i'} \Delta x_{i'} < \sigma^{42)}.$$

必要性由不等式

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \geq \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \geq \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'}$$

看出是显然的, 如果靠着  $\delta$  的选择, 使第一个和比  $\varepsilon \sigma$  小的话.

<sup>41)</sup>指有界函数的定积分.

<sup>42)</sup>由黎曼 (约于 1854 年) 建立的这个命题是历史上最早的函数可积性判别法之一.



充分性由下面的估计推出:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \varepsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sigma + \varepsilon(b-a).$$

[这里  $\Omega$  像通常那样, 表示函数在整个所考虑的区间上的振幅; 用记号  $i''$  指出的那些部分区间上的振幅  $\omega_{i''} < \varepsilon$ .]

4) 把这个新形式的判别法用来证明下面的命题:

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 并且它的值不越出区间  $[c, d]$  的范围、在区间  $[c, d]$  上函数  $\varphi(y)$  是连续的、则复合函数  $\varphi(f(x))$  在  $[a, b]$  上也是可积的.

任取数  $\varepsilon > 0$  与  $\sigma > 0$ . 对于数  $\varepsilon$ , 由于函数  $\varphi(y)$  的连续性, 可找到如此的  $\eta > 0$ , 使得在长度  $< \eta$  的  $y$  值的任何一个区间上, 函数  $\varphi$  的振幅  $< \varepsilon$ .

由于函数  $f$  的可积性, 对于数  $\eta$  与  $\sigma$  现在可找到如此的数  $\delta$ , 使当区间分成长度  $\Delta x_i < \delta$  的若干部分区间时, 它们中函数  $f$  的振幅  $\omega_{i'}[f] \geq \eta$  的那些区间长度的总和  $\sum_{i'} \Delta x_{i'}$  小于  $\sigma$  [参看 3)]. 对于其他的区间, 有  $\omega_{i''}[f] < \eta$ , 所以, 按照数  $\eta$  的选择,  $\omega_{i''}[\varphi(f)] < \varepsilon$ . 这样, 对于复合函数  $\varphi(f(x))$ , 振幅只在第一群区间中的某些区间上可能  $\geq \varepsilon$ , 这些区间长度的总和显然  $< \sigma$ , 把 3) 的判别法应用到复合函数上, 我们就可断定它的可积性.

5) 如果对于函数  $\varphi$  只假定可积性, 则复合函数就可能是不可积的<sup>43)</sup>. 例如:

取上面在 1) 中已经研究过的那个函数作为函数  $f(x)$ ; 它在区间  $[0, 1]$  上是可积的, 并且它的值也不越出这个区间的范围. 其次, 设

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{对于} \quad 0 < y \leq 1$$

及

$$\varphi(0) = 0.$$

函数  $\varphi(y)$  在  $[0, 1]$  上也是可积的.

可是, 容易看出, 复合函数  $\varphi(f(x))$  与狄利克雷函数相同 [参看 2)]: 所以它在  $[0, 1]$  不是可积的.

**301. 看作极限的下积分与上积分** 最后我们回到在 296 目中被定义作达布和  $s$  与  $S$  的确界的下积分与上积分. 我们现在要证: 它们同时就是所说和的极限.

**达布定理** 对于无论怎样的有界函数  $f(x)$ , 恒有

$$I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S.$$

例如, 对于上和加以证明.

首先, 对预先给定的  $\varepsilon > 0$ , 取如此的区间  $[a, b]$  的分划, 使得对应于它的上和  $S'$  有

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}; \tag{9}$$

这是可能的, 因为  $I^*$  是上和集合的下确界. 设这个再分划包含  $m'$  个 (内部的) 分点

现在令

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m'\Omega},$$

<sup>43)</sup> 甚至函数  $f$  是连续的.



其中  $\Omega$  表示函数  $f(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上的振幅, 并考虑所有  $\Delta x_i < \delta$  的任意区间分划, 设对应于它的和是  $S$ .

为要估计  $S$  与  $I^*$  间的差, 我们再把前面两个分划的分点加以合并, 而引出给定区间的第三个分划. 如果对应于它的上和是  $S''$ , 则依达布和的第一个性质 [296],  $S'' < S'$ , 于是更有 [参看 (9)]

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

另一方面, 依 296 目中的附注, 差  $S - S''$  不超过  $\Omega$  与第二个分划中那些含有第一个分划之分点的区间的长度  $\Delta x_i$  的总和之乘积. 但这些区间的数目不大于  $m'$ , 而它们每一个的长度小于  $\delta$ , 于是

$$S - S'' < m' \Omega \delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

由此, 由于 (10),

$$S < I^* + \varepsilon.$$

另一方面, 因为  $S \geq I^*$ , 所以只要  $\Delta x_i < \delta$ , 即有

$$0 \leq S - I^* < \varepsilon,$$

于是, 的确  $S \rightarrow I^*$ .

从已经证明过的定理直接推出, 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = I^* - I_*.$$

这个关系式使我们能把积分存在的判别法叙述成下面的形式 [比较 297]:

定积分存在的必要与充分条件, 是使达布下积分与上积分彼此相等

$$I_* = I^*.$$

(当条件满足时, 显然它们的公共值就给出定积分的数值.)

条件的新形式比起以前的形式具有某些优点. 为要证实两个达布积分相等, 只要建立对任意  $\varepsilon$  只要有一对和满足不等式

$$S - s < \varepsilon$$

就够了. 实际上, 由 (5), 这时也有

$$0 \leq I^* - I_* < \varepsilon,$$

由此, 由于  $\varepsilon$  的任意性, 就得到所求的等式.

容易了解, 据此可以使前目 [参看 3)] 所说的可积条件, 变得简便一些.

## §2. 定积分的一些性质

**302. 沿定向区间的积分** 到现在为止, 当说到“在由  $a$  到  $b$  的区间上的定积分”时, 我们总是了解为  $a < b$ . 现在要除去这一令人不便的限制.



为了这目的, 我们首先建立有向或定向区间的概念. 我们将把定向区间  $[a, b]$  (其中可以  $a < b$ , 也可以  $a > b$ ) 了解为分别满足不等式

$$a \leq x \leq b \text{ 或 } a \geq x \geq b$$

并且顺序由  $a$  到  $b$  的  $x$  值的集合, 即是, 如果  $a < b$ , 就是递增顺序, 或者如果  $a > b$ , 就是递减顺序. 这样, 我们可区别区间  $[a, b]$  与  $[b, a]$ : 它们在组成成分 (作为数值的集合来说) 方面是一样的, 但在方向上有所不同.

在 295 目中所给的那个积分定义, 就属于定向区间  $[a, b]$  的情形, 但只是对于当  $a < b$  时的情形来说的.

现在来讲在假定  $a > b$  时, 在定向区间  $[a, b]$  上的积分的定义. 对这种情形可以用由  $a$  到  $b$  的方向插入分点:

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots > x_n = b$$

的方法重复普通分割区间的步骤. 在每个部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上选出一个点  $\xi_i$ , 于是  $x_i \geq \xi_i \geq x_{i+1}$ , 作积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

其中 —— 在这次 —— 所有  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$ . 最后, 当  $\lambda = \max |\Delta x_i| \rightarrow 0$  时, 这个和的极限就把我们引到积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$$

的概念.

如果对区间  $[a, b]$  与  $[b, a]$  (其中  $a \geq b$ ) 取同样的分点与同样的点  $\xi_i$ , 则对应于它们的积分和将只相差一个符号. 由此, 取极限, 就得到这样的定理:

1° 如果  $f(x)$  在区间  $[b, a]$  上是可积的, 则它在区间  $[a, b]$  上也是可积的, 并且

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

而且在假定积分  $\int_b^a$  存在时, 这个等式正好可以采取作为  $a > b$  时积分  $\int_a^b$  的定义<sup>44)</sup>.

还要指出, 作为定义, 设

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

<sup>44)</sup> 这样的定义现在最为通行.



**303. 可用等式表示的一些性质** 现在列举可用等式表示的定积分的更进一步的一些性质<sup>①</sup>.

2° 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  与  $[c, b]$  中最大的一个上是可积的<sup>②</sup> 于是它在其他两个区间上是可积的, 并且不管点  $a, b$  与  $c$  的相互位置是怎样的, 等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

成立.

**证明** 首先令  $a < c < b$  并且函数在区间  $[a, b]$  上是可积的.

函数在区间  $[a, c]$  与  $[c, b]$  上是可积的这一事实, 由 299 目 III 推知.

考虑把区间  $[a, b]$  分成若干部分, 并认定点  $c$  是这些分点中的一个. 作积分和, 即有 (其中记号的意义是明显的)

$$\sum_a^b f(\xi)\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\Delta x.$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时取极限, 我们就得到所求的等式.

点  $a, b, c$  其他位置的情形可化成这个等式, 例如设  $b < a < c$  且函数  $f(x)$  在区间  $[c, b]$  上 —— 或者由于 1°, 同样在  $[b, c]$  上 —— 是可积的. 在这情形下, 依已经证过的, 即有

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

由此, 把第一与第二个积分由等式的一端移到另一端并改换积分限 (根据性质 1°), 我们又得到前面的关系式.

3° 如果  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 则  $kf(x)$  (其中  $k = \text{常数}$ ) 在这区间上也是可积的, 并且

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

4° 如果  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上都是可积的, 则  $f(x) \pm g(x)$  在这区间上也是可积的, 并且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

由积分和出发并取极限, 对两种情形可以类似地作出证明, 例如, 对最后的断言加以证明.

<sup>①</sup>在这里以及在以后, 如果讲到积分  $\int_a^b$ , 我们认为两种情形,  $a < b$  与  $a > b$  都是可能的 (在没有特别附加说明时).

<sup>②</sup>可以不这样假定而假定: 函数  $f(x)$  在两个较小区间中的每一个上是可积的, 于是它在最大的区间上也就是可积的.



任意分割区间  $[a, b]$  成若干部分, 并对所有三个积分作积分和. 同时在每个部分区间上任意选取  $\xi_i$  点, 但对于所有和则是相同的; 于是即有

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum g(\xi_i) \Delta x_i.$$

现设  $\lambda \rightarrow 0$ ; 因为对于等式右端两个和的极限都存在, 所以左端和的极限也存在, 由此建立了函数  $f(x) \pm g(x)$  的可积性. 在上面等式中取极限, 就得到所求的关系式.

**附注** 注意在后面两个断言的证明时, 不必须依靠 299 目中的定理 I 与 II: 函数  $kf(x)$  与  $f(x) \pm g(x)$  的可积性可由取极限直接建立起来.

**304. 可用不等式表示的一些性质** 到现在为止我们已考虑过可用等式表示的积分的一些性质; 现在来讲可用不等式表示的这样一些性质:

5° 如果在区间  $[a, b]$  上可积函数  $f(x)$  是非负的, 并且  $a < b$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

证明是显然的.

较难证明的是下面这更精确的结果:

如果在区间  $[a, b]$  上可积函数  $f(x)$  是正的, 且  $a < b$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

用反证法证明. 假如

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

于是当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 达布上和  $S$  也趋于零 [297(7)]. 取任意  $\varepsilon_1 > 0$  后, 可使这个和比  $\varepsilon_1(b-a)$  小. 此时上界  $M_i$  中至少有一个比  $\varepsilon_1$  小, 换句话说, 在  $[a, b]$  上可以找到如此的部分区间  $[a_1, b_1]$ , 在它的范围内所有  $f(x)$  的值  $< \varepsilon_1$ .

又因为

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = 0^{①},$$

①实际上, 按照 2°:

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^b, \text{ 并且因为 } \int_a^{a_1} \geq 0, \int_{b_1}^b \geq 0.$$

所以

$$0 \leq \int_{a_1}^{b_1} \leq \int_a^b = 0.$$



所以类似地, 由  $[a_1, b_1]$  可分出部分区间  $[a_2, b_2]$ , 在它的范围内  $f(x) < \varepsilon_2$ , 其中  $\varepsilon_2$  是任何一个正数  $< \varepsilon_1$ , 如此下去.

取正数序列  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  后, 可以定出一个套着一个 (并且 —— 如果愿意的话 —— 在长度上递减到 0 的) 的这样一串区间  $[a_k, b_k]$ , 使得

$$0 < f(x) < \varepsilon_k, \text{ 如果 } a_k \leq x \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

于是依 38 目引理, 存在着所有这些区间的公共点  $c$ ; 对于它应当有

$$0 < f(c) < \varepsilon_k \text{ 当 } k = 1, 2, \dots,$$

因为  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , 这是不可能的. 定理证毕.

由此 (并由 4°) 有简单的推论:

6° 如果函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上都是可积的, 并恒有  $f(x) \leq g(x)$  [或  $f(x) < g(x)$ ], 则在假定  $a < b$  时,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \left[ \text{或 } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \right].$$

只需把上面的性质应用到差  $g(x) - f(x)$  上. 同样容易得到:

7° 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 并且  $a < b$ ; 就有不等式

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

后面这个积分的存在由 299 目 I 推知. 然后把性质 6° 应用到函数上.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

可是从积分和

$$\left| \sum f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i^{①}$$

出发并取极限, 所求不等式容易直接得出.

8° 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是可积的, 其中  $a < b$ , 并且在整个这个区间上不等式

$$m \leq f(x) \leq M$$

成立, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

可以把性质 6° 应用到函数  $m, f(x)$  与  $M$  上, 但更简单的是直接利用显然的不等式

$$m \sum \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum \Delta x_i^{①}$$

①因为  $a < b$ , 故所有的  $\Delta x_i > 0$ .



并取极限.

可以赋予所证明的关系式以更方便的等式形式, 同时可以取消  $a < b$  的限制.

9° 中值定理 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是可积的 ( $a \geq b$ ), 并设在整个这个区间上,  $m \leq f(x) \leq M$ ; 那么

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

其中  $m \leq \mu \leq M$ .

证明 如果  $a < b$ , 则依性质 8° 即有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

由此

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

令

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu,$$

即得所求的等式.

对于  $a > b$  时的情形, 我们对  $\int_b^a$  进行同样的考虑, 然后, 改换积分限, 我们得到上面的公式.

刚才所证明的等式当函数  $f(x)$  连续时取特别简单的形状. 实际上, 如果认定  $m$  与  $M$  是依 85 目中魏尔斯特拉斯定理而存在着的最小与最大的函数值, 则依 82 目中柯西定理, 函数  $f(x)$  应在区间  $[a, b]$  上某一点  $c$  取中间值  $\mu$ , 这样一来,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c),$$

其中  $c$  包含在  $[a, b]$  内.

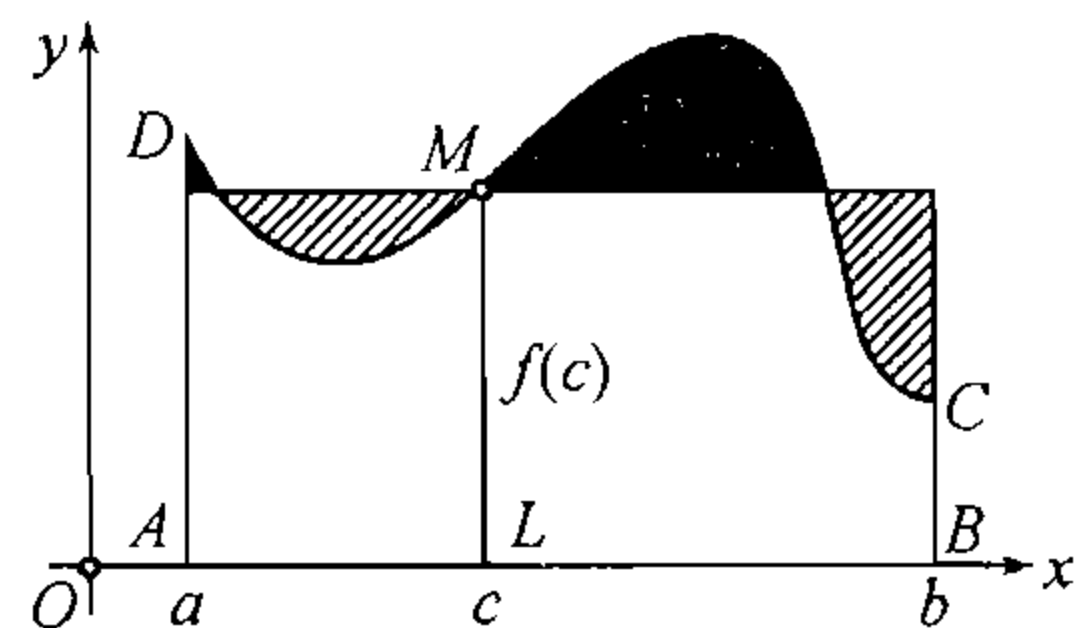


图 5

最后的公式的几何意义是明显的. 设  $f(x) \geq 0$ . 考虑在曲线  $y = f(x)$  下的曲线图形  $ABCD$  (图 5). 此时曲线图形的面积 (定积分所表示的), 等于有同一底边及某一中间纵坐标  $LM$  作为高度的矩形的面积.

10° 推广中值定理 设 1)  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的; 2)  $m \leq f(x) \leq M$ ; 3)  $g(x)$  在整个区间上不改变符号:  $g(x) \geq 0$  [或  $g(x) \leq 0$ ]. 在这些条件下, 有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$



其中  $m \leq \mu \leq M$ ①.

**证明** 首先设  $g(x) \geq 0$  且  $a < b$ ; 此时有

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

由这个不等式, 根据性质 6° 与 3°, 得到

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

由于对函数  $g(x)$  的假定, 依 5°, 有

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

如果这个积分等于零, 则由上面的不等式, 显然同时也有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

定理的断言就成为显然的了. 如果积分大于零, 则以它除上面所得到的两重不等式的所有部分后, 令

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$$

就得到所求的结果.

由  $a < b$  的情形容易得到  $a > b$  的情形, 同样, 由假设  $g(x) \geq 0$  的情形容易得到假设  $g(x) \leq 0$  的情形: 因为改换积分限或变更  $g(x)$  的符号并不破坏等式.

如果  $f(x)$  是连续的, 则这个公式可以写成下面的形式:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx,$$

其中  $c$  包含在  $[a, b]$  内.

**305. 定积分看作积分上限的函数** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  ( $a \geq b$ ) 上是可积的, 则由 [299, III] 它在区间  $[a, x]$  上也是可积的, 其中  $x$  是  $[a, b]$  中任何一个值. 用变量  $x$  替换定积分的积分限  $b$  后, 得到表达式

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt^{②}, \quad (1)$$

①乘积  $f(x)g(x)$  的积分存在本身由 287 目 II 推知. 但是可以不用函数  $f(x)$  的可积性, 而直接假定乘积  $f(x) \cdot g(x)$  本身的可积性

②我们把这里的积分变量用  $t$  来表示, 为的是不把它与积分上限  $x$  混淆起来; 当然, 改变积分变量的记号是不影响到积分的值的.



它显然是  $x$  的函数. 这个函数具有下列的性质:

11° 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是可积的, 则  $\Phi(x)$  在这个区间上是  $x$  的连续函数.

**证明** 加给  $x$  以任意增量  $\Delta x = h$  (只要使  $x + h$  不超出所考虑区间的范围就可以) 后, 得到函数 (1) 的新的值

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

[参看 2°], 于是

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

把中值定理 9° 应用到这个积分上

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h; \quad (2)$$

这里  $\mu$  被包含在区间  $[x, x+h]$  上函数  $f(x)$  的确界  $m'$  与  $M'$  之间, 因此, 就更是包含在基本区间  $[a, b]$  上它的 (常数) 界  $m$  与  $M$  之间<sup>①</sup>.

如果现在使  $h$  趋于零, 则显然

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \rightarrow 0 \text{ 或 } \Phi(x+h) \rightarrow \Phi(x),$$

这就证明了函数  $\Phi(x)$  的连续性.

12° 如果假定函数  $f(t)$  在点  $t = x$  是连续的, 则在这点函数  $\Phi(x)$  有导数, 等于  $f(x)$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

**证明** 实际上, 由 (2), 有

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu, \text{ 其中 } m' \leq \mu \leq M'.$$

但是, 由于函数  $f(t)$  在  $t = x$  时的连续性, 对任何一个  $\varepsilon > 0$ , 可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使当  $|h| < \delta$  时, 对在区间  $[x, x+h]$  上所有的值  $t$

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon.$$

在这样的情形下, 不等式

$$f(x) - \varepsilon \leq m' \leq \mu \leq M' \leq f(x) + \varepsilon$$

<sup>①</sup>提醒一下: 凡可积函数都是有界的 [295].



就成立, 于是

$$|\mu - f(x)| \leq \varepsilon.$$

现在显然

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} u = f(x),$$

这就是所要证明的.

我们已经得到具有巨大原则性和实用意义的结论. 如果假定函数  $f(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上是连续的, 则它是可积的 [298, I], 并且上面的断言可被应用到这个区间的任何一点  $x$  上: 积分 (1) 对变动的积分上限的导数处处等于被积函数在这积分限上的值  $f(x)$ .

另一说法, 对于在区间  $[a, b]$  上连续的函数  $f(x)$  恒有原函数存在; 有变动的积分上限的定积分 (1) 就是它的一个例子.

这样, 最后我们建立了早在 264 目中提到过的那个命题.

特别地, 我们现在可以把勒让德函数  $F$  与  $E$  [293] 写成定积分的形状

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

按照刚才所证明的, 这分别是函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

的原函数, 并且当  $\varphi = 0$  时变成为 0.

**附注** 在本目中所证明过的那些断言, 容易推广到有变动的积分下限的积分的情形上去, 因为 (1°)

$$\int_x^b f(t) dt = - \int_b^x f(t) dt.$$

由此, 积分对  $x$  的导数显然等于  $-f(x)$  (如果点  $x$  是  $f(t)$  在那儿连续的点的话).

★

**306. 第二中值定理** 最后再建立一个关于两个函数乘积的积分

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

的定理.

人们把它表示成各种各样的形式. 我们从证明下面的命题开始:

13° 如果在区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上  $f(x)$  单调递减 (即使是广义的也可以) 并且是非负的, 而  $g(x)$  是可积的, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx, \quad (3)$$



其中  $\xi$  是所述区间中的某一值.

任意用分点  $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  把  $[a, b]$  分成若干部分, 把积分  $I$  表示成下面的形状

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx = \sigma + \rho. \end{aligned}$$

如果用  $L$  表示函数  $|g(x)|$  的上界, 而用  $\omega_i$  (像通常那样) 表示长度为  $\Delta x_i$  的第  $i$  个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上函数  $f(x)$  的振幅, 则显然

$$|\rho| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| |g(x)| dx \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

由此, 由于函数  $f(x)$  的可积性 [298, III], 显然当  $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$  时  $\rho \rightarrow 0$ , 于是

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

现在引进函数

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

并利用它把和数  $\sigma$  写成这样:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1}) - G(x_i)],$$

或者, 最后, 除去括号并按另一种方式集项,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + G(b)f(x_{n-1}).$$

当  $x$  在区间  $[a, b]$  上变化时, 连续函数  $G(x)$  [305, 11°] 有最小值  $m$  与最大值  $M$  [85]. 因为所有的因式

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \text{ (当 } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ 时) 与 } f(x_{n-1})$$

由于对函数  $f(x)$  所作的假定, 都是非负的, 所以, 分别用  $m$  与  $M$  替换  $G$  的值, 我们得到两个数:

$$mf(a) \text{ 与 } Mf(a),$$

数  $\sigma$  包含在它们之间. 作为这个和极限的积分  $I$ , 显然也包含在同样两数之间, 或者换一种方式

$$I = \mu f(a), \text{ 其中 } m \leq \mu \leq M$$



但是, 根据函数  $G(x)$  的连续性, 在区间  $[a, b]$  上可以找到如此的值  $\xi$ , 使得  $\mu = G(\xi)$  [82]. 在这情形下

$$I = f(a)G(\xi),$$

这就等于公式 (3).

类似地, 如果函数  $f(x)$  仍然是非负的, 并且单调递增, 则公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx$$

成立, 其中  $a \leq \xi \leq b$ . 这些公式通常叫做波内(O.Bonnet)公式. 最后,

14° 如果只保留  $f(x)$  单调性的假定, 而不要求它的非负性, 则可以断定:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx. \quad (4)$$

$(a \leq \xi \leq b)$

实际上, 例如设函数  $f(x)$  单调递减; 此时, 显然差  $f(x) - f(b) \geq 0$ , 于是, 只要把公式 (3) 应用到这个函数上, 经过容易的变换后就得到 (4).

所证明的定理就叫做第二中值定理 [比较 304, 10°].

下面的简单说明可使我们能够赋给它以稍微更一般的形式. 如果函数  $f(x)$  在  $a$  与  $b$  两点的值  $f(a)$  与  $f(b)$ , 用满足条件

$$A \geq f(a+0) \text{ 与 } B \leq f(b-0) \text{ (如果 } f \text{ 递减)}$$

$$A \leq f(a+0) \text{ 与 } B \geq f(b-0) \text{ (如果 } f \text{ 递增)}$$

的任何两个数  $A$  与  $B$  来代替, 则不仅积分  $I$  的值不变, 而且保持函数  $f(x)$  的单调性, 于是按照 (4) 的样式, 可以断定:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = A \int_a^{\xi} g(x)dx + B \int_{\xi}^b g(x)dx. \quad (5)$$

特别地,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b-0) \int_{\xi}^b g(x)dx. \quad (5^*)$$

在这里, 也像上面一样,  $\xi$  表示区间  $[a, b]$  中某一数值, 但一般说来, 它依赖于数  $A$  与  $B$  的选取.

### §3. 定积分的计算与变换

**307. 借助于积分和的计算** 现在引进计算定积分的一些例子, 在计算中把定积分直接按照定义当作积分和的极限来看. 预先知道了连续函数的积分存在, 为了计算这个积分, 我们可以专从方便着眼来选取区间的分划与  $\xi$  点.



1)  $\int_a^b x^k dx$  ( $a, b$  乃是任意实数, 而  $k$  是自然数).

首先计算积分  $\int_0^a x^k dx$  ( $a \neq 0$ ). 把区间  $[0, a]$  分成  $n$  个相等的部分, 而在每个部分区间上, 如果  $a > 0$ , 就对区间的右端点计算函数  $x^k$ , 而当  $a < 0$  时, 则对左端点计算函数  $x^k$ . 于是积分和是

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}a\right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1} \cdot \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

并且, 如果考虑到 33 目例题 14),

$$\int_0^a x^k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

由此已经不难得到一般的公式

$$\int_a^b x^k dx = \int_0^b - \int_0^a = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

2)  $\int_a^b x^\mu dx$  ( $b > a > 0, \mu$  是任意实数).

在这次我们把区间  $[a, b]$  分成不相等的若干部分, 就是在  $a$  与  $b$  间插入  $n-1$  个几何中项. 换句话说, 令

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

考虑下列这一串数

$$a, aq, \cdots, aq^i, \cdots, aq^n = b.$$

我们指出, 当  $n \rightarrow \infty$  时公比  $q = q_n \rightarrow 1$ , 所有差  $aq^{i+1} - aq^i$  都小于量  $b(q-1) \rightarrow 0$ .

对左端点计算函数, 有

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i.$$

现在假定  $\mu \neq -1$ ; 于是

$$\sigma_n = a^{\mu+1} (q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1}.$$

并且, 利用已经知道的极限 [77, 例 5), (B)], 我们得到

$$\int_a^b x^\mu dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

在  $\mu = -1$  的情形有

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right),$$

并根据另一已知的结果 [同上, (6)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = \ln b - \ln a.$$



3)  $\int_a^b \sin x dx$ . 把区间  $[a, b]$  分割成  $n$  个相等部分, 令  $h = \frac{b-a}{n}$ ; 如果  $a < b$ , 对右端点计算函数  $\sin x$ , 而当  $a > b$  时, 则对左端点计算  $\sin x$ . 于是

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^n \sin(a + ih).$$

我们要找出等式右端和的简明的表达式, 以  $2 \sin \frac{h}{2}$  乘并除等式右端的和, 然后把所有的项表示成余弦差的形状, 容易得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin(a + ih) &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=1}^n 2 \sin(a + ih) \sin \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=1}^n \left[ \cos \left( a + \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right) - \cos \left( a + \left( i + \frac{1}{2} \right) h \right) \right] \\ &= \frac{\cos \left( a + \frac{1}{2} h \right) - \cos \left( a + \left( n + \frac{1}{2} \right) h \right)}{2 \sin \frac{h}{2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

这样一来,

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[ \cos \left( a + \frac{1}{2} h \right) - \cos \left( b + \frac{1}{2} h \right) \right].$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时  $h \rightarrow 0$ , 所以

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[ \cos \left( a + \frac{1}{2} h \right) - \cos \left( b + \frac{1}{2} h \right) \right] = \cos a - \cos b.$$

类似地, 由初等公式<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^n \cos(a + ih) = \frac{\sin \left( a + \left( n + \frac{1}{2} \right) h \right) - \sin \left( a + \frac{1}{2} h \right)}{2 \sin \frac{h}{2}}. \quad (2)$$

出发, 容易建立

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

4) 为要给出一个稍难的例子, 考虑通常所谓的泊松 (S.D.Poisson) 积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx.$$

因为

$$(1 - |r|)^2 \leq 1 - 2r \cos x + r^2,$$

<sup>①</sup> 它可以从 (1) 以  $a + \frac{\pi}{2}$  代替  $a$  而得到.



所以, 当假定  $|r| \neq 1$  时, 我们看出, 被积函数是连续的, 而积分就存在.

把区间  $[0, \pi]$  分割成  $n$  个相等部分, 即有

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2r \cos k \frac{\pi}{n} + r^2) = \frac{\pi}{n} \ln \left[ (1+r)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - 2r \cos k \frac{\pi}{n} + r^2 \right) \right],$$

其中  $\prod$  是乘积符号. 另一方面, 从代数学知道分解式<sup>①</sup>

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2 \right).$$

当  $z = r$  时利用这个恒等式, 把  $\sigma_n$  表示成下面的形状

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \ln \left\{ \frac{r+1}{r-1} (r^{2n} - 1) \right\}.$$

现在设  $|r| < 1$ , 于是  $r^{2n} \rightarrow 0$ , 因而

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0.$$

如果  $|r| > 1$ , 则把  $\sigma_n$  改写成

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \ln \left\{ \frac{r+1}{r-1} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n}} \right\} + 2\pi \ln |r|$$

后, 我们得到

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 2\pi \ln |r|.$$

读者看到, 按和的极限来计算定积分的直接方法, 甚至在简单的情形下也需要重大的努力; 因而很少利用它们. 在下节中所述的方法是最实用的方法.

**308. 积分学的基本公式** 在 305 目中我们见过, 对于在区间  $[a, b]$  上连续的函数  $f(x)$ , 积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

是原函数. 如果  $F(x)$  是函数  $f(x)$  的任何一个原函数(例如, 用上章 §1 ~ §4 的方法所求得的), 则 [263]

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

<sup>①</sup>在计算 1 的  $2n$  次根的值时, 我们有把  $z^{2n} - 1$  分解成线性因式的这样一个分解式:

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1} \left( z - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right),$$

这儿  $i$  是虚数单位. 把所有共轭因式收集在一起, 我们就得到  $z^{2n} - 1$  等于

$$(z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( z - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left( z - \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2 \right).$$



容易把常数  $C$  定出, 在这里令  $x = a$ , 因为  $\Phi(a) = 0$ , 即有

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \text{ 由此 } C = -F(a).$$

最后

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

特别地, 当  $x = b$  时得到

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (\text{A})$$

这就是积分学的基本公式<sup>①</sup>.

所以, 定积分的值可表示成任何一个原函数在  $x = b$  与  $x = a$  时的二值的差.

如果把中值定理 [304, 9°] 应用到积分上, 并记起  $f(x) = F'(x)$ , 就得到

$$F(b) - F(a) = f(c) \cdot (b - a) = F'(c) \cdot (b - a) \quad (a \leq c \leq b);$$

读者认识这是函数  $F(x)$  的拉格朗日公式 [112]. 可见, 借助于基本公式 (A) 可建立微分中值定理与积分中值定理之间的联系.

公式 (A) 给出计算连续函数  $f(x)$  的定积分的一个有效而简单的方法. 须知对于这些函数的许多简单种类, 我们能够通过初等函数把原函数表示成有限形状. 在这些情形下, 定积分可按照基本公式直接计算. 但需注意, 右端的差数通常写成符号  $F(x)|_a^b$  (“双重替换从  $a$  到  $b$ ”), 而公式写成如下的形状.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (\text{A}^*)$$

例如, 我们一下子得出:

$$1) \int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$$

$$2) \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a > 0, b > 0),$$

$$3) \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a,$$

—— 这些结果, 正是我们在上目中费了很大力气才得到的结果 [比较例题 1), 2), 3)]<sup>②</sup>.

<sup>①</sup>这里的讨论与我们在 264 目中计算函数  $P(x)$  与面积  $P$  时所利用的那些事实完全相似. 公式 (A) 本身可以由比较 264 目与 294 目的那些结果而容易地得到.

<sup>②</sup>上目中例题 4) 就不能这样简单地解决, 因为对应的不定积分不能在有限形状中表示出来.



**309. 例题** 我们再举一些利用公式 (A) 的例子:

4)

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq m).$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \quad [\text{参看 } 255, 17), 18).]$$

类似地

$$(B) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$(r) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \text{ 或 } \pi, \text{ 看是否 } n \neq m \text{ 或 } n = m \text{ 而定.}$$

5) 求下列积分的值 ( $m, n$  是自然数):

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx \quad [\text{费耶 (L.Fejér)}].$$

**提示** (a) 在公式 (2) 中令  $a = 0, h = 2x$  及  $n = m - 1$ , 可以导出

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2 \sin x}.$$

由此, 因为所有单个的项容易按照公式 (A) 积分, 立即可得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) 从公式 (1), 令  $a = -x, h = 2x$ , 求出

$$\sum_{m=1}^n \sin(2m-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

由此, 如果利用上述结果.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = n \frac{\pi}{2}.$$

6) 计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}},$$

其中  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

如果在公式 [283(6\*)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C$$



中使

$$ax^2 + bx + c = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)(1 - 2\beta x + \beta^2),$$

那么, 微分后, 得出

$$ax + \frac{b}{2} = -\alpha(1 - 2\beta x + \beta^2) - \beta(1 - 2\alpha x + \alpha^2).$$

由此容易推出, 当  $x = 1$  时, 在对数符号下的表达式得到值

$$\begin{aligned} & -\alpha(1 - \beta)^2 - \beta(1 - \alpha)^2 + 2\sqrt{\alpha\beta}(1 - \alpha)(1 - \beta) \\ & = -[\sqrt{\alpha}(1 - \beta) - \sqrt{\beta}(1 - \alpha)]^2 = -(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2(1 + \sqrt{\alpha\beta})^2, \end{aligned}$$

而当  $x = -1$  时, 得到值

$$-(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2(1 - \sqrt{\alpha\beta})^2.$$

这样一来, 最后对于所求积分就得到只依赖于乘积  $\alpha\beta$  的简单的表达式<sup>①</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

我们指出, 在推导出基本公式时, 事实上不必要求函数  $F(x)$  是  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上的原函数, 根据 131 目的推论, 假定  $F(x)$  是  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上的原函数, 而在它的端点上, 只要函数  $F(x)$  保持连续性就够了.

因此, 例如, 我们有权利写 [268]:

$$7) \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_{-a}^a = \frac{\pi a^2}{2}.$$

虽然在  $x = \pm a$  时所求得的原函数的导数的问题还待研究.

在计算下面的积分时我们会碰到某些困难:

$$8) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \quad (0 < r < 1),$$

因为在 288, 13) 中所求得的原函数

$$F(x) = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + r}{1 - r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

在  $x = \pm\pi$  时没有意义. 可是, 极限

$$\lim_{x \rightarrow -\pi+0} F(x) = -\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} F(x) = \pi$$

显然存在, 并且如果补充规定  $F(-\pi)$  与  $F(\pi)$  恰好等于这些极限, 则函数  $F(x)$  在区间的端点上不仅是确定的, 而且是连续的. 因此仍然有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = F(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

9) 类似地也可计算积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \cos x \sin x + C \sin^2 x} \quad (AC - B^2 > 0).$$

<sup>①</sup>我们的计算只在  $\alpha \neq \beta$  时是没有错误的, 但容易看出, 这结果在  $\alpha = \beta$  时也是对的.



我们已经有了 [288,10)] 原函数的表达式

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}},$$

对  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  是适合的. 由此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \cos x \sin x + C \sin^2 x} = F(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}},$$

其中记号  $-\frac{\pi}{2}+0, \frac{\pi}{2}-0$  象征着取函数  $F(x)$  的对应的极限值的必要性.

10) 如果在计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$$

时从形式上计算出来的原函数

$$-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$$

出发并在这儿以  $x = 0$  与  $x = 1$  替入, 则对于积分就可以得到离奇的值 0 (正函数的积分不可能有零值!)

错误在于这个表达式当  $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = x_0$  时经历一个跳跃点. 如果——地分别从 0 到  $x_0$  与从  $x_0$  到 1 来计算积分, 就可得到正确的结果

$$\int_0^1 = \int_0^{x_0-0} + \int_{x_0+0}^1 = \frac{\pi}{3}.$$

11) 借助于原函数, 容易计算积分

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &= \ln x \Big|_1^2 = \ln 2, \\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

如果回想一下对应的积分和数趋向于它们, 就可以得到, 例如, 这样一些极限的关系式:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) &= \ln 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2} \right) \cdot n &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**310. 基本公式的另一导出法** 现在把基本公式 (A) 在更一般的假定下建立起来. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可积的, 而在  $[a, b]$  上连续的函数  $F(x)$  在  $(a, b)$  上处处有导数  $f(x)$

$$F'(x) = f(x) \quad (3)$$

或者甚至只在除有限个点外处处有导数  $f(x)$ .

用任意方法把区间  $[a, b]$  用点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$



分成若干部分 [只需照顾到把所有那些不满足关系式 (3) 的点都包括到它们中间就够, 如果有这样的一些点的话], 显然即有

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

把有限增量的公式应用到记号  $\sum$  后面差中的每一个差上去 —— 对于这个公式的应用, 所有的条件都是满足的. 于是得到

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

其中  $\xi_i$  是某一确定的 (虽然对我们来说是未知的) 在  $x_i$  与  $x_{i+1}$  之间的  $x$  值. 因为对于这个值  $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$ , 所以我们可以写

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

在右端得到了函数  $f(x)$  的积分和  $\sigma$ . 我们已假定对于和  $\sigma$  当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 不依赖于数  $\xi_i$  的选取, 存在着确定的极限. 因此, 特别地, 保持着 (在所指出的这些数的选取之下) 常数值的这一和也趋于这积分, 由此就推出

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

在上目中我们曾借助于基本公式计算过定积分. 但它也可以被利用在另一方面. 在基本公式中以  $x$  代替  $b$ , 而以  $F'(x)$  代替  $f(x)$  后, 可以把它写成下面的形状

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt.$$

这样, 借助于极限步骤 (因为定积分是极限), 对给定的导数函数  $F'(x)$ , 原函数  $F(x)$  就可以“还原”出来.

可是, 这是假定导数函数不仅有界, 而且依黎曼定义可积, 但这并不是永远都能实现的.

**311. 递推公式** 我们见过, 基本公式在适当的条件下, 一下子就给出定积分的值. 另一方面, 利用它的帮助, 不定积分理论中的各种递推公式就可改造成为定积分中的类似的公式, 而把某一个定积分的计算化成另一个 (一般说来较为简单的) 定积分的计算.

我们首先指的是分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$



与它的推广 [270, (3) 与 (5)], 以及局部地建立在它上面的另外一些递推公式 [271, (6); 280; 287]. 它们的一般形式是这样的:

$$\int f(x)dx = \varphi(x) - \int g(x)dx. \quad (4)$$

如果这一种公式的应用范围是区间  $[a, b]$ , 则在定积分中的对应公式为

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)dx. \quad (5)$$

在这里假定函数  $f, g$  是连续的.

为了证明起见, 把公式 (4) 中最后一个积分用  $\Phi(x)$  来表示. 于是

$$\int_a^b f(x)dx = [\varphi(x) - \Phi(x)] \Big|_a^b = \varphi(x) \Big|_a^b - \Phi(x) \Big|_a^b.$$

同时, 因为

$$\int_a^b g(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b,$$

所以我们就得到要证明的公式.

特别地, 分部积分公式现在取如下的形状

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (6)$$

而推广公式则变成这样:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \dots + (-1)^n u^{(n)}v] \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}v dx; \quad (7)$$

在这里函数  $u, v$  与所有出现的它们的各级导数仍然都假定是连续的.

确定出数字之间的关系的公式 (5), 原则上比函数参加在内的公式 (4) 更简单些; 如果双重替换等于零, 它就会是特别方便的.

### 312. 例题

#### 1) 计算积分

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx, \quad J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

(当  $m$  为自然数时).

分部积分, 我们得到

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

双重替换变为零. 以  $1 - \sin^2 x$  代替  $\cos^2 x$ , 得到

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$



由此得到递推公式:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

依这公式, 积分  $J_m$  依次地化成  $J_0$  或  $J_1$ . 即当  $m = 2n$  时有

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

如果  $m = 2n + 1$ , 则

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}.$$

对于  $J'_m$  也恰好得到同样的一些结果.

为了把所得到的表达式写得更简明些, 可以利用符号  $m!!$ <sup>①</sup>. 于是可以写

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{当 } m \text{ 是偶数时,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{当 } m \text{ 是奇数时.} \end{cases} \quad (8)$$

## 2) 证明公式

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x dx = 0,$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1},$$

$$(B) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x dx = -\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m+1},$$

$$(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x dx = \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{m+1}$$

(其中  $m$  是任何一个整数).

考虑积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x dx$$

并对它作两次分部积分:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x dx \\ &= \frac{1}{m+2} [\cos^{m+2} x \sin(m+2)x - \cos^{m+1} x \sin x \cos(m+2)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ & \quad + \frac{1}{m+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(m+1) \cos^m x \sin^2 x + \cos^{m+2} x] \cos(m+2)x dx. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>注意,  $m!!$  表示不超过  $m$  而又与  $m$  有相同的奇偶性的那些自然数的乘积.



双重替换变为 0. 在这里就用  $1 - \cos^2 x$  来代替  $\sin^2 x$ , 得到等式

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x dx \\ = -\frac{m+1}{m+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x dx, \end{aligned}$$

由此就推出 (a).

类似地可建立其余的等式.

3) 计算 (当  $n$  为自然数时) 积分

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx, \quad L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx.$$

分部积分, 即有

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx.$$

如果在等式两端各加以  $K_n$ , 那么, 把右端积分符号下的表达式变形后, 容易得到

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1}$$

或者

$$K_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + K_{n-1} \right).$$

按照这个递推公式就容易得到

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right).$$

类似地

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4) 求积分

$$H_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x dx,$$

其中  $k > 0$ , 而  $m$  为自然数.

分部积分 [比较 271,5)]

$$\int_0^1 x^k \ln^m x dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x \Big|_{+0}^1 - \frac{m}{k+1} \int_0^1 x^k \ln^{m-1} x dx$$

引出递推公式

$$H_{k,m} = -\frac{m}{k+1} H_{k,m-1},$$

由此就可得到

$$H_{k,m} = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

这个例子的特殊性在于: 在点  $x = 0$  处, 两个被积函数与替换符号下的函数的值都是作为当  $x \rightarrow +0$  时的极限值而确定出来.



5) 按照 280 目公式 (III) 有 (认定  $p$  及  $q$  是自然数)

$$\int (1-x)^p x^q dx = \frac{(1-x)^p x^{q+1}}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \int (1-x)^{p-1} x^q dx,$$

当在从 0 到 1 的区间上取定积分时, 它给出

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p}{p+q+1} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q dx.$$

逐次应用这个公式, 我们得到

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p(p-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots (q+2)} \int_0^1 x^q dx$$

最后

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

6) 如果在 287 目公式 (IV) 中, 当  $\mu$  及  $\nu$  是自然数时取定积分, 那么, 利用例题 1) 的结果, 可得到更普遍的公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^\nu \cos^\mu x dx = \begin{cases} \frac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (\text{当 } \mu \text{ 及 } \nu \text{ 是偶数时}), \\ \frac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} & (\text{在所有其他情形}). \end{cases}$$

**313. 定积分的换元公式** 同一基本公式 (A) 使我们能够建立定积分符号下的换元法则.

设要求计算积分  $\int_a^b f(x)dx$ , 其中  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数. 令  $x = \varphi(t)$ , 使函数  $\varphi(t)$  合于条件:

1)  $\varphi(t)$  在某一区间  $[\alpha, \beta]$  上确定且连续, 并且当  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  上变化时  $\varphi(t)$  的值不越出区间  $[a, b]$  的范围<sup>①</sup>;

2)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ;

3) 在  $[\alpha, \beta]$  上连续导数  $\varphi'(t)$  存在.

在这些条件下, 公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (9)$$

成立.

由于假定被积函数皆是连续的, 于是不仅是这些定积分而且对应于它们的不定积分就都存在, 那么在公式 (9) 的两侧就都可以利用基本公式. 但如果  $F(x)$  是第一

<sup>①</sup>可能发生这样的事情: 函数  $f(x)$  在比  $[a, b]$  更大的区间  $[A, B]$  上确定且连续, 于是只需要求  $\varphi(t)$  的值不越出区间  $[A, B]$  的范围就够了.



个微分  $f(x)dx$  的一个原函数, 则函数  $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ , 如我们所知道的, 就是第二个微分  $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$  的一个原函数 [参看 268]. 因此同时有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

与

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

由此就推出要证明的等式.

**附注** 我们指出公式 (9) 的一个重要的特性. 在利用换元法计算不定积分的那个时候, 我们得到了用变量  $t$  表示出来的所求函数以后, 应当变回到旧有的变量  $x$ ; 这儿却不需要这样. 如果 (9) 中的第二个积分计算出来了, 这乃是一个数目, 那么第一个积分自然也就计算出来了.

### 314. 例题

1) 借助于替换  $x = a \sin t$  求积分  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ; 这儿值 0 与  $\frac{\pi}{2}$  起  $\alpha$  与  $\beta$  的作用. 我们有

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

[参看 268]

2) 一般地, 当  $n$  是自然数时, 借助于同一替换, 可得

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = a^{2n+1} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

[参看 (8)], 并且类似地

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{\pi}{2}.$$

3)

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx.$$

作替换  $x = a \sec t$ ; 变量  $t$  的积分限 0 与  $\frac{\pi}{3}$  对应于变量  $x$  的积分限  $a$  与  $2a$ . 我们得出

$$\frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{a^2} \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

4) 考虑积分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

用替换  $x = \pi - t$  (其中  $t$  从  $\pi$  变到 0) 可化成下面的等式:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$



或

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

把最后一个积分 (在此积分中仍用  $x$  代换  $t$ ) 移至等号左边, 得到

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

[参看后面的 11), 在那里, 这个例子得到了推广.]

5) 计算积分  $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

替换  $x = \operatorname{tg} \varphi$  (其中  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{4}$ ) 把积分变成  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} \varphi) d\varphi$ . 但

$$1 + \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)}{\cos \varphi},$$

于是

$$J = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \varphi d\varphi.$$

因为两个积分相等 (例如, 用替换  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$ , 并且  $\psi$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到 0, 就可以把第二个积分化成第一个积分), 所以最后

$$J = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

我们指出, 积分  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} dx$  也有相同的值, 这容易用分部积分法证明.

6) 现在建立

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} dt.$$

提示 作替换  $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ .

7) 把一个积分变形成另一个积分

$$\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^{n+1}},$$

认定  $x > 1$  并且  $n$  是自然数.

这可按公式

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta) = 1$$

用变换变量的方法来作到. 由此

$$\cos \varphi = \frac{-\sqrt{x^2 - 1} + x \cos \theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta},$$

其中右端表达式的绝对值不超过 1, 而且对于区间  $[0, \pi]$  上的每一个  $\theta$  都在同一区间上有某一个  $\varphi$  与它单值地相对应. 当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时也有  $\varphi = 0$  或  $\pi$ . 我们有

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{\sin \theta d\theta}{(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^2},$$



而因为

$$\sin \varphi = \frac{\sin \theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta},$$

所以

$$d\varphi = \frac{d\theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta},$$

于是最后得到

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi = \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^{n+1}},$$

由此就推出所要求的等式.

[我们指出, 两个积分 (只相差一因子  $\pi$ ) 都表示第  $n$  个勒让德多项式  $X_n(x)$ , 118, 6).]

8) 对于任何在区间  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) 上连续的函数  $f(x)$ , 永远有

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-t) dt$$

(作替换  $x = a - t, a \geq t \geq 0$ ). 特别地, 因为  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , 所以对任何连续函数  $F(u)$ , 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos x) dx.$$

9) 设  $f(x)$  在对称区间  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上连续. 此时在偶函数的情形 [99, 25)]

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

而在奇函数的情形

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

在两种情形中积分  $\int_{-a}^a$  都可表示成两个积分的和  $\int_{-a}^0 + \int_0^a$  的形状, 并且应用替换  $x = -t$  于它们中的第一个.

10) 设有周期为  $\omega$  的连续周期函数  $f(x)$ , 于是对任何  $x: f(x + \omega) = f(x)$ . 此时在长度等于周期  $\omega$  的任何一个区间上, 这个函数的积分有同样的值

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \int_0^\omega f(x) dx.$$

为要证明, 我们分解  $\int_a^{a+\omega} = \int_a^0 + \int_0^\omega + \int_\omega^{a+\omega}$ , 并且把替换  $x = t + \omega$  应用到右端第三个积分上, 可看出, 它与第一个积分只相差一个符号.

11) 证明

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

其中  $f(u)$  是任何一个在区间  $[0, 1]$  上的连续函数.

提示 利用替换  $x = \pi - t$ .

12) 证明

$$\int_0^{2\pi} \varphi(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^\pi \varphi(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \lambda) d\lambda,$$

其中  $\varphi(u)$  是任何一个对于  $|u| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  连续的函数.



由关系式

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

定出  $\alpha$  后, 我们有

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha).$$

由于 10) 可以写

$$\int_0^{2\pi} \varphi(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha)) d\theta$$

或者, 如果令  $\theta - \alpha = \lambda$  并且用 9),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \lambda) d\lambda = 2 \int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \lambda) d\lambda.$$

13) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin 2u) \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos^2 v) \cos v dv,$$

其中  $g(z)$  是  $z$  在区间  $[0, 1]$  上的任何一个连续函数.

把第一个积分表示成两个积分的和的形状  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ , 用替换  $u = \frac{\pi}{2} - u'$  把它们中的第二个也引到区间  $[0, \frac{\pi}{4}]$  上, 就得到

$$\int_0^{\pi} g(\sin 2u)(\cos u + \sin u) du.$$

在这里我们从关系式

$$\sin 2u = \cos^2 v$$

出发来作换元; 显然  $v$  从  $\frac{\pi}{2}$  减少到 0 与  $u$  从 0 增加到  $\frac{\pi}{4}$  相对应. 取微分

$$\cos 2u du = -\sin v \cos v dv;$$

考虑到

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \sin^2 2u} = \sqrt{1 - \cos^4 v} = \sin v \sqrt{1 + \cos^2 v}$$

及

$$1 + \cos^2 v = 1 + 2 \sin u \cos u = (\sin u + \cos u)^2,$$

最后得出:

$$(\sin u + \cos u) du = -\cos v dv.$$

现在已经不难得到所要求的结果了.

14) 最后我们回到泊松积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$$

[比较 307, 4)]. 我们已经知道, 当  $|r| \neq 1$  时被积函数连续且积分存在. 我们现在利用一个巧妙方法重新把它计算一下, 在这方法中换元起着重要的作用.



预先指出, 由显然的不等式

$$(1 - |r|)^2 \leq 1 - 2r \cos x + r^2 \leq (1 + |r|)^2,$$

取对数, 然后从 0 到  $\pi$  积分, 得到 (当  $|r| < 1$  时)

$$2\pi \ln(1 - |r|) \leq I(r) \leq 2\pi \ln(1 + |r|).$$

由此显见, 当  $r \rightarrow 0$  时也有  $I(r) \rightarrow 0$ .

现在考虑积分

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1 + 2r \cos x + r^2) dx.$$

如果在这个积分中令  $x = \pi - t$ , 并且  $t$  从  $\pi$  变到 0, 那么就出现

$$I(-r) = \int_\pi^0 \ln(1 + 2r \cos(\pi - t) + r^2) d(\pi - t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt = I(r).$$

在这种情形中

$$2I(r) = I(r) + I(-r) = \int_0^\pi \ln[(1 - 2r \cos x + r^2)(1 + 2r \cos x + r^2)] dx$$

或者

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2 \cos 2x + r^4) dx.$$

令  $x = \frac{t}{2}$  (其中  $t$  从 0 变到  $2\pi$ ), 得到

$$2I(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r^2 \cos t + r^4) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi + \frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi}.$$

所得到的积分中的最后一个积分用替换  $t = 2\pi - u$  可 (其中  $u$  从  $\pi$  变到 0) 化成第一个积分, 于是我们得到

$$2I(r) = I(r^2),$$

由此

$$I(r) = \frac{1}{2} I(r^2).$$

在这里以  $r^2$  代替  $r$ , 如此下去, 容易得出普遍公式

$$I(r) = \frac{1}{2^n} I(r^{2^n}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

现在设  $|r| < 1$ , 于是当  $n \rightarrow \infty$  时  $r^{2^n} \rightarrow 0$ ; 同时因为 (按照开始时的说明)  $I(r^{2^n}) \rightarrow 0$ , 所以应当恒有

$$I(r) = 0 \quad \text{当 } |r| < 1 \text{ 时.}$$

现在当  $|r| > 1$  时容易计算这个积分. 实际上

$$1 - 2r \cos x + r^2 = r^2 \left( 1 - 2 \cdot \frac{1}{r} \cos x + \frac{1}{r^2} \right),$$

因而

$$\ln(1 - 2r \cos x + r^2) = 2 \ln |r| + \ln \left( 1 - 2 \cdot \frac{1}{r} \cos x + \frac{1}{r^2} \right),$$



于是, 从 0 到  $\pi$  积分, 即有

$$I(r) = 2\pi \ln |r| + I\left(\frac{1}{r}\right).$$

但是, 按照上述,  $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ; 因而当  $|r| > 1$  时有

$$I(r) = 2\pi \ln |r|.$$

我们在 307 目中也得到同样的结果.

**315. 高斯公式、蓝登变换** 还是作为换元法的一个例子, 我们考虑高斯 (C.F.Gauss) 为了变换积分

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (a > b > 0)$$

的形状所建立的著名的公式.

这里令

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta},$$

容易看出, 当  $\theta$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\varphi$  也在同一范围内增加. 取微分

$$\cos \varphi d\varphi = 2a \frac{(a+b) - (a-b) \sin^2 \theta}{[(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta]^2} \cos \theta d\theta.$$

但是

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \cos \theta,$$

于是

$$d\varphi = 2a \frac{(a+b) - (a-b) \sin^2 \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}},$$

另一方面

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \frac{(a+b) - (a-b) \sin^2 \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta}$$

因而最后

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}.$$

如果令  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{ab}$ , 则

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

这就是高斯公式.

反复应用这个变换, 我们得到

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

其中整序变量  $a_n, b_n$  由递推关系式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$



定出. 我们已经知道 [35,3)], 这两个整序变量趋于某一公共极限  $\mu = \mu(a, b)$ , 我们把它叫做数  $a$  与  $b$  的“算术几何中值”. 从易于得到的不等式

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n},$$

取极限, 现在得到

$$G = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}, \text{ 由此 } \mu(a, b) = \frac{\pi}{2G}.$$

这样一来, 数  $G$  与  $\mu$  中的每一个都可以用另一个直接表出. 例如, 要计算积分

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}},$$

这里  $a = \sqrt{2}, b = 1$ , 前述的整序变量  $a_n$  与  $b_n$  很快地趋于  $\mu$ :  $a_4$  与  $b_4$  二者已近似等于 1.198 140,  $\mu$  可以令其等于这个数. 于是我们近似得到

$$G = \frac{\pi}{2\mu} \doteq 1.311\ 028\ 8.$$

反之, 积分  $G$  可归结到第一类全<sup>①</sup>椭圆积分:

$$G = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} \mathbf{K} \left( \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right),$$

且可以容易地按照椭圆积分表计算. 现在考虑第一类全椭圆积分

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

在模  $k$  的任何值下它可从  $G$  当  $a = 1$  及  $b = \sqrt{1 - k^2} = k'$  时得出. 想把高斯公式应用到第一类全椭圆积分上, 我们首先计算

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{2} = \frac{1 + k'}{2}, b_1 = \sqrt{k'},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \frac{1}{a_1} = 1 + k_1,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = (1 + k_1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta}}$$

或者

$$\mathbf{K}(k) = (1 + k_1) \mathbf{K}(k_1).$$

这个与高斯公式相当的公式, 实际上在高斯以前就得到了, 而且是所谓的蓝登(Landen)变换的特殊情形.

<sup>①</sup>勒让德积分  $\mathbf{F}(k, \varphi)$  与  $\mathbf{E}(k, \varphi)$  [293,305] 当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时叫做全积分: 在这情形时, 在它们的记号中通常没有第二个自变量, 因而简单写作  $\mathbf{K}(k), \mathbf{E}(k)$ . 对于全积分有一些特别的积分值表.



逐次应用这个公式, 我们得到

$$K(k) = (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)K(k_n),$$

其中数列  $k_n$  由

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}},$$

归纳地定出, 于是  $0 < k_n < 1$  及  $k_n < k_{n-1}^2$ , 这就可保证  $k_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时迅速地趋于 0. 同时

$$\begin{aligned} 0 < K(k_n) - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{\sqrt{1 - k_n^2}}, \end{aligned}$$

由此当  $n \rightarrow \infty$  时,  $K(k_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , 因而, 最后,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n).$$

积分  $K(k)$  的近似计算就以此为根据, 当  $n$  充分大时, 简直认为它是等于:

$$K(k) \doteq \frac{\pi}{2} (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n).$$

**316. 换元公式的另一导出法** 现在我们把假定条件改变一下而给出公式 (9) 的另一导出法.

首先 (而这是最重要的) 我们不假定函数  $f(x)$  是连续的, 而只假定是可积的. 但从函数  $\varphi(t)$  那里我们补充要求: 当  $t$  从  $\alpha$  变到  $\beta$  时它从值  $a = \varphi(\alpha)$  单调地变到值  $b = \varphi(\beta)$ .

为明确起见, 设  $a < b$  及  $\alpha < \beta$ , 于是函数  $\varphi(t)$  单调递增.

借助于点

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = \beta$$

任意分区间  $[a, b]$  成若干部分; 如果令  $x_i = \varphi(t_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ ), 则同时就有

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

如果长度  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  中最大的一个 (用  $\lambda$  表示它) 趋于零, 那么, 由于函数  $x = \varphi(t)$  的 (一致) 连续性, 长度  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$  中最大的一个同样也趋于零 [参看 87].

现在在每一个区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上任取一数  $\tau_i$  并作 (9) 中第二个积分的积分和

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i.$$



令  $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ , 于是  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ . 如果在区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上把有限增量公式应用到函数  $\varphi(t)$  上去, 就得到

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i,$$

其中也有  $t_i < \bar{\tau}_i < t_{i+1}$ , 但  $\bar{\tau}_i$  (对我们来说是未知的) 通常与随意所取的值  $\tau_i$  是不同的. 同时对于 (9) 中第一个积分的积分和

$$\bar{\sigma} = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i.$$

现在可赋予下面的形状

$$\bar{\sigma} = \sum_i f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i.$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 显然这个和的极限就是积分  $\int_a^b f(x) dx$ . 为要证明和  $\sigma$  也趋于这极限, 只要证明差  $\sigma - \bar{\sigma}$  趋于零就够了.

给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 由于函数  $\varphi'(t)$  的 (一致) 连续性, 可以找到如此的  $\delta > 0$ , 使得当  $\lambda < \delta$  时, 不等式

$$|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{\tau}_i)| < \varepsilon$$

成立 [参看 87 目推论]. 于是

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leq \sum_i |f(\varphi(\tau_i))| |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i < L(\beta - \alpha) \varepsilon,$$

如果用  $L$  表示  $|f(x)|$  的上界而用  $\beta - \alpha$  代替和  $\sum \Delta t_i$  的话.

现在很清楚, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时和  $\sigma$  趋于极限  $\int_a^b f(x) dx$ , 而这就是说, 积分  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  存在并且公式 (9) 成立. 证明已完全了.

**附注** 我们特别强调: 根据所证明的结果, 在 314 目内例题 8), 9), 10) 中所建立的那些简单而常常有用的公式, 现可推广到任何可积函数  $f(x)$  的情形上去了.

## §4. 定积分的一些应用

**317. 沃利斯公式** 从 312 目中的公式 (8) 容易推出著名的 沃利斯 (J. Wallis) 公式.

假定  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 即有不等式

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

在从 0 到  $\frac{\pi}{2}$  的区间上积分这些不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$



由此, 由于 (8), 得出

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

或

$$\left[ \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[ \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}.$$

因为在两极端表达式之间的差

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \left[ \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2},$$

显然当  $n \rightarrow \infty$  时趋于零, 所以  $\frac{\pi}{2}$  是它们的公共极限. 因此

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

或

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

这就是沃利斯公式. 作为第一个把数  $\pi$  表示成容易计算的有理数列的极限的形状, 它有着历史上的兴趣. 在理论上的研究中现在也利用它 [例如, 参看 406]. 对于数  $\pi$  近似值的计算, 现在有快得多的方法来达到目的 [410].

**318. 带余项的泰勒公式** <sup>45)</sup> 在推广分部积分公式 (7)[311] 中, 令  $v = (b-x)^n$ . 此时

$$v' = -n(b-x)^{n-1}, v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \dots$$

$$v^{(n)} = (-1)^n n \cdot (n-1) \cdots 1, v^{(n+1)} = 0;$$

当  $x = b$  时所有函数  $v, v', v'', \dots, v^{(n-1)}$  都变成零. 对  $u, u', u'' \dots$  利用函数记号  $f(x), f'(x), f''(x), \dots$ , 改写 (7) 成下面的形状

$$0 = (-1)^n \left[ n! f(b) - n! f(a) - n! f'(a)(b-a) - \frac{n!}{2!} f''(a)(b-a)^2 - \dots - f^{(n)}(a)(b-a)^n \right] \\ + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

由此得到带定积分形状的余项的泰勒公式

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

仍用 124 ~ 126 目的记号, 在这儿用  $x$  代替  $b, x_0$  代替  $a$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

<sup>45)</sup> 在本目中遇到的所有函数都假定是连续的.



与 124 及 126 目中研究过的余项表达式不同, 这个新的余项表达式中并不包含任何的未知数.

从这个表达式, 我们还可以导出我们已经熟悉的余项公式. 例如, 利用被积函数的因式  $(x-t)^n$  不改变符号, 可以把 [304, 10°] 推广中值定理应用到最后的积分上去

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

其中  $c$  包含在区间  $[x_0, x]$  内. 这样我们重新得到了拉格朗日余项公式.

**319. 数  $e$  的超越性** 第 311 目的公式 (7) 还可以作为证明一个对于数  $e$  极著名的埃尔米特定理的出发点.

所有的实数 (一般地复数也是) 可以分成两类 —— 代数数与超越数. 一个数, 如果它是一个带有有理系数的 (显然, 不减普遍性, 可以把这些系数认为是整数.) 代数方程的根, 就叫做代数数; 在相反的情形下的数叫做超越数.

任何一个有理数, 或者用有理数开根号来表示的无理数, 可以作为代数数的例子: 数  $-\frac{11}{17}$  是方程  $17x + 11 = 0$  的根, 而数  $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$  是方程  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3 = 0$  的根, 等等.

埃尔米特确定了  $e$  是超越数<sup>①</sup>. 我们就来证明这个定理.

假定  $e$  是方程

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_m e^m = 0 \quad (1)$$

的根, 其中所有系数  $c_0, c_1, \dots, c_m$  都是整数.

在 311 目公式 (7) 中设  $u = f(x)$  是任意  $n$  次多项式, 而  $v = (-1)^{n+1} e^{-x}$ ; 此时, 如果取  $a = 0$ , 因为  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , 这个公式就取形状:

$$\int_0^b f(x) e^{-x} dx = -e^{-x} [f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)] \Big|_0^b.$$

为简便起见, 令

$$f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = F(x),$$

由此有

$$e^b F(0) = F(b) + e^b \int_0^b f(x) e^{-x} dx.$$

在这里依次取  $b = 0, 1, 2, \dots, m$ ; 以  $c_0, c_1, \dots, c_m$  分别乘所得的等式并相加起来, 由于 (1), 得到最后的等式

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx, \quad (2)$$

注意这个等式对任何多项式  $f(x)$  应当成立. 现在我们要证, 这个多项式可以如此选取, 使得等式 (2) 成为不可能; 以此证明定理.

为了这个目的, 令

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-m)^p,$$

<sup>①</sup>随后林德曼(F.Lindemann)证明了数  $\pi$  的超越性, 由此首先确立了自古以来著名的化圆为方问题的不可解性.



其中  $p$  是大于  $m$  与  $|c_0|$  的素数. 这个多项式的  $p$  阶及  $p$  阶以上的导数有整系数并且这些系数被  $p$  整除; 这可由  $p$  个连贯的自然数的乘积被  $p!$  整除直接推出<sup>①</sup>. 因此在  $x$  的任何整数值下所有这些导数的值都是整数, 而且是  $p$  的倍数. 因为当  $x = 1, 2, \dots, m$  时多项式  $f(x)$  与它的前  $p-1$  阶导数变为零, 所以  $F(1), F(2), \dots, F(m)$  是一个整数的  $p$  倍.

$F(0)$  却是另外一种情形. 当  $x = 0$  时多项式  $f(x)$  只有  $p-2$  个导数变为零, 于是

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots$$

所有从第二项开始的那些项, 如我们所知, 都是  $p$  的整数倍数; 但  $f^{(p-1)}(0) = [(-1)^m m!]^p$ , 而  $F(0)$  就随着它而不被  $p$  所整除, 又因在对  $p$  所作的假定下  $c_0$  不能被  $p$  所整除, 所以得到结论: 在等式 (2) 右端的前一个和数是不被  $p$  所整除的整数, 因此显然不等于零.

现在来讨论等式 (2) 中的第二个和数, 在区间  $[0, m]$  上, 显然

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} m^p m^p \dots = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

因此

$$\left| \int_0^i f(x) e^{-x} dx \right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \int_0^i e^{-x} dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

并且, 如果用  $C$  表示和数  $|c_0| + |c_1| + |c_2| + \dots + |c_m|$ ,

$$\left| \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx \right| < C e^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = C e^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$

但我们知道 [35.1)], 最后的因式当  $p \rightarrow \infty$  时趋于零. 于是在 (2) 中的第二个和当  $p$  充分大时<sup>②</sup>, 绝对值将比第一个和为小. 在这样的情形下, 它们的和不可能等于零, 我们就得到了矛盾.

**320. 勒让德多项式** 现在提出一个问题——找这样一个  $n$  次多项式  $X_n(x)$ , 使得对任何次数低于  $n$  的多项式  $Q(x)$ , 等式

$$\int_a^b X_n(x) Q(x) dx = 0 \quad (3)$$

被满足, 其中  $a$  与  $b$  是随意的, 但是固定的数.

每一个  $n$  次多项式  $X_n(x)$  可以看作某一个  $2n$  次的多项式  $R(x)$  的第  $n$  阶导数, 而  $R(x)$  可从  $X_n(x)$  继续作  $n$  次积分得到. 如果在每个积分下这样选取随意常数, 使得当  $x = a$  时积分变成零, 则多项式  $R(x)$  还满足条件

$$R(a) = 0, R'(a) = 0, \dots, R^{(n-1)}(a) = 0. \quad (4)$$

所以, 我们的问题就归结为寻求这样的—一个  $2n$  次多项式  $R(x)$ , 使得对于任何次数低于  $n$  的多项式  $Q(x)$

$$\int_a^b R^{(n)}(x) Q(x) dx = 0 \quad (5)$$

<sup>①</sup>译者注: 注意  $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} = C_p^n$ .

<sup>②</sup>译者注: 我们有任意大的素数, 因为如若不然的话, 则素数只能有有限个:  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ; 除此而外, 别无素数. 但是  $p_1 p_2 \dots p_k + 1$  显然是一个异于  $p_1, p_2, \dots, p_k$  的素数, 乃生矛盾.



并且除此之外, 等式 (4) 被满足. 但依 311 目公式 (7), 如果在其中以  $n-1$  代替  $n$ ,

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)dx = [Q(x)R^{(n-1)}(x) - Q'(x)R^{(n-2)}(x) + \cdots \pm Q^{(n-1)}(x)R(x)] \Big|_a^b \mp \int_a^b Q^{(n)}(x)R(x)dx,$$

如果注意 (4), 及  $Q^{(n)}(x) \equiv 0$ , 则条件 (5) 化为下面的形状

$$Q(b)R^{(n-1)}(b) - Q'(b)R^{(n-2)}(b) + \cdots \pm Q^{(n-1)}(b)R(b) = 0. \quad (6)$$

由于  $n-1$  次多项式  $Q(x)$  的完全随意性, 这个多项式以及它的逐次导数当  $x=b$  时的值  $Q(b), Q'(b), \cdots, Q^{(n-1)}(b)$  可以看作是随意的数, 此时条件 (6) 就与下列条件等价:

$$R(b) = 0, R'(b) = 0, \cdots, R^{(n-1)}(b) = 0. \quad (7)$$

从 (4) 与 (7) 看出, 多项式  $R(x)$  应当以  $a$  与  $b$  为  $n$  重根, 而因此, 只可能与乘积  $(x-a)^n(x-b)^n$  相差一个常数因子. 这样, 最后

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n].$$

特别地, 如果取  $a = -1$  与  $b = +1$ , 就得到我们已经熟知的勒让德多项式

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

在前面我们约定 [118,6)], 用  $P_n(x)$  表示勒让德多项式, 如果常数  $c_n$  这样选择:  $c_n = \frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{(2n)!!}$ , 则  $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$ . 通常还令  $P_0(x) = 1$ . 多项式  $P_n(x)$  所有的项的指数都与  $n$  有相同的奇偶性. 最高次项的系数显然是

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2n!!} = \frac{(2n-1)!!}{n!},$$

按照勒让德多项式定义, 永远有

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q(x)dx = 0, \quad (8)$$

不管  $Q(x)$  是次数低于  $n$  的怎样的多项式. 特别地, 如果  $n$  与  $m$  是两个不相等的非负整数, 则

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0. \quad (9)$$

我们要找出积分  $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx$  的值; 它与积分  $\int_{-1}^1 \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx$  所不同的只是因子  $c_n^2 = \frac{1}{(2n!!)^2}$ . 如果重新把 311 目的公式 (7) 应用到后面这个积分上, 以  $n-1$  代替  $n$  并令

$$u = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad v = (x^2-1)^n,$$



则它可化为积分

$$(-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx = 2 \cdot 2n! \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

(所有积分外的项都消失了, 因为函数  $v$  与它的所有前  $n-1$  阶导数当  $x = \pm 1$  时变成 0). 在这儿令  $x = \sin t$  [参看 314, 2)], 得到

$$2 \cdot (2n)! \frac{2n!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} ((2n)!!)^2,$$

于是最后

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (10)$$

末了, 利用勒让德多项式的特性, 导出联系着三个相连贯的勒让德多项式的递推关系式.

预先指出, 乘幂  $x^n$  可以表示成带常数系数的  $P_0, P_1, \dots, P_n$  的线性齐次函数的形状; 于是对于任何  $n$  次多项式同样是对的. 所以

$$xP_n = a_0 P_{n+1} + a_1 P_n + a_2 P_{n-1} + a_3 P_{n-2} + \dots,$$

其中  $a_0, a_1, a_2, \dots$  是常数系数. 容易确定  $a_3 = a_4 = \dots = 0$ . 例如, 为要定出  $a_3$ , 我们以  $P_{n-2}$  乘这个等式两端并从  $-1$  到  $+1$  积分

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 xP_n \cdot P_{n-2} dx &= a_0 \int_{-1}^1 P_{n+1} P_{n-2} dx + a_1 \int_{-1}^1 P_n P_{n-2} dx \\ &\quad + a_2 \int_{-1}^1 P_{n-1} P_{n-2} dx + a_3 \int_{-1}^1 P_{n-2}^2 dx + \dots \end{aligned}$$

由于 (8) 与 (9), 所有的积分, 除一个外, 都是零, 我们就得到

$$a_3 \int_{-1}^1 P_{n-2}^2 dx = 0, \quad \text{由此 } a_3 = 0.$$

系数  $a_1$  也等于零, 因为等式左端完全不包含带  $x^n$  的项. 为了确定  $a_0$ , 我们使等式两端的  $x^{n+1}$  的系数相等

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0 \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}, \quad \text{由此 } a_0 = \frac{n+1}{2n+1}.$$

最后, 为要找出  $a_2$ , 使等式两端当  $x = 1$  时相等:

$$1 = a_0 + a_2, \quad \text{于是 } a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}.$$

把所求得的系数的值代入原式, 最后得到

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0. \quad (11)$$

这就是所要求的递推关系式, 它使我们能够从  $P_0 = 1$  与  $P_1 = x$  出发依次找出勒让德多项式:

$$P_2 = \frac{3x^2 - x}{2}, P_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2}, P_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, \dots$$



**321. 积分不等式** 在 133 目与 144 目曾讲过一系列有关和式的不等式, 现在指出, 对于积分可以建立类似的不等式, 此处所考虑的函数  $p(x), \varphi(x), \psi(x)$  都将假定是可积的.<sup>①</sup>

1) 在 133 目, 我们有不等式 (4), 它可改写为:

$$e^{\frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i}} \leq \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}. \quad (12)$$

考虑在区间  $[a, b]$  内的正函数  $p(x)$  与  $\varphi(x)$ , 用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

把区间  $[a, b]$  分成具有长度  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  的一些部分, 现在在所写出的不等式中令  $p_i = p(x_i) \cdot \Delta x_i, a_i = \varphi(x_i)$ ; 得到

$$e^{\frac{\sum p(x_i) \cdot \ln \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i}{\sum p(x_i) \cdot \Delta x_i}} \leq \frac{\sum p(x_i) \varphi(x_i) \Delta x_i}{\sum p(x_i) \Delta x_i}.$$

在这里所有的和都具有积分和的形式并且当  $\Delta x_i \rightarrow 0$  时趋于相应的积分, 这样一来, 在取极限后, 我便得到不等式 (12) 的“积分类似物”:

$$e^{\frac{\int_a^b p(x) \ln \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}} \leq \frac{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

特别地, 当  $p(x) \equiv 1$  时, 将有:

$$e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \varphi(x) dx} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

表达式右边称为函数  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  内的值的算术中项, 而表达式左边 —— 是其几何中项.

2) 现在我们来导出柯西-赫尔德不等式与 闵可夫斯基不等式的积分类似物 [133, (5) 与 (7)]:

$$\sum a_i b_i \leq \left\{ \sum a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum b_i^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}} \quad (13)$$

及

$$\left\{ \sum (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \quad (14)$$

$$\left( k, k' > 1; \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \right).$$

设在区间  $[a, b]$  内给定正函数  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$ ; 如同前面那样用点  $x_i$  对这个区间作分划, 在 (13) 中令

$$a_i = \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i^{\frac{1}{k}}, \quad b_i = \psi(x_i) \cdot \Delta x_i^{\frac{1}{k'}},$$

而在 (14) 中令

$$a_i = \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i^{\frac{1}{k}}, \quad b_i = \psi(x_i) \cdot \Delta x_i^{\frac{1}{k}}.$$

<sup>①</sup>从这个假设已可推出其他在后面所遇到的函数的可积性: 为了说明这一点, 只需引用 299 目 II 及 300 目的 4).



于是有:

$$\sum \varphi(x_i)\psi(x_i)\Delta x_i \leq \left\{ \sum (\varphi(x_i))^k \cdot \Delta x_i \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum (\psi(x_i))^{k'} \cdot \Delta x_i \right\}^{\frac{1}{k'}}$$

及

$$\left\{ \sum (\varphi(x_i) + \psi(x_i))^k \cdot \Delta x_i \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum (\varphi(x_i))^k \cdot \Delta x_i \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum (\psi(x_i))^k \cdot \Delta x_i \right\}^{\frac{1}{k}}.$$

令  $\Delta x_i \rightarrow 0$  取极限, 最后得

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi dx \leq \left\{ \int_a^b \varphi^k dx \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \int_a^b \psi^{k'} dx \right\}^{\frac{1}{k'}} \quad (13^*)$$

及

$$\left\{ \int_a^b (\varphi + \psi)^k dx \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \int_a^b \varphi^k dx \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \int_a^b \psi^k dx \right\}^{\frac{1}{k}}. \quad (14^*)$$

注意当  $k' = k = 2$  时的特殊情况:

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi dx \leq \sqrt{\int_a^b \varphi^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi^2 dx} \quad (13')$$

及

$$\sqrt{\int_a^b [\varphi + \psi]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b \varphi^2 dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^2 dx}. \quad (14')$$

此二式中的第一个属于布尼亚科夫斯基, 第二个经二次方后很容易归结到第一式.

3) 最后转而研究 詹森不等式 [144, (12\*)]:

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i}, \quad (15)$$

在这里假设函数  $f(x)$  在某个区间  $\mathcal{X}$  内是凸函数,  $x_i$  是  $\mathcal{X}$  内的点;  $p_i$  是正数. 设在某个区间  $[a, b]$  内给定函数  $\varphi(x)$ , 其值含于  $\mathcal{X}$  内, 且函数  $p(x)$  是正的. 现在令  $x_i$  表示区间  $[a, b]$  的分点; 先前在 (15) 中的  $x_i$  用  $\varphi(x_i)$  代替, 而  $p_i$  用  $p_i(x)\Delta x_i$  代替. 如同上面那样从积分和变到积分, 便得到 詹森积分不等式:

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b p(x)f(\varphi(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

## §5. 积分的近似计算

**322. 问题的提出、矩形及梯形公式** 设要求计算定积分  $\int_a^b f(x)dx$ , 其中  $f(x)$  是某一给定在区间  $[a, b]$  上的连续函数. 在 §3 我们有过许多计算这一种积分的例题, 或是借助于原函数 (如果积分可表示成有限形状的话), 或是 —— 不经过原函数 —— 借助于各种各样的, 大部是技巧性的方法来计算. 但是必须指出, 用这些办法只能解决很狭隘的一类积分; 在它的范围外通常采用各种近似计算的方法.

在本节我们要熟习这些方法中最简单的几种, 在这几种方法中, 积分的近似公式乃是按照一系列 (常是等距的) 自变量的值而计算出来的一系列被积函数的值所组成的.



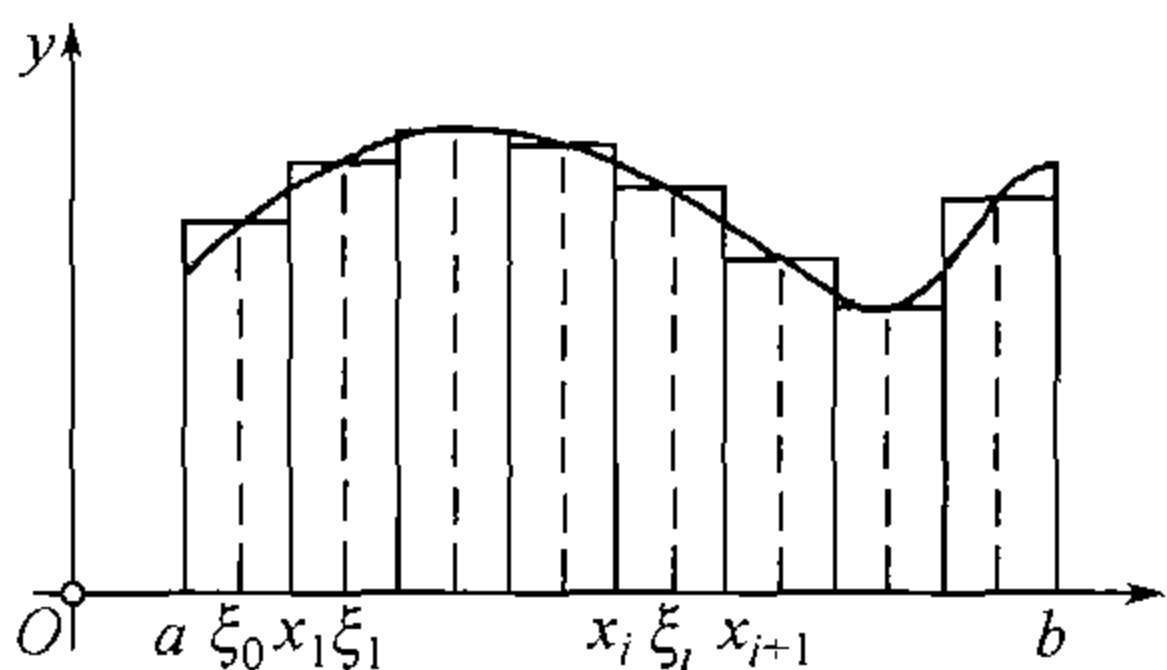


图 6

属于这儿的最初几个最简单的公式, 可从几何的考虑得到. 把定积分  $\int_a^b f(x)dx$  解释为被曲线  $y = f(x)$  所界定的图形的面积 [294], 我们就提出了关于定出这个面积的问题.

首先, 再一次利用引出定积分概念的那一想法, 可以把整个图形 (图 6) 分成若干小条, 比方说, 有同一宽度  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$  ①的小条, 然后, 用矩形近似地代替每一个小条, 而取它的某一个纵坐标作为矩形的高. 这使我们得到公式

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n} [f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})],$$

其中  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ). 这儿所求曲边图形的面积就被某一个由矩形组成的阶梯状图形面积所代替 (或者可说——如果乐意的话——定积分被积分和所代替). 这个近似公式就叫做 **矩形公式**.

在实用上通常取  $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+\frac{1}{2}}$ ; 如果对应的中间纵坐标  $f(\xi_i) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$  用  $y_{i+\frac{1}{2}}$  表示, 则公式可改写为

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n} (y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}). \quad (1)$$

以后, 当说到矩形公式时, 我们所指的就是这个公式.

几何的考虑很自然地也引出另一个常常应用的近似公式, 将给定曲线用内接于它的, 顶点为  $(x_i, y_i)$  的折线来代替, 其中  $y_i = f(x_i)$ , ( $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ). 于是我们的曲边图形就被由一系列梯形组成的图形所代替 (图 7). 如预先认定, 区间  $[a, b]$  分成相等的若干部分, 则这些梯形的面积是

$$\frac{b-a}{n} \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{b-a}{n} \frac{y_1 + y_2}{2}, \dots, \frac{b-a}{n} \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

把它们加起来, 我们得到新的近似公式

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

这就是所谓**梯形公式**.

可以证明, 当  $n$  无限增加时, 矩形公式与梯形公式的误差都无限地减小. 这样, 当  $n$  充分大时, 这两个公式都以任意程度的精确性表达出所求的积分值.

作为例题取我们已经知道的积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785\,398\dots$$

而把两个近似公式应用到它上面去, 取  $n = 10$  并计算到四位小数.

①我们保留 394 目的记号.



按照矩形公式有

$x_{1/2} = 0.05$	$y_{1/2} = 0.997\ 5$	
$x_{3/2} = 0.15$	$y_{3/2} = 0.978\ 0$	
$x_{5/2} = 0.25$	$y_{5/2} = 0.941\ 2$	
$x_{7/2} = 0.35$	$y_{7/2} = 0.890\ 9$	
$x_{9/2} = 0.45$	$y_{9/2} = 0.831\ 6$	$\frac{7.856\ 2}{10} = 0.785\ 62$
$x_{11/2} = 0.55$	$y_{11/2} = 0.767\ 8$	
$x_{13/2} = 0.65$	$y_{13/2} = 0.703\ 0$	
$x_{15/2} = 0.75$	$y_{15/2} = 0.640\ 0$	
$x_{17/2} = 0.85$	$y_{17/2} = 0.580\ 6$	
$x_{19/2} = 0.95$	$y_{19/2} = 0.525\ 6$	
和 7.856 2		

而按照梯形公式

$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1.000\ 0$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 0.990\ 1$
$x_{10} = 1.0$	$y_{10} = 0.500\ 0$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0.961\ 5$
和 1.500 0		$x_3 = 0.3$	$y_3 = 0.917\ 4$
$\frac{1}{10} \left( \frac{1.500\ 0}{2} + 7.099\ 8 \right) = 0.784\ 98$		$x_4 = 0.4$	$y_4 = 0.862\ 1$
		$x_5 = 0.5$	$y_5 = 0.800\ 0$
		$x_6 = 0.6$	$y_6 = 0.735\ 3$
		$x_7 = 0.7$	$y_7 = 0.671\ 1$
		$x_8 = 0.8$	$y_8 = 0.609\ 8$
		$x_9 = 0.9$	$y_9 = 0.552\ 5$
		和 7.099 8	

所得到的两个近似结果具有大约同样的精确度 —— 它们与真值 (在比真值稍大一方面与比真值稍小一方面) 相差小于 0.000 5.

读者当然了解, 我们在这儿能够估计误差, 只因为预先已经知道积分的正确值. 为了使我们的公式对近似计算是真正合适的, 必须有一个关于误差的方便的表达式, 它使我们不仅能够在给定  $n$  时估计误差, 而且能够挑选保证所要求的精确度的  $n$ . 我们将在 325 目中讲述这个问题.

**323. 抛物线型插值法** 对于积分  $\int_a^b f(x)dx$  的近似计算, 可以试一试用与  $f(x)$  “逼近” 的多项式

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k \quad (3)$$

来代替函数  $f(x)$ , 并令

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b P_k(r)dx.$$

可以换一种说法, 在这儿 —— 在计算面积时 —— 给定 “曲线”  $y = f(x)$  可用 “ $k$  级抛物线” 来代替, 因此这一步骤得到抛物线型插值法的名称.

插值多项式  $P_k(x)$  本身的选取多半用下面的方法来进行. 在区间  $[a, b]$  上取自变量  $x$  的  $k+1$  个值  $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_k$  并且这样挑选多项式  $P_k(x)$ , 使得在所取的  $x$  值下它的值与函数  $f(x)$  的值一



致. 多项式  $P_k(x)$  就被这些条件唯一地确定, 而它的表达式可用 (代数学中已知的) 拉格朗日插值公式

$$P_k(x) = \frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k)}{(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2) \cdots (\xi_0 - \xi_k)} f(\xi_0) + \frac{(x - \xi_0)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_k)} f(\xi_1) + \cdots \\ + \frac{(x - \xi_0)(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{k-1})}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})} f(\xi_k)$$

给出.

在积分时得到关于值  $f(\xi_0), \cdots, f(\xi_k)$  的线性表达式, 它的系数已经不依赖于这些值. 一次算出这些系数后, 就永远可以对在给定区间  $[a, b]$  上的任何函数利用它们.

在当  $k = 0$  的最简单情形中, 函数  $f(x)$  简直就以常数  $f(\xi_0)$  来代替, 其中  $\xi_0$  是在区间  $[a, b]$  中的任何一点, 比方说, 中点:  $\xi_0 = \frac{a+b}{2}$ . 此时近似地

$$\int_a^b f(x) dx \doteq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (4)$$

在几何上 —— 曲边图形的面积在这儿被高度等于它的中点纵坐标的矩形面积代替了. 当  $k = 1$  时函数  $f(x)$  被线性函数  $P_1(x)$  代替, 这个线性函数在  $x = \xi_0$  与  $x = \xi_1$  时与它有同样的值. 如果取  $\xi_0 = a, \xi_1 = b$ , 则

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad (5)$$

并且, 容易算出

$$\int_a^b P_1(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

这样, 我们在这儿近似地令

$$\int_a^b f(x) dx \doteq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (6)$$

在这次, 曲边图形的面积可用不取曲线而取连接曲线两端的弦所成的梯形面积所代替.

取  $k = 2$ , 得到较不显然的结果. 如果令  $\xi_0 = a, \xi_1 = \frac{a+b}{2}, \xi_2 = b$ , 则插值多项式  $P_2(x)$  将有下面的形状

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b). \quad (7)$$

借助于容易的计算, 建立

$$\int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} dx = \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b \left[ (x-b) + \frac{b-a}{2} \right] (x-b) dx \\ = \frac{2}{(b-a)^2} \left[ \frac{(x-b)^3}{3} + \frac{(b-a)}{2} \frac{(x-b)^2}{2} \right] \Big|_a^b = \frac{b-a}{6},$$



而类似地

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} dx = \frac{4(b-a)}{6},$$

$$\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} dx = \frac{b-a}{6}.$$

这样, 得到近似公式

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (8)$$

在这儿给定曲线下图形的面积被通过曲线两个端点与中点的普通抛物线 (带铅垂方向的轴) 所界出的图形面积代替.

增加插值多项式的次数  $k$ , 也就是, 把抛物线 (3) 通过给定曲线的更多数目的点, 可以计算到极大的精确度. 但更为实用的是另外一个基于把抛物线型插值法的概念与分割区间的概念结合起来的方法.

**324. 积分区间的分割** 在计算积分  $\int_a^b f(x) dx$  时可以这样来进行. 首先把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个相等的区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (x_0 = a, x_n = b),$$

由此所求的积分可表示成和的形状

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx. \quad (9)$$

现在把抛物线型插值法应用到这些区间的每一个上去, 即是, 依照近似公式 (4), (6), (8),  $\dots$  中的一个公式来着手计算 (9) 的积分.

容易想到, 从公式 (4) 或 (6) 出发, 用这些方法我们重新得出我们已知的矩形与梯形公式 (1) 与 (2).

现在把公式 (8) 应用到 (9) 的积分上去; 同时为简便起见, 与上面一样, 令

$$f(x_i) = y_i, \quad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{x+\frac{1}{2}}, \quad f\left(x_{x+\frac{1}{2}}\right) = y_{x+\frac{1}{2}}.$$

我们得到

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\doteq \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1), \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &\doteq \frac{b-a}{6n} (y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + y_2), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx &\doteq \frac{b-a}{6n} (y_{n-1} + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n). \end{aligned}$$



最后, 把这些等式按项相加, 得到公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n} \left[ (y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + 4 \left( y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (10)$$

它叫做辛卜森(Th.Simpson) 公式; 对于积分的近似计算, 这个公式比矩形及梯形公式更经常用到, 因为它——在耗费同样劳动下——通常给出更精确的结果.

作为比较, 依辛卜森公式重新计算积分  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  [参看 322]. 我们取  $n=2$ , 于是在这次所利用的纵坐标甚至比以前要少. 我们有 (计算到五位小数)

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & x_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}, & x_1 &= \frac{1}{2}, & x_{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{4}; & x_2 &= 1. \\ y_0 &= 1; & 4y_{\frac{1}{2}} &= 3.764\ 71; & 2y_1 &= 1.6; & 4y_{\frac{3}{2}} &= 2.56; & y_2 &= 0.5. \\ \frac{1}{12}(1 + 3.764\ 71 + 1.6 + 2.56 + 0.5) &= 0.785\ 39 \dots \end{aligned}$$

——所有五位小数都是正确的!

当然, 对于公式 (10), 在 322 目末了所作的说明同样适用. 我们现在来讲近似公式误差的估计.

**325. 矩形公式的余项** 从公式 (4) 开始. 假定在区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$  有前两阶连续导数. 在这情形下, 依照二项式  $x - \frac{a+b}{2}$  的幂次展开  $f(x)$  [按泰勒公式, 126, (13)] 至其二次幂为止, 对于所有在  $[a, b]$  中的  $x$  值即有

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\tilde{\xi}),$$

其中  $\tilde{\xi}$  包含在  $x$  与  $\frac{a+b}{2}$  之间且依赖于  $x$ <sup>46)</sup>.

如果在从  $a$  到  $b$  的区间上积分这个等式, 那么右端第二项就消失了, 因为

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0. \quad (11)$$

这样, 我们得到

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

于是恢复公式 (4) 的准确度的余项, 有如下的形状

$$\rho = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

<sup>46)</sup>  $\tilde{\xi}$  对  $x$  的依赖性可能相当复杂; 并且  $(x)$  的函数

$$\frac{1}{2!} f''(\tilde{\xi}) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (A)$$

显然是连续的, 因为它与函数

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

相同. 特别, 对函数 (A) 取积分是允许的.



用  $m$  与  $M$  分别表示连续函数  $f''(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最小的与最大的值 [85], 并利用被积表达式中第二个因式不改变符号这一事实, 依推广中值定理 [304, 10°], 可以写出

$$\rho = \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} \mu,$$

其中  $\mu$  包含在  $m$  与  $M$  之间. 依照已知的连续函数的性质 [82], 在  $[a, b]$  上可以找到点  $\xi^*$ , 使得  $\mu = f''(\xi^*)$ , 因而最后

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi^*). \quad (12)$$

**附注** 想在按  $x - \frac{a+b}{2}$  的幂次展开函数  $f(x)$  时, 展开式在这个二项式的一次幂就已经截断, 即应用公式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(\tilde{\xi})$$

是自然的. 这导致积分后得到等式

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b f'(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx,$$

于是余项被表成积分

$$\rho = \int_a^b f'(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx,$$

它仅仅含有一阶导数  $f'(\tilde{\xi})$ . 但此处的被积函数的第二个因子在区间  $[a, b]$  内改变符号, 从而为了简化  $\rho$  的表达, 发现要想应用推广的积分中值定理是不可能的. 在泰勒展开中再加上与等式 (11) 有关的一项就保证了我们的成功.

如果把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个相等的部分, 则对于每个部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  即有准确的公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i^*) \quad (x_i \leq \xi_i^* \leq x_{i+1}).$$

把这些等式 (当  $i = 0, 1, \dots, n-1$  时) 按项相加起来, 在通常的缩写记号下得到

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) + R_n,$$

其中表达式

$$R_n = \frac{(a-b)^3}{24n^2} \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

就是矩形公式 (1) 的余项. 因为表达式  $\frac{f''(\xi_0^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$  也包含在  $m$  与  $M$  之间, 所以它也就表示着函数  $f''(x)$  的值中的一个.

因此最后有

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (13)$$

当  $n$  增加时这个余项大致像  $\frac{1}{n^2}$  那样减小<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>我们说大致, 是因为  $\xi$  也可以随  $n$  而变化. 这应当在以后记住.



作为例子, 回头来计算在 322 目中已经作过的积分  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ , 对于被积函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  有  $f''(x) = 2 \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$ ; 这个导数在区间  $[0, 1]$  上改变符号, 但绝对值保持  $\leq 2$ . 由此, 按公式 (13),  $|R_{10}| < 0.85 \times 10^{-3}$ . 我们计算纵坐标到四位小数精确到 0.000 05; 不难看出, 纵坐标的近似误差可以被包含在上述的估计以内<sup>①</sup>. 真正的误差, 实际上, 小于这个界限.

**326. 梯形公式的余项** 现在对于函数  $f(x)$ , 在先前的假定下来研究公式 (6).

应用带有余项的拉格朗日插值公式 [129, (7)], 我们可以写出 [参看 (5)]

$$f(x) = P_1(x) + \frac{1}{2} f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) \quad (a < \tilde{\eta} < b).$$

从  $a$  到  $b$  积分公式 (12), 我们得到

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) dx,$$

于是公式 (6) 的余项将是

$$\rho = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) dx.$$

像上面那样推理, 并利用被积函数中第二个因式在这儿也不改变符号这一事实. 找出

$$\rho = \frac{1}{2} f''(\eta^*) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta^*) \quad (a \leq \eta^* \leq b).$$

最后对于分割区间成为  $n$  个相等部分的情形

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) \quad (a \leq \eta \leq b). \quad (14)$$

这就是梯形公式 (2) 的余项. 当  $n$  增加时它也大致像  $\frac{1}{n^2}$  一样减小. 我们看出, 应用梯形公式与应用矩形公式所引起的误差是同级的.

**327. 辛卜森公式的余项** 最后回到公式 (8). 可以与刚刚所作的相类似, 仍旧应用带有余项的拉格朗日插值公式 [129, (7)], 并令 [参看 (7)]

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\tilde{\zeta})}{3!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) \quad (a < \tilde{\zeta} < b). \quad (15)$$

我们在这里遇到的仍旧是这样的情况: 如同在 325 目一样 [参看其附注]. 即, 积分等式 (15) 后, 我们不可能借助于中值定理把余项的积分的表达式简化, 因为在被积函数中的表达式  $(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b)$  在区间  $[a, b]$  上已经改变符号. 因此, 我们用另一种办法来进行.

不管怎样的数  $K$ , 表达式

$$P_2(z) + K(z-a) \left(z - \frac{a+b}{2}\right) (z-b)$$

<sup>①</sup> 译者注: 因为实际上  $R_n = \frac{(a-b)^3}{24n^2} \frac{f''(\xi_0^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$ ; 令  $f''(\xi_0^*) < 0, f''(\xi_9^*) > 0$ , 所以  $|R_{10}| < \frac{1}{24 \times 10^2} \cdot \frac{18}{10} < 0.8 \times 10^{-3}$ .



在点  $z = a, \frac{a+b}{2}, b$  取与函数  $f(z)$  相同的值. 现在容易这样选择数  $K$ , 使得这个表达式的导数在  $z = \frac{a+b}{2}$  处与  $f'(\frac{a+b}{2})$  一致. 这样一来, 对于这个  $K$  值, 上述表达式不是别的, 而是相应于简单结点  $a, b$  及二重结点  $\frac{a+b}{2}$  的埃尔米特插值多项式 [130]. 假定函数  $f(x)$  存在直到四阶导数, 利用带余项的埃尔米特公式 [130, (11)], 我们得到:

$$f(x) = P_2(x) + K(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) + \frac{f^{(4)}(\tilde{\zeta})}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \quad (a < \tilde{\zeta} < b).$$

现在从  $a$  到  $b$  积分这个等式, 我们得到

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\tilde{\zeta}) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx.$$

因为

$$\int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left[ \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} \right] dx = 0.$$

若假设  $f^{(4)}(x)$  连续, 则与上面的情形相像, 公式 (8) 的余项

$$\rho = \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\tilde{\zeta}) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx,$$

利用被积表达式中第二个因式不改变符号这一事实, 可以表示成这样的形状.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{24} f^{(4)}(\zeta^*) \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx \\ &= \frac{1}{24} f^{(4)}(\zeta^*) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \left[ \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} \right] dx \\ &= -\frac{(b-a)^5}{180 \times 24} f^{(4)}(\zeta^*) \textcircled{1}. \end{aligned}$$

如果区间  $[a, b]$  被分成  $n$  个相等部分, 那么 —— 对于辛卜森公式 (10) —— 得到下面形状的余项

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180 \times (2n)^4} f^{(4)}(\zeta) \quad (a \leq \zeta \leq b). \quad (16)$$

当  $n$  增加时, 这个表达式大致像  $\frac{1}{n^4}$  一样减小; 这样, 辛卜森公式实际上比上述两个公式更好些.

重新回到积分  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  的例子. 为了避免计算公式 (16) 中所有的四阶导数, 我们指出, 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  本身就是  $y = \operatorname{arctg} x$  的导数, 于是我们可以利用 116, 8) 中已有的公式. 按照这个公式

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5 \left(y + \frac{\pi}{2}\right) = 24 \cos^5 y \cos 5y;$$

① 如果  $f(x)$  是不超过三次的多项式, 则显然  $\rho$  变为零, 这就是说, 对于这样的多项式, 公式 (8) 将是准确的(这也容易直接证实).



这个表达式, 按绝对值来说, 不超过 24, 于是按照公式 (16)  $|R_2| < \frac{1}{1920} < 0.000\ 6$ . 真正的误差, 如我们见过的, 大大地小于这个界限.

附注 在这个例子上一望而知, 依我们的公式所求出的误差的界限, 是颇为粗略的. 可惜的是, 所导出的公式的实用上的缺点就在这上面——类似的情形时常会遇到.

但是就是借助于这些公式, 毕竟还是使我们能够预先估计误差, 因而可以来实行定积分的近似计算. 现在来讲一些例子.

328. 例题

1) 利用矩形公式计算积分  $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$  精确到 0.001.

因为对于  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 有  $0 < f''(x) = \frac{2}{x^3} \leq 2$  (如果  $1 \leq x \leq 2$ ), 所以按照公式 (11)

$$0 < R_n < \frac{1}{12n^2}.$$

如果取  $n = 10$ , 则我们的公式的余项是  $R_{10} < \frac{1}{1200} < 0.84 \times 10^{-3}$ ; 我们还必须加进由于在计算函数值时实行四舍五入所产生的误差; 设法使这个新的误差的界限相差小于  $0.16 \times 10^{-3}$ . 为了这个目的只要计算  $\frac{1}{x}$  的值到四位小数精确到 0.000 05 就够了. 我们有:

$x_{1/2} = 1.05$	$y_{1/2} = 0.952\ 4$	
$x_{3/2} = 1.15$	$y_{3/2} = 0.869\ 6$	
$x_{5/2} = 1.25$	$y_{5/2} = 0.8$	
$x_{7/2} = 1.35$	$y_{7/2} = 0.740\ 7$	
$x_{9/2} = 1.45$	$y_{9/2} = 0.689\ 7$	
$x_{11/2} = 1.55$	$y_{11/2} = 0.645\ 2$	$\frac{6.928\ 4}{10} = 0.692\ 84$
$x_{13/2} = 1.65$	$y_{13/2} = 0.606\ 1$	
$x_{15/2} = 1.75$	$y_{15/2} = 0.571\ 4$	
$x_{17/2} = 1.85$	$y_{17/2} = 0.540\ 5$	
$x_{19/2} = 1.95$	$y_{19/2} = 0.512\ 8$	
		和 6.928 4

考虑到对于每一纵坐标 (因而, 也是对于它们的算术平均值) 的修正数被包含在  $\pm 0.000\ 05$  之间, 也注意到余项  $R_{10}$  的估值, 我们得到,  $\ln 2$  被包含在界限  $0.692\ 79 = 0.692\ 84 - 0.000\ 05$  与  $0.693\ 73 = 0.692\ 84 + 0.000\ 05 + 0.000\ 84$  之间, 因而就更是包含在 0.692 与 0.694 之间. 这样一来,  $\ln 2 = 0.693 \pm 0.001$ .

2) 按照梯形公式作同样的计算.

在这情形下, 依公式 (13)

$$R_n < 0, \\ |R_n| < \frac{1}{6n^2}.$$



在这儿也试一试取  $n = 10$ , 虽然此时仅可以保证  $|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1.7 \times 10^{-3}$ . 纵坐标 (计算到与上面同一的精确度) 是

$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.909\ 1$	$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.000\ 0$
$x_2 = 1.2$	$y_2 = 0.833\ 3$	$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.500\ 0$
$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.769\ 2$	<hr/>	
$x_4 = 1.4$	$y_4 = 0.714\ 3$	和 $1.500\ 0$	
$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.666\ 7$		
$x_6 = 1.6$	$y_6 = 0.625\ 0$	$\frac{1}{10} \left( \frac{1.500\ 0}{2} + 6.187\ 7 \right) = 0.693\ 77$	
$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.588\ 2$		
$x_8 = 1.8$	$y_8 = 0.555\ 6$		
$x_9 = 1.9$	$y_9 = 0.526\ 3$		
<hr/>			
和 $6.187\ 7$			

考虑到所有修正数之后, 我们得到,  $\ln 2$  被包含在界限  $0.692\ 02 = 0.693\ 77 - 0.000\ 05 - 0.001\ 70$  与  $0.693\ 82 = 0.693\ 77 + 0.000\ 05$  之间, 即是, 仍然在  $0.692$  与  $0.694$  之间, 以下从略.

3) 在同样纵坐标的数目下, 借助于辛卜森公式可以得到更精确的结果. 因为被积函数的第四阶导数是  $\frac{24}{x^5}$ , 所以依公式 (16)

$$R_n < 0$$

并且

$$|R_n| < \frac{24}{180 \cdot (2n)^4} = \frac{2}{15 \cdot (2n)^4}.$$

当  $n = 5$  时 (此时纵坐标的数目与上述情形是同样的) 有  $|R_5| < 1.4 \times 10^{-5}$ . 实行计算到五位数字, 精确到  $0.000\ 005$

$x_1 = 1.2$	$y_1 = 0.833\ 33$	$x_{1/2} = 1.1$	$y_{1/2} = 0.909\ 09$
$x_2 = 1.4$	$y_2 = 0.714\ 29$	$x_{3/2} = 1.3$	$y_{3/2} = 0.769\ 23$
$x_3 = 1.6$	$y_3 = 0.625\ 00$	$x_{5/2} = 1.5$	$y_{5/2} = 0.666\ 67$
$x_4 = 1.8$	$y_4 = 0.555\ 56$	$x_{7/2} = 1.7$	$y_{7/2} = 0.588\ 24$
<hr/>		$x_{9/2} = 1.9$	$y_{9/2} = 0.526\ 32$
和 $2.728\ 18 \times 2$		<hr/>	
5.456\ 36		和 $3.459\ 55 \times 4$	
		<hr/>	
		13.838\ 20	

$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.000\ 00$	$\frac{1}{30}(1.500\ 00 + 5.456\ 36 + 13.838\ 20) = 0.693\ 152$
$x_5 = 2.0$	$y_5 = 0.500\ 00$	
<hr/>		
和 $1.500\ 00$		

由此  $\ln 2$  被包含在界限

$$0.693\ 133 = 0.693\ 152 - 0.000\ 005 - 0.000\ 014$$

与  $0.693\ 157 = 0.693\ 152 + 0.000\ 005$  :

之间, 于是, 例如, 可以令  $\ln 2 = 0.693\ 15_{\pm 0.000\ 02}$ .



实际上  $\ln 2 = 0.693\ 147\ 18\cdots$ , 因而真正的误差就小于  $0.000\ 005$  [参看上目末了的附注].

4) 现在提出按照辛卜森公式计算第二类全椭圆积分问题<sup>①</sup>

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

精确到 0.001.

对于函数  $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}$ , 当  $x$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时, 有  $|f^{(4)}| < 12$  <sup>②</sup>, 因此 [参看 (16)]

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \times 12 < \frac{2}{3} \times \frac{1}{(2n)^4}, \text{ 因为 } \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

取  $n = 3$ , 于是  $|R_3| < 0.000\ 52$ . 在这情形下

$x_0 = 0(0^\circ)$	$y_0 = 1.000\ 0$	
$x_{1/2} = \frac{\pi}{12}(15^\circ)$	$4y_{1/2} = \sqrt{12 + \sqrt{12}} = 3.932\ 4$	
$x_1 = \frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$2y_1 = \sqrt{14}/2 = 1.870\ 8$	
$x_{3/2} = \frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$4y_{3/2} = \sqrt{12} = 3.464\ 1$	$\frac{\pi}{2} \times \frac{15.477\ 1}{18} = 1.350\ 63\cdots$
$x_2 = \frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$2y_2 = \sqrt{10}/2 = 1.581\ 1$	
$x_{5/2} = \frac{5\pi}{12}(75^\circ)$	$4y_{5/2} = \sqrt{12 - \sqrt{12}} = 2.921\ 6$	
$x_3 = \frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$y_3 = \sqrt{2}/2 = 0.707\ 1$	
	和 $15.477\ 1$	

对于所得到的结果, 除修正数  $R_3$  外, 还应当加进由于对小数实行四舍五入所产生的 (非负的) 修正数, 这个修正数不超过  $\frac{0.000\ 3 \cdot \pi}{36} < 0.000\ 03$ .

这样一来,

$$1.350\ 11 < \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1.351\ 18,$$

并且可以断定,  $\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.351 \pm 0.001$ .

(实际上在所得结果中所有的数字都是正确的.)

5) 依辛卜森公式计算积分

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

精确到 0.000 1.

<sup>①</sup>参看 315 目脚注.

<sup>②</sup>显然,  $y = f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 微分恒等式  $y^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x$ , 容易依次得出导数  $y', y'', y''', y^{(4)}$  的绝对值的 (比真值稍大的) 估值.



直接算出被积函数的第四阶导数之后, 可看出其绝对值不超过 12; 因此

$$|R_n| < \frac{12}{180 \cdot (2n)^4}.$$

取  $n = 5$  就够了, 因为  $|R_5| < 0.7 \times 10^{-5}$ . 我们有

$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1.000\ 00$	$x_{1/2} = 0.1$	$y_{1/2} = 0.990\ 05$
$x_5 = 1.0$	$y_5 = 0.367\ 88$	$x_{3/2} = 0.3$	$y_{3/2} = 0.913\ 93$
	<hr/>	$x_{5/2} = 0.5$	$y_{5/2} = 0.776\ 80$
	和 1.367 88	$x_{7/2} = 0.7$	$y_{7/2} = 0.612\ 63$
$x_1 = 0.2$	$y_1 = 0.960\ 79$	$x_{9/2} = 0.9$	$y_{9/2} = 0.444\ 86$
$x_2 = 0.4$	$y_2 = 0.852\ 14$		<hr/>
$x_3 = 0.6$	$y_3 = 0.697\ 68$		和 3.740 27 $\times 4$
$x_4 = 0.8$	$y_4 = 0.527\ 29$		<hr/>
	<hr/>		14.961 08
	和 3.037 90 $\times 2$		
	<hr/>		
	6.075 80		

$\frac{1}{30}(1.367\ 88 + 6.075\ 80 + 14.961\ 08) = 0.746\ 825$

$0.746\ 813 < W < 0.746\ 837$

$W = 0.746\ 8_{+0.000\ 05}.$

(在这儿所得结果中所有六位数字也都是正确的!)

6) 依辛卜森公式求积分 [比较 314,6)]

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx,$$

当  $n = 5$  时, 计算到五位小数;

$y_0 = 1$	$y_{1/2} = 0.996\ 68$
$y_5 = 0.785\ 40$	$y_{3/2} = 0.971\ 52$
<hr/>	$y_{5/2} = 0.927\ 30$
和 1.785 40	$y_{7/2} = 0.872\ 46$
$y_1 = 0.986\ 98$	$y_{9/2} = 0.814\ 24$
$y_2 = 0.951\ 27$	<hr/>
$y_3 = 0.900\ 70$	和 4.582 20 $\times 4$
$y_4 = 0.843\ 43$	<hr/>
<hr/>	18.328 80
和 3.682 38 $\times 2$	
<hr/>	
7.364 76	

$\frac{1}{30}(1.785\ 40 + 7.364\ 76 + 18.328\ 80) = 0.915\ 965.$

在所得结果中所有数字都是正确的. 按公式 (16) 估计误差的工作留给读者自己去作. 值  $G$  有时叫做卡塔兰 (E.Catalan) 常数 [参看 440,6)(a)].

附注 最后三个例子在这方面是使人感到兴趣的: 相应的原函数不能被表示成有限形状, 于是利用原函数来计算定积分就是不可能的.



相反地, 如果这些原函数, 表示成带变动的积分上限的定积分的形状, 就可算出对应于一列积分上限值的这些积分的值. 由此, 从原则方面, 阐明了对于只利用积分表达式而给出的函数, 我们也可以作出如同读者对于初等函数所熟知的那样一些表.

用这个方法也可以得到上述那些函数的近似表达式.



# 第十章 积分学在几何学、力学与物理学中的应用

## §1. 弧长

329. 曲线长的计算 设在平面上用参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

给定连续的简单曲线  $\widehat{AB}$ . 在第一卷已经建立了曲线长的概念: 它是作为内接于曲线的折线的周长的上确界  $S$  而定义的:

$$S = \sup\{p\}. \quad (2)$$

假定函数 (1) 有连续导数, 已证明 [248], 曲线是可求长的, 即曲线长是有限的. 不仅如此, 如果考虑不定弧  $\widehat{AM}$ , 其中  $M$  是曲线上任意一点, 这点相应于参数  $t$ , 那么有弧长

$$\widehat{AM} = s = s(t)$$

是  $t$  的可微函数, 其导数可表为:

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

或更简明些:

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \quad (3)$$

[248,(10)], 并且显然它也是连续的.



掌握了积分概念, 我们现在能来计算曲线  $\widehat{AB}$  的长. 按照微积分基本公式, 立刻得到

$$s(T) - s(t_0) = \int_{t_0}^T s'_t dt$$

或者

$$\widehat{AB} = S = \int_{t_0}^T \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

前面所说的不定弧  $\widehat{AM}$  的长度, 易于理解, 可用公式

$$\widehat{AM} = s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \quad (5)$$

表示, 可能会出现把任意内点  $M_0$  取为计算弧长的起始点的情况. 如果  $t_0$  仍然即是确定此点 (在这种情况下  $t_0$  已不是区间的端点, 在端点  $t$  是变动的), 则显然公式 (5) 给出带有符号的弧  $\widehat{AM}$  的值——若  $t > t_0$ , 点  $M$  位于计算弧长起始点  $M_0$  的正侧, 则取正号; 若  $t < t_0$ , 点  $M$  位于计算弧长起始点  $M_0$  的反侧, 则取负号.

若曲线在直角坐标系中由显式方程给出:

$$y = f(x) \quad (x_0 \leq x \leq X),$$

则取  $x$  作为参数, 作为特殊情况, 由公式 (4) 得

$$S = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4a)$$

最后, 曲线是以极坐标的形式

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \Theta)$$

给定的, 如所知, 同样可借助于一般变换公式归结为参数式:

$$x = r \cos \theta = g(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = g(\theta) \sin \theta,$$

这里  $\theta$  起着参数的作用, 对这种情况

$$S = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2} d\theta. \quad (4b)$$

对于这两种特殊情形, 容易写出表示不定弧  $\widehat{AM}$  量值的表示式, 若  $M$  对应于横坐标  $x$  或极角  $\theta$ , 则

$$\widehat{AM} = s = s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y_x'^2} dx \quad (5a)$$

或, 相应地

$$\widehat{AM} = s = s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2} d\theta. \quad (5b)$$



**330. 定义曲线长度的概念及计算曲线长度的另一种途径** 在定义简单连续曲线长度概念本身时, 我们从等式 (2) 出发. 现在我们证明 —— 在非闭曲线的情形 —— 其长度  $S$  不仅是内接于曲线的折线长的集合  $\{p\}$  的上确界, 而且在折线  $(p)$  所有边 (或更确切地说, 是这些边中长度最大者  $\lambda^*$ ) 趋于零的条件下, 迳直就是  $p$  的极限:

$$S = \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} p. \quad (6)$$

同时, 求出确定曲线上折线  $(p)$  的各端点位置的参数  $t$  的值:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T \quad (7)$$

并假定所有增量  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  (或者更确切地, 它们中的最大者  $\lambda = \max \Delta t_i$ ) 趋于零更为方便. 245 目的两个引理保证了极限过程两个特性的等价性. 这样, 应当证明极限关系

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p \quad (6^*)$$

首先指出周长  $p$  的如下重要性质: 若  $p$  对应于区间  $[t_0, T]$  的某个分法, 然后我们还增补一个新的分点  $\bar{t}$ :

$$t_k < \bar{t} < t_{k+1},$$

则周长  $p$  增加. 但同时它的增加不超过  $\varphi(t)$  与  $\psi(t)$  振幅的加倍和. 事实上, 添加新点  $\bar{t}$ , 是把一项 (边长)

$$\sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (8)$$

用两项 (两边长度之和)

$$\sqrt{[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)]^2} + \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})]^2} \quad (9)$$

来代替. (9) 式在任何情况下都不小于 (8) 式.

另一方面, 任何和式 (9) 都不超过和

$$|\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)| + |\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)| + |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})| + |\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})|,$$

因此周长  $p$  的增加更不会超过这个数值,  $p$  的增加显然小于上面提到的振幅的加倍和.

以下的讨论仅限于有限的  $S$  的情况. 对任意小的数  $\varepsilon > 0$ , 按上确界的定义, 存在区间  $[t_0, T]$  这样的分法: 用点

$$t_0^* = t_0 < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_m^* = T \quad (10)$$



把  $[t_0, T]$  分割成部分, 使得相应的周长  $p^*$  满足不等式

$$p^* > S - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

由于函数  $\varphi(t)$  与  $\psi(t)$  的一致连续性, 存在这样的小数  $\delta > 0$ , 使得只要  $|t'' - t'| < \varepsilon$ , 就有

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}, |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}.$$

用 (7) 式中的点把区间  $[t_0, T]$  分割成部分, 使得  $\lambda < \delta$  (即所有的  $\Delta t_i < \delta$ ), 组成相应的和  $p$ .

考虑把区间  $[t_0, T]$  分割成部分的第三种分法, 在此分法中, 分法 (7) 中所有的点  $t_i$  及分法 (10) 中所有的点  $t_k^*$  都是分点, 设与此分法相应的周长是  $p_0$ . 因为这个分法是从 (10), 用增加新点得到的, 由先前所说的,

$$p_0 \geq p^*. \quad (12)$$

另一方面这一分法也是从 (7) 用增加点  $t_k^*$  得到的, 增加每个点  $t_k^*$ ,  $p$  增长不超过相应于函数  $\varphi(t)$  与  $\psi(t)$  振幅的加倍和, 即小于  $\frac{\varepsilon}{2m}$ . 因为这个过程不超过  $m$  次, 于是  $p_0$  超过  $p$  小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ :

$$p_0 < p + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

由不等式 (13), (12), (11) 推出

$$p > S - \varepsilon,$$

因此  $0 < S - p < \varepsilon$ , 由此推出所要证明的断言 (6\*), 这意味着 (6) 式成立.

因为由 (6) 式可反推出 (2) 式, 于是等式 (6) 可看作与前述曲线长定义等价的定义.

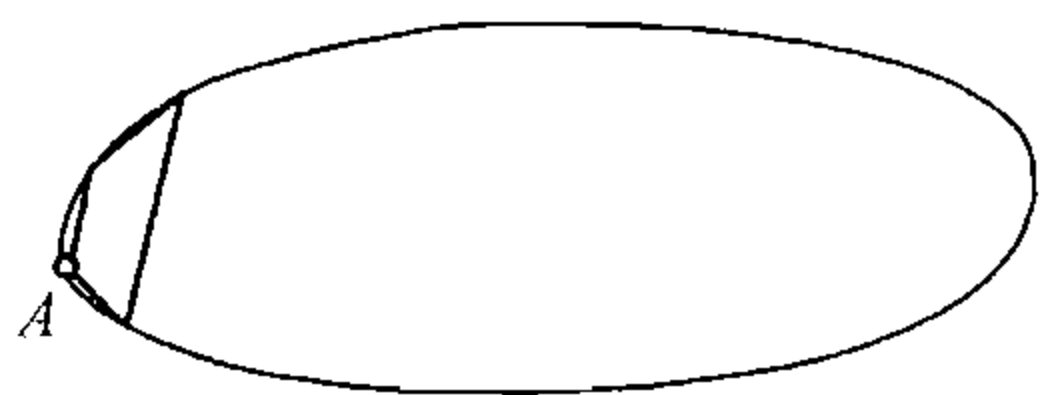


图 8

**附注** 然而不难看出, 在闭曲线的情形下, 这样的定义却不能无条件地采用: 须知即便符合了所指出的条件, 也毫不能防止折线缩向一点, 而其周长趋近于 0 (图 8). 其中的要点就在于: 开曲线的情形下, 只要折线 ( $p$ ) 的每一段都递减以至于 0, 就已经保证了每一段与其对应的部分弧越来越靠得紧密; 正是基于这一点, 取其周长  $p$  的极限作为整个的弧长才是理之当然. 而在闭曲线的情形就不是这样了.

[我们指出, 若代替要求折线各边趋于 0, 而是要求对于相应各弧的直径趋于 0, 则新的定义可同样地既应用于非闭曲线, 又可应用于闭曲线.]



现在我们证明由定义 (6) 或 (6\*) 可直接推出曲线长的表达式 (4). 我们将从折线长  $p$  的现成表达式出发 [参看 248, (7)]:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \cdot \Delta t_i,$$

其中  $\tau_i, \bar{\tau}_i$  是区间  $[t_i, t_{i+1}]$  中的某些值.

如若在根号下的第二项中, 把  $\bar{\tau}_i$  一一换成  $\tau_i$ , 则改造成的表达式

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \Delta t_i$$

显然正是积分 (4) 的积分和. 当  $\lambda$  趋近于 0 时, 这个和将以积分 (4)<sup>①</sup> 为极限. 为了要证明折线周长  $p$  也趋于此极限, 只需表明差  $p - \sigma$  趋近于 0 即可.

因此, 我们对这个差进行估值:

$$|p - \sigma| \leq \sum_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \Delta t_i.$$

我们如果把基本不等式

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| \leq |b - b_1|^{②}$$

分别应用到以上所写的和中的每一项, 便得

$$|p - \sigma| \leq \sum_i |\psi'(\tau_i) - \psi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i.$$

根据函数  $\psi'(t)$  的连续性. 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 可找出这样的  $\delta > 0$ , 使得只要  $|t - \bar{t}| < \delta$ , 即有  $|\psi'(t) - \psi'(\bar{t})| < \varepsilon$ . 假如取  $\lambda < \delta$  (即所有的  $\Delta t_i < \delta$ ), 则  $|\tau_i - \bar{\tau}_i| < \delta$ , 于是  $|\psi'(\tau_i) - \psi'(\bar{\tau}_i)| < \varepsilon$ . 并且

$$|p - \sigma| \leq \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon(T - t_0).$$

这就证明了公式 (4).

### 331. 例

1) 悬链线  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  (图 9).

<sup>①</sup>它的存在毫无疑义, 因为积分号下的函数是连续的 [第 298 目, I].

<sup>②</sup>这个不等式于  $a = 0$  时是显然的; 而若  $a \neq 0$ , 则可从恒等式

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1)$$

直接推得, 因为  $(b - b_1)$  前的系数绝对值小于 1.







于是从点  $A(t=0)$  到任意点  $M(t>0)$  的不定弧  $\widehat{AM}$  可表为:

$$\widehat{AM} = s = \frac{at^2}{2}.$$

当  $t < 0$  时, 仅需在上式右端加一负号.

6) 阿基米德螺线  $r = a\theta$ .

根据公式 (56), 计算从极点  $O$  到任意点  $M$  (对应于  $\theta$  角) 的弧长, 我们得出

$$\widehat{OM} = a \int_0^\theta \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})].$$

有趣的是, 此处代入  $\theta = \frac{r}{a}$  后, 我们得出的表达式形式上与抛物线弧长表达式相类似 [参看 2)].

7) 对数螺线  $r = ae^{m\theta}$  (图 10).

因为  $r'_\theta = mr$ , 所以  $r = \frac{1}{m} r'_\theta$ , 并且仍根据公式 (56), 对于在坐标为  $(r_0, \theta_0)$  与  $(r, \theta)$  的两点间的弧  $\widehat{M_0M}$ , 我们有

$$\begin{aligned} s = \widehat{M_0M} &= \int_{\theta_0}^\theta \sqrt{r^2 + r'^2_\theta} d\theta \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \int_{\theta_0}^\theta r'_\theta d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} (r - r_0). \end{aligned}$$

假如记起, 对于对数螺线  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m}$ , 则所得结果可以改写成这样:

$$s = \widehat{M_0M} = \frac{r - r_0}{\cos \omega}.$$

将点  $M_0$  逼近于极点  $O$ , 亦即使  $r_0$  趋向 0, 并取此时所得的  $\widehat{M_0M}$  弧长极限作为  $\widehat{OM}$  弧长, 我们便得出比较更简单的结果

$$s = \widehat{OM} = \frac{r}{\cos \omega}.$$

借此公式之助, 从  $\triangle MOT$  (见图) 中就不难看出, 弧长  $s$  等于极坐标中的切线长  $t_r$ :

$$\widehat{OM} = TM^{\text{①}}.$$

我们便得到了对数螺线测长的最简单的图示法.

8) 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

不过较方便一些的是把椭圆方程取为参数型  $x = a \sin t, y = b \cos t$ . 易见,

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t},$$

此处  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  是椭圆离心率.

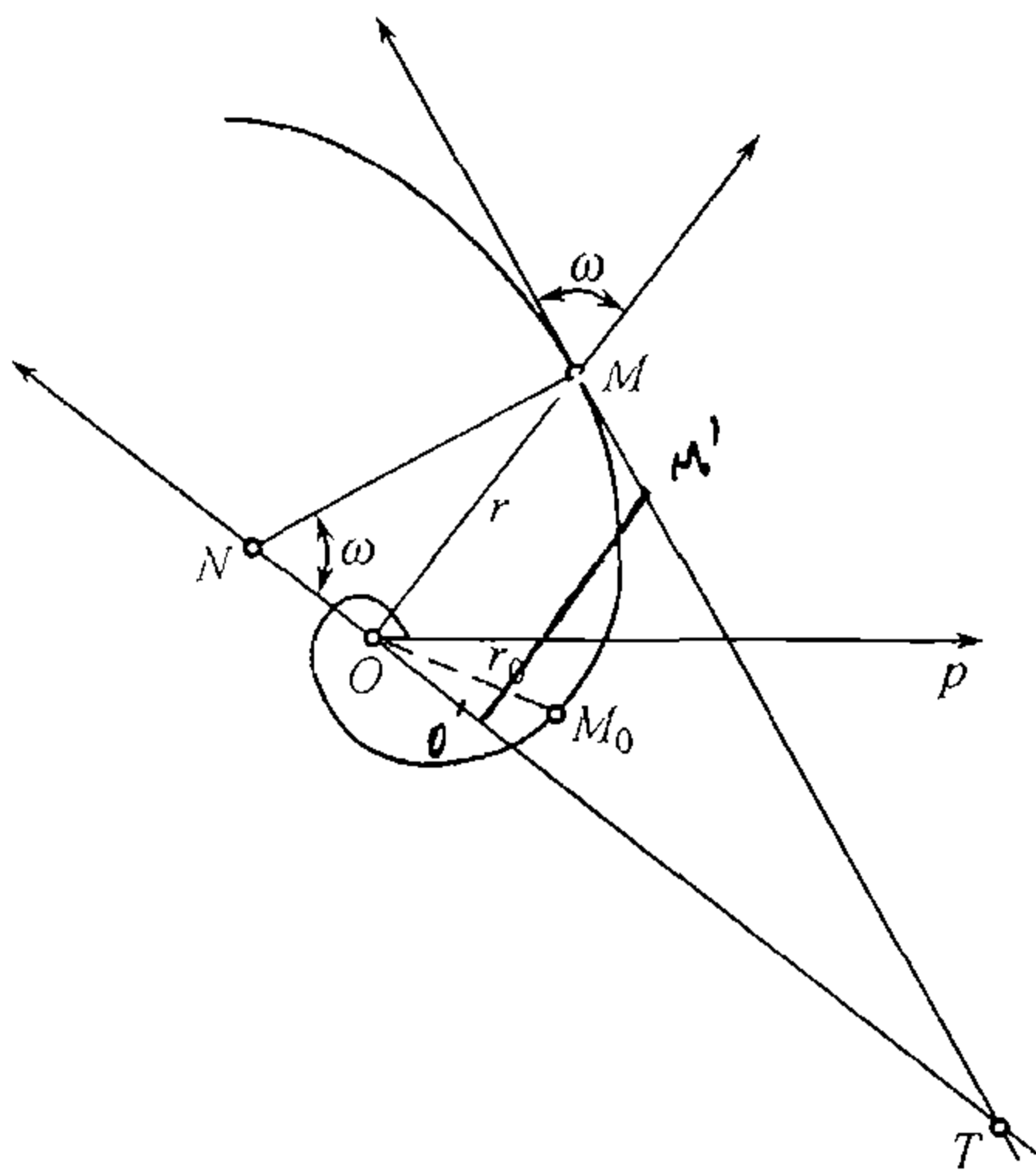


图 10

①对数螺线的这个性质, 使得可以很容易地做出这样的命题: 当这曲线毫无滑动地沿着直线  $MT$  滚动时, 极点  $O$  (假如认定它是始终和曲线连接着的) 就描出了某一条直线. 我们把证明留给读者.



自短轴的顶点到第一象限中它的任一点, 计算椭圆的弧长, 我们得到

$$s = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = aE(\varepsilon, t).$$

这样一来, 椭圆的弧长就被表成了椭圆积分的第二种类型 [参看第 293 目及第 305 目]; 如曾指出的, 此一事实正是“椭圆”积分这一名称的由来.

特别是椭圆周的四分之一的长度可表成全椭圆积分<sup>①</sup>

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = aE(\varepsilon).$$

而整个的周长便是

$$S = 4aE(\varepsilon).$$

有趣的是注意对于正弦曲线  $y = c \sin \frac{x}{b}$  (此处  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ) 的一个波的长, 恰恰一丝不差地也得到这样的结果. 这种几何上的契合, 并不难解释. 设想一个正圆柱, 用一个和它的母线相倾斜的平面截一下, 柱面的截面就是个椭圆. 如果通过短轴的一端, 顺着母线把柱面剖开, 并展平, 则椭圆周就变成了正弦曲线.

类似的, 双曲线的弧长计算也得出椭圆积分 (两类).

9) 蜗线  $r = a \cos \theta + b$ .

此处  $r'_\theta = -a \sin \theta$ , 并且

$$r^2 + r'^2_\theta = a^2 + 2ab \cos \theta + b^2 = (a+b)^2 \left[ 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

因此 (当  $b \neq a$  时), 对于从  $\theta = 0$  的点到任意的  $\theta < \pi$  的点的弧长, 我们得出 (第二种类型) 椭圆积分形式的表达式:

$$\begin{aligned} s &= (a+b) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 2(a+b) \int_0^{\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 t} dt = 2(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

整个曲线的长就表成了全椭圆积分

$$S = 4(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

然而在特种情形——心脏线 ( $b = a$ ), 问题就大大的简化了. 此时

$$r^2 + r'^2_\theta = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

所以 ( $0 < \theta \leq \pi$ )

$$s = 2a \int_0^\theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

如果 (图 11) 以  $2a$  为半径, 从极点  $O$  作弧  $\widehat{AL}$ , 与向径  $OM$  的延长线相交, 则易见  $AL$  弦即等于弧  $s = \widehat{AM}$ .

<sup>①</sup>参看第 315 目的脚注.



整个心脏线的长就是  $8a$ .

10) 双纽线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ .

我们来计算双纽线的弧长, 从顶点 (对应  $\theta = 0$ ) 到任意点 (极角  $\theta < \frac{\pi}{4}$ ).

我们有

$$rr'_\theta = -2a^2 \sin 2\theta, \text{ 由此 } r'_\theta = \frac{-2a^2 \sin 2\theta}{r}.$$

此时

$$\sqrt{r^2 + r'^2_\theta} = \frac{2a^2}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

并且根据公式 (55)

$$s = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}};$$

我们就又一次得出了 (第一种类型) 椭圆积分. 因为  $\sin^2 \theta$  的因子  $k^2$  小于 1 时的积分表已经算出了, 所以我们来做一个变量变换. 命  $2\sin^2 \theta = \sin^2 \phi$  (因为  $\theta < \frac{\pi}{4}$ , 故  $2\sin^2 \theta < 1$ , 由此可见  $\phi$  角确是可以定出的); 于是

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi, \cos \theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi d\phi, \\ d\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi}}, \sqrt{1 - 2\sin^2 \theta} = \cos \phi \end{aligned}$$

最后

$$s = a \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi}} = aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \phi\right).$$

在极限情形<sup>①</sup>下, 令  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , 而  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , 双纽线的四分之一的长度就表成了全椭圆积分.

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi}} = aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

整个双纽线的长度便是  $S = 4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

可注意的是: 求曲线弧的长度的问题时常正巧得出椭圆积分.

11) 最后, 在建立曲线渐伸线[第 256 目]方面, 我们引一个应用弧长公式的例子.

我们来研究悬链线. 若以  $\xi, \eta$  (与第 256 目表示法一致) 表示它的点现在的坐标, 以  $\sigma$  表示它的弧长 (从顶点起算), 则曲线方程可写成:

$$\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a},$$

<sup>①</sup>我们不得不把这个情形, 当作  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$  或  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时  $s$  的表达式取极限的情形来研究, 因为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时导数  $r'_\theta = \infty$ , 于是公式 (55) 就不能直接应用.

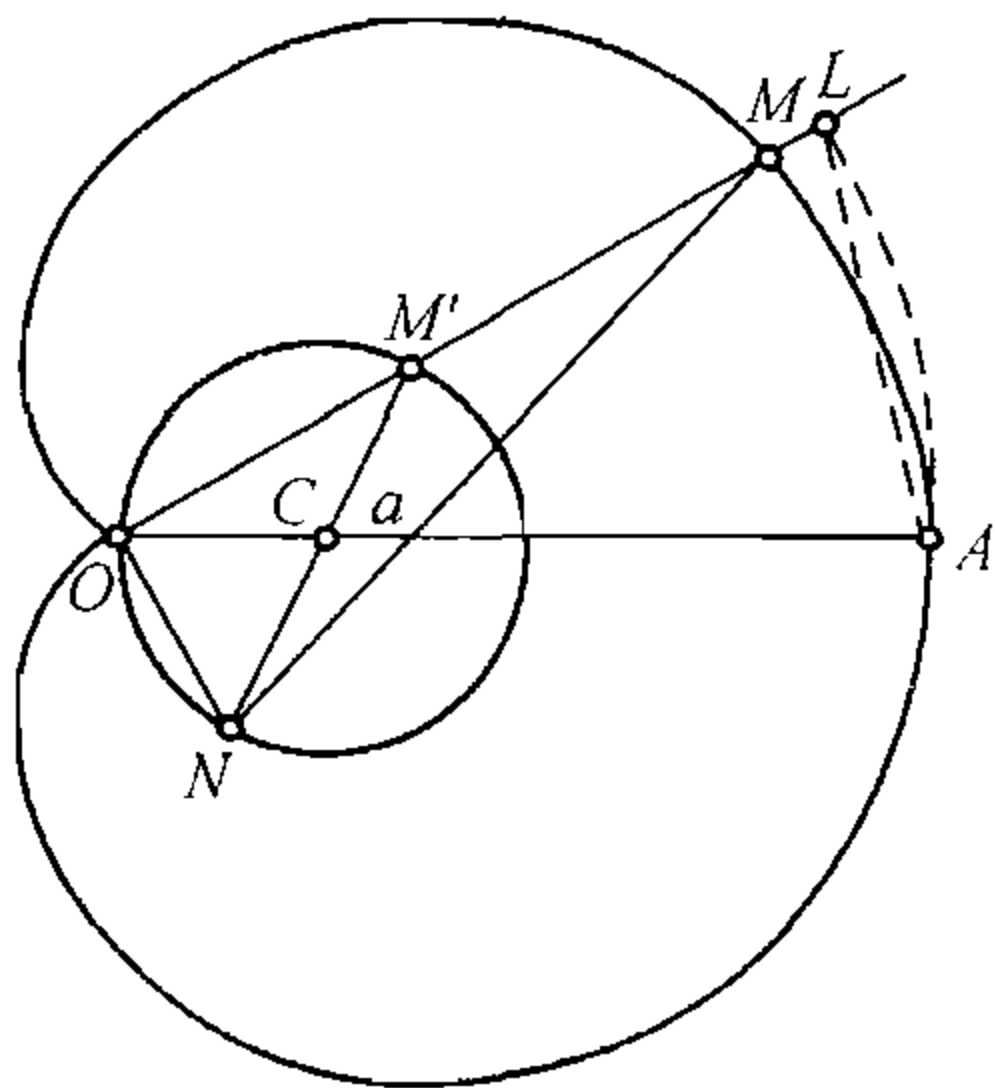


图 11



而弧长可表成公式 [参看 1)]:

$$\sigma = a \operatorname{sh} \frac{\xi}{a}.$$

由此,  $\xi$  与  $\eta$  可直接表成  $\sigma$  的函数:

$$\xi = a[\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a], \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}.$$

现在根据第 256 目公式 (17), 注意到此处 [参看 (18)]

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \sin \beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}},$$

就可写出任意渐伸线的参数方程

$$\begin{aligned} x &= a[\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a] \\ &\quad + (c - \sigma) \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \\ y &= \sqrt{a^2 + \sigma^2} + (c - \sigma) \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

我们来看对应于  $c = 0$  的这一条渐伸线; 它从悬链线的顶点起始, 并且在这里有一歧点 (图 12). 消去  $\sigma$ , 此曲线 (称为曳物线) 就表成了显方程

$$x = \pm \left[ a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right].$$

如果记起“切线长”的表达式为 [第 230 目 (4)]:

$$t = \left| \frac{y}{y'_x} \sqrt{1 + y'^2_x} \right| = y \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2},$$

则由此易得:  $t = a$ . 这表示出了曳物线的很值得注意的特性: 它的切线长为—常量.<sup>①</sup>

从悬链线的性质中, 也很容易推出这个结果 [参看 1) 中悬链线的弧长的求法, 图 9].

**332. 平面曲线的内蕴方程** 以曲线上的点的 (对于某一坐标系而说的) 坐标之间的方程来表示曲线, 撇开这种表示法的全部功用不论, 毕竟是时常具有人为的性质, 因为坐标并不是曲线的基本几何因素. 反之, 这种基本因素乃是曲线 (从某一初始点依一确定方向起算的) 弧长  $s$  及曲率半径  $R$  (或者就是曲率  $k = \frac{1}{R}$ ) [参看第 250 目, 第 251 目].

对于每一条曲线, 都可以在这两个因素之间建立起

$$F(s, R) = 0$$

<sup>①</sup>曳物线的名称正是和这个相关连着的 (起源于拉丁文的动词 trahere——引, 曳): 如果一个在水平线上移动着的点  $T$ , 用  $TM$  线在它后面曳引点  $M$ , 则点  $M$  就会恰好描出了曳物线.

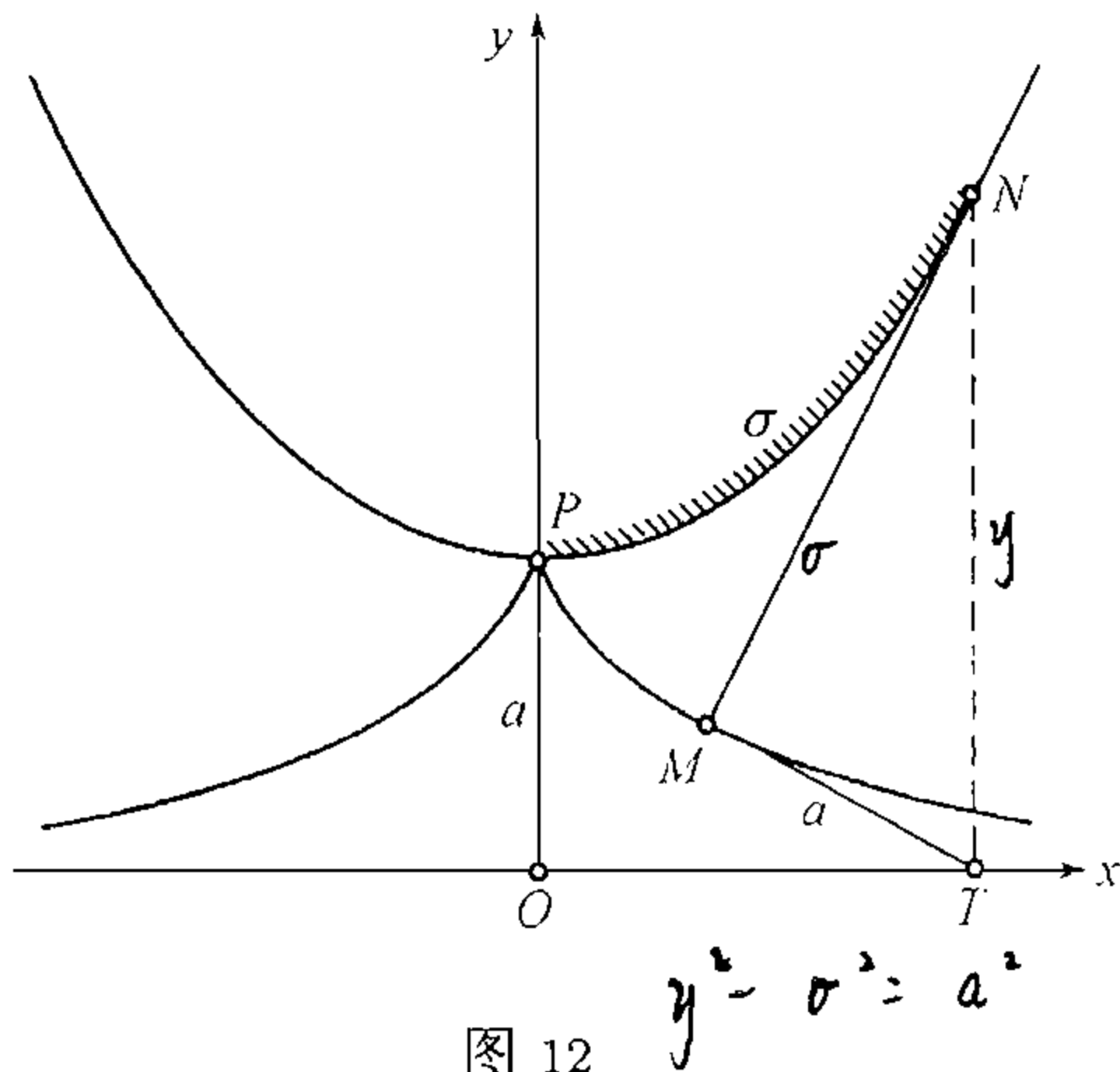


图 12



形式的依从关系, 此方程即称为曲线的内蕴方程<sup>①</sup>.

我们证明: 具有同一内蕴方程的各曲线, 只能在其平面上的位置上有所不同, 于是内蕴方程便完全唯一的确定了曲线的形状.

设 (I) 与 (II) 两条曲线具有同一内蕴方程, 这内蕴方程我们取成下列形式:

$$\frac{1}{R} = g(s). \quad (14)$$

为了要证这两条曲线全等, 首先我们将其中一条移动一下, 使得两条曲线上的弧长起算点重合, 然后再将这条曲线转动一下, 使得在这点上的切线正向重合.

我们用指标 (1 与 2) 来标记对应于同一  $s$  值的两条曲线的各项元素:

动点的坐标:  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$ ,

切线与  $x$  轴的交角:  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$ ,

曲率半径:  $R_1$  与  $R_2$ .

由于 (14), 我们便对所有的  $s$  都有:  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ , 亦即 [第 250 目 (2)]

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds}. \quad (15)$$

不仅如此, 依假定, 当  $s = 0$  时

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, \quad (16)$$

并且

$$\alpha_1 = \alpha_2. \quad (17)$$

根据第 131 目系理, 从 (15) 推知  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  仅差一常量; 但是我们已经看见, 当  $s = 0$  时这两个量相同, 因之等式 (17) 总是成立的. 此时对于所有的  $s$  值就有 [第 249 目, (15)]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \frac{dx_2}{ds}, \\ \frac{dy_1}{ds} &= \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \frac{dy_2}{ds}, \end{aligned}$$

由此以类似的方式我们便得出结论, 即等式 (16) 也总是成立的, 这就是说曲线重合了.

现在我们来说明, 如何根据曲线的内蕴方程 (14) 还原出它的坐标表示法来. 首先, 从 (14) 中我们有  $\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$ , 于是

$$\alpha = \int_0^s g(s) ds + \alpha_0, \quad (18)$$

<sup>①</sup>德文术语 natürliche Gleichung 的译文; 而法文术语 équation intrinsèque (即是“固有方程”)亦颇得要领.



此处  $\alpha_0$  为常量, 然后从等式

$$dx = \cos \alpha ds, dy = \sin \alpha ds \quad (19)$$

出发, 做积分, 便得到

$$x = \int_c^s \cos \alpha ds + x_0, y = \int_0^s \sin \alpha ds + y_0, \quad (20)$$

此处  $x_0$  与  $y_0$  是新的常量.

不难了解, 曲线的转动牵连常量  $\alpha_0$  的变化, 而曲线的平移牵连常量  $x_0, y_0$  的变化<sup>①</sup>. 这些常量的等于 0, 显然就是意味着曲线的位置是这样的: 起算弧长的初始点与坐标原点重合, 并且在这点上的切线的正向与  $x$  轴的正向重合.

现在设方程 (14) 是任意取定的 [我们只假定函数  $g(s)$  是连续的]. 则先用公式 (18) 确定了  $\alpha$ , 再以方程 (20) 确定了  $x$  与  $y$ , 我们便得出某条曲线的参数表示法. 微分 (20), 就回到了 (19), 从 (19) 我们首先看出

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

于是  $ds$  实际上就是这条曲线的弧微分, 而  $s$  就是弧长 (假如适当的选择起算的初始点). 其次等式 (19) 还导出结论, 即  $\alpha$  是这条曲线的切线与  $x$  轴的交角. 最后, 微分 (18), 我们便得出, 曲率即等于

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s),$$

并且由此可见, 方程 (14) 实际上就是我们曲线的内蕴方程. 因而每一个 (14) 型的方程 (其中函数  $g(s)$  是连续的), 可以看成是某条曲线的内蕴方程.

读者注意, 由于曲线弧长起算的初始点与方向的选择, 可能在曲线的内蕴方程中引起变化 (虽然是非主要的).

最后我们还需注意, 两条位置对称的曲线<sup>②</sup> (图 13), 它们的 (14) 型的内蕴方程仅在右端差一符号

$$\frac{1}{R} = g(s) \text{ 与 } \frac{1}{R} = -g(s). \quad (21)$$

实际上, 对称的选择两条曲线弧长的起算初始点与方向时, 它们的曲率半径符号相反. 反之, 两条分别具有 (21) 中的方程的曲线, 可借平面上的移动化成对称的位置. 可以认为这样的两条曲线在形状上没有基本的不同.

<sup>①</sup> 将这些断言稍加变通, 不难得出前述定理的新的证明.

<sup>②</sup> 在平面中的移动是不可能把它们叠合的, 这须得在空间中转动才成.

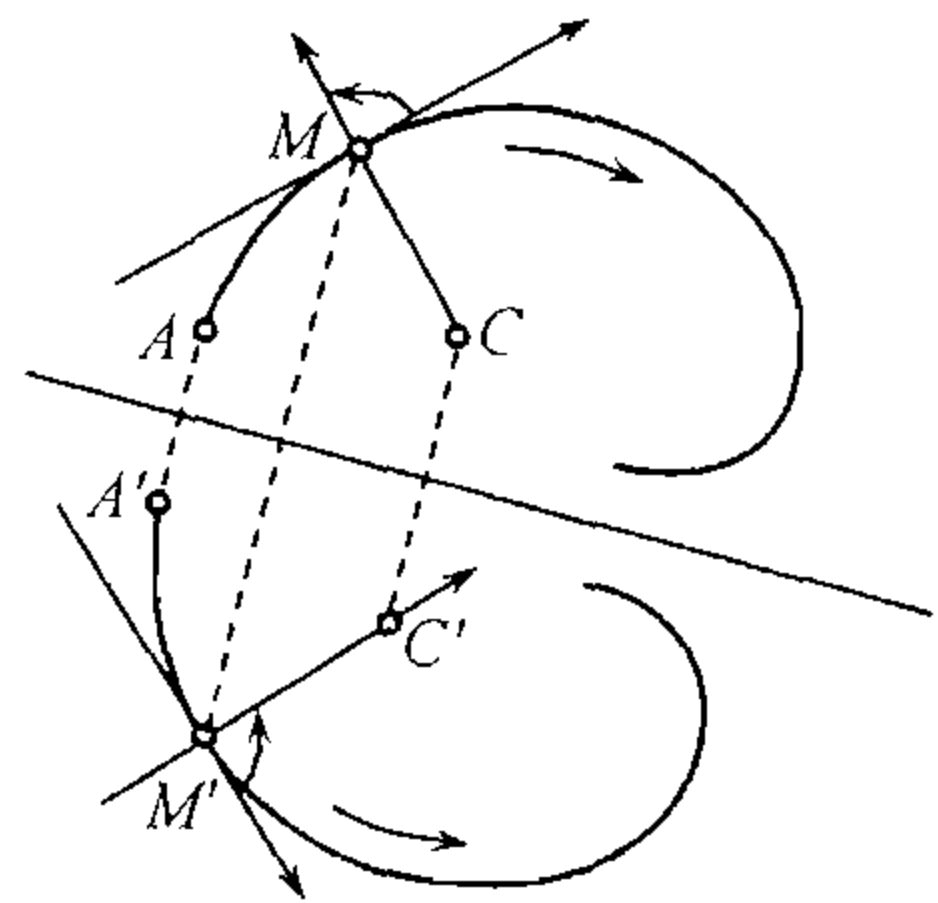


图 13



**333. 例** 1) 试求对应于内蕴方程  $R^2 = 2as$  的曲线. 我们有

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}} \text{ ①}, s = \frac{a}{2}\alpha^2,$$

于是  $ds = a\alpha d\alpha$ . 取  $\alpha$  作为参数, 然后我们便得到

$$dx = \cos \alpha ds = a\alpha \cos \alpha d\alpha, dy = \sin \alpha ds = a\alpha \sin \alpha d\alpha,$$

从而

$$x = a(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha), y = a(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

曲线就成了圆的渐伸线[第 225 目, 8)].

2) 同样的问题 —— 对于内蕴方程  $R^2 + s^2 = 16a^2$ .

此处

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \alpha = \arcsin \frac{s}{4a}, s = 4a \sin \alpha, ds = 4a \cos \alpha d\alpha.$$

于是

$$dx = \cos \alpha ds = 4a \cos^2 \alpha d\alpha, dy = \sin \alpha ds = 4a \sin \alpha \cos \alpha d\alpha,$$

并且做积分, 便得出

$$x = 2a \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = a(2\alpha + \sin 2\alpha), \\ y = -a \cos 2\alpha = a - a(1 + \cos 2\alpha).$$

如果换成参数  $t = 2\alpha - \pi$ , 则得出的曲线方程成为这样

$$x = \pi a + a(t - \sin t), y = a - a(1 - \cos t),$$

我们便得到了旋轮线[第 225 目, 6)], 仅仅与它的通常位置比较起来是移动并翻转了一下.

3) 同样的问题对于内蕴方程  $R = ms$ .

显而易见

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}, \alpha = \frac{\ln s}{m}, s = e^{m\alpha}, ds = me^{m\alpha} d\alpha, \\ dx = \cos \alpha \cdot me^{m\alpha} d\alpha, dy = \sin \alpha \cdot me^{m\alpha} d\alpha,$$

并且最后

$$x = \frac{m}{1+m^2} (m \cos \alpha + \sin \alpha) e^{m\alpha}, \\ y = \frac{m}{1+m^2} (m \sin \alpha - \cos \alpha) e^{m\alpha}.$$

我们化为极坐标. 首先

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\alpha}.$$

① 因为我们只需求出一条曲线即可, 所以选择积分常数的时候, 我们可以只考虑如何便利. 这个注对于下文也是适用的.



然后, 引入以条件  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m}$  所确定的常量角  $\omega$ , 便有

$$\frac{y}{x} = \frac{m \sin \alpha - \cos \alpha}{m \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m} \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega),$$

于是可取极角  $\theta$  等于  $\alpha - \omega$ , 由此  $\alpha = \omega + \theta$ . 最后, 得出的曲线极坐标方程就是这样:

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\omega} e^{m\theta};$$

此系对数螺线[226, 3)].  $e^{m\theta}$  的系数的大小不起作用, 极轴转动一下可把它化为 1.

4) 现在我们来从事另一类的问题: 从给定的曲线出发, 确立它的内蕴方程.

(a) 对于悬链线,  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  已有 [331, 1); 252, 1)]

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}, R = \frac{y^2}{a};$$

从而  $R = a + \frac{s^2}{a}$ .

(6) 对于星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ , 如果把它在第一象限的一支的中点, 取作弧长起算的开始, 便有 [参看第 331 目, 3)]

$$s = \frac{3a}{2} \sin^2 t - \frac{3a}{4}, R = 3a \sin t \cos t.$$

因此

$$R^2 = 4 \cdot \frac{3a}{2} \sin^2 t \cdot \frac{3a}{2} \cos^2 t = 4 \left( \frac{3a}{4} + s \right) \left( \frac{3a}{4} - s \right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2,$$

并且最后, 星形线的内蕴方程可以写成  $R^2 + 4s^2 = \frac{9a^2}{4}$  的形状.

(B) 在心脏线的情形下, 我们已有 [331, 9); 252, 6)]

$$s = 4a \sin \frac{\theta}{2}, R = \frac{4}{3}a \cos \frac{\theta}{2};$$

易见,  $9R^2 + s^2 = 16a^2$ .

(r) 上两个结果是下面的个别情形. 对于圆外旋轮线与圆内旋轮线 [225, 7)], 内蕴方程为

$$(1+2m)^2 R^2 + s^2 = 16m^2(1+m^2)a^2.$$

(д) 不难重新得出自 1) 至 3) 中我们业已知道了的圆的渐伸线、旋轮线与对数螺线的内蕴方程.

5) 根据曲线的内蕴方程可以确定它的渐屈线的内蕴方程, 我们已有关系式 [255, 15)]

$$\rho = R \frac{dR}{ds}. \quad (22)$$

假如这样来选择渐屈线上的弧长起算初始点, 使得有  $R = \sigma$  [参看 255, 2°], 则从这两个关系式与给定的曲线的内蕴方程中, 消去  $R$  与  $s$ , 便得出  $\rho$  与  $\sigma$  之间的依从关系, 也就是得出了渐屈线的内蕴方程.



(a) 对于对数螺线  $R = ms$ ; 于是  $\rho = mR = m\sigma$ . 我们便在符号上又回到了以前的方程; 由此我们作出结论, 渐屈线也是这样一根对数螺线, 和原来的对数螺线仅在位置上不同 [参看 254, 5)].

(5) 对于圆的渐伸线

$$\sigma = R = \sqrt{2as}, s = \frac{\sigma^2}{2a},$$

$$\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma}, \rho = \sigma \cdot \frac{a}{\sigma} = a$$

(这是应该预料到的结果).

(B) 假如曲线的内蕴方程形为  $R^2 + k^2 s^2 = c^2$ , 则其渐屈线也是这样的曲线, 但在长度上增加到  $k$  倍.

实际上, 我们有

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2 s^2}, ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2 s^2}} = -\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma},$$

并且最后,

$$\rho = -\sigma \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k\sqrt{c^2 - \sigma^2} \quad \text{或} \quad \rho^2 + k^2 \sigma^2 = (kc)^2.$$

由此便推出了前述的断言.

所得到的结果可应用到旋轮线 [参看 254, 4)], 圆外旋轮线与圆内旋轮线, 特别言之, 可应用到心脏线与星形线 [参看 254, 3)].

附注 在所有情形下, 所指出的方法仅仅能够决定渐屈线的形状, 而关于它的位置的问题, 则仍为悬案.

### 334. 空间的曲线的弧长 对于空间的曲线

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$

(没有重点), 可用和对平面曲线同样的形式 [249目, 附注], 给出弧长的定义. 此处也得到与 (4) 相类似的弧长公式

$$s = \widehat{AB} = \int_{t_0}^T \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt,$$

以及其他等等. 在这个情形下, 差不多可以毫无变化的把对于平面曲线所讲的种种都移植过来. 在这个上面就毋庸冗言了, 我们来看例子.

1) 螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$ .

因为此处

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

所以曲线从点  $A(t=0)$  到点  $M(t \text{ 为任意的})$  的弧长为

$$s = \widehat{AM} = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} t,$$



如果想一下,当把圆柱面展平时,它上面的螺旋线就变成了斜的直线,那么这便是显然的结果了。

2) 维维亚尼曲线  $x = R \sin^2 t, y = R \sin t \cos t, z = R \cos t$ .

我们有

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = R\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

此时曲线的全长可用第二种类型的全椭圆积分表达

$$\begin{aligned} S &= 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \\ &= 4\sqrt{2}R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt = 4\sqrt{2}R E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

## §2. 面积与体积

**335. 面积概念的定义、可加性** 介于一条或数条封闭折线之间的任意有限 (还可能是不相连接的) 平面图形, 我们称之为**多边的区域**, 或简称**多边形**. 对于这种图形的面积概念, 在中学的几何课程中已经充分研究过了, 我们现在把它当作基础<sup>47)</sup>.

现在我们在平面上, 取出代表一个有界封闭区域的任意图形  $(P)$ . 它的界线或

<sup>47)</sup> 因为平面图形面积的一般定义依赖于多边形面积的概念, 我们来简短地讲一下这后一概念.

首先明确多边形的定义. 如果没有特殊的约定, 那么所指的是这个术语的最宽泛可能的解释, 这意味着把多边形理解为平面上任何有界图形, 它的边界点含于某个有限的一组线段中 (从而容许把自己相交的及退化的折线作为不同类型的边界线; 此外空集同样可规定为多边形). 我们指出, 原则上, 边界点可以属于, 也可以不属于多边形, 或者部分地属于它 (例如三角形可以是开的、闭的、包括其内部及一边或包括其内部及半条边, 等等).

在初等数学教程中证明 (读者可以独立地进行): 平面图形, 当且仅当它可以表为有限多个三角形 (可能有退化的) 的并时是多边形. 这个命题是计算面积的“初等方法”的基础. 由定义同样易于推出, 两个任意多边形的并、交及差仍是多边形. 这一事实今后不止一次会用到.

根据中学的几何教程, 具有如下性质的非负数  $S(P)$  称为多边形  $(P)$  的面积:

1) 若多边形  $(P)$  被分割成 (或分解成) 两个多边形  $(P_1)$  与  $(P_2)$  [这意味着, 多边形  $(P_1)$  与  $(P_2)$  合成多边形  $(P)$  并且没有共同的内点], 则  $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$  (面积的可加性).

2) 若  $(P)$  是边长为  $a, b$  的矩形, 则  $S(P) = ab$ , 若  $(P) = \emptyset$  (空集), 则  $S(P) = 0$ .

3)' 若多边形  $(P)$  包含于多边形  $(P_1)$  与  $(P_2)$  的并, 则  $S(P) \leq S(P_1) + S(P_2)$ ; 若  $(P)$  包含于  $(P_1)$ , 则  $S(P) \leq S(P_1)$  (面积的半可加性与单调性).

4)' 相同的多边形面积相等.

[此处性质 3) 与 4) 加了撇, 因为它们可以从性质 1), 2) 推出, 所以它们不一定要加在定义中.]

所述定义的**适定性** (换句话说, 多边形面积的存在性与唯一性) 可能要借助于三角剖分 (任意多边形分割成三角形) 来建立; 类似的证明通常在 (足够完备的) 初等数学教程中进行.

今后, 所有谈及的有关多边形及其面积都在没有特殊约定的情形下加以应用.



周线( $K$ ), 我们总设想是 (一条或数条)<sup>①</sup> 封闭曲线<sup>48)</sup>.

我们先来研究所有可能的整个被包含在 ( $P$ ) 里的多边形 ( $A$ ), 与整个包含了 ( $P$ ) 的多边形 ( $B$ )(图 14). 若  $A$  与  $B$  分别代表它们的面积, 则永远  $A \leq B$ . 任意一个  $B$  都是数集合  $\{A\}$  的一个上界, 故有一上确界  $P_*$ [第 11 目], 并且  $P_* \leq B$ . 同样的, 由于数  $P_*$ , 数集合  $\{B\}$  有下界, 故有一下确界  $P^* \geq P_*$ . 此二界数的第一个可称为图形 ( $P$ ) 的内面积, 第二个可称为图形 ( $P$ ) 的外面积.

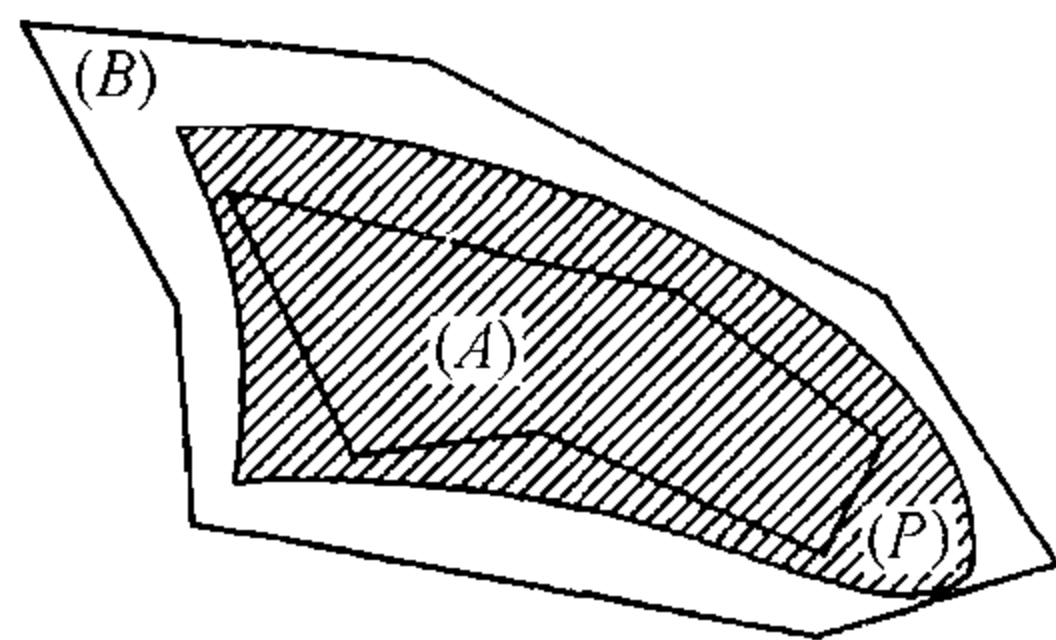


图 14

假若两个界数  $P_* = \sup\{A\}$  与  $P^* = \inf\{B\}$  相等, 则其共同值  $P$  称为图形 ( $P$ ) 的面积. 此时图形 ( $P$ ) 称为可求积的.

易见, 若要面积存在, 必要而且只要: 对于任意的  $\varepsilon > 0$  可找出这样的两个多边形 ( $A$ ) 与 ( $B$ ), 使得  $B - A < \varepsilon$ .

实际上, 这个条件的必要性从确界的基本性质 [第 11 目] 便可推知: 若面积  $P$  存在, 则可找得  $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$  与  $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$ . 充分性则由不等式

$$A \leq P_* \leq P^* \leq B$$

立即可以得到.

现在设图形 ( $P$ ) 分解成了两个图形 ( $P_1$ ) 与 ( $P_2$ )<sup>②</sup>; 例如, 可以想象这是借助于连接其周线上二点的一条曲线, 或借助于整个含在 ( $P$ ) 内的一条曲线而分成的 (图 15, a 与 b). 我们证明:

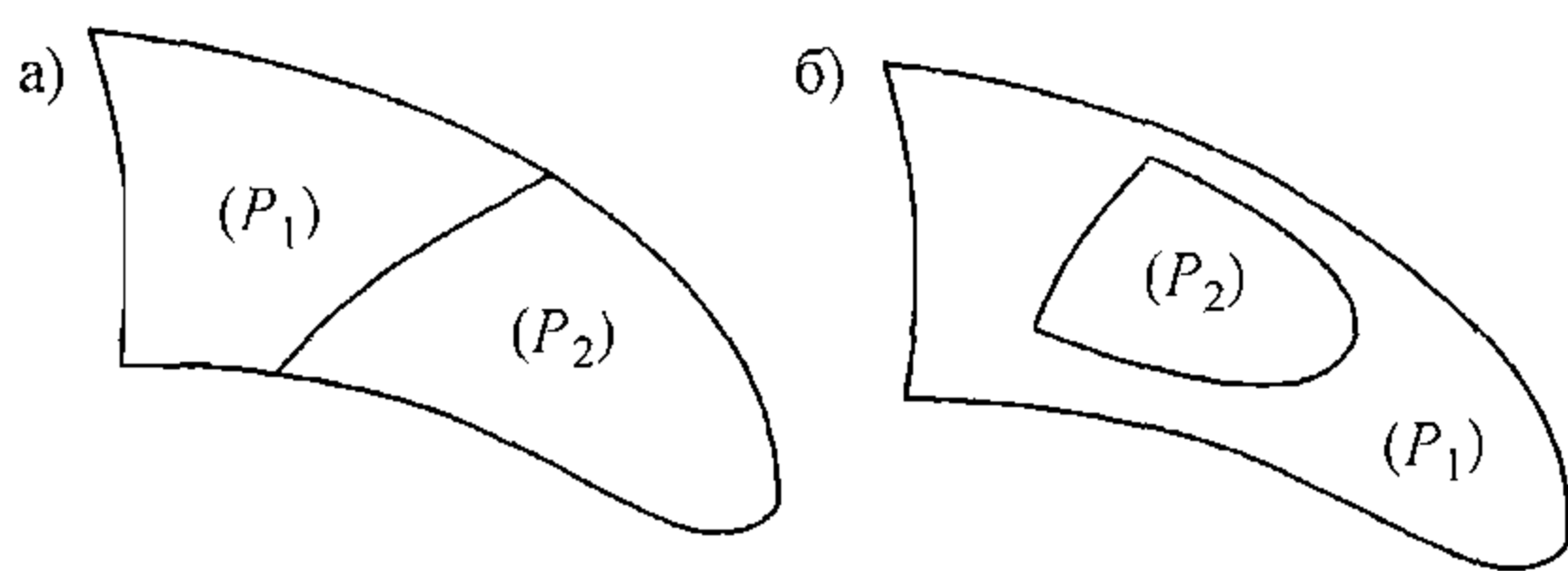


图 15

从这三个图形 ( $P$ ), ( $P_1$ ), ( $P_2$ ) 中两个是可求积的, 可以推知第三个也是可求积的, 并且永远

<sup>①</sup>在本节中, 讲到曲线, 我们总是指连续曲线, 具有参数表示法并且没有重点. 如若尔当 (C. Jordan) 所曾证明的, 这样类型的封闭曲线永远是把平面分为两个区域, 内部的与外部的, 而此封闭曲线为它们的公共界线.

<sup>②</sup>它们可能在局部上有公共界线, 但是彼此不相覆盖, 也就是说没有公共内点.

<sup>48)</sup>当定义图形 ( $P$ ) 的面积时, 其有界性的假定是本质上的; 有关 ( $P$ ) 的闭合性及边界——周线 ( $K$ )——的形状的假定, 仅仅是为了加强叙述的直观性.



$$P = P_1 + P_2, \quad (1)$$

就是说, 面积有可加性.

为了明确起见, 假定图形  $(P_1)$  与  $(P_2)$  有面积. 我们来研究对应于它们的内含的与外包的多边形  $(A_1), (B_1)$  与  $(A_2), (B_2)$ . 由彼此不相覆盖的多边形  $(A_1), (A_2)$  组成多边的区域  $(A)$ , 面积为  $A = A_1 + A_2$ , 而且整个被含在区域  $(P)$  里. 再由多边形  $(B_1)$  与  $(B_2)$  (可能是彼此覆盖的) 组成区域  $(B)$ , 面积为  $B \leq B_1 + B_2$ , 而且整个包含着区域  $(P)$ . 易见

$$A_1 + A_2 = A \leq B \leq B_1 + B_2,$$

因为其中  $B_1$  与  $A_1, B_2$  与  $A_2$ , 可以相差任意少, 所以  $B$  与  $A$  也可以相差任意少, 由此便推出了区域  $(P)$  是可求积的.

另一方面, 我们同时有

$$A_1 + A_2 = A \leq P \leq B \leq B_1 + B_2$$

以及

$$A_1 + A_2 \leq P_1 + P_2 \leq B_1 + B_2,$$

于是数  $P$  与  $P_1 + P_2$  被包含在同一对而且是任意近的界数  $A_1 + A_2$  与  $B_1 + B_2$  之间, 因此, 这两个数是相等的. 证完.

**336. 面积看作极限** 前目所述的可求积的条件可以改述如次:

1) 为了要使图形  $(P)$  是可求积的, 必要而且只要, 存在这样的两个多边形序列  $\{(A_n)\}$  与  $\{(B_n)\}$ , 分别是被包含在  $(P)$  里的及包含着  $(P)$  的, 其面积有共同的极限

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \quad (2)$$

这个极限, 显而易见, 就是图形  $(P)$  的面积.

有时不用多边形, 而用另外一些已知是可求积的图形, 倒更有利一些:

2) 如果对于图形  $(P)$  可以做出这样两个可求积图形的序列  $\{(Q_n)\}$  与  $\{(R_n)\}$ , 分别是被包含在  $(P)$  里的及包含着  $(P)$  的, 其面积有共同的极限

$$\lim Q_n = \lim R_n = P, \quad (3)$$

则图形  $(P)$  也是可求积的, 并且上述的极限即是它的面积.

这从前一个命题中立即可以推出, 如果把每一个图形  $(Q_n)$  换成含于其内的多边形  $(A_n)$ , 而图形  $(R_n)$  换成包含着它的多边形  $(B_n)$ ;  $(A_n), (B_n)$  与  $(Q_n), (R_n)$  在面积上是如此的相近, 于是使得 (2) 亦即同时成立了.

虽然在实际中, 以上所讲的两个定则所提到的图形  $(A_n), (B_n), (Q_n), (R_n)$ , 选择起来并不困难, 然而廓清关于这些选择的含糊之处还是有着原则性的兴趣的. 为了这个目的, 我们可以这样做, 例如:



将所研究的图形  $(P)$  放在某个边与坐标轴平行的矩形  $(R)$  内, 借助于与其边平行的线族, 分割  $(P)$  为若干部分. 由整个含在区域  $(P)$  内的诸矩形, 我们组成了图形  $(\tilde{A})$  (在图 16 中它是画了细线条的), 并由与  $(P)$  有公共内点但可能部分的出了这个区域的诸矩形, 组成了图形  $(\tilde{B})$ . 此二图形显系在面积概念定义中谈到的那些多边形  $(A)$  与  $(B)$  的一个特殊情形; 它们的面积  $\tilde{A}$  与  $\tilde{B}$  依赖于矩形  $(R)$  的分割方法. 我们用  $d$  来表示诸部分矩形的对角线的最大长度.

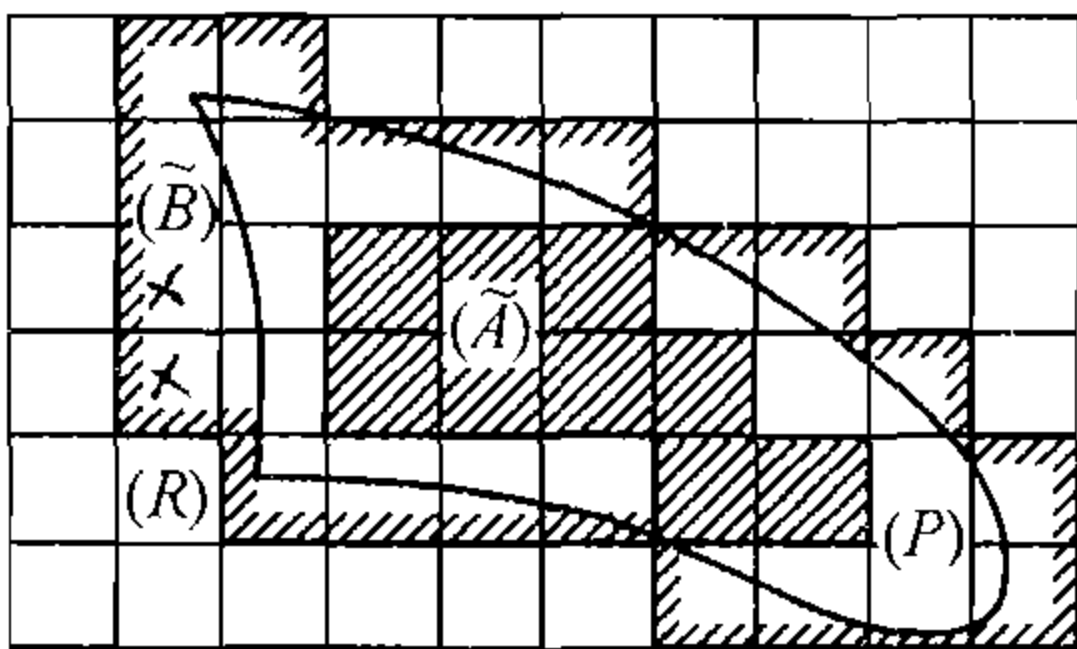


图 16

3) 若当  $d \rightarrow 0$  时, 两个面积  $\tilde{A}$  与  $\tilde{B}$  趋于共同的极限  $P$ , 而且也只有在这个时候, 区域  $(P)$  是可求积的. 这个条件成立时, 所说的极限  $P$  恰是图形  $(P)$  的面积.

读者不难将此处出现的极限概念表成 “ $\epsilon, \delta$  的说法” 或 “序列的说法”.  
只需证明上述条件的必要性即可. 我们假设面积  $P$  存在, 其次我们建立

$$\lim \tilde{A} = \lim \tilde{B} = P. \tag{4}$$

根据给定的  $\epsilon > 0$  可找到 [第 335 目] 这样的多边形  $A$  与  $B$ , 使得  $B - A < \epsilon$ ; 此时可以假定它们的周线与图形  $(P)$  的周线  $(K)$  没有公共点<sup>49)</sup> 我们以  $\delta$  表此二多边形周线上的点与曲线  $(K)$  上的点之间的距离的最小者<sup>①</sup>; 今若取  $d < \delta$ , 则显然每一个触及 (哪怕只是在一点上) 曲线  $(K)$  的部分矩形皆在多边形  $(A)$  之外, 而在多边形  $(B)$  之内. 由此推出

$$A \leq \tilde{A} \leq P \leq \tilde{B} \leq B,$$

于是  $P - \tilde{A} < \epsilon$  并  $\tilde{B} - P < \epsilon$ , 这就引出了 (4).

十分清楚, 可以在等式 (4) 上作出显然与前者等价的面积概念定义. 这样的定义是最简单的与最自然的; 然而缺点是它依赖于 (当然是表面上) 坐标轴的方向.

<sup>①</sup>设在平面上我们有两条有限的连续曲线; 比如说我们假定它们用参数给成

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x &= \varphi(t), y = \psi(t); & \text{(II)} \quad x &= \varphi^*(u), y = \psi^*(u), \\ t_0 &\leq t \leq T & u_0 &\leq u \leq U \end{aligned}$$

此处  $\varphi, \psi, \varphi^*, \psi^*$  每一个对于它自己的变量来说皆为连续函数. 于是这两条曲线上任意二点间的距离

$$\sqrt{[\varphi(t) - \varphi^*(u)]^2 + [\psi(t) - \psi^*(u)]^2}$$

便是在封闭区域  $[t_0, T; u_0, U]$  上的  $(t, u)$  的连续函数, 因而达到它的最小值 [第 173 目]. 如果曲线不相交, 则这个最小距离就不是零.

<sup>49)</sup>这个补充假定的适定性的正式验证可能要求读者费点力气.



**337. 可求积的区域的种类** 区域  $(P)$  的周线曲线  $(K)$ , 是这个区域的求积问题中的要点.

如果是可求积的, 则如我们在第 335 目所见, 对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 曲线  $(K)$  可以被包在某一多边形区域  $(B - A)$  之内, 此区域是界于两个多边形  $(A)$  与  $(B)$  之间的 (参看图 14), 并其面积为  $B - A < \varepsilon$ .

现在反过来, 我们设周线  $(K)$  可以被包在具有面积  $C < \varepsilon$  (此处  $\varepsilon$  是预先给定的正数) 的多边形区域  $(C)$  之内. 这时可以假定 (并不减少一般性)  $(C)$  没有整个盖住图形  $(P)$ . 于是区域  $(P)$  中不在  $(C)$  内的点组成了多边形区域  $(A)$ , 含于  $(P)$  之内; 如果将  $(C)$  与  $(A)$  合拢来, 便得到多边形区域  $(B)$ , 包含了  $(P)^{50}$ . 因为差数  $B - A = C < \varepsilon$ , 所以 (根据第 335 目的准则) 由此推知区域  $(P)$  是可求积的.

为了叙述上的便利, 我们规定称 (闭的或开的) 曲线  $(R)$  的面积为 0, 若是可以用面积任意小的多边的区域将它盖住. 这时根据以上所论, 便可叙出以下的可求积的条件:

欲使图形  $(P)$  是可求积的, 必要而且只要, 其周线  $(K)$  面积为 0.

以此之故, 划出面积为 0 的曲线的广泛族类就有了重要性.

首先, 不难证明, 每个表成显式方程

$$\begin{array}{l} y = f(x) \quad \text{或} \quad x = g(y) \\ (a \leq x \leq b) \quad \quad (c \leq y \leq d) \end{array} \quad (5)$$

( $f$  与  $g$  为连续函数) 形式的连续曲线, 都具备这个性质.

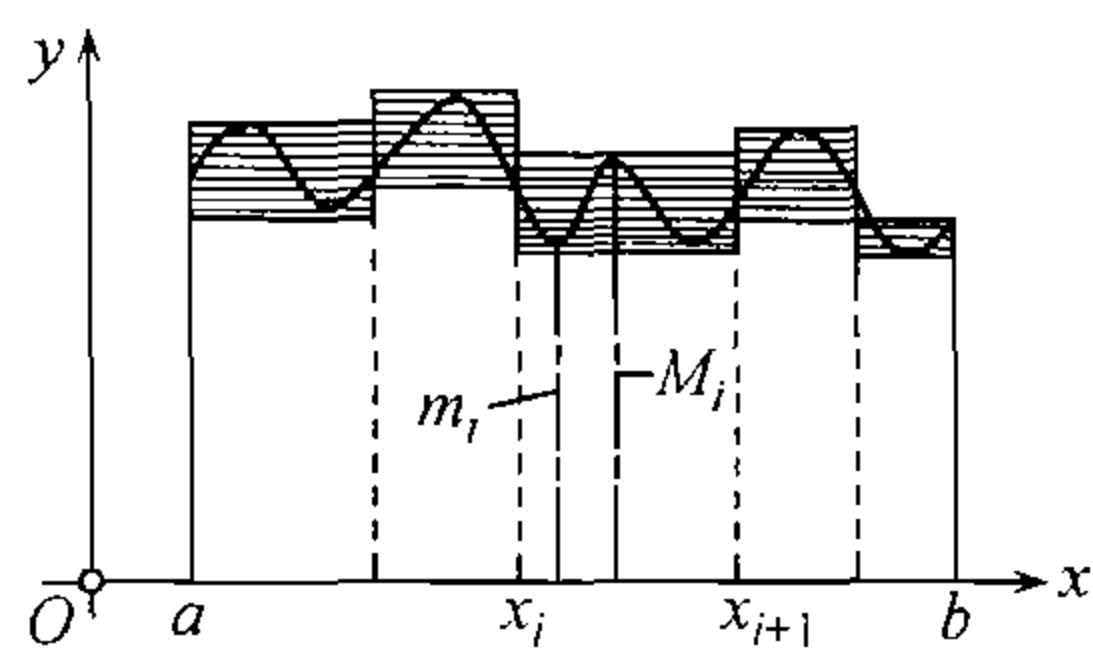


图 17

例如假定来看第一个方程, 对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 可以将区间  $[a, b]$  分为部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), 使得在每一部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  中, 函数  $f$  的振幅  $\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$  [第 87 目]. 若照常以  $m_i$  与  $M_i$  表示第  $i$  个区间内函数  $f$  的最小值与最大值, 则由多边形

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

所组成的图形 (参看图 17), 其总面积为

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon,$$

它盖住了我们整个的曲线。即表明所欲证的, 就是说, 曲线 (5) 的面积为 0. 由此推知:

<sup>50)</sup> 容易验证 (利用边界点的定义), 无论区域  $(A)$  的边界, 还是区域  $(B)$  的边界都是区域  $(C)$  边界的部分. 由此推出 [因为  $(C)$  的边界包含于线段的有限并],  $(A)$  与  $(B)$  实际上都是多边形区域 [参看 335 目中的脚注 47)]



如果图形  $(P)$  界于某几条连续曲线之间, 而其中每一条都分别可表成显式方程 (5)(不论是哪一种), 则这个图形是可求积的.

实际上, 所述曲线既然每一条皆面积为 0. 所以整个周线显见也是面积为 0.

从这个定则可以得出另一比较个别性的定则, 然而在实际中它倒是更方便些.

我们称参数方程

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), y = \psi(t) \\ (t_0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (6)$$

所给出的曲线为光滑的, 若 1) 在整个参数变化区间  $[t_0, T]$  中, 函数  $\varphi$  与  $\psi$  有连续的导数, 并且 2) 曲线上既没有可除的奇异点, 也没有一般的奇异点. 在封闭曲线的情形下, 还要有等式

$$\varphi'(t_0) = \varphi'(T), \psi'(t_0) = \psi'(T).$$

现在我们来确定: 光滑曲线面积为 0.

在曲线上取任意的参数值  $\bar{t}$  所确定的点  $\bar{M}$ . 因为此点非奇异点, 所以像在第 223 目中看到过的一样, 存在有这样的区间:

$$\bar{\sigma} = (\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta),$$

使得曲线上对应的一段可以表成显式方程.

现在把博雷尔引理 [第 88 目] 应用到区间  $[t_0, T]$  与覆盖着它的区间系统  $\Sigma = \{\sigma\}$ ; 就从所有的区间中分出了有限个这样的区间, 使得曲线断成有限部分, 每一部分可表成显式方程 (5)(不论是哪一种). 此时只需再引用以上所证者即可. 于是

如果图形  $(P)$  界于一条或几条光滑曲线之间, 则它显然是可求积的.

在这种场合下, 即当曲线有有限个奇异点时, 这个结论依然有效: 将这些奇异点用任意小面积的邻域分出后, 我们就是在论光滑曲线了.

**338. 面积的积分表达式** 现在我们来讨论利用积分以计算平面图形之面积.

首先我们研究 (这是第一次用严格的叙述) 早已遇到过的关于曲边梯形  $ABCD$  (图 18) 面积定义的问题. 此图形上以曲线  $DC$  为界 (曲线  $DC$  的方程为

$$y = f(x),$$

其中  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上正的并连续的函数); 下以  $x$  轴上的区间  $AB$  为界, 两侧以纵坐标线  $AD$  与  $BC$  (每一条纵坐标线都可能退缩成一个点) 为界. 其实我们所研究的图形  $ABCD$  的面积的存在, 由前目中所证者立即推得, 所以只需来讲它的计算.

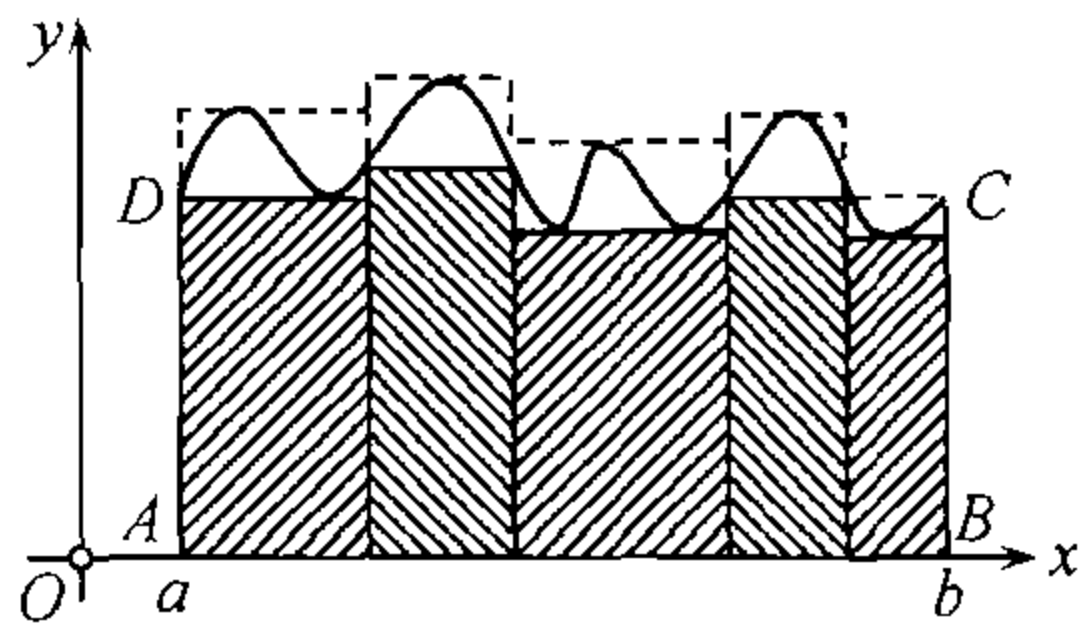


图 18



为了这个目的, 我们和通常一样, 在  $a$  与  $b$  之间插入点列

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$

将区间  $[a, b]$  分成若干段. 以  $m_i$  与  $M_i$  分别表示第  $i$  个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ) 中函数  $f(x)$  的最小值与最大值, 组成 (达布) 和

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

显而易见, 它们分别是内含的与外包的诸矩形所做成的阶梯形图形的面积 (见图 18). 因此

$$s < P < S.$$

但当差  $\Delta x_i$  中的最大者趋向于零时, 二个和皆以积分  $\int_a^b f(x)dx$  为极限<sup>①</sup>, 因之, 此积分即等于所求之面积

$$P = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx. \quad (7)$$

假若曲边梯形  $CDEF$  下面与上面皆以曲线为界 (图 19), 曲线方程为

$$y_1 = f_1(x) \text{ 与 } y_2 = f_2(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

则把它当作两个图形  $ABFE$  与  $ABDC$  的差来研究, 所述的四边形的面积便得出如下的形式

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (8)$$

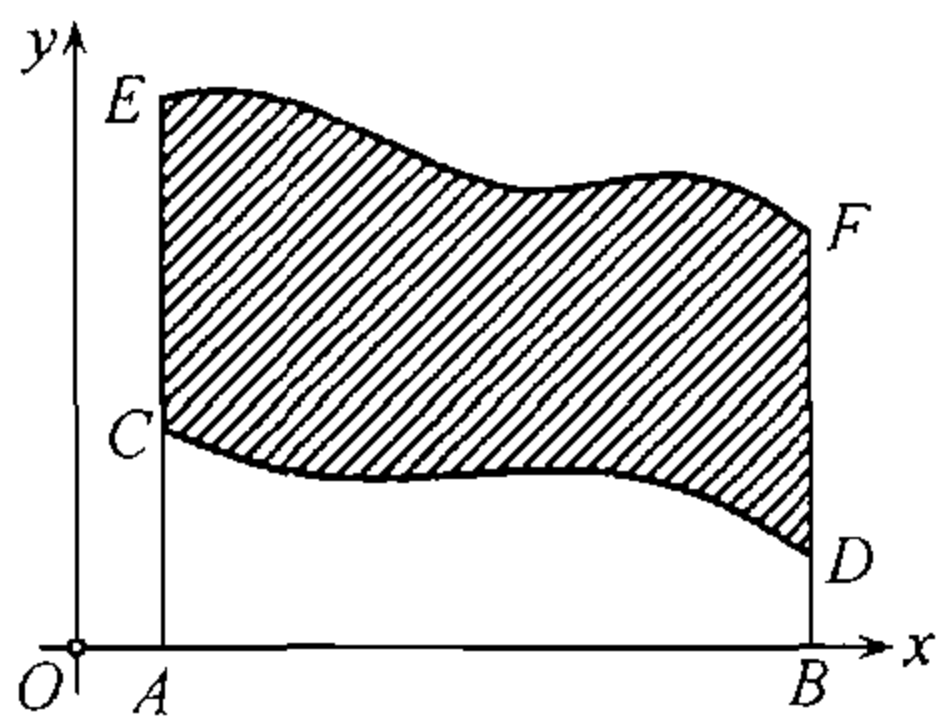


图 19

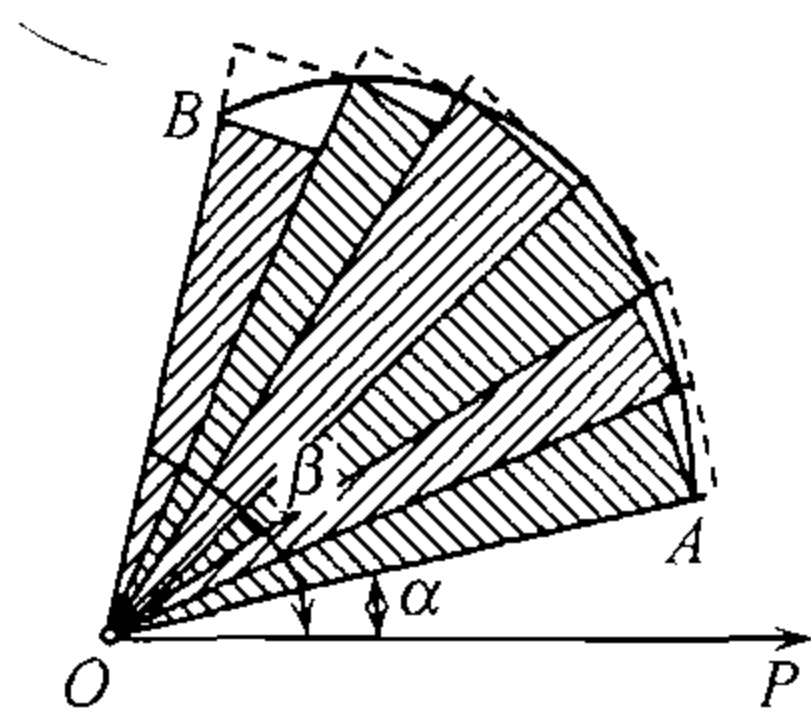


图 20

今设给出了一个以曲线  $AB$  及两个向径  $OA, OB$  (其中每一向径皆可能退缩成一点) 为界的扇形  $AOB$  (图 20). 这时曲线  $AB$  是用极坐标方程  $r = f(\theta)$  给出的, 其

<sup>①</sup> 由于第 336 目 1), 这本身就证明了曲边梯形  $ABCD$  是可求积的; 为了要得出那里所提到的图形序列, 例如说可以将区间加以等分.



中  $r = f(\theta)$  为区间  $[\alpha, \beta]$  上的正的连续函数. 此处的问题也仅在于扇形面积  $P$  的计算, 因为图形的周线的性质已确定了面积的存在<sup>51)</sup>.

在  $\alpha$  与  $\beta$  之间插入以下的值 (见图 20)

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \theta_{i+1} < \cdots < \theta_n = \beta,$$

做出与这些角相对应的向径. 如果此处也引用函数  $f(\theta)$  在  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  中的最小值与最大值:  $\mu_i$  与  $M_i$ , 则用这些向径所画出的圆扇形, 对于图形  $AOB$ , 就分别是内含的与外包的. 将内含的各扇形与外包的各扇形分别组成两个图形, 其面积便是

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i^2 \Delta\theta_i \text{ 与 } \Sigma = \frac{1}{2} \sum_i M_i^2 \Delta\theta_i,$$

并且显而易见,

$$\sigma < P < \Sigma.$$

很容易看出, 此二和  $\sigma$  与  $\Sigma$  即为积分  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$  的达布和; 当差  $\Delta\theta_i$  中最大者趋向于零时, 它们均以此积分为极限<sup>①</sup>, 所以便有

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (9)$$

**339. 例** 1) 试确定界于悬链线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ,  $x$  轴及对应于横标 0 与  $x$  的两条纵坐标线之间的面积  $P$  (图 9).

我们有

$$P = \int_0^x a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} = as,$$

其中  $s$  为悬链线的  $AM$  弧长 [331, 1)]. 这样一来, 所要找的面积  $AOPM$  就和线段  $PS$  与  $SM$  (因为  $SM = AM$ ) 所做出的矩形面积相等了.

2) 给定椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  及其上一点  $M(x, y)$  (图 21). 试确定曲边梯形  $BOKM$  及扇形  $OMB$  的面积.

从椭圆方程中, 我们得到  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , 所以根据公式 (7)

$$\begin{aligned} P_1 = \text{面积 } BOKM &= \int_0^x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

因为最后一项是  $\triangle OKM$  的面积, 所以去掉它我们便得出扇形面积的表达式

$$P_2 = \text{面积 } OMB = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

<sup>①</sup> 此处也可以做出与第 158 页相类似的附注, 但这次是根据 336, 2).

<sup>51)</sup> 事实上容易验证, 曲边扇形边界的面积为 0 (类似于对曲边梯形边界所作的).



当  $x = a$  时, 我们得出椭圆的四分之一的面积的值为  $\frac{\pi ab}{4}$ , 于是整个椭圆面积就是  $P = \pi ab$ . 对于圆,  $a = b = r$ , 便又得出我们熟知的公式  $P = \pi r^2$ .

3) 设给定了双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  及其上一点  $M(x, y)$  (图 22). 试确定曲边图形  $AKM$ ,  $OAM$  与  $OAML$  的面积.

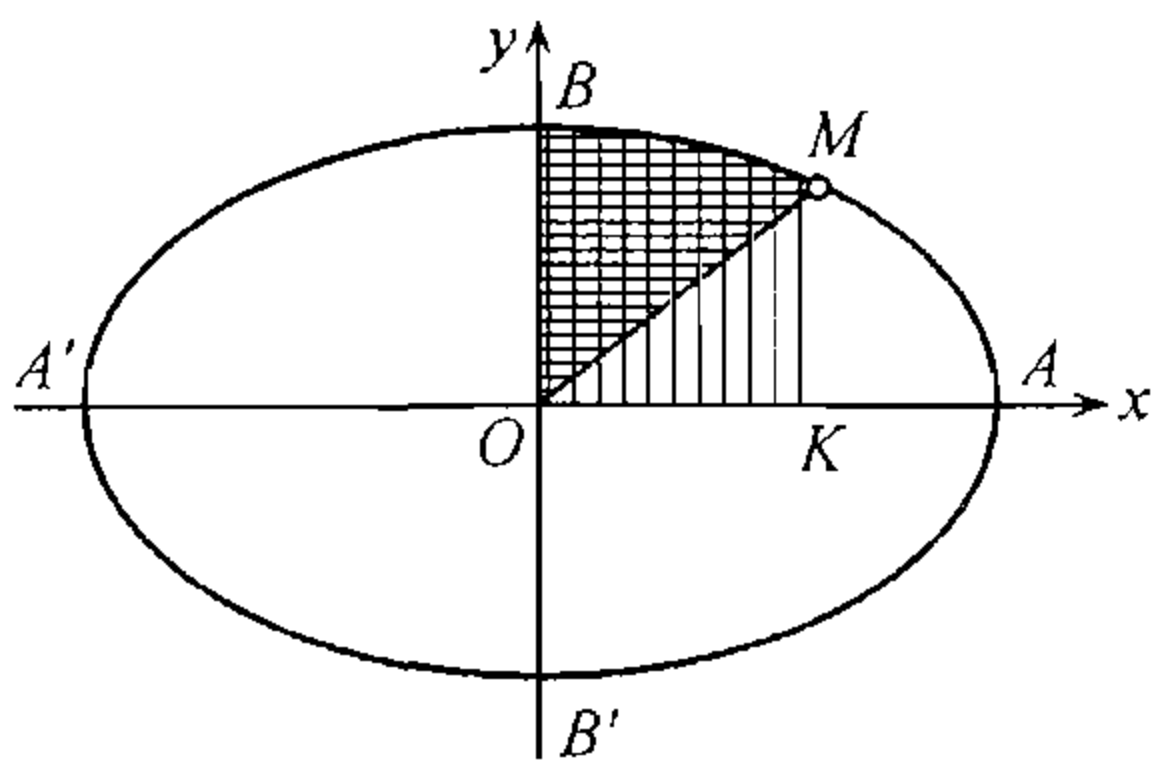


图 21

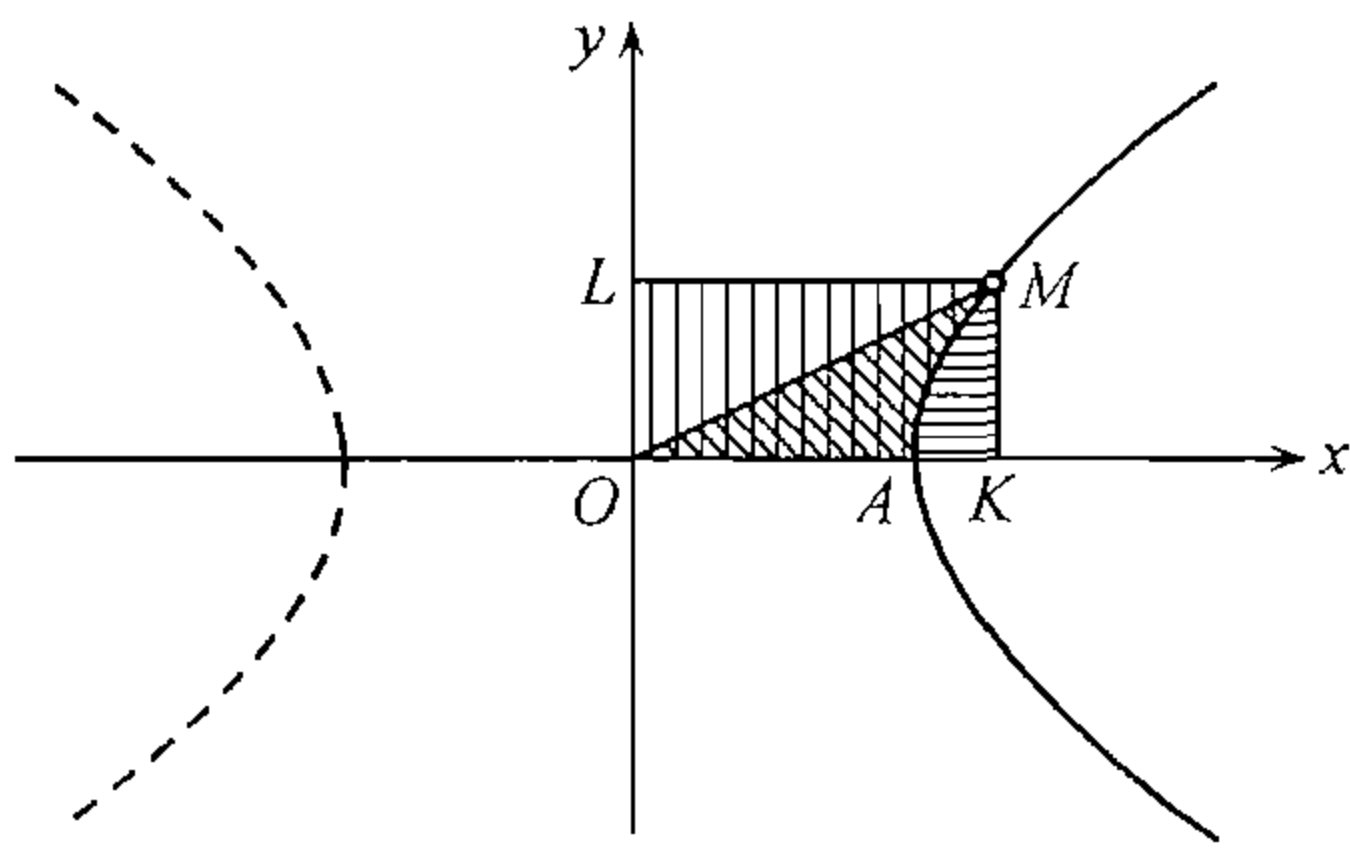


图 22

从双曲线方程中, 我们有  $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ , 并且 —— 根据公式 (7) ——

$$\begin{aligned} P_1 = \text{面积 } AKM &= \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx \\ &= \frac{b}{a} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \Big|_a^x \\ &= \frac{1}{2} xy - \frac{ab}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}. \end{aligned}$$

因为  $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b}$ , 故此表达式可以表成较对称的形式

$$P_1 = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

由此就很容易得到

$$\begin{aligned} P_2 = \text{面积 } OAM &= \frac{ab}{2} \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \\ P_3 = \text{面积 } OAML &= \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} ab \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right). \end{aligned}$$

**附注** 所得到的结果可以使我们深入一些的了解三角函数 (圆函数) 与双曲线函数之间的相似性. 我们来把单位圆:  $x^2 + y^2 = 1$  与等轴双曲线:  $x^2 - y^2 = 1$  作一对照 (图 23, a 与 b). 此二曲线可以用参数表示成这样:

$$\text{圆: } OP = x = \cos t, PM = y = \sin t,$$

$$\text{双曲线: } OP = x = \text{cht}, PM = y = \text{sht}.$$

然而在圆的情形下,  $t$  的几何意义虽则很明显的就是这圆心角  $AOM$ , 可是对于双曲线, 就不可能这样的解释参数  $t$  了. 不过对于圆可以给出参数  $t$  的另外一个解释, 即:  $t$  是扇形  $AOM$  面积的二倍 (或是扇形  $M'OM$  的面积). 原来, 这个解释也可以运用到双曲线的情形中去.



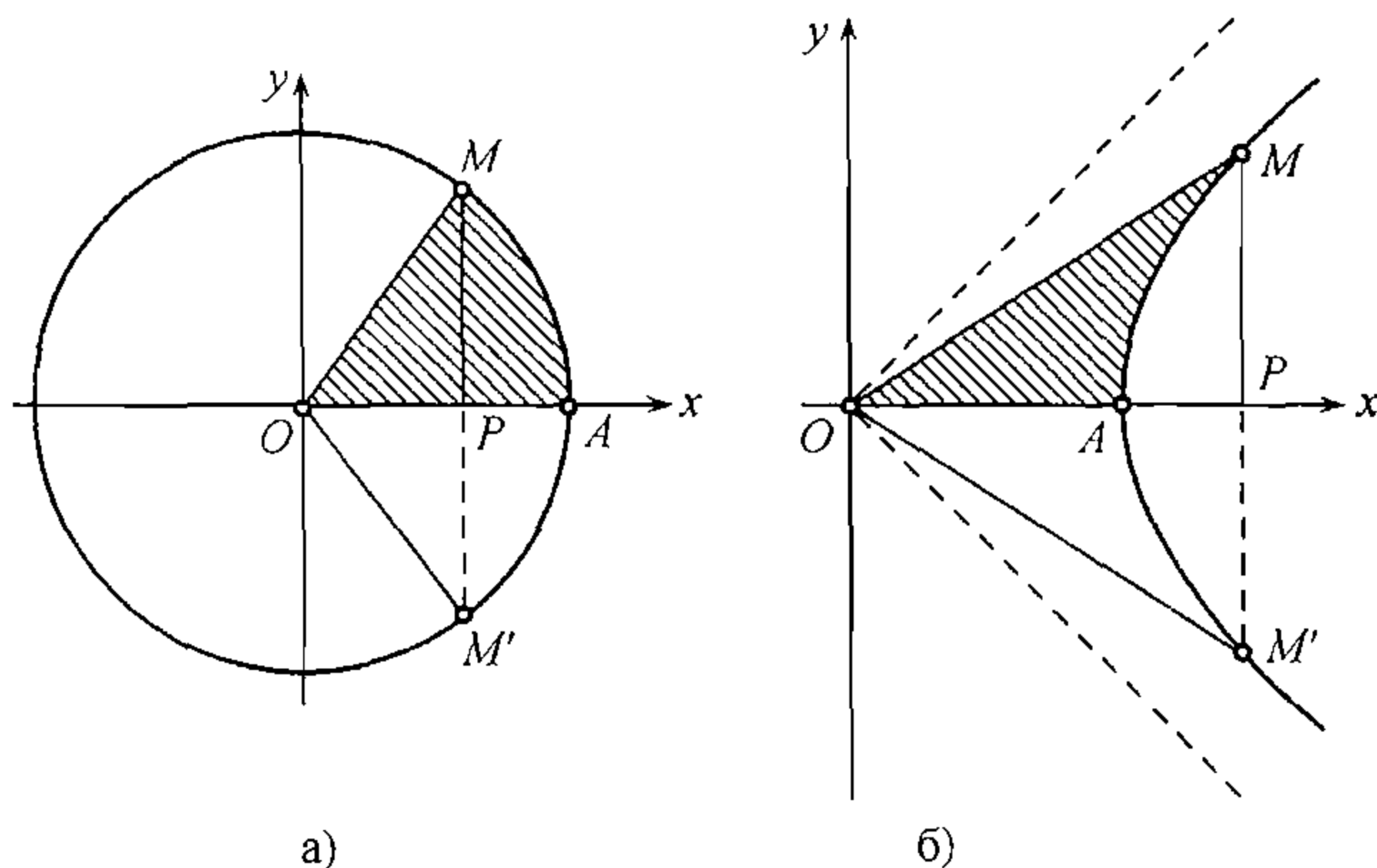


图 23

确实, 若点  $M$  坐标为

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

则  $x + y = e^t$  并且  $t = \ln(x + y)$ . 如果记起以上所求得的  $P_2$  的公式并在其中设  $a = b = 1$ , 我们便得出:  $t$  等于扇形  $AOM$  面积的二倍(恰与在圆的情形中一样).

这样, 在圆中, 线段  $PM$  与  $OP$  表示“圆扇形  $AOM$  面积的二倍”的圆正弦与圆余弦, 而对于双曲线, 此二线段就表示“双曲线扇形  $AOM$  面积的二倍”的双曲线正弦与双曲线余弦. 双曲线函数在对双曲线的关系上的地位和圆(三角)函数在对圆的关系上的地位完全相仿.

反双曲函数的符号 [参看第 49 目, 3) 与 4)]

$\operatorname{Arsh} x, \operatorname{Arch} x$  等等

即是与所指出的双曲函数的自变量的解释(看成某一面积)相联系着的, 其中字母  $\operatorname{Ar}$  是拉丁字  $\operatorname{Area}$ (表示面积之意)的字头.

4) 试求界于坐标轴与抛物线

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

之间的图形的面积  $P$ .

答案  $P = \int_0^a y dx = \frac{1}{6} a^2$ . (让读者自己来作图.)

5) 试确定被封闭在两条全等的抛物线  $y^2 = 2px$  与  $x^2 = 2py$  之间的图形面积(图 24). 易见, 需利用公式 (8), 设其中

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, y_2 = \sqrt{2px}.$$

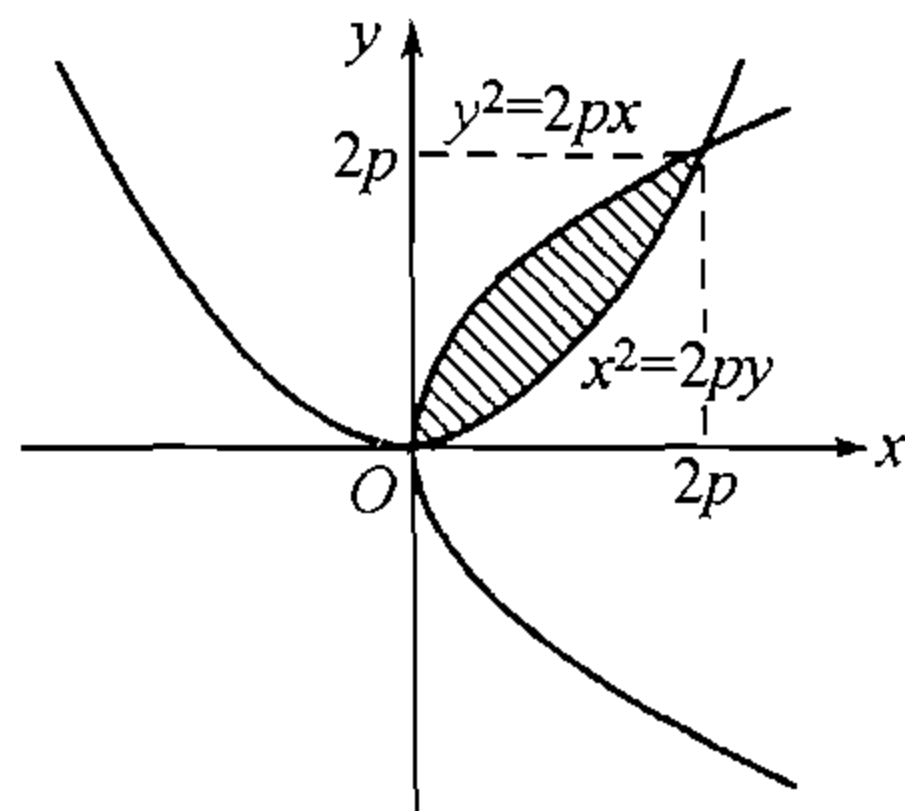


图 24

为了要确定积分的区间, 我们将此二方程联立求解, 便得出两条抛物线的交点  $M$ (非原点) 的横标: 它等于  $2p$ . 我们有

$$P = \int_0^{2p} \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left( \frac{2}{3} \sqrt{2px}^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{4}{3} p^2.$$



6) 试求以方程

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, C > 0) \quad (10)$$

给出的椭圆的面积  $P$ .

解 从这个方程中,

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

并且仅对于满足不等式


$$C - (AC - B^2)x^2 \geq 0$$

的  $x$ , 亦即含于区间  $[-\alpha, \alpha]$  内 (此处  $\alpha = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$ ) 的  $x, y_1$  及  $y_2$  才有实值.

于是所要求的面积便是

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2 - y_1) dx = \frac{2}{C} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{C - (AC - B^2)x^2} dx$$

$$= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \cdot \frac{1}{2} \pi \alpha^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

 最后, 设以通式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

给出椭圆, 欲求其面积  $P$ .

这问题可以简化成前面的问题.

若将原点移至所确定的椭圆的心  $(\xi, \eta)$ , 则如所周知, 由方程

$$a\xi + b\eta + d = 0, \quad b\xi + c\eta + e = 0, \quad (11)$$

原方程即成为如下形状:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f' = 0,$$

$$\text{其中} \quad d\xi + e\eta + f = f'. \quad (12)$$

从等式 (11) 与 (12) 中消去  $\xi, \eta$ , 便得

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f - f' \end{vmatrix} = 0,$$

由此

$$f' = \frac{\Delta}{ac - b^2}, \quad \text{其中} \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \textcircled{1}.$$

<sup>①</sup>显而易见,  $f'$  与  $\Delta$  皆为负 (否则方程就不代表任何实曲线了).



若设

$$A = -\frac{a}{f'}, B = -\frac{b}{f'}, C = -\frac{c}{f'},$$

则所得到的方程不难化成 6) 中所研究过的形状.

于是椭圆面积就是

$$P = \frac{\pi|f'|}{\sqrt{ac-b^2}} = -\frac{\pi\Delta}{(ac-b^2)^{3/2}}.$$

8) 如果曲边梯形的边界曲线是用参数或用 (6) 形的方程给出的, 在这种情形下公式 (7) 仍可利用. 在积分 (7) 中进行换元, 使得 (假定  $t = t_0$  时  $x = a$  并  $t = T$  时  $x = b$ ):

$$P = \int_{t_0}^T yx'_t dt = \int_{t_0}^T \psi(t)\varphi'(t)dt. \quad (13)$$

例如, 若是在椭圆面积的计算中, 从它的参数表示法

$$x = a \cos t, y = b \sin t$$

出发, 并考虑到当  $t$  由  $\pi$  减至 0 时,  $x$  由  $-a$  增至  $a$ , 于是得到

$$P = 2 \int_{\pi}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

此处我们计算了椭圆上面一半的面积并二倍之.

9) 类似的, 计算界于旋轮线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  之下的图形的面积. 根据公式 (13). 我们有

$$P = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left( \frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

由此可见, 所求的面积原来等于母圆面积的三倍.

10) 试求阿基米德螺线  $r = a\theta$  一环的面积 (图 25).

根据公式 (9), 我们有

$$P_1 = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2,$$

而半径为  $2\pi a$  的圆面积是  $4\pi^3 a^2$ . 螺线一环的面积等于圆面积的三分之一 (这个结果早在阿基米德就知道了).

留给读者来证明, 界于相邻二环之间的图形的面积形成一等差级数, 公差为  $8\pi^3 a^2$ .

11) 试求蜗线

$$t = a \cos \theta + b$$

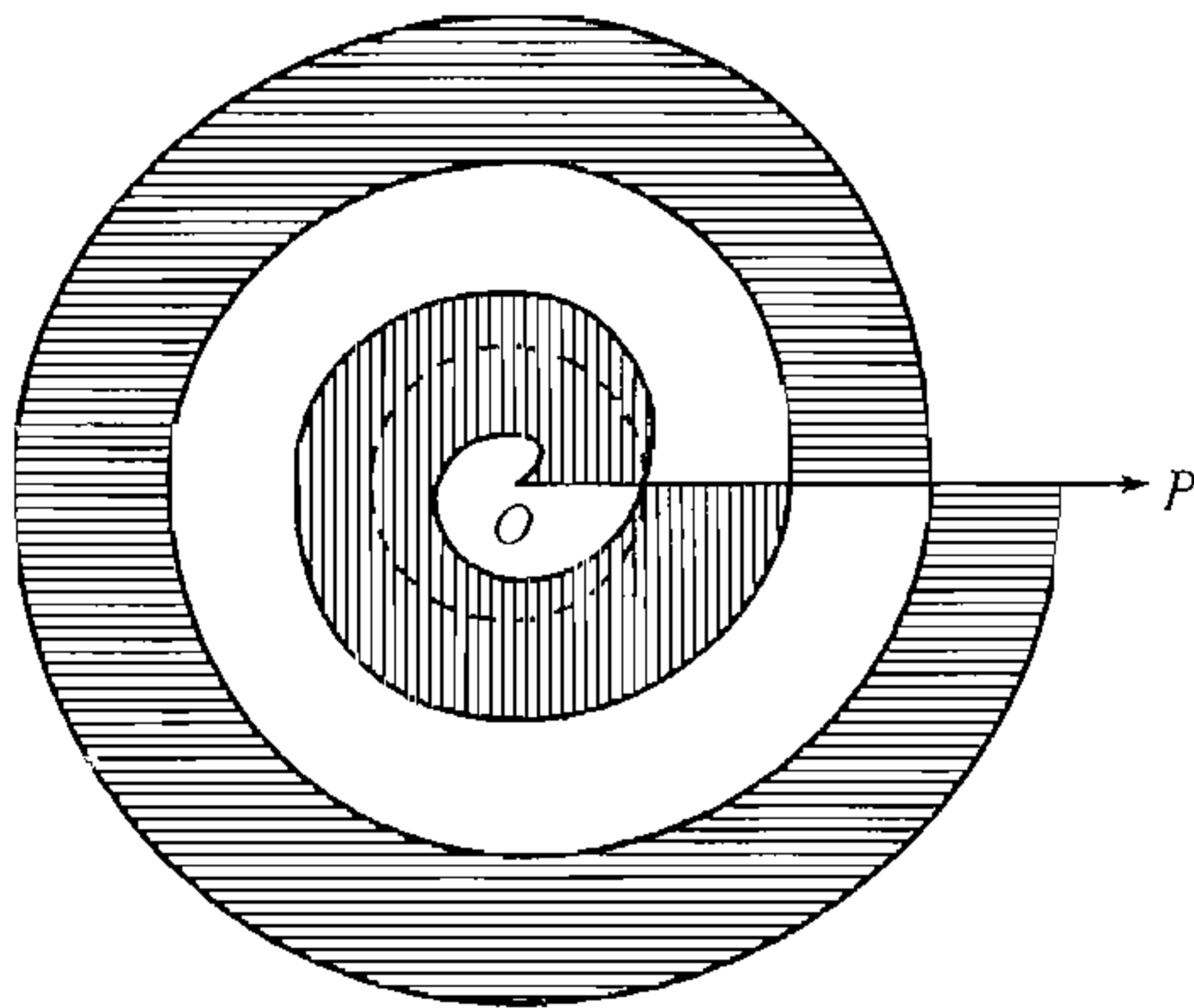


图 25



当  $b \geq a$  时的面积.

根据公式 (9), 我们有

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} a^2 + b^2 \right) \theta + \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta + 2ab \sin \theta \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} (a^2 + 2b^2). \end{aligned}$$

特别言之, 心脏线 ( $b = a$ ) 的面积等于  $\frac{3}{2} \pi a^2$ .

12) 试求双纽线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  的面积.

只要把右边的一块的面积二倍起来就行了, 这一块对应于极角  $\theta$  从  $-\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{4}$ :

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2a^2.$$

13) 试求笛卡儿叶形线  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  的面积.

化成极坐标. 在方程中命  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 约去  $r^2$  就得出以下的极坐标方程:

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

因为曲线的环对应于极角  $\theta$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 故根据公式 (9)

$$P = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta.$$

以  $\operatorname{tg} \theta \cos \theta$  代替  $\sin \theta$ , 积分号下表达式就成为如下形状:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \theta d\operatorname{tg} \theta}{(1 + \operatorname{tg}^3 \theta)^2},$$

由此立刻就找到了原函数

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \theta} = -\frac{1}{3} \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

由此可见,

$$P = -\frac{3a^2}{2} \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

14) 利用极坐标, 重新来解决问题 6).

解 引用极坐标, 将椭圆的方程 (10) 表成如下形状:

$$r^2 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta}.$$

于是根据公式 (9) 立即得到 [309,9)]

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

此处我们使整个椭圆面积等于它在第一与第四象限部分的面积的二倍. 假若要利用第 288 目 10) 的结果来直接计算整个椭圆的面积, 那么就会遇到一些什么困难呢?



15) 公式 (9) 可以使其适合于曲线在以形状 (6) 的参数方程给出时的情形. 因为

$$r^2 = x^2 + y^2, \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{并} \quad \theta'_t = \frac{xy'_t - x'_t y}{x^2 + y^2}.$$

所以

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} (xy'_t - x'_t y) dt.$$

如果极角  $\theta$  自  $\alpha$  变到  $\beta$  对应于参数  $t$  自  $t_0$  变到  $T$ , 则

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (xy'_t - x'_t y) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)] dt. \quad (14)$$

这个公式由于比较对称的缘故, 常使计算较为简便. 例如, 若是根据它来计算椭圆的面积, 从椭圆参数方程  $x = a \cos t, y = b \sin t$  出发, 我们就得到

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

16) 我们再根据公式 (14) 来计算星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  的面积. 我们有

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t] dt \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{16} a^2 \left( t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

**340. 体积概念的定义及其特性** 犹如我们在第 335 目中从多边形面积概念出发而建立了任意平面图形的面积概念一样, 现在我们依靠多面体的体积来给出立体的体积定义<sup>52)</sup>.

那么设给定一任意形状的立体 ( $V$ ), 也就是说三维空间的一个有界封闭区域. 立体的边界 ( $S$ ) 设为一封闭面<sup>①</sup>(或几个封闭面).

我们来研究整个被含在这立体里面的多面体 ( $X$ ) 的体积  $X$ , 以及包含着这个立体的多面体 ( $Y$ ) 的体积  $Y$ . 恒存在  $X$  的上确界  $V_*$  与  $Y$  的下确界  $V^*$ ; 并且  $V_* \leq V^*$ . 它们可以分别称之为立体的内体积与外体积.

如果两个界数

$$V_* = \sup\{X\}, \text{ 与 } V_* = \inf\{Y\}$$

相同, 则其公共值  $V$  称为立体 ( $V$ ) 的体积.

在这里不难看出, 要体积存在, 必须而且只需: 对于任意的  $\varepsilon > 0$  可找到这样两个多面体 ( $X$ ) 与 ( $Y$ ), 使  $Y - X < \varepsilon$ .

<sup>①</sup>我们所指的是连续面, 有参数表示法, 并且没有重点.

<sup>52)</sup> 多面体体积的概念, 基本上类似于多边形面积的概念, 但毕竟十分复杂. 由于这一原因, 所有与体积定义及计算体积一般公式有关的问题, 在传统上比类似的面积理论叙述上要概略得多. 与三维和 multidimensional 空间中体积有关的一系列事实是在测度论中更为详细加以研究的.



更进一步:

如果立体  $(V)$  分解成为两个立体  $(V_1)$  与  $(V_2)$ , 则从这三个立体中的两个的体积存在, 便推知第三个的体积也存在. 此时

$$V = V_1 + V_2.$$

这也就是说体积具有可加性.

不难将第 336 目中已对于面积证明过了的定理 1), 2), 3) 按其大意对于体积套用过来.

1) 为要立体  $(V)$  有体积, 必须而且只需, 分别存在有内含的与外包的多面体的两个序列  $\{(X_n)\}$  与  $\{(Y_n)\}$ , 它们的体积有共同的极限

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

这个极限便是立体  $(V)$  的体积.

注意若将此定理中的多面体换成任意已知有体积的立体, 则仍然成立.

2) 若对于立体  $(V)$ , 能够分别建立这样的内含的与外包的两个立体的序列  $\{(T_n)\}$  与  $\{(U_n)\}$ , 使得都有体积, 并且这些体积趋于共同的极限.

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

则立体  $(V)$  亦有体积, 并且就等于所说的这个极限.

最后, 我们提出以“标准”方法择取趋近于要研究的立体的多面体的可能性. 将这个立体装在某一界面与坐标面平行的平行六面体  $(W)$  内, 再以一组平行于其界面的平面分割此六面体成为若干部分. 我们将含于  $(V)$  内的小平行六面体组成立体  $(\tilde{X})$ , 然后加上那些局部突出  $(V)$  的小平行六面体便得到立体  $(\tilde{Y})$ . 这些立体乃是以以前讲过的那些多面体  $(X)$  与  $(Y)$  的特殊情形. 我们用  $d$  表示平行六面体  $(W)$  所分解成的小平行六面体对角线中之最大者.

3) 若当  $d \rightarrow 0$  时, 体积  $\tilde{X}$  与  $\tilde{Y}$  皆趋于共同的极限  $V$ , 并且也仅仅是当这时候, 立体  $(V)$  有体积; 这个条件成立时, 立体  $(V)$  的体积就是所说的极限  $V$ .

所有这些定理的证明, 我们留给读者; 它们不难由模仿第 336 目中的论证而得出.

**341. 有体积的立体的种类** 正和在面积的情形中一样, 立体  $(V)$  的体积存在与否完全依赖于这个立体的边界  $(S)$  的性质. 不难 [参看第 338 目] 做出这样的准则: 要立体  $(V)$  的体积存在, 必须而且只需, 它的边界  $(S)$  的体积为 0, 也就是说此边界可以装在体积任意小的多面体内.

首先, 以下面三种形式

$$z = f(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = h(y, z)$$



之一的显式方程表出的曲面, 是体积为 0 的面, 其中  $f, g, h$  为某有界区域中的二元连续函数.

比如说, 在含于矩形  $(R)$  中的区域  $(P)$  上, 给定第一种形式的方程. 根据第 174 目定理, 无论  $\varepsilon > 0$  是什么样的, 总可将这矩形分成如此之小的一些矩形  $(R_i)(i = 1, 2, \dots, n)$ , 以使在区域  $(P)$  的含于  $(R_i)$  中的部分  $(P_i)$  上, 函数  $f$  的振幅  $< \frac{\varepsilon}{R}$ . 若  $m_i$  与  $M_i$  是函数  $f$  在  $(P_i)$  中的最小值与最大值, 则我们的曲面可以整个装在由底面积为  $R_i$ , 高为  $\omega_i = M_i - m_i$  的长方体所组成的多面体之内. 这个多面体的体积为

$$\sum \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

证完.

因此, 如果立体  $(V)$  界于某几个连续曲面之间, 而每一个曲面均分别以 (三种形式之一的) 显方程表出, 则此立体有体积.

为了要给出在实际中通常可用的特殊准则, 我们建立光滑曲面的概念.

设曲面被表成参数方程

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v),$$

其中函数  $\varphi, \psi, \chi$  与其偏导数在  $uv$  平面的某一有界封闭区域  $(Q)$  内是连续的. 这个区域的边界  $(L)$  我们设想是由光滑曲线组成的. 最后, 假定这个曲面没有重点及其他奇异点. 在所有这些条件成立时, 此曲面即称为光滑的.

设  $\bar{M}$  是曲面上由参数值  $u = \bar{u}, v = \bar{v}$  所确定的任意一点; 因为它不是奇异点, 故可 [参看第 228 目]①把点  $(\bar{u}, \bar{v})$  在  $uv$  平面上用这样一个邻域

$$\bar{\sigma} = (\bar{u} - \bar{\delta}, \bar{u} + \bar{\delta}; \bar{v} - \bar{\delta}, \bar{v} + \bar{\delta})$$

环绕起来, 使得在曲面上的对应区域被表成了显式方程. 为要说明所研究的光滑曲面可以分解成有限部分, 每一部分皆以三种形式之一的显式方程表出, 只需将博雷尔引理 [第 175 目] 应用到封闭区域  $(Q)$  及覆盖它的邻域系统  $\Sigma = \{\bar{\sigma}\}$  即可. 由此——根据以上——推知, 光滑曲面体积为 0.

现在显然可见

界于一个或几个光滑曲面之间的立体定有体积.

然而, 也准许在立体的界面上存在有限个奇异点, 这些可以用一些体积任意小的邻域分割出去.

**342. 体积的积分表达式** 我们从几乎是显然的一点开始: 高为  $H$ , 底为可求积的平面图形  $(P)$  的直立柱体有体积, 等于底面积与高的乘积:  $V = PH$ .

①如果点  $(\bar{u}, \bar{v})$  是在区域  $(Q)$  的边界  $(L)$  上, 则对于它所指的应是第 262 目中所讲的.



我们这样来择取 [第 336 目, 1)] 分别含于  $(P)$  内的与包含着  $(P)$  的多边形  $(A_n)$  及  $(B_n)$ , 使得它们的面积  $A_n$  与  $B_n$  趋向于  $P$ . 如果在这些多边形上建立起高为  $H$  的直立棱柱体  $(X_n)$  与  $(Y_n)$  来, 则它们的体积

$$X_n = A_n H \text{ 与 } Y_n = B_n H$$

就趋向共同的极限  $V = PH$ , 由于第 340 目 1), 这便是我们的柱体的体积.

现在我们来研究含于平面  $x = a$  及  $x = b$  之间的某一个立体  $(V)$ , 并开始以垂直于  $x$  轴的一些平面来分割它 (图 26). 假定所有这些截面是可求积的, 并设对应于横坐标  $x$  的截面面积 —— 以  $P(x)$  表之 —— 是  $x(a \leq x \leq b)$  的连续函数.

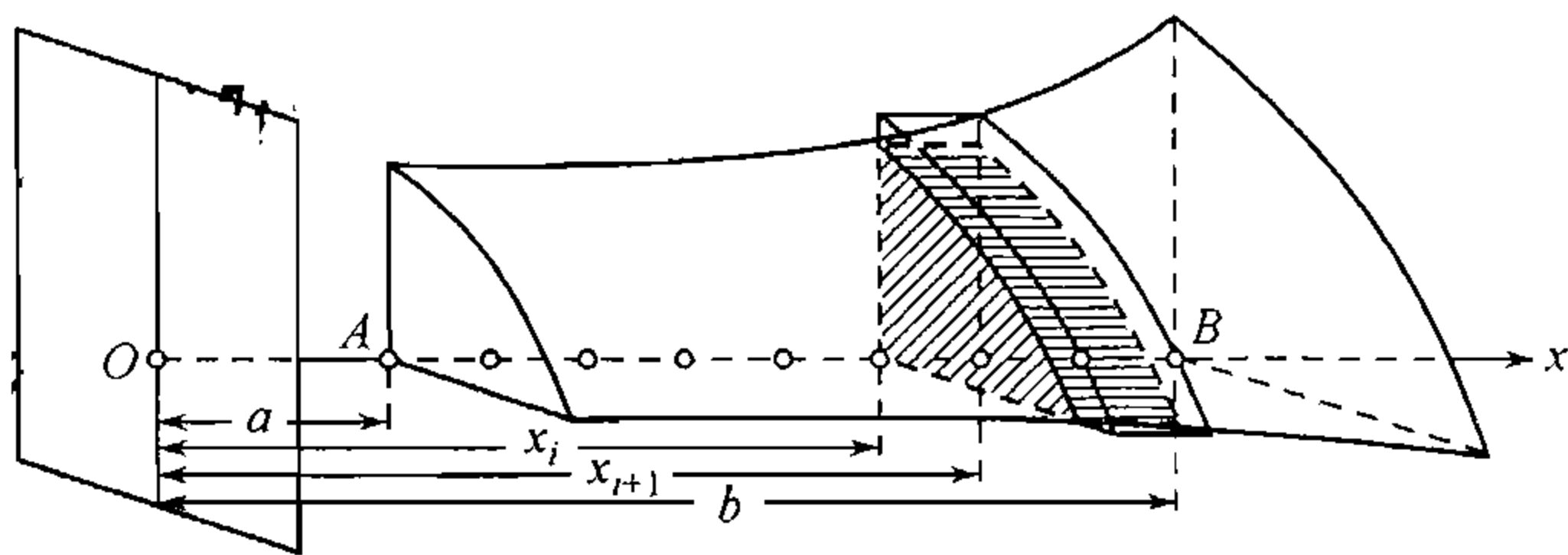


图 26

如果 (不歪不偏的) 投影两个同类的截面到某一垂直  $x$  轴的平面上, 则它们可能或是一个含在另一个里面 (如图 27,a), 或是局部的一个在另一个之上或是彼此完全分开 (参看图 27,b,B).

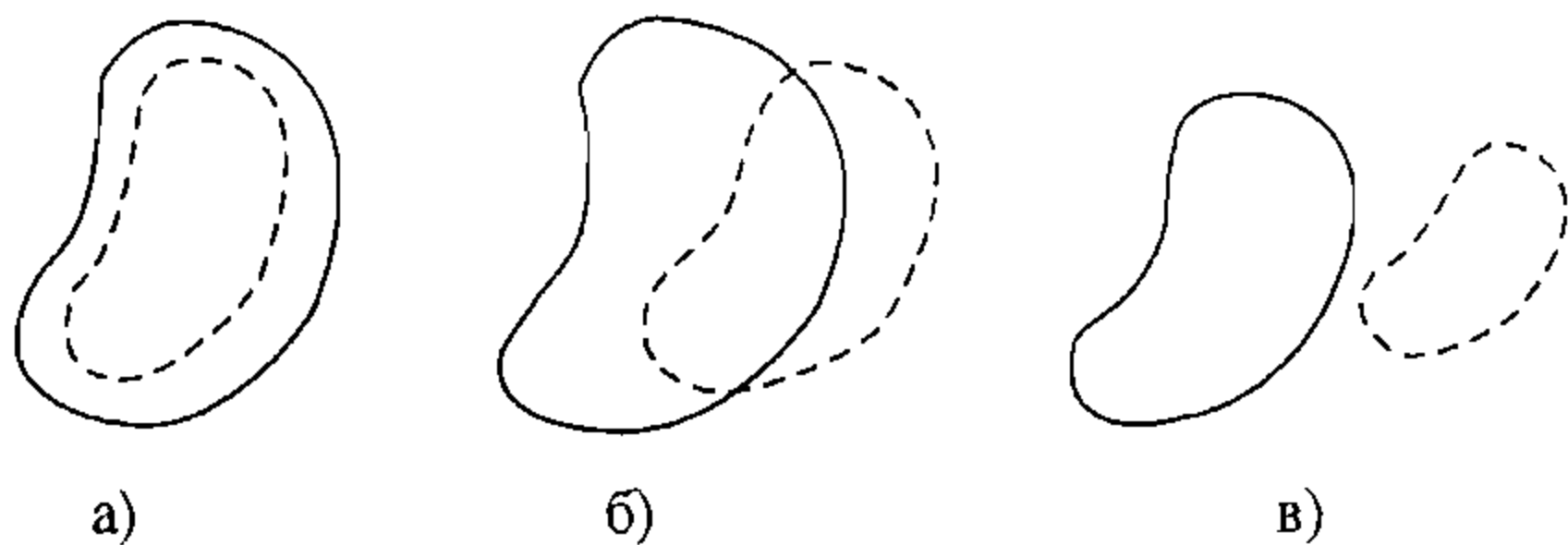


图 27

我们暂且先讨论这种情形: 即两个截面被投射在垂直于  $x$  轴的平面上, 永远是一个含在另一个的里面.

在这个假定下, 可以断言, 立体  $(V)$  有体积, 表如公式

$$V = \int_a^b P(x) dx. \quad (15)$$

为了证明, 我们将  $x$  轴上的区间  $[a, b]$  用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$



分成若干部分, 并用通过分点的平面  $x = x_i$  将整个的立体分割成若干片. 我们来研究含于平面  $x = x_i$  与  $x = x_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) 之间的第  $i$  片. 在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  中, 函数  $P(x)$  有最大值  $M_i$  与最小值  $m_i$ ; 如若将对应于此区间中不同的  $x$  值的截面放在一个平面上, 比如说是  $x = x_i$ , 则它们 (在所作的假定下) 就都被包含在面积为  $M_i$  的最大的一个里, 并且都包含着面积为  $m_i$  的最小的一个. 如果在这些最大的与最小的截面上, 建立起高为  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  的直柱, 则前者就包含了我们立体中所研究的这一片, 而后者就被包含在这一片之内. 根据开始时所讲的一点, 这些柱体体积分别为  $M_i \Delta x_i$  与  $m_i \Delta x_i$ .

内含的各柱体组合成立体 ( $T$ ), 外包的各柱体组合成立体 ( $U$ ); 它们的体积分别等于

$$\sum_i m_i \Delta x_i \text{ 与 } \sum_i M_i \Delta x_i,$$

并且当  $\lambda = \max \Delta x_i$  趋向于零时, 有共同的极限 (15). 由第 340 目, 2), 这就是立体 ( $V$ ) 的体积<sup>①</sup>.

**旋转体**是一个重要的特殊情形, 此时以上所讲的关于截面相互间位置的假定显然成立. 设想在  $xy$  平面上以方程  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 给定一条曲线, 此处  $f(x)$  是连续的并且是非负的; 我们开始将它所界出的曲边梯形环绕  $x$  轴而旋转 (图 28, a 与 6). 显而易见, 所得出的立体 ( $V$ ) 合于我们所研究的情形, 因为它的截面投射到垂直于  $x$  轴的平面上就成了同心圆, 此处  $P(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ , 所以

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (16)$$

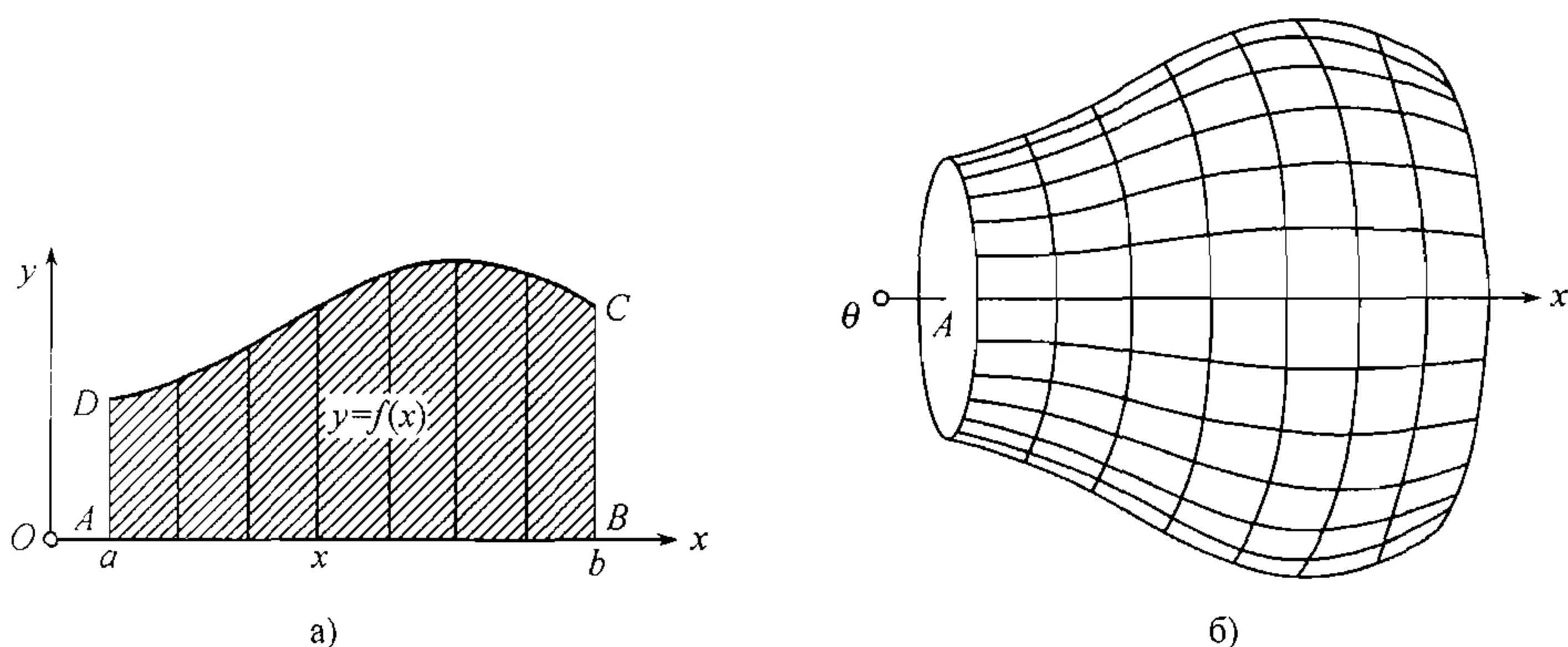


图 28

<sup>①</sup>例如将区间分为等分, 便很容易的选出来了在所引用的定理中讲到的内含的与外包的立体的序列.



如果曲边梯形是下面用曲线  $y_1 = f_1(x)$ , 上面用曲线  $y_2 = f_2(x)$  所界出的, 则显而易见

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} dx, \quad (17)$$

虽然关于截面的假定在这里可能并不成立. 一般来说, 所证得的结果不难推广到所有由满足所述假定的立体的相加或相减而得的立体.

在一般情形下只能肯定: 如果立体  $(V)$  有体积<sup>①</sup>, 则可表成公式 (15).

事实上给定了任意的  $\varepsilon > 0$  之后, 我们可以在平面  $x = a$  与  $x = b$  之间做这样两个由若干平行六面体所组成的立体  $(\tilde{X})$  与  $(\tilde{Y})$ , 使得  $(\tilde{X})$  含于  $(V)$  里面, 而  $(\tilde{Y})$  包含着  $(V)$ , 并且还有  $\tilde{Y} - \tilde{X} < \varepsilon$ . 因为对于  $(\tilde{X})$  与  $(\tilde{Y})$ , 我们的公式显然合用, 所以用  $A(x)$  与  $B(x)$  表示它们横截面的面积, 便有

$$\tilde{X} = \int_a^b A(x) dx, \quad \tilde{Y} = \int_a^b B(x) dx.$$

另一方面, 因为  $A(x) \leq P(x) \leq B(x)$ , 所以又有

$$\tilde{X} = \int_a^b A(x) dx \leq \int_a^b P(x) dx \leq \int_a^b B(x) dx = \tilde{Y},$$

因之体积  $V$  与积分  $\int_a^b P(x) dx$  并皆含于同一界限  $\tilde{X}$  与  $\tilde{Y}$  之间, 而  $\tilde{X}$  与  $\tilde{Y}$  相差小于  $\varepsilon$ . 由此便推出我们所要的结论.

**343. 例** 1) 试计算底半径为  $r$  与高为  $h$  的圆锥体的体积  $V$ .

过锥体的轴作一截面, 并取此轴作为  $x$  轴, 锥体的顶点算作原点; 并引  $y$  轴垂直锥体的轴 (图 29). 锥体的母线方程便是

$$y = \frac{r}{h}x,$$

并且——根据公式 (16)——我们得到

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

这个结果读者在中学课程便已熟知了.

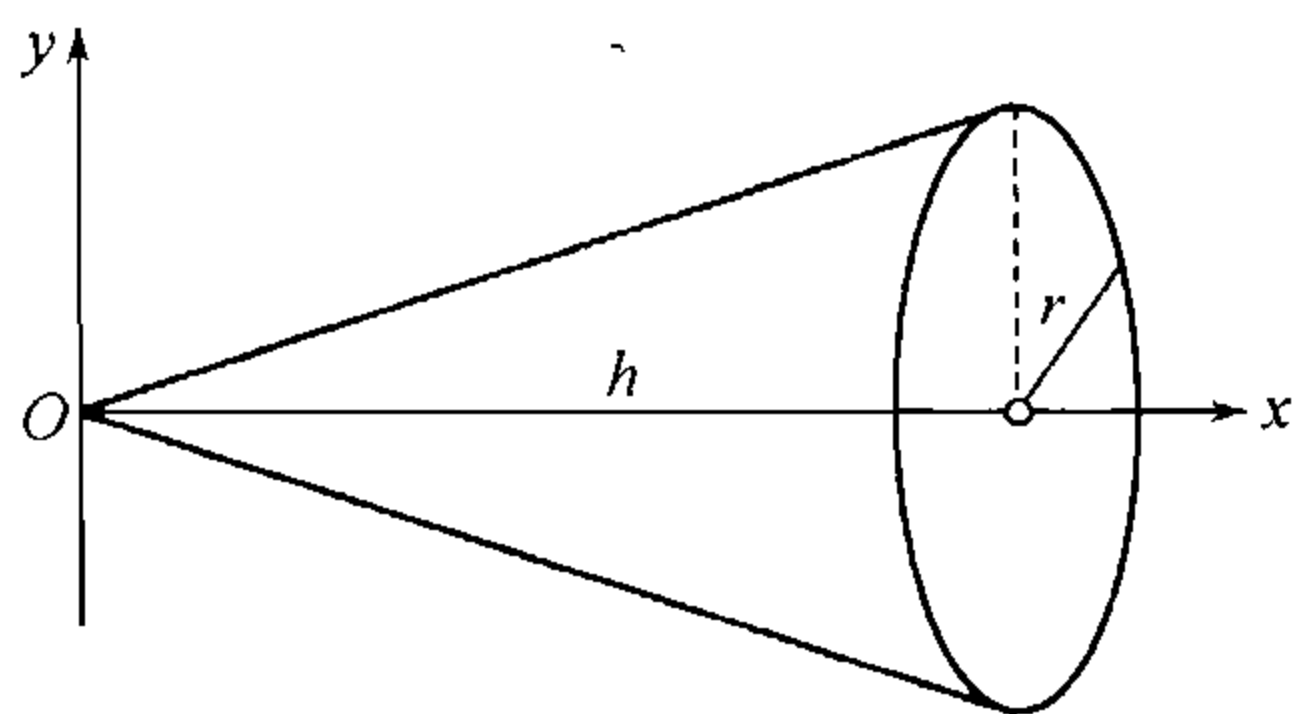


图 29

2) 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转.

因为

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

所以我们得出旋转椭球体的体积

$$V = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

<sup>①</sup>例如, 用一个或几个光滑曲面 [第 341 目] 所界出的立体便是这样的立体.



类似的我们得出绕  $y$  轴的旋转椭球体的体积表达式  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ . 在这公式中假定  $a = b = r$ , 我们便得到半径为  $r$  的球体体积的熟知的值  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

3) 试确定界于对应点 0 与  $x$  的截面之间的悬链线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  绕  $x$  轴旋转而得的立体的体积. 我们有

$$\begin{aligned} V &= \pi a^2 \int_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \int_0^x \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \pi a^2 \left( x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right) = \frac{1}{2} \pi a \left( ax + a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \cdot a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right). \end{aligned}$$

回忆 [第 331 目, 1)]  $a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$  是我们曲线的弧长  $s$ , 最后我们便得到  $V = \frac{1}{2} \pi a (ax + sy)$ .

4) 同样试求旋轮线的一拱

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$$

绕  $x$  轴旋转所得出的立体的体积.

曲线的参数方程使得在公式

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dr$$

中很容易做一变换  $x = a(t - \sin t), dx = a(1 - \cos t)$ . 即

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \left( \frac{5}{2}t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5) 同样, 对于星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

我们有

$$y = \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, V = \pi \int_{-a}^a \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

建议读者由星形线的参数方程出发, 并用换元法 (如上题), 重新计算一回.

6) 试求抛物面  $2az = x^2 + y^2$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  的公共部分的体积<sup>53)</sup>.

解 这两个立体及它们的公共部分皆系旋绕  $z$  轴的旋转体. 所说的这两个曲面的截面是在平面  $z = a$  上.

垂直于  $z$  轴的平面截我们所研究的立体成为圆; 当  $z \leq a$  时这些圆的半径平方等于  $2az$ , 并只当  $z$  变得  $> a$  时, 才等于  $3a^2 - z^2$ . 利用类似 (16) 的公式, 便有

$$V = 2\pi a \int_0^a z dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5).$$

7) 试求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与圆锥面  $x^2 = y^2 + z^2 (x \geq 0)$  的公共部分的体积<sup>53)</sup>.

提示 此二曲面的截面系在平面  $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$  上. 我们有

$$V = \pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} x^2 dx + \pi \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi R^3}{3} (2 - \sqrt{2}).$$

<sup>53)</sup> 显然上述方程仅仅给出了所应求公共部分体积的区域的边界.



直到这里为止, 我们研究的是特殊公式 (16) 的应用例子. 现在我们来一般的公式 (15). 因为在所有的场合下, 体积的存在可以毫无困难的加以论证, 例如可以根据第 341 目中的论证, 因此我们就不来讲体积的存在, 而只单是计算体积.

8) 试确定圆柱弓形体的体积. 用通过底的直径的平面, 从直圆柱上切下来的几何的立体, 称作圆柱弓形体 (图 30).

假设, 圆柱的底是半径为  $a$  的圆:

$$x^2 + y^2 \leq a^2,$$

截面通过直径  $AA'$  并且与底面作成角  $\alpha$ . 我们来确定垂直于  $x$  轴并且与之交于点  $M(x)$  的截面积. 这个截面是直角三角形; 显然

$$P(x) = MNP \text{ 的面积} = \frac{1}{2}y^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha,$$

于是根据公式 (15)

$$V = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h,$$

其中  $h = KL$  是圆柱弓形体的高.

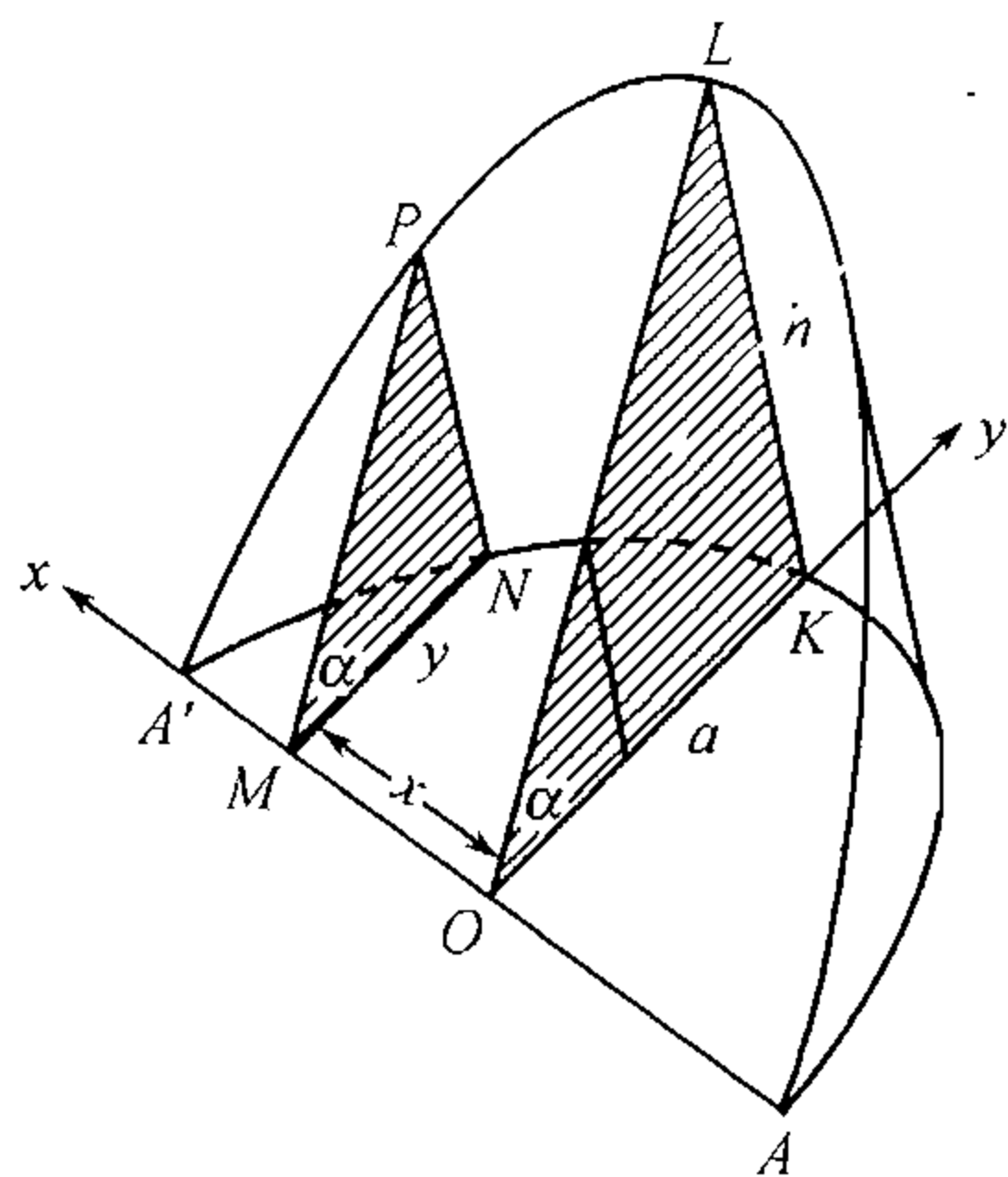


图 30

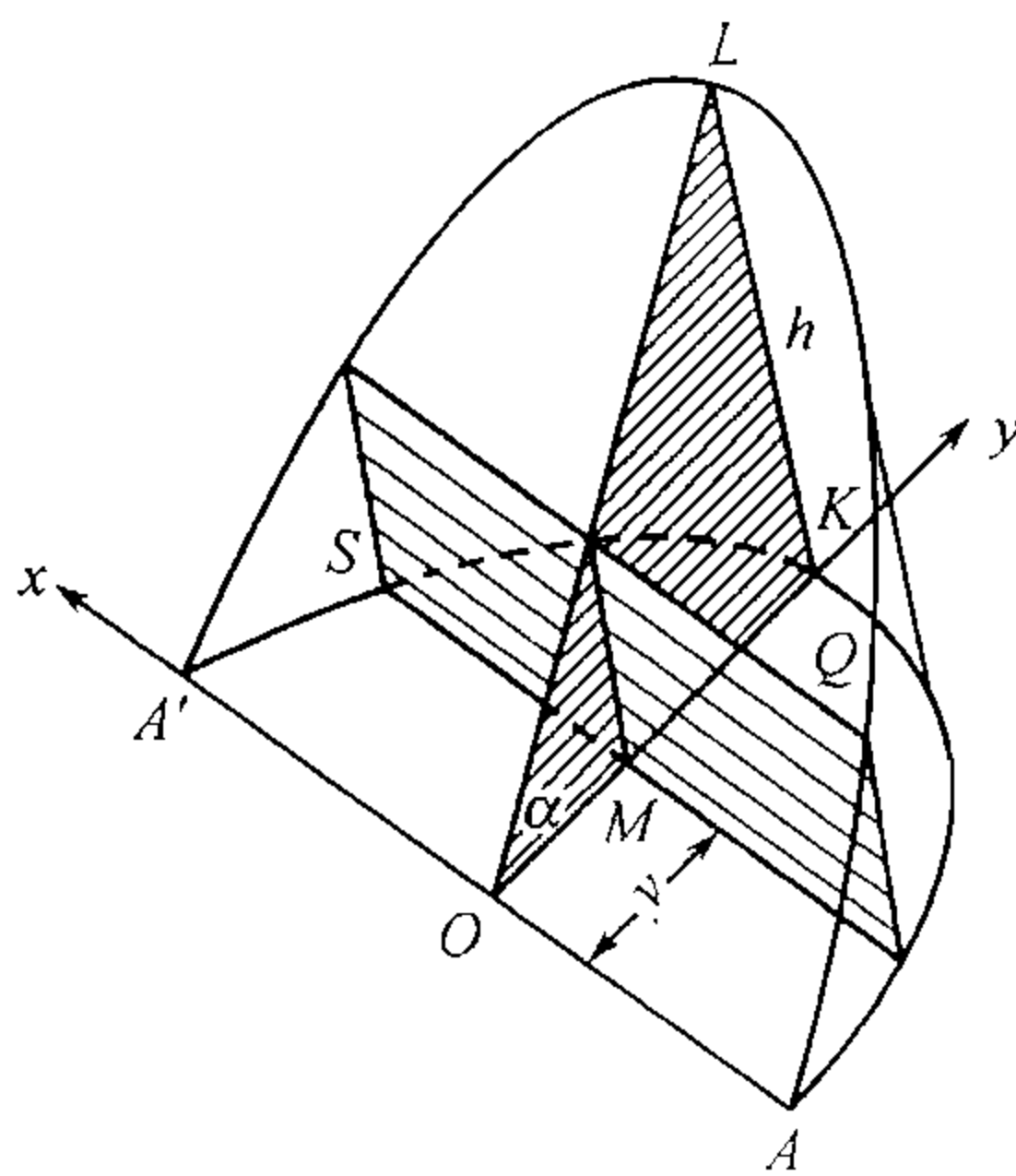


图 31

有趣的是: 注意若使  $y$  轴来起  $x$  轴一向所起的作用, 这就是说, 用垂直  $y$  轴的平面来截这个立体, 也一样可以得出这体积 (图 31). 通过纵坐标为  $y$  的点  $M$  所引出的这样的平面, 截我们的立体于矩形  $SQ$ , 其面积为

$$P(y) = 2xy \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

因此, 类似公式 (15),

$$V = 2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = -\frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

9) 试求以标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



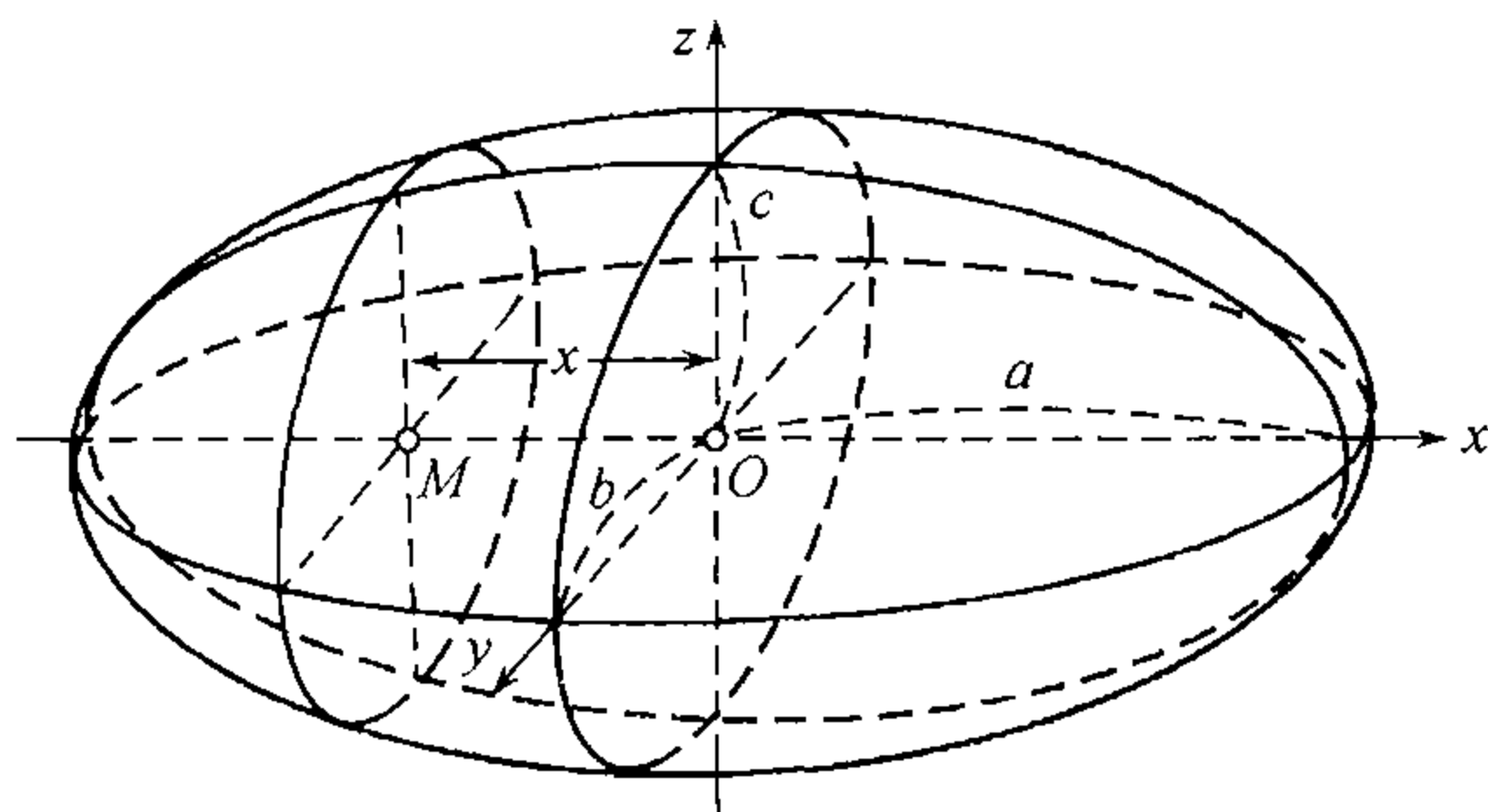


图 32

所给出的三维椭球体的体积 (图 32).

垂直于  $x$  轴并通过此轴上的  $M(x)$  点的平面, 截椭球体成椭圆; 在  $yz$  平面上的 (不偏斜的) 投影方程是这样的:

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \quad (x = \text{常量}).$$

由此显见其半轴分别为

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{与} \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

而面积 [参看第 339 目, 2), 8), 15)] 就表成了这样:

$$P(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2).$$

因此, 根据公式 (15), 欲求之体积

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

#### 10) 试求位于中心的椭球体

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 1$$

的体积.

解 如果固定  $z$ , 则对应的截口方程 (或是 —— 更精确些 —— 它在  $xy$  平面上的投影) 为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

其中设

$$a = A, b = H, c = B, d = Gz, e = Fz, f = Cz^2 - 1.$$

根据第 339 目 7), 此截面的面积等于

$$P(z) = -\frac{\pi \Delta^*}{(AB - H^2)^{3/2}},$$



$\Delta^*$  表示行列式

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2 - 1 \end{vmatrix} = \Delta z^2 - (AB - H^2),$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

替换之, 便得

$$P(z) = -\frac{\pi}{(AB - H^2)^{3/2}} [\Delta z^2 - (AB - H^2)].$$

显而易见,  $z$  只能在

$$\text{从 } -\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}} \text{ 到 } +\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}}$$

界限内变化; 在这个界限内积分, 最后便得

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

11) 我们来看两个半径为  $r$ , 其轴相交成直角的圆柱, 并来确定它们所界定的立体的体积.

图 33 上所绘出的立体  $OABCD$  是我们所注意的立体的八分之一. 通过两个圆柱的轴的交点  $O$ , 引  $x$  轴垂直这两个轴. 于是用距  $O$  为  $x$ , 垂直  $x$  轴的平面来截割立体  $OABCD$ , 便得出正方形  $KLMN$ , 它的边  $MN = \sqrt{r^2 - x^2}$ , 所以  $P(x) = r^2 - x^2$ . 于是根据公式 (15)

$$V = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} r^3.$$

12) 最后, 我们来解决这同一问题, 但假定圆柱有不同的半径:  $r$  与  $R > r$ .

和前者相比较, 所不同者仅在于: 以距  $O$  为  $x$  的平面来截割我们所研究的立体时, 得出的不是正方形, 而是

边长为  $\sqrt{r^2 - x^2}$  与  $\sqrt{R^2 - x^2}$  的长方形. 这样一来, 此时体积  $V$  就表成了椭圆积分

$$V = 8 \int_0^r \sqrt{(R^2 - x^2)(r^2 - x^2)} dx$$

或是, 若作代换  $x = r \sin \varphi$  并命  $k = \frac{r}{R}$

$$V = 8Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 8Rr^2 \cdot I.$$

我们来把积分  $I$  化成两种形式的全椭圆积分. 首先

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = I_1 + I_2.$$

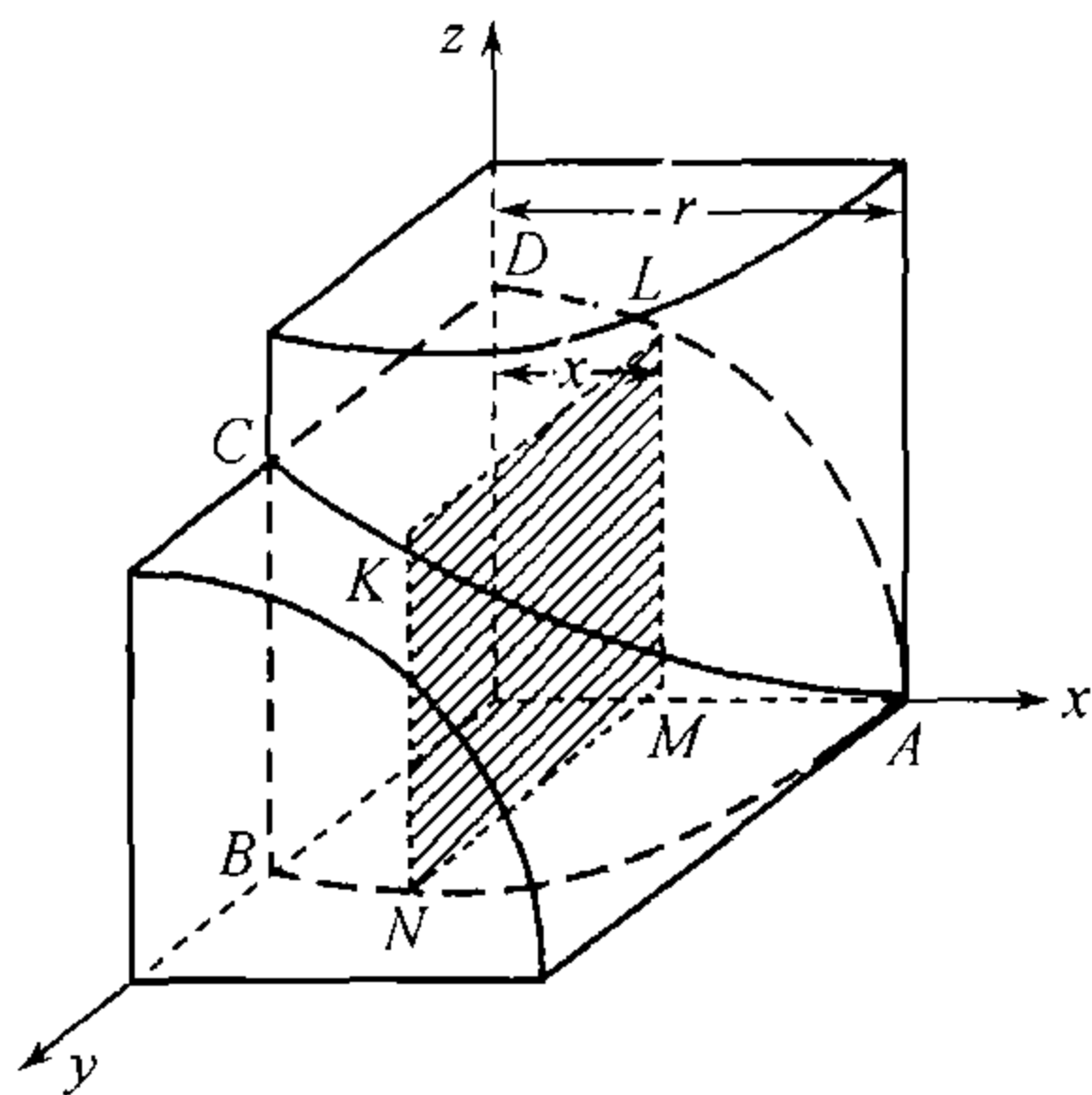


图 33



但是

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{k^2 - 1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ + \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \mathbf{K}(k) + \frac{1}{k^2} \mathbf{E}(k).$$

另一方面, 作分部积分, 便有

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \mathbf{E}(k) - 2I.$$

由此

$$I = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{k^2} + 1 \right) \mathbf{E}(k) - \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) \mathbf{K}(k) \right].$$

这样一来, 最后

$$V = \frac{8R^3}{3} [(1 + k^2)\mathbf{E}(k) - (1 - k^2)\mathbf{K}(k)].$$

**344. 旋转曲面的面积** 假设在  $xy$  平面的上部 (即在上半平面中) 有某一条曲线  $AB$  (图 34), 以形状如 (6) 的方程给出, 其中  $\varphi, \psi$  是有连续导数  $\varphi', \psi'$  的连续函数. 假设曲线上没有奇异点与重点, 我们可将从点  $A(t_0)$  起算的弧长  $s$  引为参数, 并且换成表示法.

$$x = \Phi(s), y = \Psi(s). \quad (18)$$

如以  $S$  表示整个曲线  $AB$  的长度, 此处参数  $s$  的变化便是从 0 到  $S$ .

假若曲线环绕  $x$  轴而旋转, 那么它就描出了某一个旋转面. 让我们来研究这个问题——计算这曲面的面积.

此处我们不谈在一般形式中建立“曲”(就是说不是平的)面面积概念的可能性; 这要等到第三卷中去作. 现在我们特别对于旋转面来确定这一概念, 并学会计算它的面积, 而且我们将以早在中学课程中所给定的柱体、锥体、斜截锥体的侧面算法则作为根据. 以后我们会亲眼看到, 我们所得出的公式是作为一个特殊情形而被包含在曲面面积的一般公式里的.

在曲线  $AB$  上依照从  $A$  到  $B$  的方向选取点列 (见图)

$$A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B \quad (19)$$



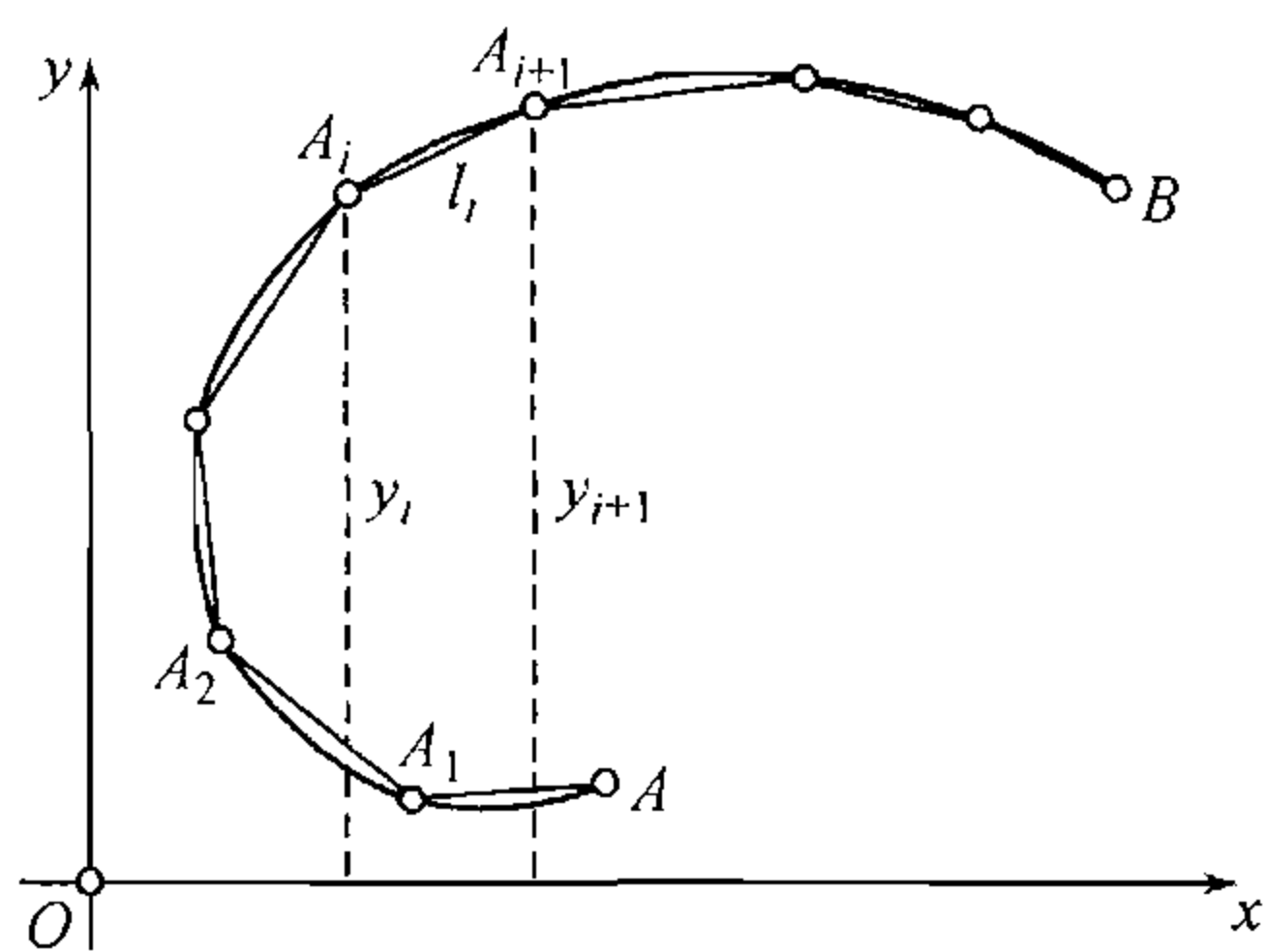


图 34

并来研究内接于曲线的折线  $A_0 A_1 \cdots A_{n-1} B$ . 我们起始用这条折线代替曲线, 环绕  $x$  轴而旋转; 它就描出了某一个面, 根据初等几何的法则我们会确定它的面积. 我们规定将曲线所描成的曲面的面积, 了解成当部分弧中最大者趋近于零时, 折线所描成的曲面的面积  $Q$  的极限  $P$ . 这个旋转面的面积定义就给了我们它的计算法的钥匙.

我们已经知道, 可以根据插于 0 与  $S$  之间的一串递增的  $s$  值

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_i < s_{i+1} < \cdots < s_{n-1} < s_n = S,$$

而得出点列 (19). 折线的每一段当环绕  $x$  轴而旋转时都描出圆台的侧面<sup>①</sup>来. 如以  $y_i$  与  $y_{i+1}$  分别表示点  $A_i$  与  $A_{i+1}$  的纵坐标, 而以  $l_i$  表示线段  $A_i A_{i+1}$  的长度, 则第  $i$  段所描出的曲面的面积为

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

整个折线所描出的曲面的面积便是

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

所得到的和可以分解成两个和, 如以下形状:

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i.$$

因为函数  $y = \Psi(s)$  是连续的, 所以 (根据一致连续的性质) 可以假定我们的曲线分成了这样小的部分, 以使所有的差  $y_{i+1} - y_i$  的绝对值皆不超出任意小的正数  $\varepsilon$ . 于是

$$\left| \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i \right| \leq \varepsilon \pi \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leq \varepsilon \pi S;$$

由此可见, 这个和当  $\max \Delta S_i \rightarrow 0$  时趋近于零.

至于和

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i$$

<sup>①</sup>特别来说, 这个曲面可能退化成锥面或是柱面; 然而, 即使在这种情形下, 它的面积仍可根据求圆台的侧面的一般公式来计算.



则可分之为两个和

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta s_i - l_i).$$

因为函数  $\Psi(s)$  是连续的, 所以它是有界的, 于是所有的  $|y_i| \leq M$ , 其中  $M$  是某一常数. 用  $\tau$  表示后一个和, 我们有

$$|\tau| = 2\pi \left| \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta s_i - l_i) \right| \leq 2\pi M \left( S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i \right).$$

当曲线所分成的各个部分越来越小时, 根据弧长是内接折线周长极限的定义<sup>①</sup>, 差

$$S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i$$

应当趋近于零. 然则  $\tau$  亦  $\rightarrow 0$ .

余下的和

$$\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i$$

是积分

$$2\pi \int_0^S y ds$$

的积分和. 而此积分由于函数  $y = \Psi(s)$  的连续性, 是存在的, 所以当  $\max \Delta s_i \rightarrow 0$  时, 和  $\sigma$  趋向此积分.

在所作的假定之下, 最后我们得出: 旋转面的面积存在并且表如公式

$$P = 2\pi \int_0^S y ds = 2\pi \int_0^S \Psi(s) ds. \quad (20)$$

如果我们返回到我们的曲线的一般参数表示法 (6), 则在以上积分中进行换元 [参看第 313 目, (9)], 变之为以下形式:

$$P = 2\pi \int_{t_0}^T y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (21)$$

特别言之, 如果曲线是用显式方程  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  给出的, 于是  $x$  就相当于参数, 我们便有

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y_x'^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (22)$$

<sup>①</sup>因为弧的直径显然不超过弧长, 所以当  $\max \Delta s_i \rightarrow 0$  时, 部分弧直径的最大者也趋近于零.



**345. 例** 1) 试求球带面的面积. 设环绕原点以半径  $r$  作半圆, 绕  $x$  轴旋转. 从圆的方程中我们有  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ; 以及

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \sqrt{1 + y'^2_x} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, y\sqrt{1 + y'^2_x} = r.$$

此时由端点具横坐标  $x_1$  与  $x_2 > x_1$  的弧所描出的带面面积, 根据公式 (22), 为

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi rh,$$

其中  $h$  为带的高, 这样一来, 球带面的面积便等于最大圆的圆周与带的高的乘积.

特别在  $x_1 = -r, x_2 = r$  时, 就是在  $h = 2r$  时, 我们得到整个球面的面积  $P = 4\pi r^2$ .

2) 试求由端点横坐标为 0 与  $x$  的悬链线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  的弧旋转所产生的曲面的面积.

因为  $\sqrt{1 + y'^2_x} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , 所以根据公式 (22)

$$P = 2\pi a \int_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{2}{a} V,$$

其中  $V$  为对应的旋转体的体积 [参看第 343 目, 3)].

3) 同样的, 对于星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ .

只要把星形线在第一象限 ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的弧所描出的曲面的面积, 加一倍即可. 我们已有  $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 3a \sin t \cos t$ ; 此时根据公式 (21)

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \\ &= 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

4) 同样的, 对于旋轮线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ .

因为  $y = 2a \sin^2 \frac{t}{2}, ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$ , 所以

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du \\ &= 16\pi a^2 \left( \frac{\cos^3 u}{3} - \cos u \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

5) 试求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  围绕极轴旋转所产生的曲面的面积.

从基本公式 (21) 出发, 变成极坐标:

$$P = 2\pi \int_0^S y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2_{\theta}} d\theta. \quad (23)$$

在我们的情形中  $\alpha = 0, \beta = \pi$ , 并且

$$y = r \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta = 4a \cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, ds = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

因此

$$P = 2\pi \cdot 8a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2.$$



6) 同样的, 对于双纽线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ .

此处  $y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta$ ,  $ds = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$ , 所以根据公式 (23)

$$P = 2 \cdot 2\pi \cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = 8\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 7.361a^2.$$

最后,

7) 试确定 **旋转椭球体** 的表面积, 不论是伸长的或是压缩的 (扁球).

假使椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  围绕  $x$  轴而旋转, 并且  $a > b$ , 则我们便依序有

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 & yy' &= -\frac{b^2}{a^2} x, \\ y\sqrt{1+y'^2} &= \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}. \end{aligned}$$

然而  $a^2 - b^2 = c^2$ , 此处  $c$  是焦点至心的距离并且  $\frac{c}{a}$  等于椭圆的离心率  $\varepsilon$ . 这样一来,

$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2},$$

并且

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right) \Big|_0^a \\ &= 2\pi \frac{b}{a} (a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon); \end{aligned}$$

但是  $a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2 - c^2 = b^2$ , 所以最后我们有

$$P = 2\pi b \left( b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

假使椭圆环绕短轴旋转, 则因利用已经做过的计算更为便捷, 所以将  $x$  轴作为短轴. 于是在所得出的  $y\sqrt{1+y'^2}$  的表达式中仅需把  $a$  与  $b$  的位置对调一下即可, 那么现在

$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} x^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2};$$

此时

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} dx \\ &= 2\pi \frac{a}{b} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} + \frac{b^3}{2c} \ln \left( \frac{c}{b} x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} \right) \right] \Big|_{-b}^b \\ &= 2\pi a \left( \sqrt{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{\sqrt{b^2 + c^2} + c}{\sqrt{b^2 + c^2} - c} \right); \end{aligned}$$



然而  $\sqrt{b^2 + c^2} = a, c = \varepsilon a$ , 所以最后  $P$  的表达式就是这样:

$$P = 2\pi a \left( a + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{a+c}{a-c} \right) = 2\pi a \left( a + \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right).$$

**346. 柱面面积** 我们再来研究一种特殊形式的曲面, 对于它, 我们也于此处 (在那个以后才给出的一般定义之先) 定义出面积概念. 我们所指的是柱面.

我们返回到在第 344 目中所讲到的  $xy$  平面上部的曲线  $AB$ . 取它作为准线, 设想母线平行于  $z$  轴的柱面 (图 35). 在这个面上引曲线  $CD$ , 交每一条母线于一点; 如果在方程组 (6) 中加上第三个方程

$$z = \chi(t) \quad (\chi > 0), \quad (24)$$

这条曲线就确定了. 问题是在于计算“这条曲线下”的柱面部分的面积  $P$ .

如同在第 344 目中一样, 我们引弧长  $s$  作为参数; 于是不仅是曲线  $AB$  的方程组 (6) 变成了方程组 (18), 而且方程式 (24) 也化为

$$z = X(s).$$

在曲线  $AB$  上内接一条折线  $AA_1 \cdots A_{n-1}B$ , 并且与此对应的在曲线  $CD$  上作折线  $CC_1 \cdots C_{n-1}D$  (见图 35), 由梯形  $A_i A_{i+1} C_{i+1} C_i$  组成棱柱面, 内接于我们所研究的柱面之中. 我们在此处就把这柱面的面积理解为所提的棱柱面的面积  $Q$  的极限  $P$ .

设  $z_i = A_i C_i$ , 我们有 (其余保持原符号) 在  $\lambda \rightarrow 0$  时

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i + z_{i+1}}{2} l_i.$$

依靠与第 344 目中同样的理由 (读者可以自己把它们完全做出), 问题就化为计算和

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta s_i$$

的极限, 不难看出, 这是一个积分和, 最后

$$P = \int_0^S z ds = \int_0^S X(s) ds^{①}.$$

①如果设想柱面展成平面, 则所研究的图形便化为“曲边梯形”, 这个结果就变成完全直观的了.

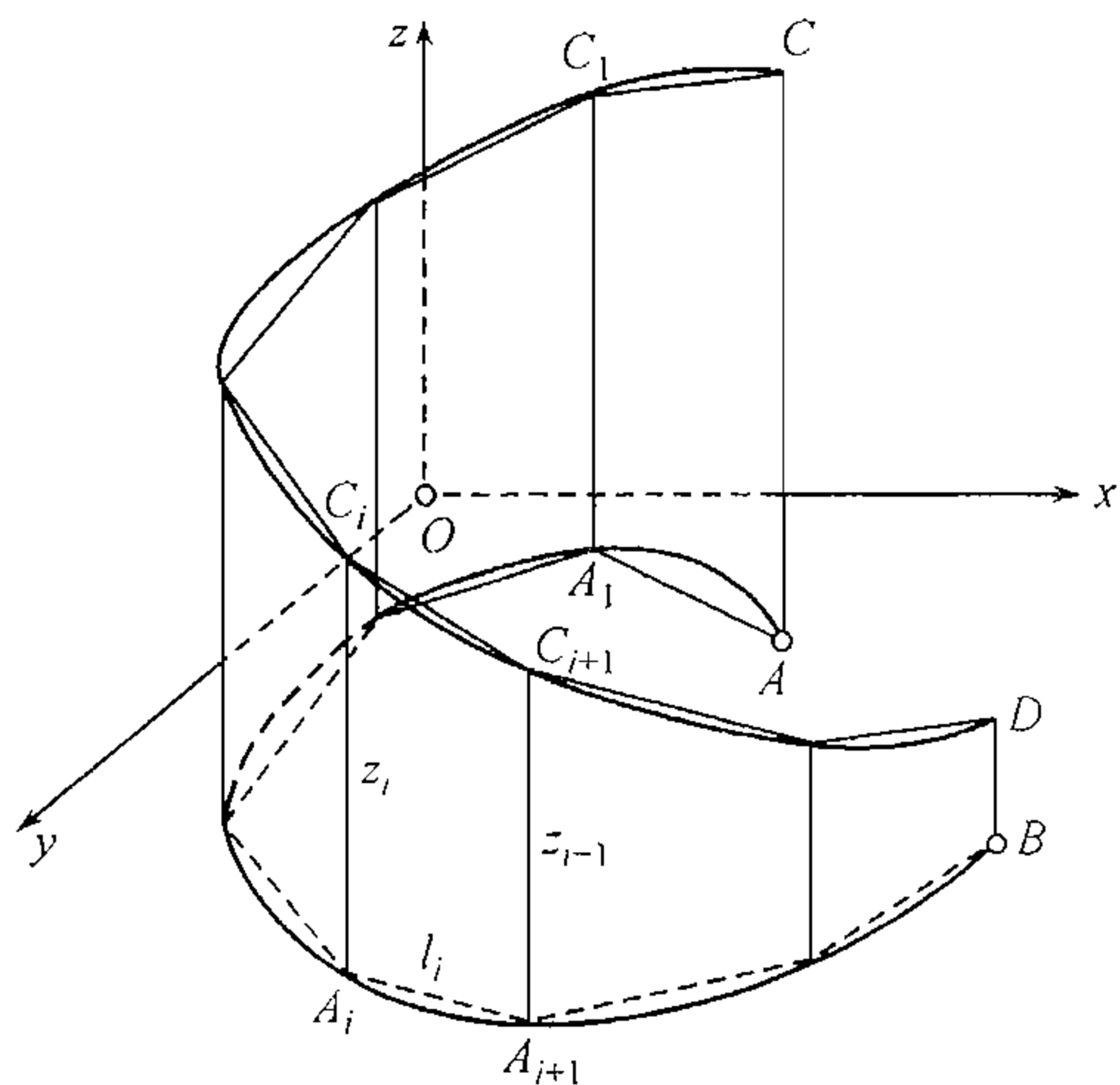


图 35



回到任意的参数  $t$ , 不难得出一般的公式

$$P = \int_{t_0}^T z \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \int_{t_0}^T \chi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (25)$$

最末, 在曲线  $AB$  的显式给出  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  的情形下, 这个公式就变成这样:

$$P = \int_a^b z \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_a^b \chi(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (26)$$

**347. 例** 1) 设图 36 中的曲线  $AB$  是以  $B$  点为顶点的抛物线, 它的方程 (在图中的标记之下) 是

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2}.$$

在它的上面建立起柱面, 与方程为

$$z = \frac{c}{a}x$$

的平面  $OBC$  相截. 试求柱面的  $ABC$  部分的面积  $P$ .

**解** 根据公式 (26)

$$\begin{aligned} P &= \int_0^a z \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \frac{c}{a^3} \int_0^a x \sqrt{a^4 + 4b^2 x^2} dx \\ &\therefore = \frac{c}{12b^2} [(a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3]. \end{aligned}$$

2) 假使曲线是四分之一圆周  $y = \sqrt{a^2 - x^2} (0 \leq x \leq a)$ , 则公式 (26) 不能无条件地应用, 因为当  $x = a$  时导数  $y_x'$  趋于  $\infty$ . 采用参数表示法

$$x = a \cos t, y = a \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

我们根据一般公式 (25); 便有

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = ac \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = ac.$$

如果返回到第 343 目 8) 所讲的圆柱弓形体, 则其侧面由刚才得出的结果推知, 原来等于  $2ah (c = h)$ .

3) 最后假定曲线  $AB$  是四分之一椭圆

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

[此处由于和以上同一的原因, 不能利用显式方程], 我们来解决同样的问题.

(a) 首先设  $a > b$ . 引入椭圆离心率  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , 根据公式 (25), 便得

$$P = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \frac{c}{a} \int_0^a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 u^2} du$$

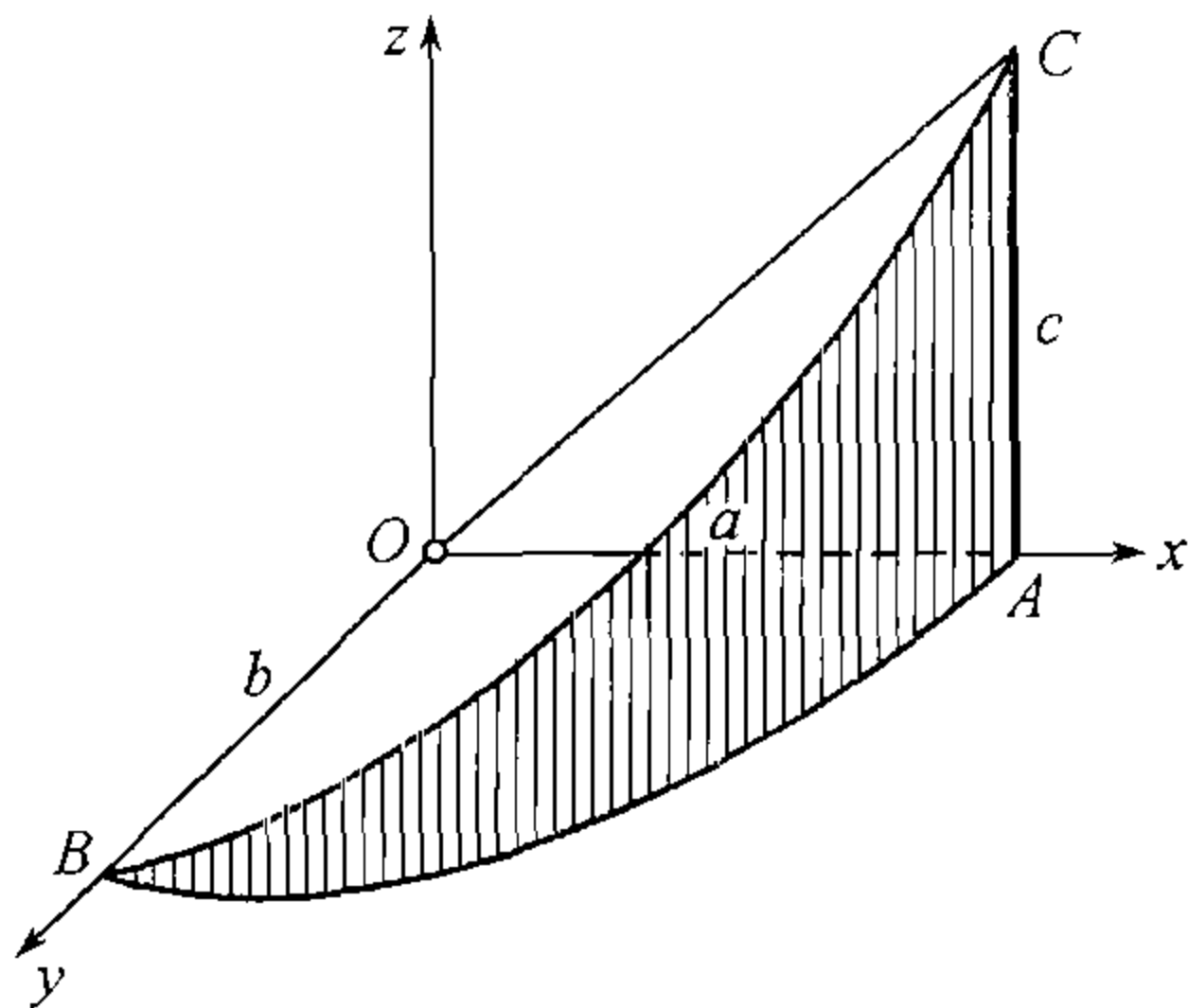


图 36



(替换  $u = a \sin t$ ), 并且最后

$$P = \frac{1}{2}ac \left\{ 1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right\}.$$

(6) 在  $a < b$  的情形下, 离心率  $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ , 并且

$$P = bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \cos t dt = \frac{bc}{2} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right\}.$$

4) 我们来研究柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  被球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所界出的部分, 在截口上得出的曲线 [维维亚尼曲线, 见第229目,1)], 我们知道可以用参数表成这样:

$$x = R \sin^2 t, y = R \sin t \cos t, z = R \cos t.$$

如果是限制在第一卦限, 则此处  $t$  就应该从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ . 显而易见, 头两个方程相当于方程组 (6), 而后一个方程相当于方程 (24).

根据公式 (25), 所提出的曲面的面积便是

$$P = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 4R^2.$$

5) 两个圆柱, 半径为  $r$ , 轴相交成直角 [参看第 343 目,11)], 试确定其公共部分的立体的表面积. 我们引坐标系, 如图 33.

先限于一个圆柱面, 在第一卦限我们便有

$$x = r \cos t, y = r \sin t$$

而最后

$$z = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin t \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

根据公式 (25), 二分之一的待求面积等于

$$\frac{1}{2}P = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 8r^2, \text{ 所以 } P = 16r^2.$$

6) 同样的问题, 但在圆柱具有不同的半径  $r$  与  $R > r$  的情形下 [参看第 343 目,12)]. 我们先来计算半径为  $r$  的柱面部分的面积, 我们有

$$\begin{aligned} x &= r \sin t, y = r \cos t \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ z &= \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 t} = R \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \quad \left( k = \frac{r}{R} \right). \end{aligned}$$

根据公式 (25)

$$P_1 = 8Rr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 8Rr \mathbf{E}(k).$$

现在我们来求半径为  $R$  的柱面, 将  $z$  轴与  $y$  轴的地位对调. 这一次

$$\begin{aligned} x &= R \sin t, z = R \cos t, \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 t} = r \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} \quad \left( k = \frac{r}{R} \right), \end{aligned}$$



并且  $t$  只能 (如果和历来一样, 限于第一卦限) 从 0 变到  $\arcsin k$ . 于是根据与 (25) 相类似的公式, 使得

$$P_2 = 8 \int_0^{\arcsin k} y \sqrt{x_t'^2 + z_t'^2} dt = 8Rr \int_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} dt.$$

替换

$$\sin t = k \sin \varphi, dt = \frac{k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

其中  $\varphi$  由 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 便给出

$$\int_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

最后一个积分我们在第 343 目, 12) 就已经遇见过了; 它等于

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \mathbf{K}(k) + \frac{1}{k^2} \mathbf{E}(k).$$

这样一来,

$$P_2 = 8R^2 \{\mathbf{E}(k) - (1 - k^2) \mathbf{K}(k)\}.$$

最后

$$P = P_1 + P_2 = 8R(R + r) \{\mathbf{E}(k) - (1 - k) \mathbf{K}(k)\}.$$

定积分的最简单的几何应用且即止于此. 在第三卷中我们还会碰到在更复杂而又更普遍的情形下的几何范围内的计算.

### §3. 力学与物理学的数量的计算

**348. 定积分应用的大意** 在进入到定积分于力学、物理学与机械学范畴中的应用以前, 先将在实用问题中通常遵循而导致定积分的途径弄清楚, 是有好处的. 为了这个目的, 我们略述定积分应用的一般大意, 今以已经研究过的几何问题的例子来说明它.

让我们来设想, 要求确定某一个系于区间  $[a, b]$  的 (几何的或其他的) 常量  $Q$ . 此时命每一个含于  $[a, b]$  之内的子区间  $[\alpha, \beta]$  对应于量  $Q$  的某一部分, 使得区间  $[a, b]$  分解成若干子区间时便引起量  $Q$  分解成对应的部分.

更精确些讲, 此处指的是某一个具备“可加性”的“区间函数” $Q([\alpha, \beta])$ , 即若区间  $[\alpha, \beta]$  是由子区间  $[\alpha, \gamma]$  与  $[\gamma, \beta]$  组成的, 那么便有

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

问题就是要计算它的对应于整个区间  $[a, b]$  的值.



我们在平面上取曲线  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  作为例子 (图 37)<sup>①</sup>, 于是 1) 曲线  $AB$  的长度  $S$ , 2) 它的曲边梯形  $AA'B'B$  所界出的面积  $P$  以及 3) 这个四边形环绕  $x$  轴旋转所得到的立体的体积  $V$ , 这三个全属于前所指出的类型的量. 不难了解, 它们所产生的是怎样的“区间函数”.

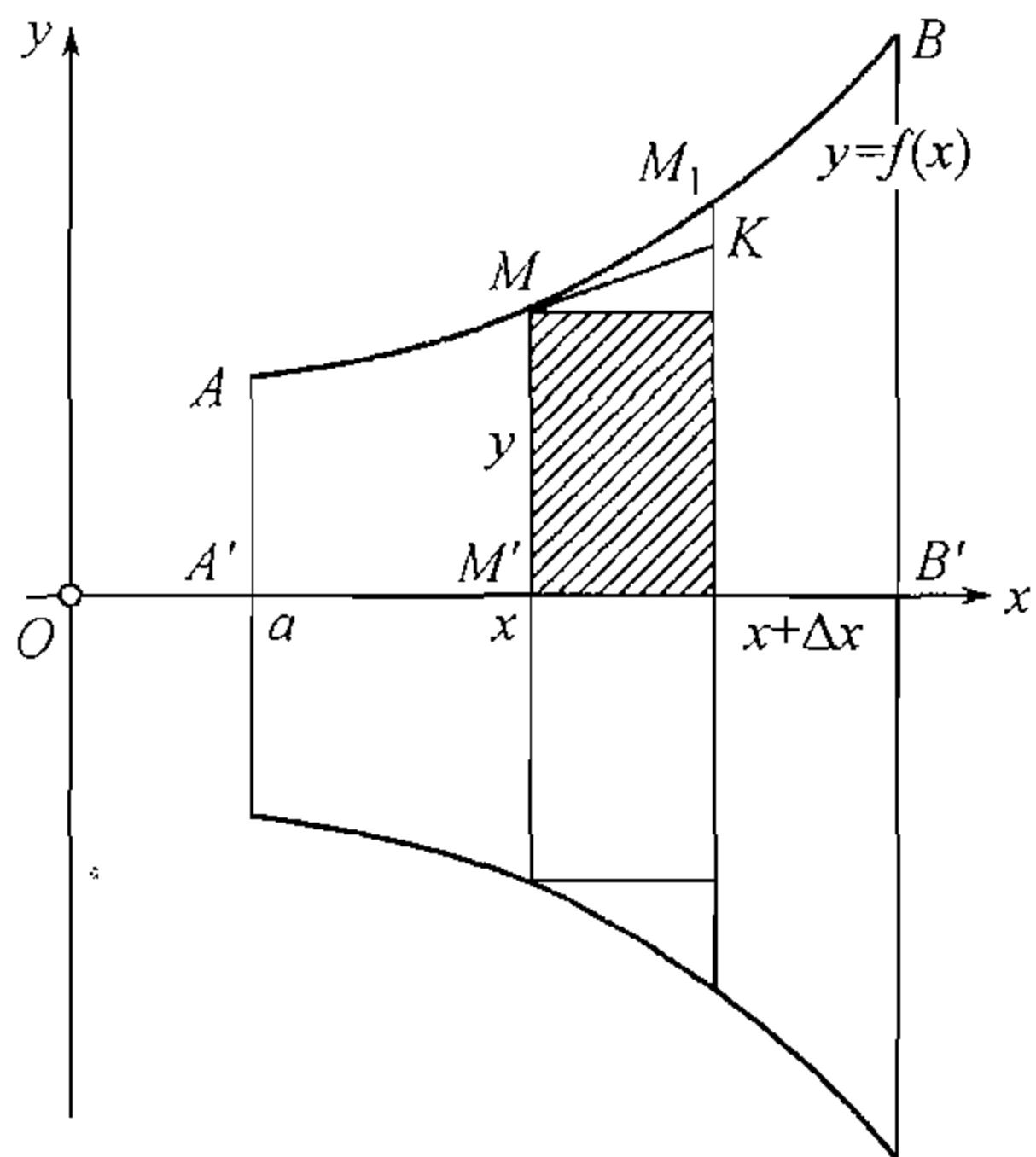


图 37

我们来研究对应于“元素区间” $[x, x + \Delta x]$  的量  $Q$  的“元素” $\Delta Q$ . 根据问题的条件, 想方法找一个  $\Delta Q$  的近似表达式, 形如  $q(x)\Delta x$ , 对于  $\Delta x$  是一次的, 使得它与  $\Delta Q$  只差一个较  $\Delta x$  高阶的无穷小, 换句话说, 从无穷小的 (当  $\Delta x \rightarrow 0$  时) “元素” $\Delta Q$  中分离出它的主要部分来. 那么很明显的, 近似等式

$$\Delta Q \doteq q(x)\Delta x \quad (1)$$

的相对误差便与  $\Delta x$  同趋于零.

例如说, 在上例 1) 中, 可以用切线线段  $MK$  来代替弧的元素  $\widehat{MM_1}$ , 因之从  $\Delta S$  中便分出了一次的部分

$$\sqrt{1 + y_x'^2} \Delta x = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Delta x.$$

在例 2) 中, 元素的狭条  $\Delta P$  自然就以面积为

$$y \Delta x = f(x) \Delta x$$

的内含矩形来代替. 最后, 在例 3) 中, 从元素的薄片  $\Delta V$  中分出它的主要部分, 就是体积为

$$\pi y^2 \Delta x = \pi [f(x)]^2 \Delta x$$

的内含圆柱体.

在所有这三种情形中不难证明, 由于这样的替换所生的误差, 是较  $\Delta x$  为高阶的无穷小. 就是<sup>②</sup>情形 1) 中误差小于  $KM_1 = \Delta y - dy$ , 情形 2) 中小于  $\Delta x \Delta y$ , 而在情形 3) 中小于  $\pi(2y + \Delta y)\Delta x \Delta y$ .

只要作了这个, 就可以断言, 待求的量  $Q$  恰恰表如积分

$$Q = \int_a^b q(x) dx. \quad (2)$$

为了要说明这个<sup>54)</sup>, 我们将区间  $[a, b]$  用点  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  分成元素区间

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, b].$$

<sup>①</sup>函数  $f(x)$  假定为连续的, 并具有连续的导数. 为了确切起见, 我们假定这曲线永远向上走, 并且是凹形的向上.

<sup>②</sup>在脚注<sup>①</sup>所作的假定之下.

<sup>54)</sup>对等式 (2) 更为正式的解释, 读者可在本目末尾找到.



因为每一个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  或  $[x_i, x_i + \Delta x_i]$  对应于我们的量的元素部分, 近似地等于  $q(x_i)\Delta x_i$ , 所以整个的待求的量  $Q$  便近似的表成和

$$Q \doteq \sum_i q(x_i)\Delta x_i.$$

部分区间愈小, 所得出的数值准确程度愈高, 于是显而易见  $Q$  便是上述和的极限, 这就是说, 真正的表成了定积分  $\int_a^b q(x)dx$ .

这番话对所有我们研究过的三个例子都成立. 至于以前我们用另外一些方法来求量  $S, P, V$  的公式, 那是因为我们当时的问题不仅在于计算它们, 而且在于要按照先前所给的定义证明它们的存在.

因此, 所有的问题就归结到建立近似等式 (1), 同时通常以  $dx$  和  $dQ$  代替  $\Delta x$  与  $\Delta Q$ . 写成形式

$$dQ = q(x)dx. \quad (3)$$

其后只需对这些元素“求和”, 而这就导引到公式 (2).

我们着重指出, 此处用积分以代替普通的和是极端重要的. 和只能给出  $Q$  的近似表达式, 因为个别的 (3) 型的等式的误差会影响到它; 而极限过程(借助于此, 从和得出了积分)却消灭了误差并导致完全正确的结果. 总之, 在开始时为了想要简单, 在元素  $dQ$  的表达式中舍弃了高阶无穷小而分出了主要部分, 但其后为了想要精确, 便以积分来代替求和. 而所得到的结果就纯粹成为精确的了.

不过这问题可以用另一个观点来处理. 我们用  $Q(x)$  来表示对应于区间  $[a, x]$  的量  $Q$  的变动部分. 而  $Q(a)$  自然设其等于零. 不难看出, 以上所讨论的“区间函数” $Q([\alpha, \beta])$ , 应以什么方式, 通过这个“点函数” $Q(x)$  而表示出来

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

在我们的例子里, 点函数就是 1) 不定弧  $\widehat{AM}$ , 2) 可变四边形  $AA'M'M$  的面积, 而最后 3) 该四边形所旋转出来的立体的体积.

量  $\Delta Q$  是函数  $Q(x)$  的任意增量, 而表示其主要部分的乘积  $q(x)\Delta x$  不是别的, 正是这个函数的微分 [第 103 目, 第 104 目]. 这样一来, 以微分符号写出的等式 (3), 如果将  $dQ$  就了解作  $dQ(x)$ , 事实上就并非是近似的, 而是精确的了. 由此也立刻得到了所要求的结果

$$\int_a^b q(x)dx = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q.$$

然而我们仍要指出, 在应用中更便利和更有效的还是无穷小元素求和的观点.

**349. 曲线的静力矩与重心的求法<sup>55)</sup>** 如所周知, 质量为  $m$  的质点  $M$  对于某一个轴的静力矩, 等于质量  $m$  与点到轴的距离  $d$  的乘积. 在一个有轴的平面上, 质量为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 与

<sup>55)</sup> 导出与诸物理量有关的数学公式必须利用物理方面的讨论.



轴的距离分别为  $d_1, d_2, \dots, d_n$  的  $n$  个质点组的情形下, 静力矩便表成和

$$M = \sum_i m_i d_i.$$

此时轴的一侧的点的距离取作正号, 而轴的另一侧的点的距离取作负号.

假使质量不是集中在各别几点, 而是全面的布满了一条曲线或一个平面图形, 那么就要用积分代替和以表达静力矩.

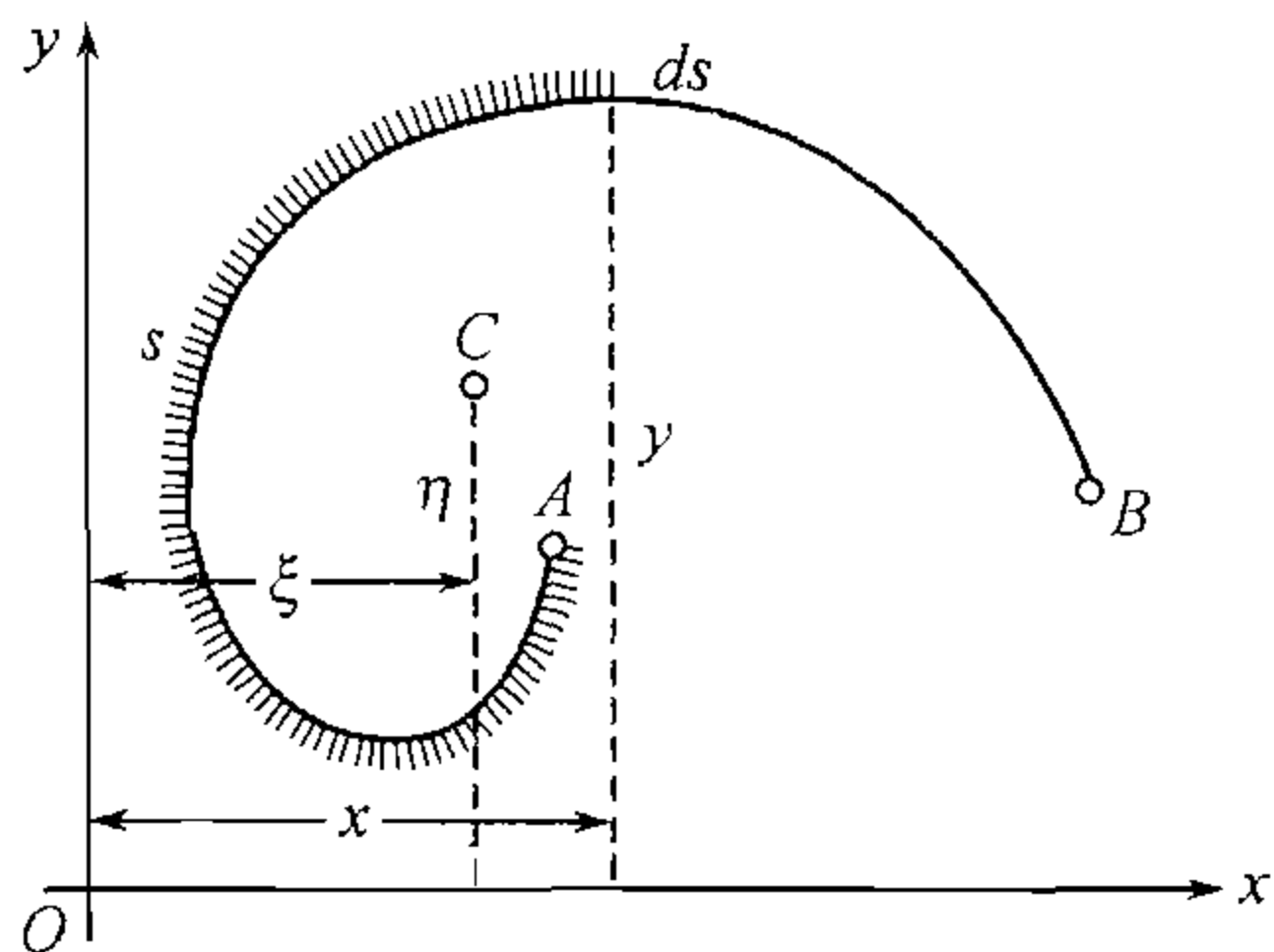


图 38

我们来讲沿着某一平面曲线  $AB$  (图 38) 而分布的质量, 对于  $x$  轴的静力矩的定义. 此时我们假定曲线是均匀的, 于是它的线密度  $\rho$  (就是在单位长度上所占有的质量) 是一常量; 为了简单起见, 更假定  $\rho = 1$  (不然的话, 只需在所得的结果上乘以  $\rho$  即可). 在这些假定之下, 我们的曲线的任意一段弧的质量, 就直接以它的长度来度量, 并且静力矩的概念获得了单纯的几何性质. 一般地指出, 当说到曲线的静力矩 (或重心) 而不提质量沿着它的分布情形时则永远是指恰恰在上述假定之下而定义出来的静力矩 (重心) 而言.

我们选定曲线的任一元素  $ds$  (其质量也以数  $ds$  来表示). 将此元素近似地当作与轴相距  $y$  处的一个质点,

我们便得出了它的静力矩的表达式

$$dM_x = y ds.$$

把这些元素的静力矩加在一起, 并取从点  $A$  起算的弧长  $s$  作为自变量, 我们便得到

$$M_x = \int_0^S y ds. \quad (4)$$

类似的, 对于  $y$  轴的静力矩也表成了

$$M_y = \int_0^S x ds. \quad (5)$$

当然, 此处假定  $y$  (或  $x$ ) 是通过  $s$  表达的. 实际上, 这些公式中的  $s$  是通过曲线的分析表示法的自变量 ( $t, x$  或  $\theta$ ) 而表达的.

曲线的静力矩  $M_x$  与  $M_y$  使得可以很容易地确定出它的重心  $C(\xi, \eta)$  的位置. 点  $C$  具备这样的性质, 就是假如把曲线的全部 “质量”  $S$  (这个数也表示长度) 都集中到它上面, 则此质量对于任何的一个轴的静力矩, 皆与曲线对此轴的静力矩相同; 若特别讨论曲线对于坐标轴的静力矩, 便得到

$$S\xi = M_y = \int_0^S x ds, S\eta = M_x = \int_0^S y ds,$$

由此

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S} \int_0^S x ds, \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S} \int_0^S y ds. \quad (6)$$



从重心纵标  $\eta$  的公式里, 我们得到了很重要的几何结果. 事实上, 我们有

$$\eta S = \int_0^S y ds, \text{ 由此 } 2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y ds;$$

然而这个等式的右侧部分是曲线  $AB$  旋转出来的曲面的面积  $P$  [参看第 344 目, (20)], 等式的左侧部分,  $2\pi\eta$  表示曲线绕  $x$  轴旋转时其重心所描出的圆周的长度, 而  $S$  是我们的曲线的长度. 这样一来, 我们便导致以下的古尔丹(P. Guldin)定理:

曲线绕某一条不与其相交的轴旋转, 所得出的曲面的大小, 等于此曲线的弧长乘上曲线重心  $C$  所描出的圆周的长(图 38)

$$P = S \cdot 2\pi\eta.$$

这个定理使得如果已知曲线长  $S$  与它所描出的旋转面的面积  $P$ , 就可以很容易地确定曲线重心的纵坐标  $\eta$ .

**350. 例** 1) 试求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (假定  $a > b$ ) 的周线对于  $x$  轴的静力矩.

对于上 (或下) 半个椭圆, 这静力矩只比对应的旋转面的大小少一个因数  $2\pi$ . 因此 [参看第 345 目, 7)]

$$M_x = 2b \left( b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

2) 如果我们所研究的弧对于某条直线是对称的, 那么弧的重心就必须在这条直线上.

为了要证明起见, 我们取对称轴当作  $y$  轴, 并取其与曲线的交点当作弧长计算的初始点, 于是函数  $x = \Phi(s)$  就成为  $s$  的奇函数, 并且如果在这一次用  $2S$  来表示整个曲线的长, 我们便有 [参看第 314 目, 9)]

$$M_y = \int_{-S}^S x ds = 0,$$

因此  $\xi = 0$ .

3) 利用古尔丹定理, 试确定半径为  $r$  的圆弧  $\widehat{AB}$  的重心位置 (图 39).

因为这个弧对称于通过它的中点  $M$  的半径  $OM$ , 所以它的重心  $C$  在这条半径上, 并且为了要完全确定重心的位置, 仅需求它与心  $O$  的距离  $\eta$ . 取轴如图所示, 并以  $s$  表示弧  $\widehat{AB}$  的长, 以  $d$  表示弦  $AB (= A'B')$  的长, 我们所研究的弧环绕  $x$  轴而旋转, 就得出了球带, 它的表面积  $P$  如我们所知 [第 345 目, 1)], 是等于  $2\pi rd$ . 根据古尔丹定理, 这个表面积又等于  $2\pi\eta s$ , 所以  $s\eta = rd$ , 即  $\eta = \frac{rd}{s}$ .

特别对于半圆而言,  $d = 2r$ ,  $s = \pi r$  并且

$$\eta = \frac{2}{\pi} r \doteq 0.637r.$$

4) 试确定旋轮线的一拱

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

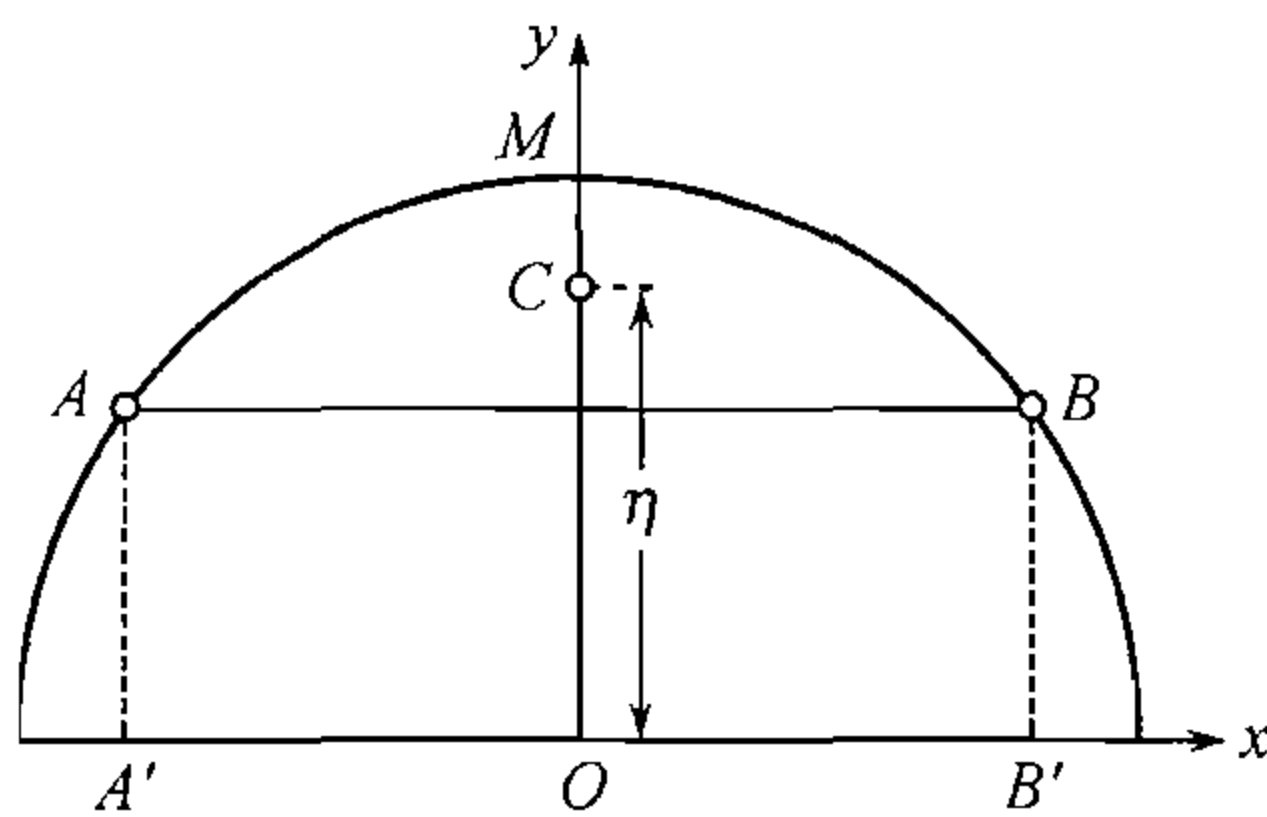


图 39



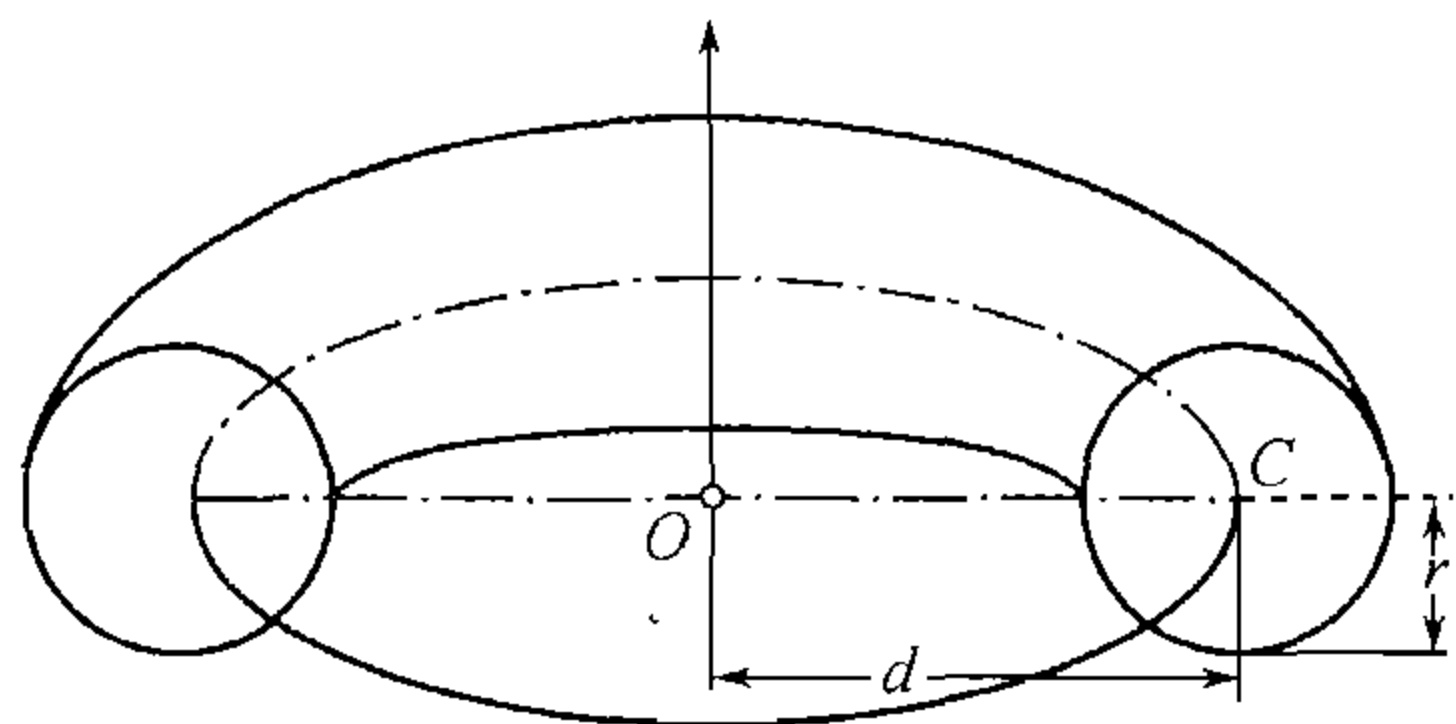


图 40

的重心.

如果注意到对称性, 那么便立即很明显地  $\xi = \pi a$ . 再考虑到第 345 目例 4) 的结果, 跟着又很容易地得到  $\eta = \frac{4}{3}a$ .

5) 在预先知道了重心位置的场合下, 可以利用古尔丹定理来确定旋转面的面积. 比如说假设要求确定环面 (环形圆纹曲面, 亦即圆绕不与其相交的轴旋转而产生的立体的表面) 的大小 (图 40). 因为圆周的重心显而易见是在圆心. 所以 (在图中的

标记之下) 我们便有

$$P = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 r d.$$

**351. 平面图形的静力矩与重心的求法** 我们来研究显式方程  $y = f(x)$  所给出的曲线  $AB$  之下所界定的平面图形  $AA'B'B$  (图 41). 假定质量是沿着这个图形均匀分布的, 于是它的面密度  $\rho$  (就是说每单位面积所占有的质量) 就是个常量. 那么可以取  $\rho = 1$ , 这就是说我们的图形的任何一部分的质量以其面积来度量, 而在本质上并没有减低一般性. 如果说到平面图形的静力矩 (或重心) 不附加说明, 就永远指的是这种情形.

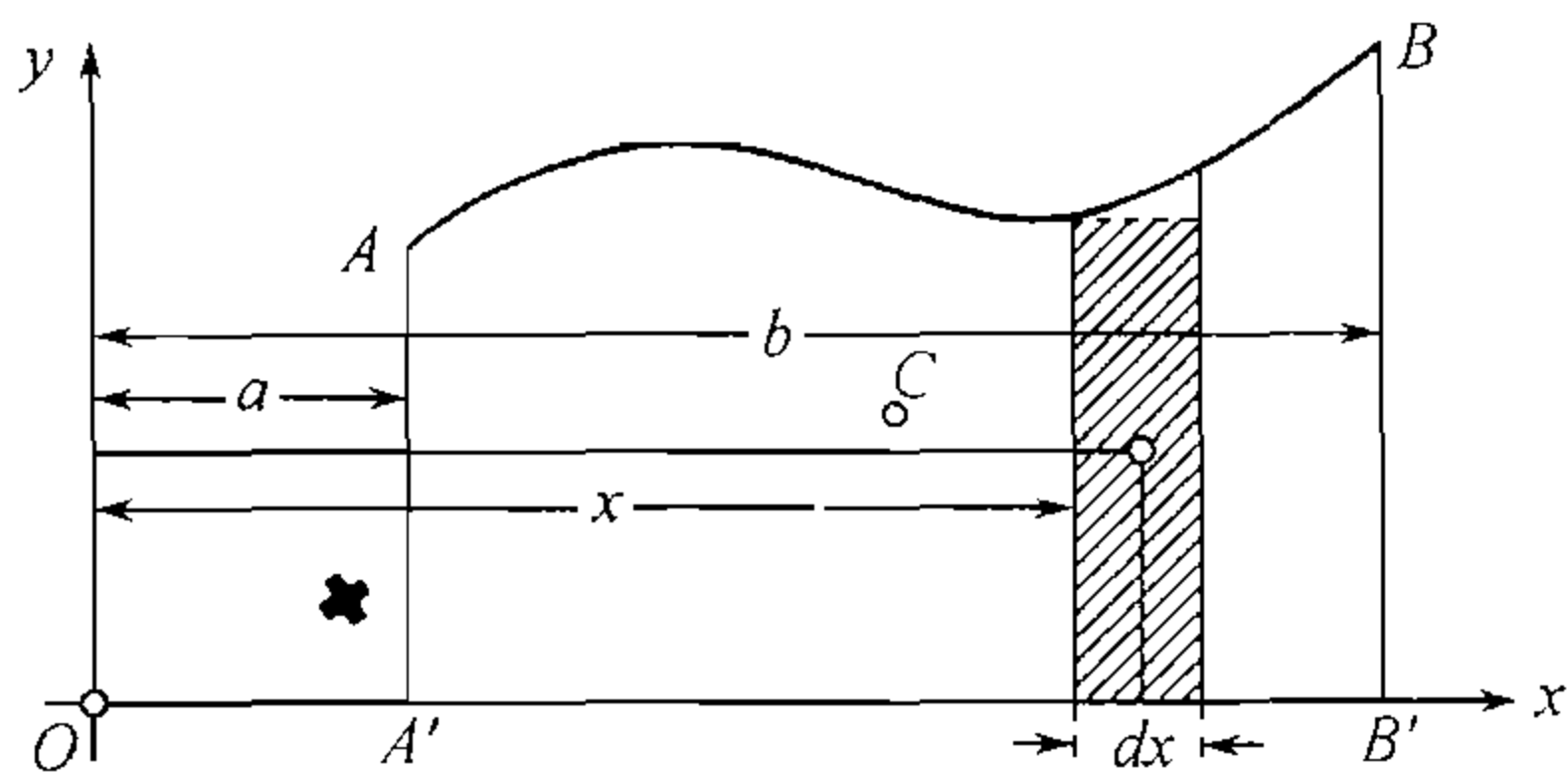


图 41

为了想要确定这图形对于坐标轴的静力矩  $M_x, M_y$ , 我们和通常一样, 将我们的图形的任意元素选成无限窄的竖条 (参看图). 近似的把这个小条看成矩形, 即见其质量 (面积也以这同一个数来表示) 为  $ydx$ . 为了要确定对应的元素的静力矩  $dM_x, dM_y$ , 我们假定这小条的全部质量都集中在它的重心 (即矩形的中心), 那么如所周知, 静力矩的大小不变. 所得到的质点与  $x$  轴的距离为  $\frac{1}{2}y$ , 与  $y$  轴的距离为  $(x + \frac{1}{2}dx)$ ; 后一个表达式可以简单地

换成  $x$ , 因为所舍弃的量  $\frac{1}{2}dx$  乘上质量  $ydx$  给出了二阶无穷小. 因而我们便有

$$dM_x = \frac{1}{2}y^2 dx, \quad dM_y = xy dx.$$

将这些元素的静力矩加在一起, 便得到结果

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx, \quad (7)$$

这里的  $y$  当然是了解作曲线  $AB$  的方程中出现的函数  $f(x)$ .

和在曲线的情形中一样, 根据所研究的图形对于坐标轴的这两个静力矩, 现在就不难确定出图形重心的坐标  $\xi, \eta$ . 如果以  $P$  表示图形的面积 (因而也是质量), 则根据重心的基本性质

$$P\xi = M_y = \int_a^b xy dx, \quad P\eta = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx.$$



由此

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P} \int_a^b xy dx, \quad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P} \int_a^b y^2 dx. \quad (8)$$

并且在这个情形中, 我们从重心纵坐标  $\eta$  的公式得到了重要的几何结果. 事实上, 从这个公式我们有

$$2\pi\eta P = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

这个等式的右侧部分表示平面图形  $AA'B'B$  环绕  $x$  轴旋转所得到的立体的体积  $V$  [第 342 目 (16)], 而左侧部分表示这个图形的面积  $P$  与  $2\pi\eta$  (图形重心所描出的圆周长) 的乘积. 由此便有古尔丹第二定理:

平面图形绕不与其相交的轴的旋转体体积, 等于此图形的面积与图形重心所描出的圆周长的乘积:

$$V = P \cdot 2\pi\eta.$$

注意, 公式 (7), (8) 可推广到上下皆以曲线为界的图形 (图 19) 的情形. 比方说, 对于这种情形

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx, \quad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx; \quad (7a)$$

因此公式 (8) 应如何改造就已经很明白了. 如果回想第 338 目公式 (8), 那么就不难看出, 古尔丹定理对于这种情形也是正确的.

**352. 例** 1) 试求界于抛物线  $y^2 = 2px$ ,  $x$  轴, 与对应于横标  $x$  的纵标之间的图形的静力矩  $M_x$ ,  $M_y$  与重心坐标.

因为  $y = \sqrt{2px}$ , 所以根据公式 (7)

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x x dx = \frac{1}{2} px^2,$$

$$M_y = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{\frac{5}{2}}.$$

另一方面, 面积 [第 338 目 (7)]

$$P = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

此时根据公式 (8)

$$\xi = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8}y.$$

利用数值  $\xi$  与  $\eta$ , 很容易求得 —— 根据古尔丹定理 —— 所研究的图形绕坐标轴或绕最后的纵坐标的旋转体体积. 例如若就后一种情形而论, 则因重心与旋转轴的距离为  $\frac{2}{5}x$ , 所以要求的体积便是

$$V = \frac{8}{15}\pi x^2 y.$$

2) 利用第 339 目, 2) 与第 343 目, 2) 的结果, 试求第一象限椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的重心.

根据古尔丹定理,  $\xi = \frac{4a}{3\pi}$ ,  $\eta = \frac{4b}{3\pi}$ .

3) 如果图形具有对称轴, 那么图形的重心就必须在此轴上.



我们在图形为上以曲线  $y_1 = f_1(x)$  为界, 下以曲线  $y_2 = f_2(x)$  为界的情形下来证明此事. 假如取对称轴作为  $y$  轴, 则函数  $y_1$  与  $y_2$  就都成了偶函数; 此时  $x$  的变化区间便形如  $[-a, a]$ . 于是根据公式 (7a) 中的第二个 [参看第 314 目, 9)]

$$M'_y = \int_{-a}^a x(y_2 - y_1)dx = 0, \text{ 连带着 } \xi \text{ 也 } = 0.$$

- 4) 试求旋轮线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  的一拱与  $x$  轴所界出的图形的重心. 利用第 339 目, 9) 与第 343 目, 4), 根据古尔丹定理甚易确定:  $\eta = \frac{5}{6}a$ . 由于对称性,  $\xi = \pi a$ .  
5) 同样的, 对于两条抛物线  $y^2 = 2px$  与  $x^2 = 2py$  所界出的图形 (参看图 24).  
回想第 339 目例 5), 便由公式 (7a) 得到

$$\eta = \xi = \frac{1}{P} \int_0^{2p} x \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{\frac{6}{5}p^3}{\frac{4}{3}p^2} = \frac{9}{10}p.$$

6) 和古尔丹第一定理一样 [参看第 350 目, 5)], 第二定理也可以应用于这种场合, 就是当重心的位置知道了而要想确定对应的旋转体体积的时候. 例如, 对于环形圆纹曲面 (图 40), 便得到体积  $V = 2\pi^2 r^2 d$ .

**353. 力学上的功** 从初等力学中读者业已熟知, 如果加于动点  $M$  的力保持常量  $F$ , 并与点的运动方向保持常角, 则这个力在点的位移  $s$  上的功  $A$  就以乘积  $F \cos(F, s) \cdot s$  来表示, 其中  $(F, s)$  表示力的方向与点的运动方向之间的角. 显而易见, 乘积  $F_s = F \cos(F, s)$  是力  $F$  在位移  $s$  上的投影; 引用这个投影, 功的表达式可以表成  $A = F_s s$  的形状, 如果力的方向与点的运动方向相同, 则  $A = Fs$ ; 而在两个方向恰恰相反的情形下,  $A = -Fs$ .

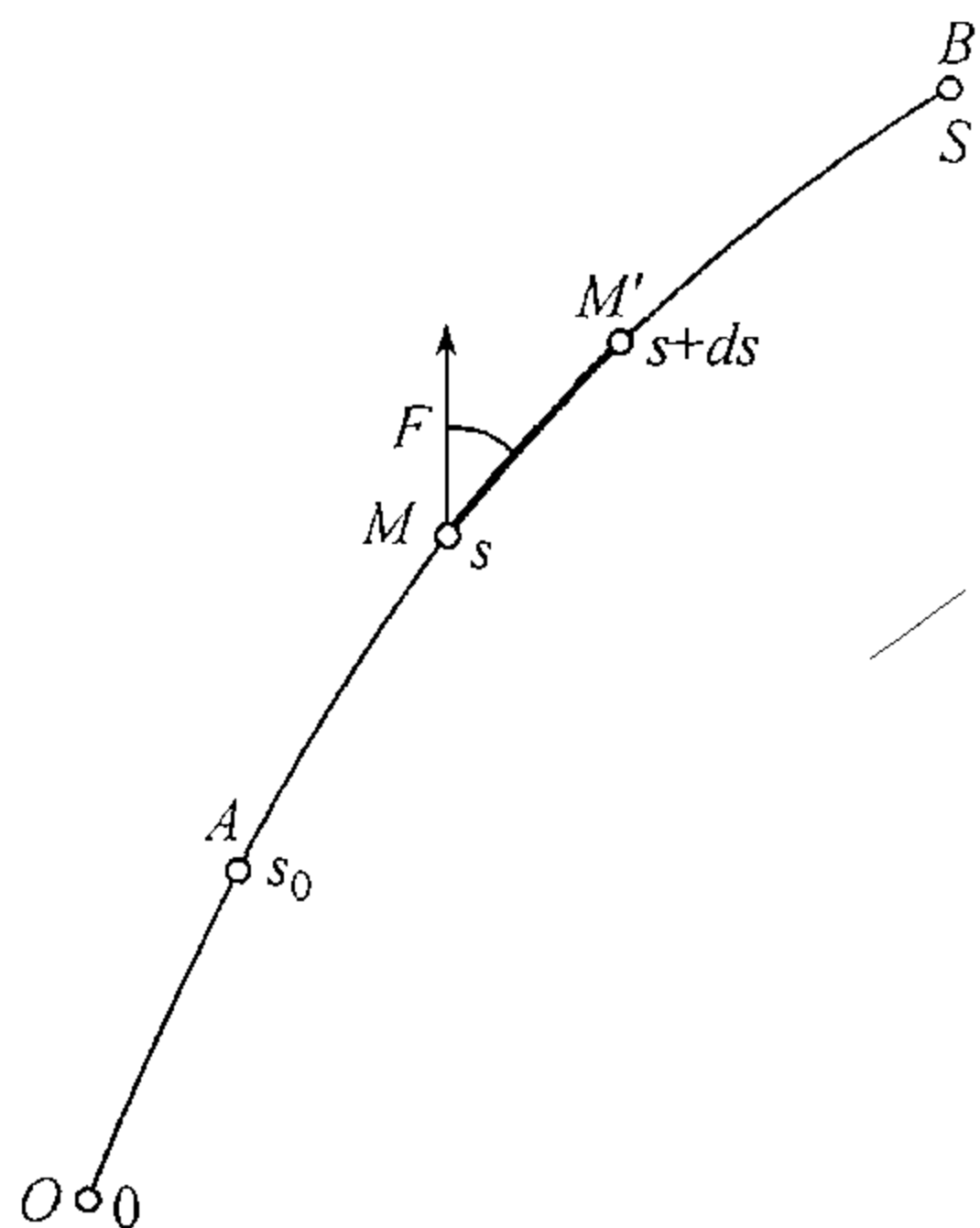


图 42

然而一般说来, 力的大小  $F$  及其与运动方向间的角  $(F, s)$  不能始终是个常数. 即使这两个量中的一个连续而变化, 要表达功的大小仍必须采用定积分.

设点所行经的路程  $s$  为独立变量: 此时我们假定, 这个点的初始位置  $A$  对应值  $s = s_0$ , 而终点  $B$  对应值  $s = S$  (图 42). 区间  $(s_0, S)$  中的每一个值  $s$  对应于动点的一个确定的位置, 而也对应于量  $F$  与量  $\cos(F, s)$  的确定的值, 因之这两个量可以看作  $s$  的函数. 在由路程的值  $s$  所确定的任何一个位置上, 取点  $M$ , 现在我们来找与路程由  $s$  到  $s + ds$  (此时点  $M$  就走到邻近的点  $M'$ , 见图 42) 的增量  $ds$  相对应的功的元素的近似表达式. 在  $M$  处, 定力  $F$  以定角  $(F, s)$  作用在点上; 因为:—— 在小的  $ds$  之下 —— 点由  $M$  过渡到  $M'$  时, 这些量的变化也很小, 我们便忽略了这些变化, 而认为力  $F$  与角  $(F, s)$  近似地是个常量, 就得出了在位移  $ds$  上的功元素的表达式

$$dA = F \cos(F, s) \cdot ds,$$

因之全部功  $A$  被表成积分

$$A = \int_{s_0}^S F \cos(F, s) \cdot ds. \tag{9}$$



从这个力  $F$  的功的一般表达式中, 很清楚可以看出, 当  $(F, s) = \frac{\pi}{2}$  时, 功变成为零; 实际上, 此时  $\cos(F, s) = 0$ , 于是被积函数就成为零了. 因此垂直于运动方向的力不产生力学上的功.

如将点上的作用力  $F$  依照途径的切线方向 (即运动方向) 及法线方向 (根据平行四边形法则) 分成两个分力, 则按以上所述, 只有切线分力  $F_s = F \cos(F, s)$  才产生功:

$$A = \int_{s_0}^S F_s ds. \quad (9a)$$

现在我们假定,  $F$  是所有加在点上的力的合力; 于是根据牛顿运动定律, 切线分量  $F_s$  等于点的质量  $m$  与其加速度  $a$  的乘积. 因而功  $A$  的表达式可以写成

$$A = \int_{s_0}^S m a ds.$$

现在回想:

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ 并且 } v = \frac{ds}{dt}, \text{ 所以 } a = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v;$$

此时即得

$$A = \int_{s_0}^S m v \frac{dv}{ds} ds = \int_{v_0}^v d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

其中  $v_0$  与  $V$  分别表示在路程的起点与终点处速度的值.

如所周知,  $\frac{1}{2} m v^2$  是点的活力或动能; 因而我们便引出了重要的定理: 使点发生运动的力, 其所做的力学上的功  $A$  就等于点的动能的增量. (当然, 功  $A$  与功能增量可以都是负的.) 这条原理可以推广到质点组以至整个的物体, 在力学与物理学中占非常重要的位置, 称之为“活力定律”.

**354. 例** 1) 作为例子, 我们把公式 (9) 用来计算拉伸 (或压缩) 一端固定的弹簧的功 (图 43); 例如在火车缓冲器的计算中, 就必须涉及这个问题.

大家都知道, 弹簧的伸长  $s$  (只要弹簧不是拉过了度) 做成的张力  $p$ , 其大小比例于伸长量, 于是  $p = cs$ , 其中  $c$  是某一常量, 依赖于弹簧的弹性 (弹簧的“刚性”). 拉弹簧的力应该胜过这个张力. 如若只计算作用力在这上面所耗费掉的部分, 则当伸长量由 0 增至  $S$  时, 它的功表成这样:

$$A = \int_0^S p ds = c \int_0^S s ds = c \frac{s^2}{2} \Big|_0^S = \frac{cS^2}{2}.$$

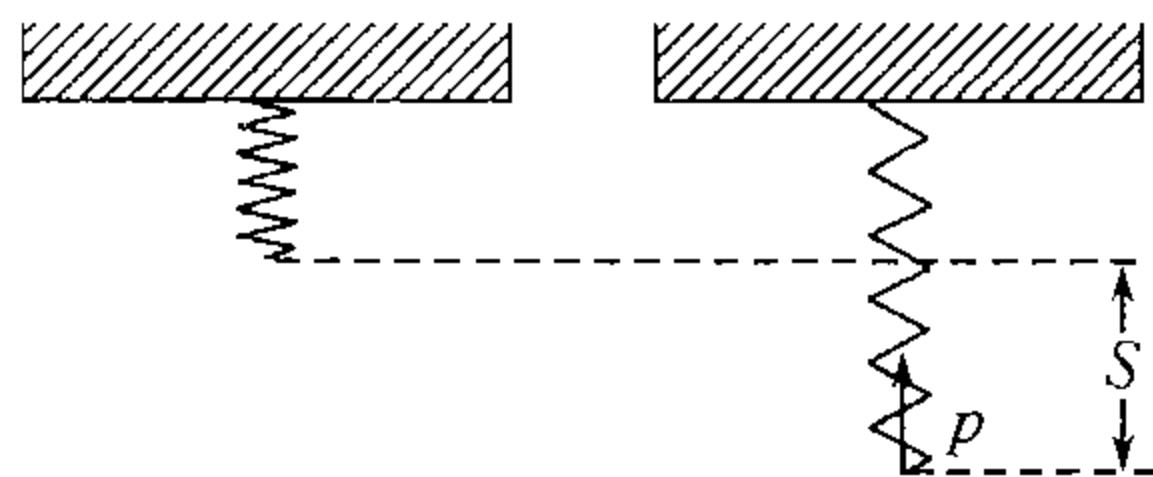
图 43

用  $P$  表示张力 (或克服它的力) 的最大值, 它对应于弹簧的伸长量  $S$  (就等于  $cS$ ), 我们可以把功的表达式表成以下形状:

$$A = \frac{1}{2} PS.$$

如若力  $P$  一下子就加到了弹簧自由的一端 (例如挂上一个重物), 则在它的位移  $S$  上就产生了两倍大的功  $PS$ . 我们知道, 其中只有一半是耗费在弹簧的伸长上面; 而另一半化为弹簧与所挂重物的动能了.

2) 假设有某一定量的气体 (蒸汽) 含于汽缸内活塞的一侧 (图 44), 还假定这气体膨胀了并推动活塞向右. 我们的目的是要确定此时气体所做的功. 倘使以  $s_1$  与  $s_2$  表示活塞和汽缸左方的底





的初始与最终距离, 以  $p$  表示 (活塞单位面积上的) 压力, 而以  $Q$  表示活塞面积, 那么所有作用在活塞上的力便是  $pQ$ , 而功则如所尽知, 表如积分

$$A = Q \int_{s_1}^{s_2} p ds.$$

以  $V$  表示我们所研究的气体的体积, 显见即有  $V = Qs$ . 现在很容易地就从变量  $s$  转到变量  $V$  了; 我们得出

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dv, \tag{10}$$

其中  $V_1$  与  $V_2$  表示体积  $V$  初始的与最终的值.

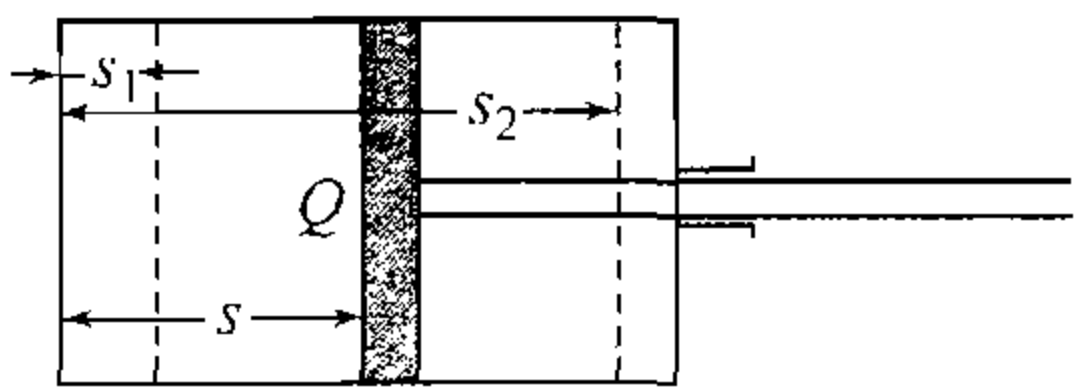


图 44

如果压力  $p$  是当作体积  $V$  的一个函数而为我们所已知, 则功  $A$  即由此被确定. 我们先假定当气体膨胀时, 其温度保持不变, 那么它要膨胀就必须由外面输入热能; 此时称之为等温过程. 假想这气体是“理想的”, 由波义耳-马略特定律便有  $pV = c = \text{常量}$ , 所以  $p = \frac{c}{V}$ , 并且我们得到功的值

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V} dV = c \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = c \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

如果以  $p_1$  与  $p_2$  表示过程开始与过程最终时的压力, 则  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , 即  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$  因此在从压力  $p_1$  到压力  $p_2 < p_1$  的过程上, 膨胀的功也可以表如次形

$$A = c \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

最后, 在这些公式中可将  $c$  换为乘积  $p_1 V_1$ .

然而时常是更自然地假定在膨胀时, 气体与周围环境之间没有热的流通, 而气体的能量只消耗在作功上, 此时它的温度就降低了: 这种过程称之为绝热过程. 在这样的场合下, 我们所研究的气体的压力  $p$  与体积  $V$  之间的关系有以下形状

$$pV^k = c = \text{常量},$$

[这个关系将在以下的第 361 目, 3) 中推出], 其中  $k$  是每一种气体 (蒸汽) 的特征常数, 永远大于 1. 因此  $p = cV^{-k}$  并且

$$A = \int_{V_1}^{V_2} cV^{-k} dv = \frac{c}{1-k} V^{1-k} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{1-k} (V_2^{1-k} - V_1^{1-k}) = \frac{c}{1-k} \left( \frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{1}{V_1^{k-1}} \right).$$

倘若回忆  $cV_1^{-k} = p_1, cV_2^{-k} = p_2$ , 则此结果可以表成更简便的形式; 作替换, 便引出以下功的表达式

$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{k - 1}.$$

我们只不过是简单明了起见, 才假定气体是在汽缸里膨胀. 基本公式 (10) 以及由它而推得各特殊公式, 与当时所研究的气体的形状无关, 总是有效的. 当然, 那些公式也表示了气体由体积  $V_2$  压缩到体积  $V_1 < V_2$  (伴随着压力由  $p_2$  升高到  $p_1 > p_2$ ) 的功, 亦即迫使气体紧缩的外力的功; 而气体本身的功此时就是负的了!



**355. 平面轴基的摩擦力的功** 一般称垂直旋转轴的支撑部分为轴基; 轴在它上面旋转而它本身固定不动的支撑部分称为轴承. 在本目中, 我们研究关于消耗在克服轴基摩擦的能的问题, 以最简单的情形——平面轴基为限.

圆柱体以平底而立在轴承上, 便是平面轴基 (图 45). 这个底一般为圆环形, 外半径为  $R$ , 内半径为  $r_0$ ; 在特殊情形下, 当  $r_0 = 0$  时, 我们就得到实心的圆截面.

我们用  $P$  表示轴基所传导的全部压力, 用  $\omega$  (1/秒) 表示轴旋转的角速度, 用  $\mu$  表示摩擦系数, 最后用  $p$  表示在所研究的点处轴基单位面积所受压力. 暂且不谈压力的分布问题, 我们只注意一个显然情形: 轴基上与其中心  $O$  等距离的点系处于同一条件之下, 它们所受压力也就应该一样. 因此  $p$  一般可以认作是向径  $r$  的函数. 以下将述出通常对于此函数所作的假定; 然而无论如何它总得满足一项条件, 即轴基所受的全部压力应与轴方面的压力  $P$  相抵.

为了要计算这个全压力, 我们仍遵循第 348 目的途径采用无穷小量求和的办法, 并取半径  $r$  作为独立变量, 从  $r_0$  变到  $R$ . 将此区间分成若干段, 同时也就将整个圆环分成若干元素的同心环, 于是对应于各别元素环形的元素压力加在一起就是整个的压力  $P$ . 现在我们来研究介于半径为  $r$  及半径为  $r + dr$  的圆之间的环形 (在图 45, 6 上它画了细线条). 这个环形的面积为  $\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2$ ; 弃去二阶无穷小  $\pi(dr)^2$ , 可以近似地取这个面积等于  $2\pi r dr$ . 如果  $p$  是在与中心相距为  $r$  的点处的 (单位面积上的) 压力, 则所研究的环形对应于元素压力

$$dP = p \cdot 2\pi r dr,$$

所以总加在一起便得到等式

$$P = 2\pi \int_{r_0}^R p r dr. \quad (11)$$

我们重复指出, 它也表明这一事实, 即轴基所受的总压力等于轴方面的压力.

现在我们来确定, 对旋转轴而旋转着的轴基之上的摩擦力矩  $M$ . 我们重新研究上面讲过的元素环形; 在它上面所发生的抵抗旋转的摩擦力为

$$\mu dP = 2\pi \mu p r dr.$$

所以与之对应的元素力矩  $dM$  就表成了这个力与 (环形上所有的点的共同的) 力臂  $r$  的乘积:

$$dM = 2\pi \mu p r^2 dr.$$

因此全部的摩擦力矩便是

$$M = 2\pi \mu \int_{r_0}^R p r^2 dr. \quad (12)$$

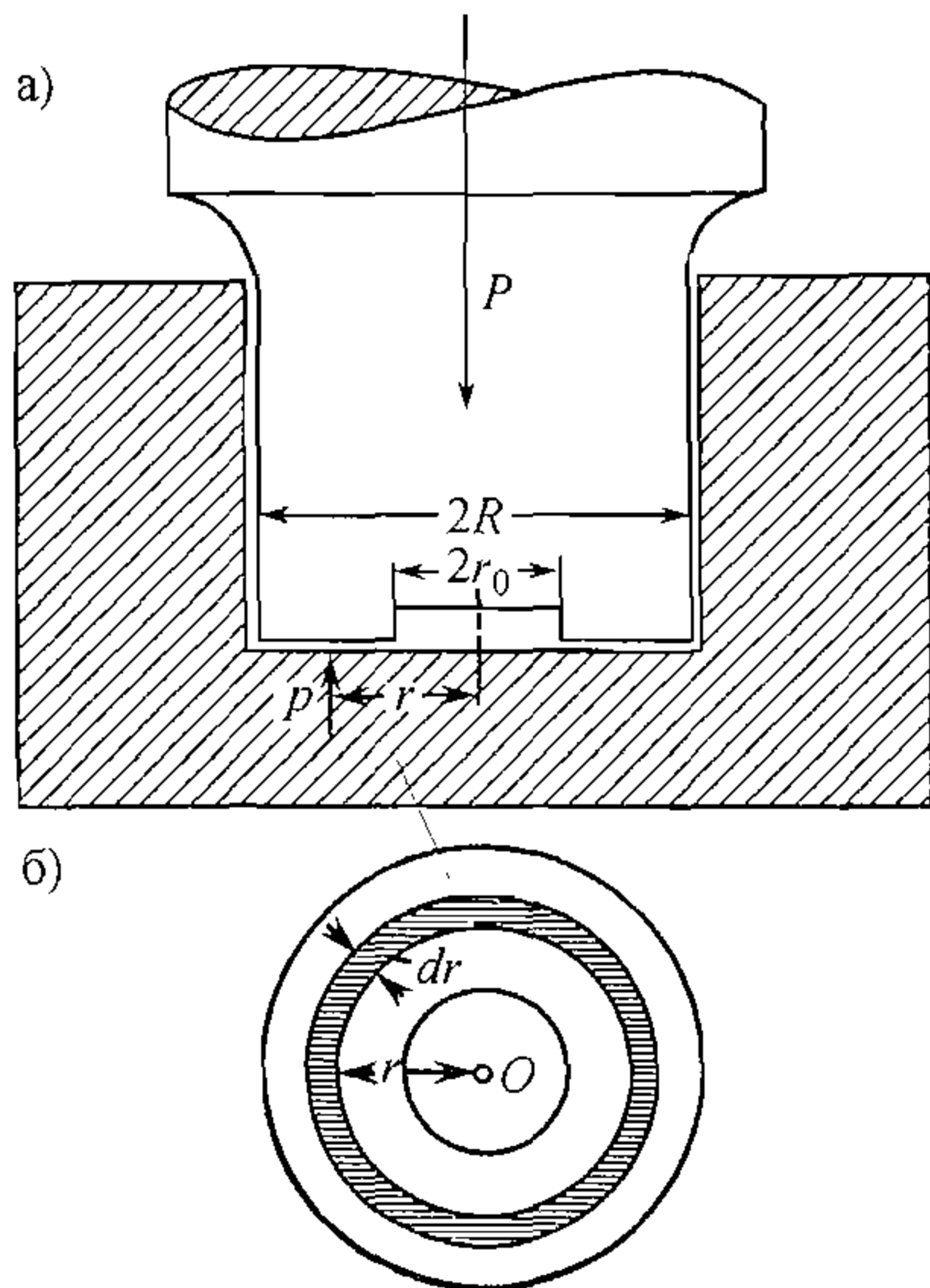


图 45



从力学中知道, 在一秒钟之内, 由这常转矩  $M$  所做的功  $A$ , 系由转矩  $M$  与旋转角速度  $\omega$ (1/秒) 相乘而得:

$$A = M\omega.$$

为了要把功  $A$  的计算搞彻底, 现在必须对于  $p$  在轴基表面上的分布规律作出某种假定. 最简单的是假定压力均匀分布, 就是说  $p = c = \text{常量}$ . 此常量由条件 (11) 来确定. 不过此时可直接看出, 若压力  $P$  是均匀的分布在环形的面积  $\pi(R^2 - r_0^2)$  上, 则单位面积所得压力  $p = c = \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}$ .

于 (12) 中以这个值代替  $p$ , 便进而得出

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R r^2 dr = \frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r_0^3}{R^2 - r_0^2}.$$

特别对于实心的轴基便有:  $M = \frac{2}{3}\mu PR$ .

然而这些结果只能用到新的, 尚未磨损的轴基上去. 问题是在于当轴旋转时, 轴基上面的点离中心  $O$  越远, 运动速度就越大, 在它上面的摩擦功就越大, 因而无论是轴基还是轴承, 磨损得也就更厉害. 由于这个道理, 受压力的部分就转移到了轴基上距中心较近的部分. 对于旧的, 损耗了的轴基, 通常设其压力分布是这样的, 即 (单位面积上的) 摩擦功以及随之而生的损耗, 处处保持一常量. 将元素的功  $dA = \omega dM$  分配到元素环形的面积  $2\pi r dr$  上, 我们的假设便可写成这样.

$$\omega\mu pr = \text{常量}, \text{因而也就是 } pr = c = \text{常量};$$

这样, 我们就假定了  $p$  是按照其与中心的距离  $r$  成反比而变的. 于条件 (11) 中以  $c$  替换  $pr$ , 便求得这个常量的值

$$P = 2\pi c \int_{r_0}^R dr = 2\pi c(R - r_0), \text{由此 } c = \frac{P}{2\pi(R - r_0)}.$$

最后, 在 (12) 中将  $pr$  换成所得到的表达式, 就得出这样的结果:

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{2\pi(R - r_0)} \int_{r_0}^R r dr = \frac{1}{2}\mu P(R + r_0).$$

而对于实心的轴基,  $M = \frac{1}{2}\mu PR$ .

易见, 在耗损了的轴基的情形中, 损失于摩擦上的能较在新轴基的情形中为少.

**356. 无穷小元素求和的问题** 我们再引一些应用无穷小元素求和的方法来解决的问题.

1) 试求物体 ( $V$ ) 对于给定的平面的静力矩  $M$  的表达式, 假设已知其与此平面平行的横断面面积 (是与该平面的距离  $x$  的某一函数). 密度假定等于 1.

在第 343 目中的符号之下, 与平面相距  $x$  处, 物体的元素薄片的质量 (体积) 是  $p(x)dx$ , 其静力矩  $dM = xP(x)dx$ , 于是总加在一堆, 便得到

$$M = \int_a^b xP(x)dx.$$



物体的重心与给定的平面的距离  $\xi$  表成这样:

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{\int_a^b xP(x)dx}{\int_a^b P(x)dx}.$$

特别对于旋转体

$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}.$$

假使将这个结果应用到 (a) 圆锥与 (б) 半球, 则得出重心与底的距离为 (a)  $\frac{1}{4}$  高, (б)  $\frac{3}{8}$  半径.

2) 试求旋转曲面对于垂直旋转轴的平面的静力矩  $M$  的表达式. “面密度” 假定等于 1.

取旋转轴作为  $x$  轴, 并取其与上述平面的交点作为坐标原点. 在第 344 目的符号之下, 距弧长初始点  $s$  处的元素环形片的质量 (面积) 为  $2\pi yds$ , 其静力矩  $dM = 2\pi xyds$ , 并且最后

$$M = 2\pi \int_0^S xyds = 2\pi \int_0^S \Phi(s)\Psi(s)ds.$$

特别若旋转的曲线以显式方程  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  给出, 则

$$M = 2\pi \int_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

旋转面的重心与给定的平面的距离  $\xi$  即为

$$\xi = \frac{M}{P} = \frac{\int_0^S xyds}{\int_0^S yds} = \frac{\int_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}dx}{\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}dx}.$$

试应用最后一个公式到 (a) 圆锥面, (б) 半球面. 答案 重心与底的距离等于 (a)  $\frac{1}{3}$  高, (б)  $\frac{1}{2}$  半径.

3) 试确定柱面 [第 346 目, 图 35] 对于坐标平面的静力矩  $M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}$ , 以及其重心之位置. 并将所得公式应用于圆柱弓形体 [第 343 目, 8)] 的侧面.

答案 一般公式是

$$M_{yz} = \int_0^S xzds, M_{zx} = \int_0^S yzds, M_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^S z^2ds,$$

$$\xi = \frac{M_{yz}}{P}, \eta = \frac{M_{zx}}{P}, \zeta = \frac{M_{xy}}{P},$$

其中  $P$  为表面积. 在所提到的例子中  $\xi = 0, \eta = \frac{\pi}{4}a, \zeta = \frac{\pi}{8}h$ .

4) 质量  $m$  与自点至轴 (平面) 的距离  $d$  的平方的乘积, 称为质量为  $m$  的质点对该轴 (或平面) 的转动惯量 (或平方矩). 由此出发, 试求一个平面图形  $A_1B_1B_2A_2$  (图 46) 对于  $y$  轴转动惯量  $I_y$  的表达式, 假定质量分布的 “面密度” 是 1.

我们有

$$dI_y = x^2(y_2 - y_1)dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2(y_2 - y_1)dx.$$

例如, 在图 47 所画的情形中, 我们得到:

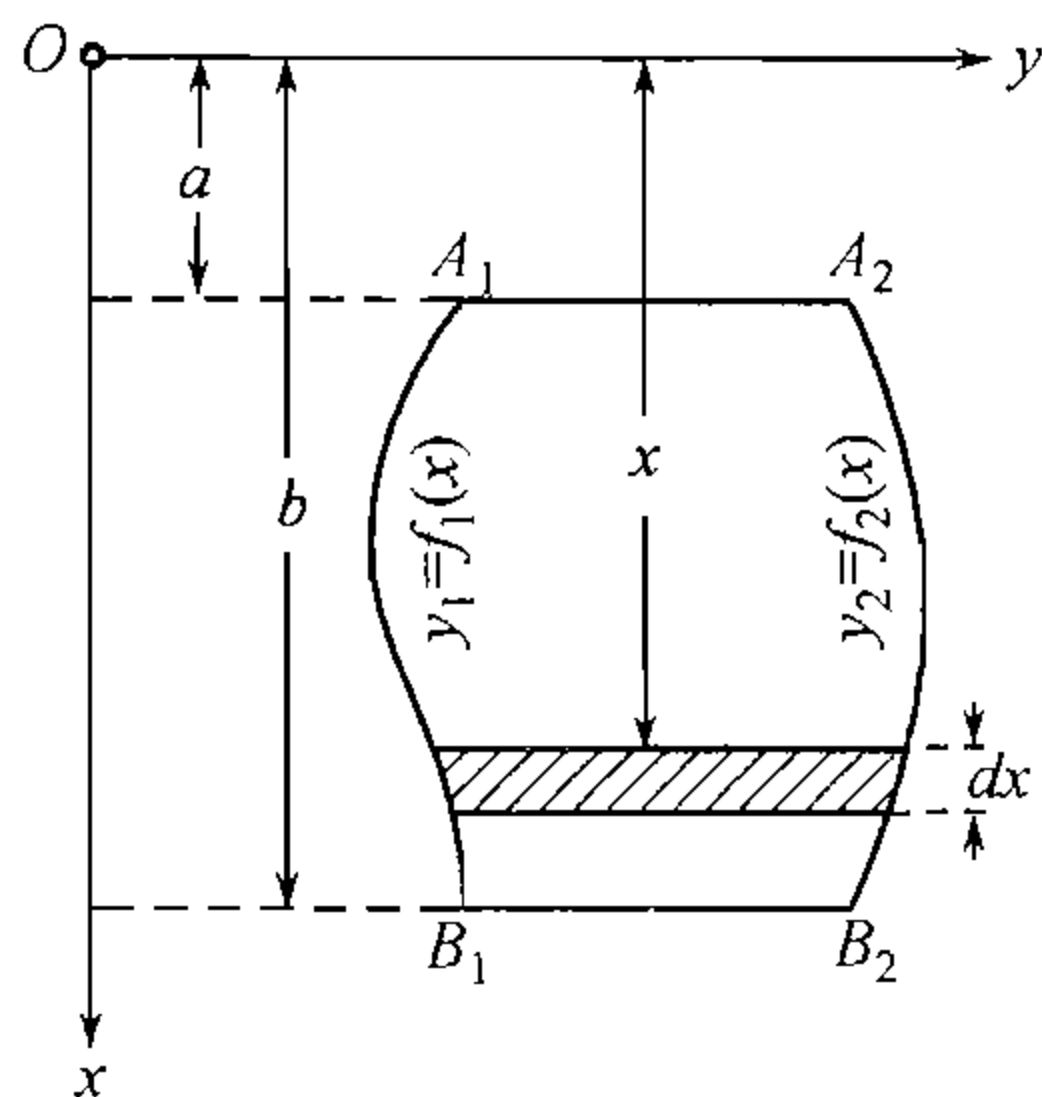


图 46



$$(a) y_2 - y_1 = b,$$

$$I_y = b \int_{c-\frac{h}{2}}^{c+\frac{h}{2}} x^2 dx = bc^2h + \frac{bh^3}{12},$$

特别在  $c = 0$  时, 便有  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ;

$$(b) y_2 - y_1 = 2\sqrt{r^2 - (x - c)^2},$$

$$I_y = 2 \int_{c-r}^{c+r} x^2 \sqrt{r^2 - (x - c)^2} dx = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4},$$

特别在  $c = 0$  时, 便有  $I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ .

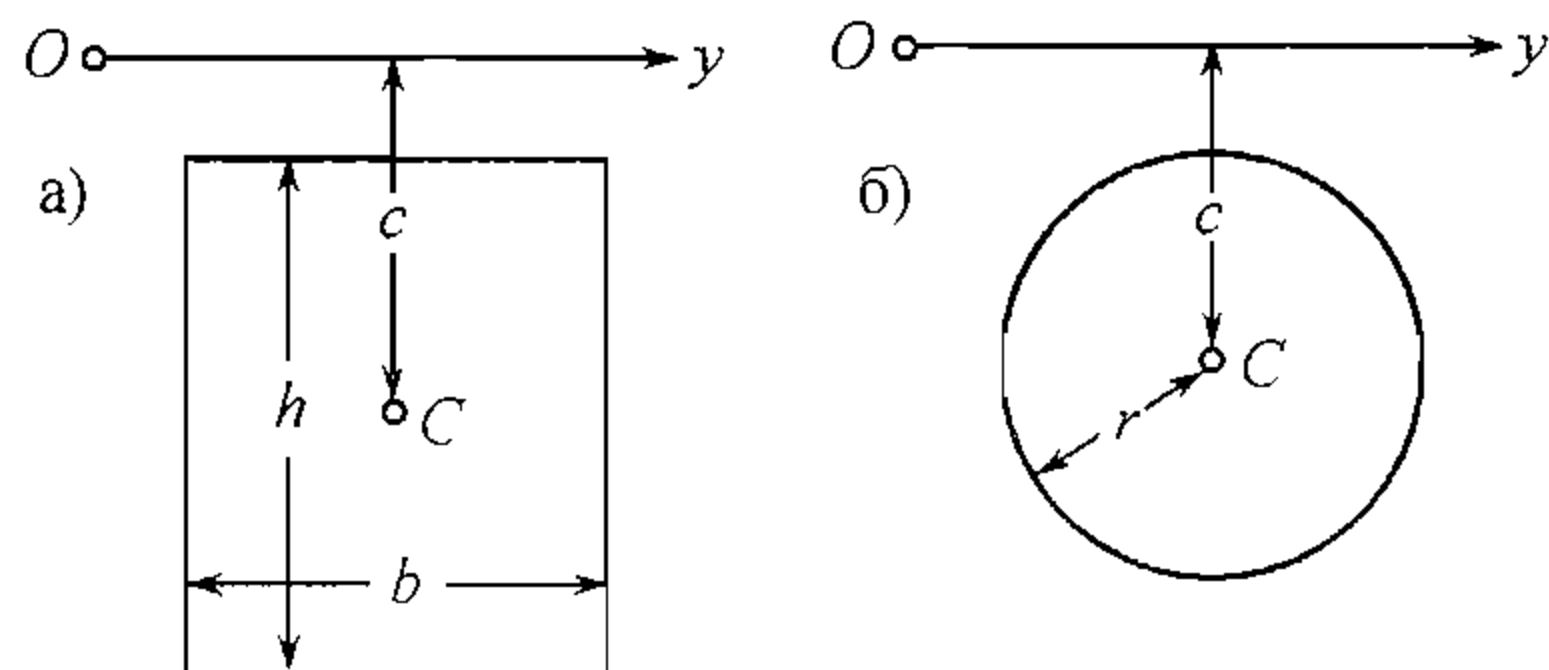


图 47

5) 试确定在问题 1) 中所研究的物体 (V) 对于前述的那个平面的转动惯量. 并应用所得公式计算 (a) 圆锥, (b) 半球, 对于底平面的转动惯量.

答案  $I = \int_a^b x^2 P(x) dx$ ; 特别是 (a)  $I = \frac{\pi}{30} R^2 h^3$ , (b)  $I = \frac{2\pi}{15} R^5$ .

6) 在液面下深  $h$ (米) 的某一平面上, 液体的压力等于以此平面为底, 高为  $h$  的整个液柱

的重量. 因此若以  $\gamma$  表示液体的比重 (千克/米<sup>3</sup>), 在深度  $h$ (米) 处单位面积上所得的压力 (千克/米<sup>2</sup>) 就等于  $h\gamma$ .

今假定将一平面图形  $A_1B_1B_2A_2$ (图 46) 垂直的沉入液体中<sup>①</sup>.

试求在此图形上的全部流体静压力  $W$  以及它的矩  $M$ (对于自由液面而言).

元素面积  $dp = (y_2 - y_1)dx$  受到压力  $dW = \gamma x(y_2 - y_1)dx$ , 它对于  $y$  轴的矩等于  $dM = \gamma x^2(y_2 - y_1)dx$ . 由此

$$W = \gamma \int_a^b x(y_2 - y_1)dx,$$

$$M = \gamma \int_a^b x^2(y_2 - y_1)dx.$$

显而易见, 第一个积分乃是图形对于  $y$  轴的静力矩  $M_y$ ; 而第二个积分给出了图形对于该轴的转动惯量  $I_y$ .

假如  $\xi$  是图形重心  $C$  与自由液面的距离, 而  $P$  是图形面积, 则可写出  $W = \gamma P\xi$ . 压力中心, 就是说全部压力的合力的作用点, 与自由液面相去的距离

$$\xi^* = \frac{M}{W} = \frac{I_y}{P\xi}.$$

我们把这些公式运用到图 47 所画的情形上.

在情形 a):  $\xi = c$ ,  $P = bh$  并且  $W = \gamma bhc$ . 不仅如此, 因为在 4) 中我们已经计算出了  $I_y = bc^2h + \frac{bh^3}{12}$ , 所以我们可以立即写出

$$\xi^* = c + \frac{h^2}{12c}.$$

<sup>①</sup>我们将  $y$  轴取在自由液面上.



特别若是  $c = \frac{h}{2}$  (就是说矩形的上边在液面上), 我们便有

$$W = \frac{1}{2}\gamma b h^2, \xi^* = \frac{2}{3}h.$$

在情形, 6):  $\xi = c, P = \pi r^2$  并且  $W = \gamma c \pi r^2$ . 此处  $I_y = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4}$  [参看 4)]. 由此

$$\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}.$$

7) 如果在一个灌满了水的容器的壁上, 于水平面下深  $h$  (米) 处有一条水平的裂缝, 那么水就会以速度 (米/秒)

$$v = \sqrt{2gh} \text{①}$$

从这里流出. 现在假定在容器的壁上, 有一个长方形的窟窿 (图 48). 要求确定水的流量, 也就是说一秒钟内所流出的水的体积  $Q$  (米<sup>3</sup>).

在深度为  $x$  处, 宽度为  $dx$  的元素窄条对应于速度  $v = \sqrt{2gx}$ ; 因为它的面积是  $b dx$ , 所以水通过这个窄条的流量就表成了这样:  $dQ = \sqrt{2gx} \cdot b dx$ . 总加在一起, 便得到

$$Q = \sqrt{2gb} \int_{h_0}^h x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2gb} \left( h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right).$$

实际的流量比所计算出的要少一些, 因为液体内有摩擦而且液流有压缩的缘故, 通常总是用某一经验系数  $\mu < 1$  来照顾这些因素的影响. 而将公式写成这样

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2gb} \left( h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right).$$

当  $h_0 = 0$  时, 由此便得到通过矩形水门的水流量

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2gb} h^{\frac{3}{2}}.$$

8) 在研究电磁场时, 毕奥与萨伐尔得到了一个结果, 即电流作用在磁极上的力可以看作是由个别无穷小“电流元素”所发生的力的合力. 按照他们所建立的定律, 电流元素  $ds$  (图 49) 以力

$$dF = \frac{Im \sin \varphi ds}{r^2} \text{②}$$

作用于点  $O$  处的磁性质量  $m$ , 其中  $I$  是电流强度,  $r$  是距离  $OM$ , 而  $\varphi$  是角  $(ds, r)$ .

这个力的方向是垂直于通过  $O$  及  $ds$  的平面, 并且 —— 在图中所画的情形下 —— 是在读者这边.

要想确定有限的一段电流在磁极上的作用, 必须将这些元素力总加在一起.

例如我们来确定一段直线的电流  $BC$  (图 50), 在图中所标明的符号之下, 作用于单位磁性质量上的力.

①这个公式是在流体力学中证明的, 称作托里拆利公式. 注意, 它与一个有重量的质点从高  $h$  处落下时的速度公式有同样的形状.

②仅在适当的选择单位时, 公式方具此形 (例如说力表成达因, 距离表成米, 磁性质量与电流强度表成电磁单位).

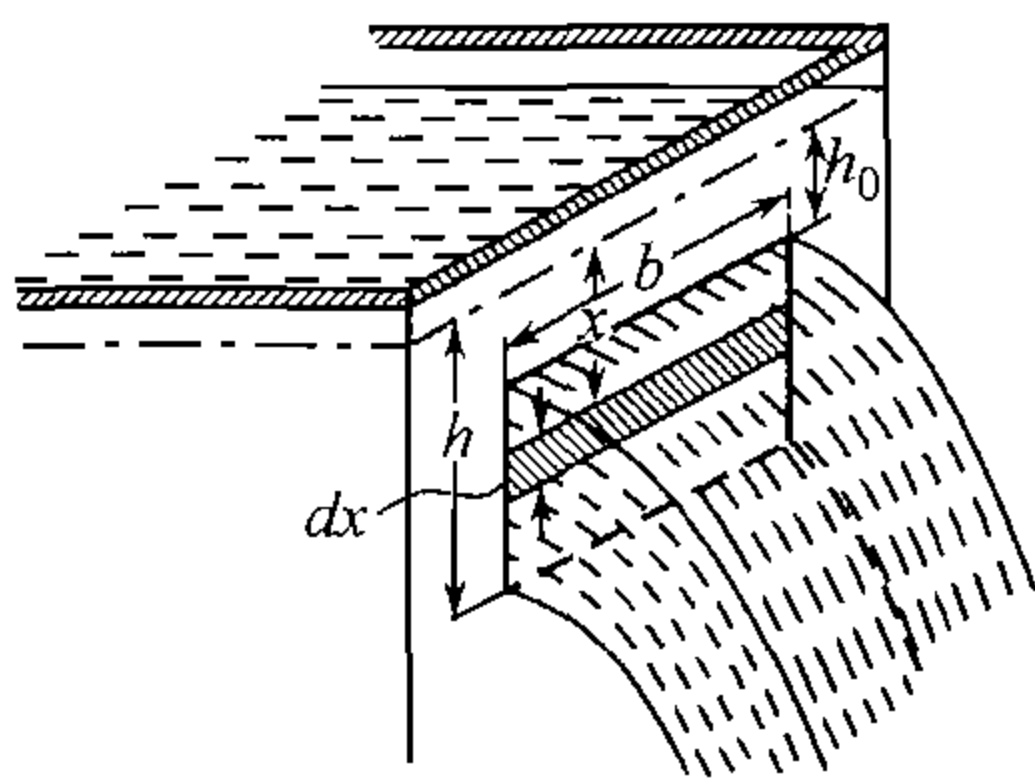


图 48



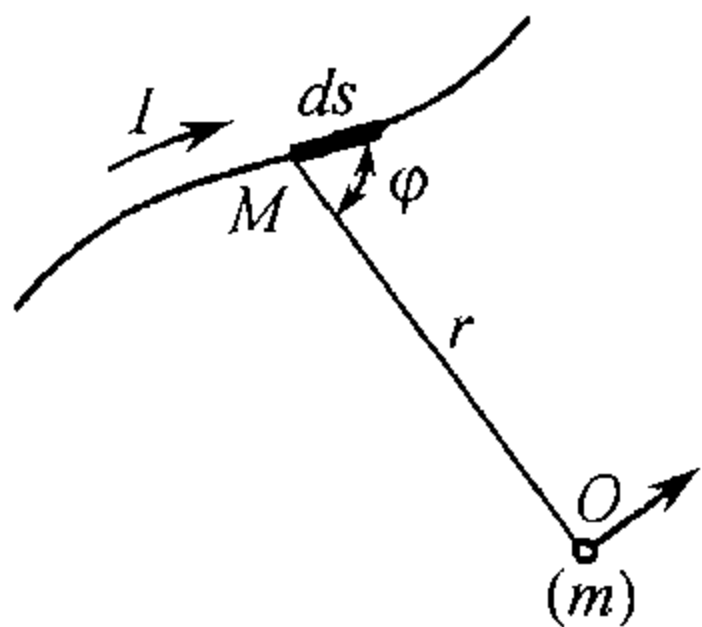


图 49

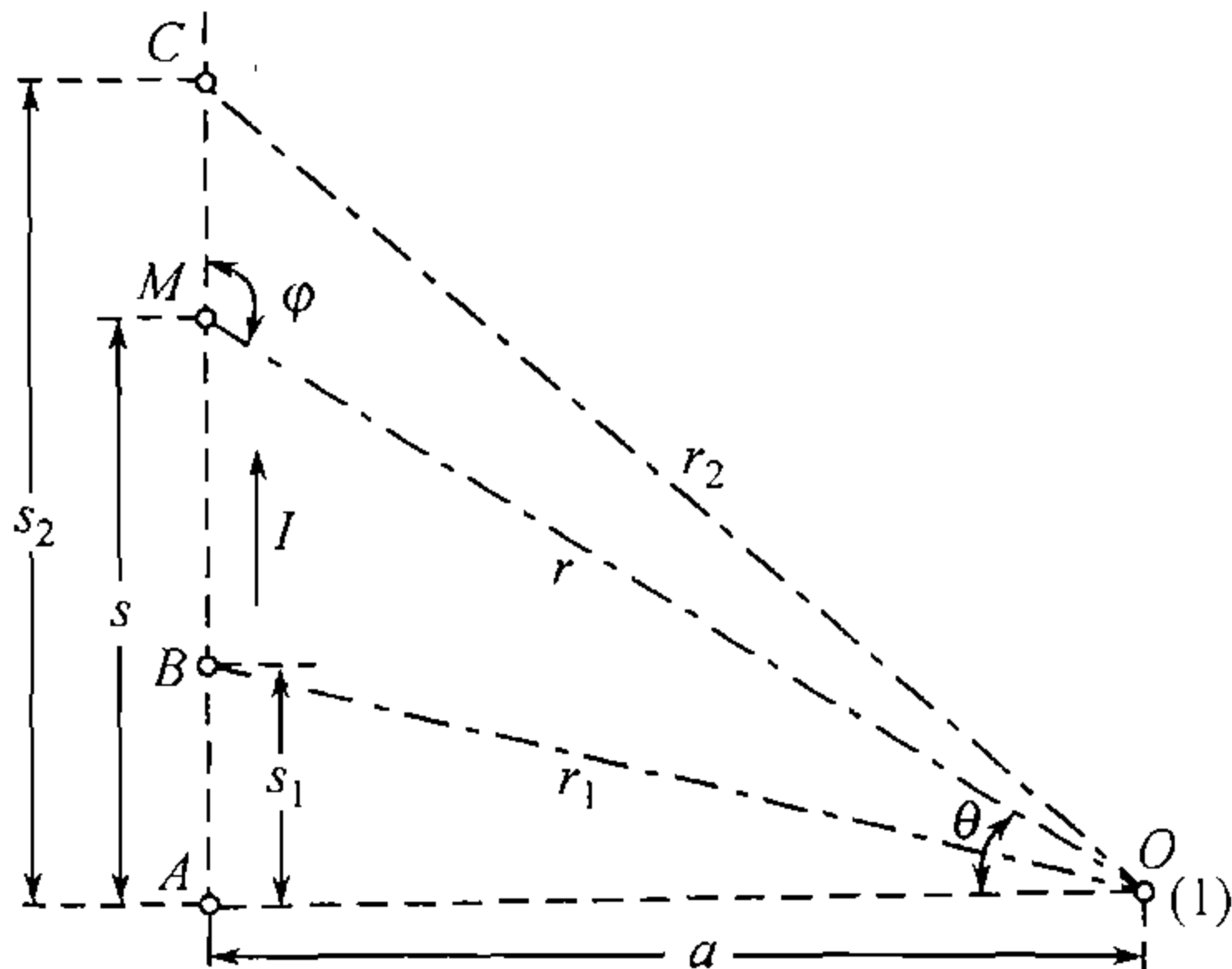


图 50

因为  $\sin \varphi = \sin \angle OMA = \frac{a}{r}$ , 所以  $dF$  可以表成这样形状,

$$dF = \frac{aI ds}{r^3} = \frac{aI ds}{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

此处元素力可以直接相加, 因为它们皆具有同一方向. 因此

$$F = aI \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{a} \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{I}{a} \left( \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1} \right).$$

### §4. 最简单的微分方程

357. 基本概念、一阶方程 在第八章中, 我们研究了由给定的导数

$$y' = f(x) \tag{1}$$

[或者是 —— 同样的 —— 由微分  $dy = f(x)dx$ ] 来确定函数  $y = y(x)$  的问题, 并且学了作积分或求积的运算法, 由此而问题得以解决,

$$y = \int f(x)dx + C^{①}. \tag{2}$$

在这个通解中出现有常数  $C$ . 如我们在 [第 263 目, 第 264 目] 例子中所见过的, 假使给了初始条件

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时 } y = y_0. \tag{3}$$

则借此即确定了常数的具体的值  $C = C_0$ . 代到 (2) 里面去, 我们便得出了我们的问题的特解, 亦即具体的函数  $y = y(x)$ , 它不仅具有预先所给定的导数, 而且还满足初始条件 (3).

①在本节中, 我们将符号  $\int f(x)dx$  了解成虽然是任意的, 然而却是确定的原函数, 所以我们不把积分常数包含在这个符号里而另外写出.



然而,时常需要从更复杂的,联系着自变量  $x$  的值与未知函数  $y$  以及其导数  $y', y'', \dots$  的关系式

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

中来确定函数  $y = y(x)$ . 这种类型的关系式一般就称作微分方程.

我们且来看只包含有一阶导数  $y'$  的一阶方程

$$F(x, y, y') = 0. \quad (4)$$

任意一个函数  $y = y(x)$ , 若对于  $x$  而言恒满足以上方程, 就是它的一个解. 可以证明 (在对于函数  $F$  的某种假定之下), 和开头所提的最简单的情形一样, 它的通解里也包含有任意常量  $C$ , 就是说具有形状

$$y = \varphi(x, C). \quad (5)$$

不过有时候这个解可以成隐式而得到:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ 或 } \psi(x, y) = C. \quad (6)$$

求微分方程 (不论是什么形式的) 的通解称为方程的积分.

例如, 我们来研究这样的问题: 求法距不变的曲线. 假如用显式方程  $y = y(x)$  表示这样的曲线, 那么问题就化为求这样的函数, 使得满足条件  $yy' = p$ , 其中  $p = \text{常量}$  [第 230 目, (3)]. 将它改写成  $(y^2)' = 2p$  形状; 现在很明显的, 它的通解便是

$$y^2 = 2px + C \text{ 或 } y = \pm \sqrt{2px + C}. \quad (7)$$

因此, 整个的抛物线族 (彼此可由平行于  $x$  轴的移动而得到) 都满足所给的要求.

因为是要找所有具上述性质的曲线, 故此处通解恰恰就给出了问题的答案. 如果在问题中附带指出, 曲线应通过给定的点  $(x_0, y_0)$ , 则将这些  $x$  和  $y$  的值代入所得到的方程 (7) 中, 我们就可以确定出  $C$  的值:

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0.$$

于 (7) 中命  $C = C_0$ , 我们得出特解  $y^2 = 2px + C_0$ , 就表示了具体的曲线.

应该说明, 最常发生的正是这样, 即导出微分方程的问题要求一些具体的特解. 这通常皆以问题本身所提出的 (3) 型的初始条件来确定. 根据这些条件, 和刚才一样, 第一步可以定出具体的值  $C = C_0$ ; 这可由通解 (5)[或 (6)] 中命  $x = x_0, y = y_0$  所得出的方程来确定. 今若于此通解中, 以所得到的解  $C_0$  替换  $C$ , 那么就得出了解满足问题的那个特解.

**358. 导数的一次方程、分离变量** 现在我们假定, 在方程 (4) 中导数  $y'$  是一次的, 就是说方程的形状有如

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

其中  $P, Q$  是  $x$  与  $y$  的函数. 此处令  $y' = \frac{dy}{dx}$ , 方程即可表成这个形式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (8)$$

这个形式通常是比较方便些.



此处我们只详细讲一下方程 (8) 的最简单情形, 即当其积分可直接化成求积的时候; 这样一来, 关于这些情形的研究便成为第八章的很自然的补充材料

倘若在方程 (8) 中, 系数  $P$  事实上只依赖于  $x$ , 而系数  $Q$  只依赖于  $y$ , 就是说方程的形状有如

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (9)$$

那么就说, 变量被分离了. 此时作积分异常简单.

假定, 函数  $P(x)$  在区间  $[a, b]$  中是连续的, 而函数  $Q(y)$  在区间  $[c, d]$  中是连续的. 于是  $P(x)dx$  是函数  $\tilde{P}(x) = \int P(x)dx$  的微分, 而  $Q(y)dy$  是函数  $\tilde{Q}(y) = \int Q(y)dy$  的微分, 即使是把  $y$  了解成满足方程 (9) 的函数  $y(x)$  亦然<sup>①</sup>. 此时方程 (9) 的左侧部分就成了和  $\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(y)$  的微分. 因为这个微分等于 0 (由于方程 (9)), 所以函数本身就成了常量

$$\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(y) = C. \quad (10)$$

易见, 反之如若函数  $y = y(x)$  满足这个方程 (对于任意的  $x$ ), 则亦满足方程 (9). 等式 (10) 便给出了方程 (9) 的通解.

在解方程 (9) 时, 有时宁可带  $dx$  与  $dy$  的项放在方程的两边,

$$Q(y)dy = -P(x)dx. \quad (11)$$

每边分别积分之, 并且不要忘记了任意常数, 这只要加在一个积分上就够了, 便得出和以上所得的全同的结果

$$\int Q(y)dy = - \int P(x)dx + C.$$

假定要求满足初始条件 (3). 不开头找通解再来选择常数  $C$ , 而由这些条件出发, 可以作得比较简单: 将元素的量 (11) “总加在一起”, 右边在  $x_0$  与  $x$  之间, 而左边在它们的对应值  $y_0$  与  $y$  之间. 我们得出等式

$$\int_{y_0}^y Q(y)dy = - \int_{x_0}^x P(x)dx,$$

这就给出了所要求的特解; 它的形状的本身就有力地显示出, 它在  $x = x_0$  与  $y = y_0$  时显然成立. 读者自己很容易搞明白, 这个方法和以前的只是形式上不同.

例 1) 设给定方程

$$\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

积分之

$$\int \sin x dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \quad \text{或} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C,$$

由此

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}.$$

这即是所提出的方程的通解. 如若给了初始条件, 比如说,

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时 } y = 1,$$

<sup>①</sup>由于微分形式的不变性 [第 106 目].



那么代入这些值, 立即得到  $C = 1$ , 就引出了特解

$$y = \frac{(1 + \cos x)^2}{4}.$$

如前所指出者, 在这个情形下可以不必先写出通解, 而立即写出

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = - \int_0^x \sin x dx, \text{ 亦即 } 2(\sqrt{y} - 1) = \cos x - 1,$$

由此

$$\sqrt{y} = \frac{1 + \cos x}{2}, y = \left( \frac{1 + \cos x}{2} \right)^2.$$

时常发生这种情形, 即方程 (8) 虽不具有形式 (9), 但能够变换成这种形式, 其后再和以上所讲的一样进行积分. 这种变换即叫作**分离变量**. 在这样的场合下, 即当系数  $P$  与  $Q$  是一些每一个只依赖于一个变量的因子的乘积时,

$$P(x, y) = P_1(x)P_2(y), Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y),$$

变量是很容易分离的. 实际上用  $P_2(y)Q_1(x)$  除方程

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (12)$$

的两端即可, 由此变量就已经分离开了:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0.$$

例 2)  $y \sin \frac{x}{2} dx - \cos \frac{x}{2} dy = 0$ .  
方程有 (12) 的形状; 分离变量

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx$$

并积分之

$$\ln y = -2 \ln \cos \frac{x}{2} + C.$$

取成指数, 由此即确定出了  $y$ ,

$$y = \frac{e^C}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2e^C}{1 + \cos x}.$$

再设  $C = 2e^C$ , 通解就变成这个形状

$$y = \frac{C}{1 + \cos x}.$$

**359. 问题** 我们来研究一些从不同知识范畴中出来的问题, 它们直接导出可分离变量的微分方程.

1) 试求法线长 (到与  $x$  轴的交点)  $n$  保持一常量  $r$  的曲线.

回想  $n$  的表达式 [第 230 目, (4)], 以微分方程的形式写下未知函数  $y(x$  的函数) 所应满足的条件

$$|y\sqrt{1+y'^2}| = r \quad \text{或} \quad y^2(1+y'^2) = r^2.$$



由此

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} \quad \text{或} \quad \frac{y dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \pm dx.$$

积分之:

$$-\sqrt{r^2 - y^2} = \pm(x + C) \quad \text{或} \quad (x + C)^2 + y^2 = r^2.$$

果然不出所料, 我们得出了半径为  $r$ , 圆心在  $x$  轴上的圆周族.

2) 试求 (到与  $x$  轴的交点的) 切线长  $t$  保持一常量  $a$  的曲线.

由于第 230 目 (4), 这问题的微分方程的形状有如

$$\left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right| = a.$$

命  $y' = \frac{dy}{dx}$ , 很容易的就把它变为这样:

$$\left| y \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2} \right| = a,$$

或是

$$dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

积分之:

$$x + C = \pm \left[ a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right];$$

我们得出了曳物线族 [参看第 331 目, 11)].

3) **冷却定律** 设温度为  $\theta$  °C 的物体逐渐冷却, 周围环境温度为 0 °C. 牛顿曾建立了一个定律, 根据这个定律, 冷却的速度与其温度  $\theta$  成比例, 就是说

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta,$$

其中  $k$  是个正的常数. 试确定物体温度减退的规律.

我们有

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k dt,$$

积分之, 从而便得出

$$\ln \theta = -kt + \ln C^{\text{①}}.$$

显而易见,

$$\theta = Ce^{-kt}$$

在此处设  $t = 0$ , 便看出  $C$  不是别的, 正是初始温度  $\theta_0$ . 替换之, 便得出最后的公式

$$\theta = \theta_0 e^{-kt},$$

只要是初始一瞬间的温度 ( $\theta_0$ ) 知道了, 这公式便确定出了任何一瞬间的物体温度.

<sup>①</sup>预见到要取作指数, 为了方便起见, 我们便直接将常数取成  $\ln C$  的形式.



系数  $k$  依赖于物体与环境的性质; 它是由实验的办法来确定的.

4) **断路与通路的瞬时电流** 如果一固定的电压  $V$  作用于一电路, 那么用  $R$  表电路的电阻, 用  $I$  表电流强度, 根据欧姆定律就有  $V = RI$ . 而当电压  $V$  改变时 (在固定电压的电流断开或连通的一瞬间也是这样), 多数情形下会发生自感现象, 它使得有额外的电动势呈现, 与电流强度改变速度  $\frac{dI}{dt}$  成比例而具相反的符号. 因此, 这个自感电动势的大小可以表成:

$$-L \frac{dI}{dt},$$

其中  $L$  为“自感系数” ( $L > 0$ ).

倘使有自感, 那么当电流断开时, 它的电流强度并不立即下降到零, 而当连通时, 亦不立即达到它正常的大小. 我们来分析地研究这些现象.

此时欧姆定律采取以下形式:

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI \quad \text{或} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V}{L}. \quad (13)$$

(a) 设强度为  $I_0$  的常电流于瞬时  $t = 0$  被断开了. 因为此时  $V = 0$ , 所以我们有

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

即 (与 3) 类似)

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

只在自感电动势的单纯作用之下, 电路中所通过的电流称为**断路的瞬时电流**. 随着  $t$  的增加, 它的强度很快就趋近于 0, 并且经过一个很短的时间就变得觉察不出了.

(6) 如果电路于瞬时  $t = 0$  连通, 并且其中常电压  $V$  开始作用, 则从方程 (13) 中重新分离变量, 即得

$$\begin{aligned} \frac{-R dI}{V - RI} &= -\frac{R}{L} dt, \ln(V - RI) = -\frac{R}{L} t + \ln C, \\ V - RI &= C e^{-\frac{R}{L} t}. \end{aligned}$$

常数  $C$  由初始条件  $t = 0$  时  $I = 0$  来确定, 易见,  $C = V$ , 所以最后

$$I = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

我们看出, 与对应于欧姆定律的电流  $\frac{V}{R}$  同时, 在相反方向还流过电流

$$\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

这就是**通路的瞬时电流**; 它的强度也随着  $t$  的增加而很快地减小.

5) **化学反应方程** 我们来研究交互作用着的物质  $A, B, \dots$  变化为物质  $M, N, \dots$  所做成的化学过程. 为了要计算参与反应的物质的数量, 一般皆将其表成克分子或摩尔. 某项物质若其所称得的量表成克数时等于其分子量, 则称此量为该物质的一个摩尔. 任意物质的一摩尔中永远包含同样数量的分子, 与物质无关.



倘若假定, 在交互作用中, 一物质的每一个分子对另一物质的一个分子, 那么一物质的每个摩尔就对另一物质的一个摩尔. 从反应开始起, 到时间  $t$  的终了之后, 每一交互作用的物质各以同样的  $x$  摩尔的量参与了反应.  $x$  对于时间的增加速度, 即导数  $\frac{dx}{dt}$ , 称为化学反应速度.

设有两个物质  $A$  及  $B$  参与过程, 以  $a$  及  $b$  (此时比如说设  $b > a$ ) 表它们原来的量 (摩尔). 经过一段时间  $t$ , 物质  $A$  的量为  $a - x$  而物质  $B$  的量为  $b - x$ . 很自然的, 假定在时间  $t$  的化学反应速度是与反应着的质量的乘积 (亦即还未经转化的反应物的量的乘积) 成比例. 这便导出了如下的微分方程

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \quad \text{或} \quad \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kdt.$$

积分之, 便得

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{a - x}{b - x} = -kt + C.$$

因为当  $t = 0$  时我们应有  $x = 0$ , 所以  $C = \frac{1}{b - a} \ln \frac{a}{b}$ . 代入  $C$  的这个值:

$$\ln \frac{(a - x)b}{(b - x)a} = -k(b - a)t,$$

此后不难求得

$$x = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - ae^{-k(b-a)t}}.$$

当  $t$  增加时, 所示之表达式趋近于 0; 经过有限的一段时间后, 它就变得如此之小, 以至  $x$  与  $a$  已没有什么区别了, 即反应实际上完成了.

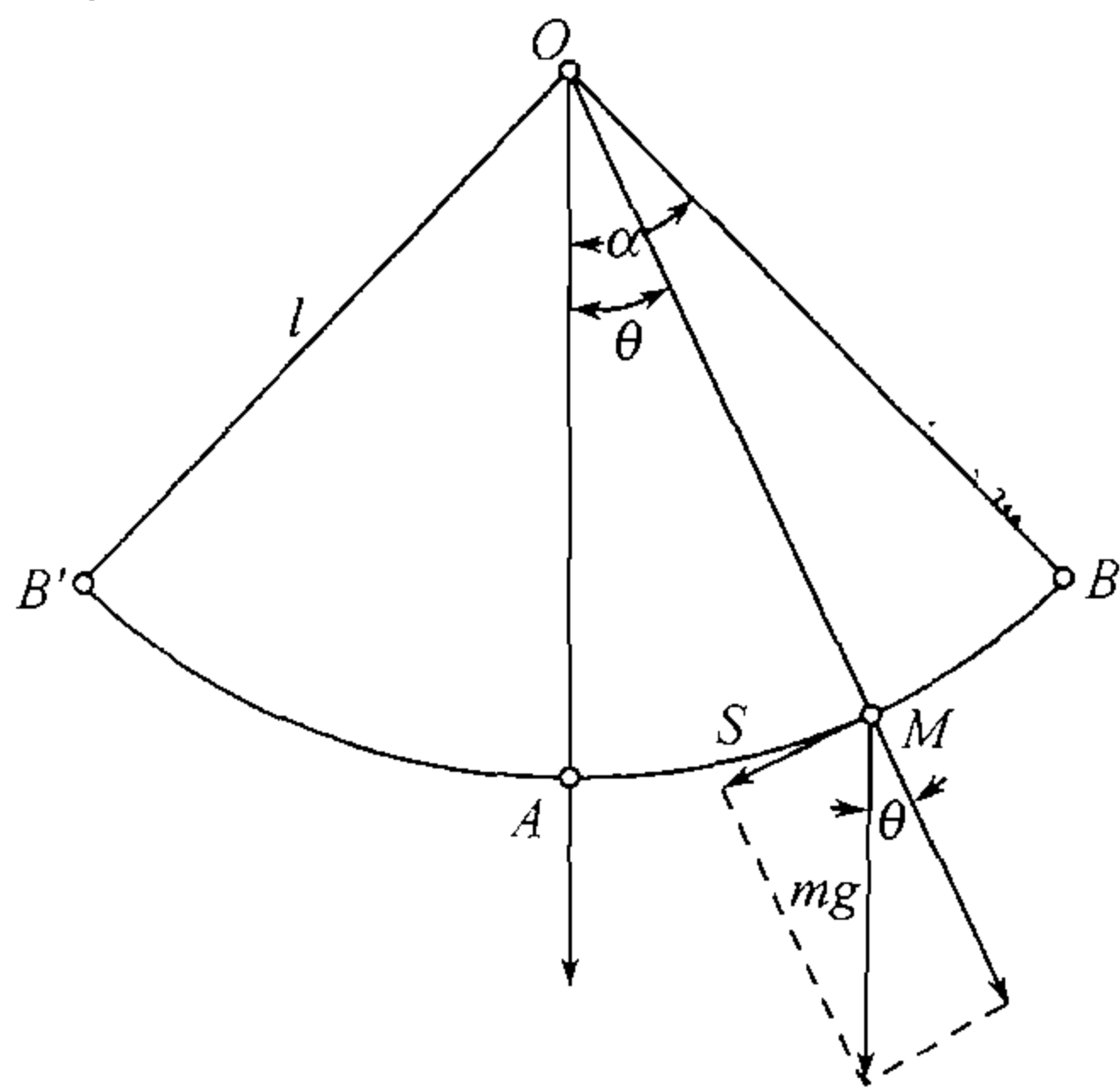


图 51

6) 数学摆 设将一质量为  $m$  的质点悬挂在一无伸缩性长为  $l$  的线上或枢轴上 (其重量可以忽略不计), 使之可沿一圆弧运动 (图 51). 此体系称为数学摆. 将摆从平衡位置  $OA$  引至位置  $OB$ , ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ) 然后使其自由, 不给予任何初速度.

摆运动到对称位置  $OB'$ , 然后又返回到位置  $OB$ , 如此往复运动. 问题是在于要确定摆的振动的性质, 也就是说要阐明 (规定摆的位置的) 极角  $\theta = \angle AOM$  与 (从运动开始所经过的) 时间  $t$  之间的依赖关系. 为了确定起见, 考虑点  $M$  沿弧  $\widehat{AB}$  的运动, 计算从点  $A$  走过的路程  $s = \widehat{AM} = l\theta$ , 而时间  $t$  是摆从平衡位置通过的时刻.

将作用在点上的重力  $F = mg$ , 如图所示, 加以分解, 即见其切线方向分力  $F_s = -mg \cdot \sin \theta$ ,<sup>①</sup> 而法

线方向分力就被线或枢轴的反作用力抵消了. 若用  $v$  表示点  $M$  的速度, 则它在所考虑位置的动能为  $\frac{1}{2}mv^2$ , 且当  $M$  到达  $B$  时变为 0. 另一方面, 在路程  $MB$  上的力  $F_s$  所产生的功  $A$  的大小, 我们有表达式 [第 352 目, (9a)]

$$A = - \int_s^S mg \cdot \sin \theta ds$$

<sup>①</sup>力指向运动的相反方向.



(这里  $S = \widehat{AB}$ ) 或者, 换成变量  $\theta$ ,

$$A = -mgl \int_{\theta}^{\alpha} \sin \theta d\theta = -mgl(\cos \theta - \cos \alpha).$$

于是根据活力定律 [第 352 目] 便有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos \theta - \cos \alpha), v = \sqrt{gl} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}.$$

因为  $v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$ . 为了确定  $\theta$  与  $t$  之间的依赖关系得到微分方程

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}$$

或

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}},$$

至此变量已经分离开了.

将左侧从 0 到  $t$  积分, 而右侧从 0 到  $\theta$  积分, 最后我们便导出所要找的依赖关系:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}. \quad (14)$$

然而这一回的求积却得不出有限形状来: 右侧的积分归结到第一类椭圆积分.

把 (14) 改写为如下形式:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

令  $\sin \frac{\alpha}{2} = k (0 < k < 1)$ , 按如下公式引入新的积分变量:

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \cdot \sin \varphi, \quad \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cdot \cos \varphi d\varphi; \quad (15)$$

同时使  $\theta$  从 0 变到  $\alpha$  相应于  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 于是

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F(\varphi, k). \quad (16)$$

因为按照公式 (15) 的第一式, 容易用  $\theta$  表示  $\varphi$ , 则  $t$  对于  $\theta$  的依赖关系可以认为是已建立了.

反之, 想要以  $t$  表示  $\theta$ , 我们需要把椭圆积分

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

反演. 这个等式确定  $u$  作为在区间  $(-\infty, +\infty)$  内  $\varphi$  的单调增加的连续 (甚至可微) 函数, 同时它本身也从  $-\infty$  变到  $+\infty$ . 在这种情况下 [83], 变量  $\varphi$  原来是  $u$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内的单值函数; 雅可比 (Jacobi) 把这个函数表示为  $\text{am } u$ <sup>①</sup>. 现在从 (16) 式显然

$$\varphi = \text{am} \sqrt{\frac{g}{l}} t, \text{ 也就是 } \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \text{am} \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

<sup>①</sup> am——amplitudo(振幅)的前两个字母.



函数  $\sin \operatorname{am} u$  (“幅角正弦”或“椭圆正弦”)通常简单地记为  $\operatorname{sn} u$  <sup>①</sup>. 于是, 最后,  $\theta$  对  $t$  的依赖关系被表示为等式

$$\left[ \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t. \right]$$

最后我们来确定摆由位置  $OB'$  到位置  $OB$  的一个振幅所用时间  $T$ . 它是从  $OA$  到  $OB$  所需时间的两倍大. 设在 (14) 中  $\theta = \alpha$  或在 (15) 中  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  <sup>②</sup>, (加倍之后) 我们得到由第一类椭圆积分表示的  $T$ :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \mathbf{K}(k).$$

注意, 振动周期  $T$  事实上与摆最初的偏离角  $\alpha$  有关, 因为  $k$  依赖于  $\alpha$ . 当角  $\alpha$  很小时, 将系数  $k$  替换成零, 便得出简洁的近似公式

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

这就是初等物理学课程中所通常引用者.

**360. 关于微分方程的构成的附注** 我们姑且局限于形如 (8) 的一阶方程, 而谈这一类方程的构成问题. 因此读者可将我们的附注与在第 348 目中关于最简单的方程  $dQ = q(x)dx$  所讲的对照起来看.

照例, 当构成方程时, 必须考察在事物的研究中所出现的一些无穷小元素, 亦即所涉及的那些量的无穷小增量. 固然, 在上目问题中我们显然并没有这样, 而只是利用了已经作好了的斜率表达式以及作好了的那些(在无穷小元素的研究中出现的)量的变化速度表达式.

当建立无穷小元素之间的依赖关系时, 应尽可能地利用简化了的假定与近似替换, 实质上就是在于删弃高阶无穷小. 特别言之, 所研究的量的全部无穷小增量都宜于用它们的微分来替换; 读者都知道, 这归根结底也就是删弃高阶无穷小. 所有这些指示的真正意义, 在例子中 (参看前目) 得到了最好的说明.

此处我们还想来说明一个重要的情形, 即在所有这些简化与删弃的结果中所得出的形如 (8) 的微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

原来并非是近似的, 而完全是准确的<sup>③</sup>.

总之, 假定以微分  $dx$  与  $dy$  替换增量  $\Delta x$  与  $\Delta y$  并且——在必要时——删弃较  $\Delta x$  高阶的无穷小的项, 我们便得出了方程 (8). 可是如果我们没有做这个替换, 那么就没有  $dx$  与  $dy$  而是  $\Delta x$  与  $\Delta y$  了. 除此而外, 我们恢复所有删弃掉的高阶无穷小, 并且移至右侧, 以  $\alpha$  表示它们的和; 显而易见,  $\alpha$  也是高阶无穷小. 这样, 严格地来讨论, 我们所得出的就不是等式 (8), 而是这样一个等式:

$$P(x, y)\Delta x + Q(x, y)\Delta y = \alpha,$$

<sup>①</sup>函数  $\operatorname{sn} u$ , 看作是复变量函数时, 是所谓的椭圆函数中最简单的一个 (是阿贝尔和雅可比引入的).

<sup>②</sup>若积分 (14) 的上限取为  $\alpha$ , 则积分变成了“反常积分” [参看后面的 479 目], 因为在这个上限处, 被积函数变为  $\infty$ . 当应用积分 (16) 时, 这个困难消失了.

<sup>③</sup>这和第 348 目末尾关于等式  $dQ = q(x)dx$  所述的相类似.



这是完全精确的. 现在用  $\Delta x$  除其两侧,

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x},$$

并令  $\Delta x \rightarrow 0$  取极限. 因为这时  $\frac{\alpha}{\Delta x} \rightarrow 0$ , 所以在极限中我们得到等式

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad \text{或} \quad P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

这和等式 (8) 是一样的. 因此等式 (8) 也就是精确的了.

虽然我们在构成方程的通常方法中, 表面上并不采取极限过程, 但是当我们删弃高阶无穷小并以微分替换增量时, 我们所作的正是极限过程.

读者要注意, 我们决不是说删弃高阶无穷小总可得出精确的结果. 仅仅在这种情形下, 即若这个删弃是贯彻始终的, 并且结果得出形如 (8) 的, 对于微分是线性的并同阶的方程, 才能保证它的精确性.[再和第 348 目加以比较!]

**361. 问题** 1) 气压公式. 问题是要确定海拔高度  $h$ (米) 与大气压力  $p$ (克/米<sup>2</sup>) 之间的关系.

设想在海平面上有一块 1 平方米的平面, 我们来研究它所承受的空气棱柱. 此柱在高度  $h$  处的截面的压力  $p$  取决于气柱在此截面上的那一部分的重量. 高度  $h$  增加一个无穷小量  $dh$ , 就使压力有一减少量  $-dp$ , 这由平面  $(h)$  与  $(h + dh)$  之间的空气层的重量来测量 (图 52).

$$-dp = sdh,$$

其中  $s$  为压力  $p$  下一立方米空气的重量 (克). 不难从波义耳-马略特定律引出, 量  $s$  恰与压力  $p$  成正比:  $s = kp$ , 所以最后

$$dp = -kpdh \quad \text{或} \quad \frac{dp}{p} = -kdh,$$

$$pV = nRT, \\ \Rightarrow s = kp$$

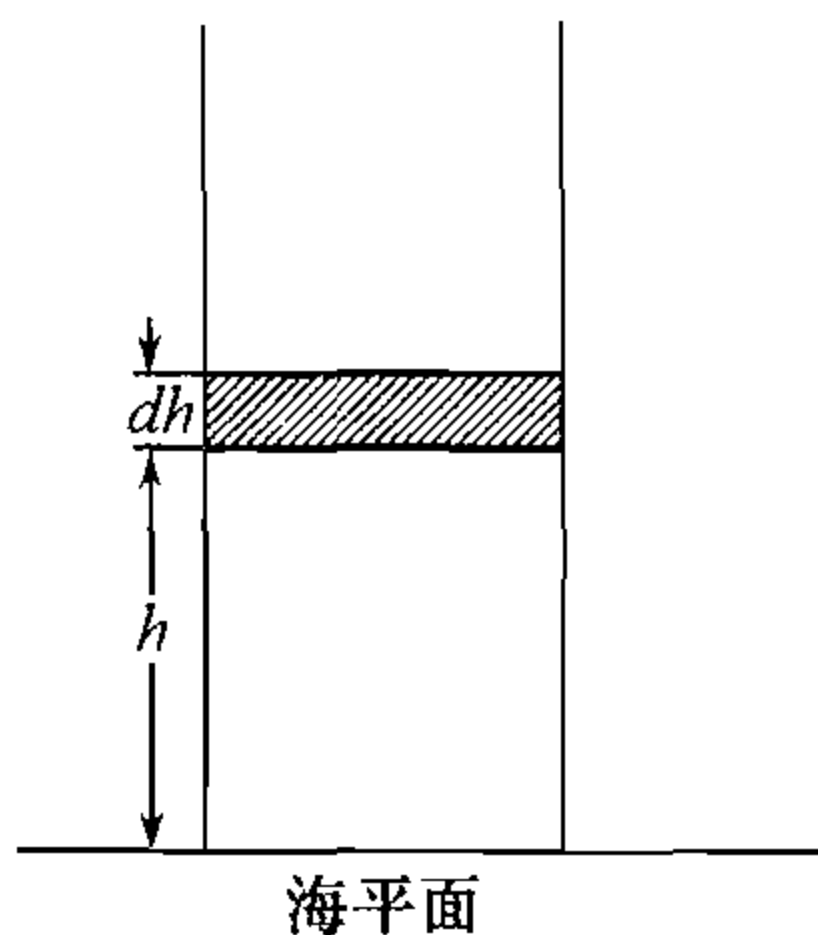


图 52

这已经是我们所熟悉的形式方程了 [参看第 359 目问题 3) 与 4)(a)]. 由此

$$p = p_0 e^{-kh}.$$

若对于  $h$  来解这个方程, 那么我们就得到公式

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

可由大气压力  $p$  来断定海拔高度  $h$ .

照物理学中所确定的, 常数  $\frac{1}{k}$  等于 (取整值)  $8000 \times (1 + 0.004t)$ , 其中  $t$  为大气平均温度. 如果变成以 10 为底的对数 (乘或除以模  $M = 0.43$ ) 并用气压度数的商  $\frac{b_0}{b}$  来代替压力的商  $\frac{p_0}{p}$ , 于是便得出最后的公式

$$h = 18400(1 + 0.004t) \lg_{10} \frac{b_0}{b}.$$

这个公式也可用以断定: 任意二点, 若对应的气压表度数皆为  $b_0$  与  $b$ , 则其高度  $h$  相等.



2) 缆与皮带的摩擦 让我们来想象, 一根缆 (皮带等等) 通过一个固定不移的圆柱状的鼓形轮, 缆与柱面沿着某一条弧  $AB$  相接触 (图 53,a), 与中心角  $\omega$  (“抱角”) 相对应. 设在缆的  $A$  端加一力  $S_0$ , 而在  $B$  端加一力  $S_1$ .

如果在缆与鼓形轮之间有摩擦, 则力  $S_0$  可以支持住另一端的甚至比它自己还大的力. 当有摩擦时, 这个力  $S_0$  可以支持住的最大力  $S_1$  是怎样的呢?

为了解决这个问题, 我们先来研究滑动刚刚开始时, 这时沿着缆的  $AB$  部分的张力  $S$  是如何分布的. 这个张力不是一个常量. 这从在点  $A$  与  $B$  的张力分别等于  $S_0$  与  $S_1$ , 就已经可以明白看出了.

在  $AB$  弧上选取任意一点  $M$ , 其位置由角  $\theta = \angle AOM$  确定, 我们来判断作用在对应于中心角  $d\theta$  的缆的元素  $\widehat{MM'}$  上的力是怎样的. 首先, 在点  $M$  作用的张力是  $S(\theta)$ , 而在点  $M'$  作用的张力是  $S + dS$  (图 53,b). 这两个力的方向是沿着鼓形轮圆周的切线. 为了要确定在所研究的元素上的摩擦力, 须得计算法线上的力  $dN$ , 此力将这个元素压向鼓形轮的表面. 它是由两个张力的沿径分量所组成的, 于是

$$dN = S \sin \frac{d\theta}{2} + (S + dS) \sin \frac{d\theta}{2}.$$

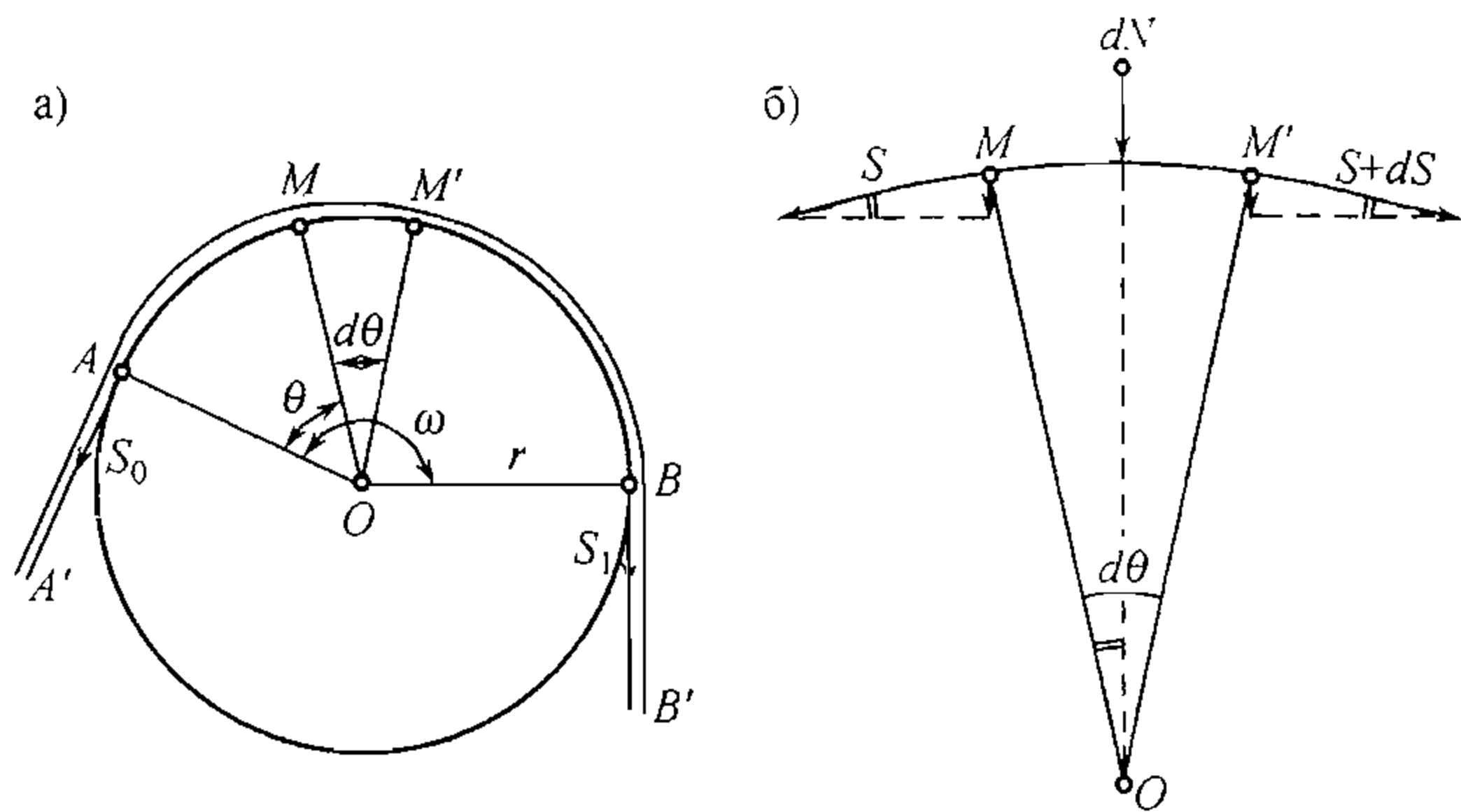


图 53

此处可以将  $dS \sin \frac{d\theta}{2}$  作为高阶无穷小而弃去, 并将  $\sin \frac{d\theta}{2}$  换成与之相抵的无穷小  $\frac{d\theta}{2}$  (也就等于弃去高阶无穷小). 最后

$$dN = S d\theta.$$

因为摩擦力与这个法线力成正比, 所以用  $\mu$  表示比例因数 (摩擦系数), 使得

$$dR = \mu dN = \mu S d\theta.$$

摩擦抗阻所发生的运动, 所以力  $dR$  和在点  $M$  的张力  $S$  应该与在点  $M'$  的张力  $S + dS$  均衡, 因此



$$dS = \mu S d\theta.$$

我们又得到了熟悉的形式的微分方程. 它的解可以立即写出 (考虑到初始条件当  $\theta = 0$  时  $S = S_0$ )

$$S = S_0 e^{\mu\theta}.$$

最后, 设此处  $\theta = \omega$ , 便得

$$S_1 = S_0 e^{\mu\omega}.$$

这个重要的公式是欧拉导出的.

3) 泊松 (S.D.Poisson) 公式 我们来确定单位质量 (1 克) 的理想气体在绝热过程中 (就是说在气体与周围环境间完全没有热的交换情形下) 体积  $V$  与压力  $p$  的关系.

气体的状况除掉量  $V$  与  $p$  而外, 还由它的 (绝对) 温度  $T$  决定. 不过这些量并非是彼此无关的; 它们由熟知的克拉珀龙公式

$$pV = RT (R = \text{常量}) \quad (17)$$

联系着.

我们来确定, 为了要将气体从状况  $(p, V, T)$  变到无限接近的状况  $(p + dp, V + dV, T + dT)$ , 所需消耗的能  $dU$  (以热的单位计) 的数量如何.

转变的过程可以想象是由两个阶段组成的. 在第一个阶段, 气体的体积  $V$  胀大  $dV$ , 而在第二个阶段, 气体的温度  $T$ ——在固定的体积之下——改变  $dT$ .

因要计算气体膨胀的元素功. 为了简单起见我们假定所研究的气体质量是在一个圆筒里, 一面为一活塞 [参看第 354 目 2)]. 从气体方面作用到活塞上的力是  $pQ$ , 其中  $Q$  是活塞面积. 倘使当气体膨胀时, 活塞移动了距离  $ds$ , 那么气体所作的功就等于  $pQds$ , 或  $pdV$  (因为  $Qds = dV$ ). 这样就表出了功——用普通的功的单位, 比如说, 用克米 (如果  $p$  是给成克/平方米,  $V$  是给成立方米). 想要确定消耗在这功上的热, 须将所得表达式乘上所谓 “热功当量”  $A = \frac{1}{427}$  卡/克米, 便得到  $ApdV$ .

温度变化  $dT$  需热  $c_V dT$  卡, 此处  $c_V$  为在固定体积下的气体热容量. 加在一起, 便得

$$dU = c_V dT + ApdV. \quad (18)$$

由此不难消去  $dT$ . 事实上, 将公式 (17) 微分而有

$$pdV + Vdp = RdT, \quad (19)$$

由此

$$dT = \frac{1}{R}(pdV + Vdp),$$

将此表达式代入公式 (18), 就得到

$$dU = \frac{c_V}{R}Vdp + \frac{c_V + AR}{R}pdV.$$



可以证明,  $c_V + AR$  恰恰就是在固定压力下的气体热容量  $c_p$ <sup>①</sup>, 于是最后

$$dU = \frac{c_V}{R} V dp + \frac{c_p}{R} p dV.$$

现在我们回到开头所作的假定上来, 过程是绝热进行的; 于是  $dU = 0$ . 这样一来我们便得到联系  $p$  与  $V$  的微分方程

$$c_V V dp + c_p p dV = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dp}{p} + k \frac{dV}{V} = 0 \quad \left( \text{其中 } k = \frac{c_p}{c_V} > 1 \right).$$

积分之, 即得

$$\ln p + k \ln V = 0 \quad \text{或} \quad p V^k = C$$

此即泊松公式.

---

<sup>①</sup>如果从 (16) 中定出

$$p dV = R dT - V dp$$

并代入 (15), 则得

$$dU = (c_V + AR) dT - AV dp.$$

设其中  $p$  为常量, 即  $dp = 0$  便得出等式

$$dU = (c_V + AR) dT,$$

这就证明了  $c_V + AR$  即是  $c_p$ .



# 第十一章 常数项无穷级数

## §1. 引言

362. 基本概念 设给定某一无穷序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

从这些数所作的符号

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

叫做无穷级数，而 (1) 中各数叫做级数的项. 利用累加记号  $\Sigma$ , 常把 (2) 写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2a}$$

这里指标  $n$  通过所有由 1 到  $\infty$  的值<sup>①</sup>.

依次把级数的各项加起来, 作 (无穷多个) 和:

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots \tag{3}$$

这些和就叫做级数的部分和(或段). 以后我们将时常把这个部分和的序列  $\{A_n\}$  跟级数 (2) 相参照: 因为 (2) 这个符号正表示上述序列的结果.

如果级数 (2) 的部分和  $A_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时具有有限或无穷 (但有确定的正号或负号的) 极限  $A$ :

$$A = \lim A_n,$$

<sup>①</sup>但是, 级数的项的下标, 不从 1 开始, 而从 0 或任何一个大于 1 的自然数开始, 有时是更方便的.



那么这个极限就叫做级数的和并写

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

这就给了符号 (2) 或 (2a) 以数值的意义. 如果级数具有有限和, 就叫它是收敛的, 相反的情况 (即是, 如果和等于  $\pm\infty$ , 或根本没有和), 就叫它是发散的.

这样, 级数 (2) 收敛的问题, 按照定义, 就与序列 (3) 的有限极限存在的问题相同. 相反地, 无论事先取什么样的序列  $x = x_n (n = 1, 2, \cdots)$ , 这个序列的有限极限存在的问题都可以化成级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \quad (4)$$

收敛的问题, 序列  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$  的顺次的每个值恰恰就是级数 (4) 的部分和. 而且级数的和就与序列的极限一致.

换句话说, 研究无穷级数及其和不过是研究序列及其极限的一种新的形式. 但是, 读者在以后的叙述中可以看到, 无论在确定极限本身存在的时候, 或者在计算这极限的时候, 这种形式都显示着无法估价的优越性. 这种情况就使无穷级数成为数学分析及其应用中最重要研究工具.

**363. 例题** 1) 无穷级数的最简单的例子是读者熟知的几何级数:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

这个几何级数的部分和是 (如果  $q \neq 1$ )

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

如果级数的公比  $q$ , 其绝对值小于 1, 那么 [如我们已经知道的, 25, 7)]  $s_n$  具有有限极限

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

也就是所说级数收敛, 而  $s$  是它的和.

当  $|q| \geq 1$  时, 这个级数就是发散级数的例子. 如果  $q \geq 1$ , 级数的和就是无穷 (有确定的正号或负号); 在其他情形下, 和根本不存在. 我们指出, 特别地, 当  $a = 1$  及  $q = -1$  时, 就得到一个有趣的级数:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) \cdots \textcircled{1}$$

这个级数的部分和轮流地一会儿等于 1, 一会儿等于 0.

2) 展开成无穷小数

$$C_0 \cdot c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdots$$

①如果级数的某一项是负数:  $a = -b$  (其中  $b > 0$ ), 那么可不必写作  $\cdots + (-b) + \cdots$ , 而写作  $\cdots - b + \cdots$ . 我们强调, 这儿级数的项仍然是  $-b$ , 而不是  $b$ .



的实数  $a[9]$ , 显然是下列级数的和:

$$a = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

3) 按照 (4) 的样式作成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$$

显然是发散的, 因为  $\ln(n+1) \rightarrow \infty$ .

4) 在同样的想法下, 构造如下级数 (其中  $\alpha$  是任意不同于  $-1, -2, -3, \dots$  的数):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1} \right] = \frac{1}{\alpha+1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \right] = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}, \end{aligned}$$

并且, 一般地, 对任意整数  $p \geq 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1) \cdots (\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1) \cdots (\alpha+p)}.$$

5) 可类似地讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \right),$$

其中  $x$  是不同于  $\pm 1$  的任意固定数, 因其第  $n$  个部分和等于

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}},$$

当  $|x| < 1$  时级数收敛于和  $\frac{x}{1-x}$ , 而当  $|x| > 1$  时, 级数收敛于和  $\frac{1}{1-x}$ .

6) 容易确定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的发散性. 实际上, 因为这个级数的项是递减的, 所以它的第  $n$  和

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

但这个第  $n$  和随着  $n$  的无限增大而趋于无穷.

7) 最后, 我们给出一个值得一提的序列的例子:

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$



关于这个序列, 在第 37 目中我们已证明过它趋于数  $e$ . 这就等于断定:  $e$  是下面无穷级数的和:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

回忆一下第 37 目中数  $e$  的近似计算, 从这个例子, 读者可以看出继续引进愈来愈不紧要的校正数的好处, 这种好处就在于这些校正数是把用部分和的形式表示出的  $e$  的近似值来逐步地加以改进.

**364. 基本定理** 如果在级数 (2) 中弃去前面的  $m$  个项, 就得到级数:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad (5)$$

即所谓级数 (2) 第  $m$  项后的余式.

1° 如果级数 (2) 收敛, 则它的任何一个余式 (5) 也收敛; 反之, 从余式 (5) 的收敛性可推出原来的级数 (2) 的收敛性.

固定  $m$ , 并用  $A'_k$  表示级数 (5) 的第  $k$  个和:

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

于是, 显然

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \quad (6)$$

如果级数 (2) 收敛, 于是  $A_n \rightarrow A$ , 那么 —— 当  $k$  无限增大时 —— 就存在一个有限极限

$$A' = A - A_m \quad (7)$$

而对于和  $A'_k$  来说, 这就表示级数 (5) 的收敛性.

反之, 如果已知级数 (5) 收敛, 于是  $A'_k \rightarrow A'$ , 那么在等式 (6) 中令  $k = n - m$  (当  $n > m$  时), 改写等式 (6) 成为:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

由此就可以看出, 当  $n$  无限增大时, 部分和  $A_n$  具有极限

$$A = A_m + A', \quad (8)$$

即是, 级数 (2) 收敛.

换个说法: 弃去级数前面的有限个项或在级数前面加进若干新的项, 并不影响级数的性质 (在级数的收敛性或发散性的意义上的性质).

不用  $A'$  而用符号  $\alpha_m$  表示级数 (5) 的和 (如果级数 (5) 收敛的话), 新符号的下标指出在什么项以后取余式. 于是公式 (8) 与公式 (7) 可改写成下面的形式:

$$A = A_m + \alpha_m, \alpha_m = A - A_m. \quad (9)$$



如果把  $m$  增大到无穷, 则  $A_m \rightarrow A$ , 而  $\alpha_m \rightarrow 0$ . 所以:

2° 如果级数 (2) 收敛, 则它的第  $m$  项后的余式的和  $\alpha_m$  随着  $m$  的增大而趋于 0.

我们提出收敛级数的如下的一些简单性质:

3° 如果以同一因数  $c$  去乘收敛级数 (2) 的各项, 则它的收敛性并不受到破坏 (而仅仅在和上乘以  $c$ ).

实际上, 级数

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和数  $\overline{A}_n$  显然等于

$$\overline{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

并且具有极限  $cA$ .

4° 两个收敛级数

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

与

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

可以逐项相加 (或相减), 于是级数

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

也收敛, 而它的和相应地等于  $A \pm B$ .

如果  $A_n, B_n$  与  $C_n$  分别表示上述级数的部分和, 那么, 显然,

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

取极限, 得到

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

这就证明了我们的论断.

5° 收敛级数的通项  $a_n$  趋于 0.

这也完全可用初等方法来证明: 既然  $A_n$  ( $A_{n-1}$  也与  $A_n$  一样) 具有有限极限  $A$ , 所以

$$a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow 0.$$

上述断言中包含着我们时常要利用的级数收敛性的必要条件. 当违反这一条件时, 级数显然是发散的. 但这是很重要的, 就是应该强调这个条件本身并不是级数收



敛性的充分条件. 换句话说, 即使在这一条件满足时, 级数也可能发散. 上面 [363, 3) 与 6)] 考察过的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

就可作为这种情形的例子; 读者在以后还可发现这种情形的许多别的例子.

## §2. 正项级数的收敛性

**365. 正项级数收敛的条件** 关于确定每项都是非负的级数收敛 (或发散) 的问题, 可极简单地得到解决; 为简短起见, 我们把这种级数简单地叫做正项级数.

设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

是正项级数, 即  $a_n \geq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$ . 于是, 显然,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

即是, 序列  $A_n$  是递增的. 回忆单调整序变量的极限的定理 [34], 我们就直接得到在正项级数理论中的下面的基本定理:

正项级数 (A) 恒有和; 如果级数的部分和上有界, 这个和是有限的 (因而级数是收敛的); 在相反情形下, 这个和就是无穷的 (因而级数是发散的).

正项级数收敛 (或发散) 的所有的判别法, 归根到底, 都是根据着这条简单的定理的. 但是, 只在很少的情形下才能直接应用这条定理去判断级数的性质. 下面就是这种应用的例子.

### 1) 考虑调和级数<sup>①</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

显然有下列不等式:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

如果在弃去前两项后, 把调和级数其余的项逐次按每组  $2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}, \cdots$  个项分成若干组:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_2, \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}, \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3}, \cdots, \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}, \cdots$$

<sup>①</sup>这个级数从第二项开始的每一项, 是相邻两项的调和中项. [数  $c$  叫做数  $a$  与  $b$  的调和中项, 如果  $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  的话.]



那么, 这些和中的每一个和都大于  $\frac{1}{2}$ ; 在 (1) 中轮流令  $n = 2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$  就容易断定这件事实的成立. 我们用  $H_n$  表示调和级数的第  $n$  部分和, 于是, 显然,

$$H_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

我们看出, 部分和不可能上有界, 故级数有无穷和.

我们在这里单提到一点, 即当  $n$  增大时,  $H_n$  增加得很慢. 例如, 欧拉曾经计算过

$$H_{1000} = 7.48 \dots, H_{1000000} = 14.39 \dots, \text{等等}.$$

以后我们有机会来更精确地叙述和  $H_n$  增加的情况 [367, 10)].

2) 现在考虑一个更普遍的级数:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots, \quad s > 1$$

其中  $s$  是一个任意实数; 例题 1) 的级数正好就是这个级数的一个特殊情形 (当  $s = 1$  时). 因与例题 1) 中的级数相似的缘故, 这个级数也叫做调和级数.

因为当  $s < 1$  时, 所考虑级数的各项大于例题 1) 中级数的相应项, 所以, 在这一假定下, 所考虑级数的部分和就更加不可能上有界, 于是级数发散.

现在研究  $s > 1$  的情形; 为方便起见令  $s = 1 + \sigma$ , 其中  $\sigma > 0$ .

与 (1) 类似, 这次有

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}. \quad (2)$$

像上面一样, 逐次分所有的项成若干组:

$$\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_2; \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{2^2}; \underbrace{\frac{1}{9^s} + \dots + \frac{1}{16^s}}_{2^3}; \dots; \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}}; \dots$$

利用 (2) 容易证明: 这些和分别小于几何级数的下列各相当项

$$\frac{1}{2^\sigma}, \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^2}, \frac{1}{8^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^3}, \dots, \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, \dots$$

在这样的情形下, 显然无论怎样取所考虑级数的部分和, 这个部分和总小于常数

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

因而, 级数收敛.

[依  $s$  的值而决定的这个级数的和, 代表一个著名的黎曼函数  $\zeta(s)$ . 这个函数在数论中起着重要的作用.]



**366. 级数的比较定理** 正项级数的收敛性或发散性, 常常用把它跟另一个已知为收敛或发散的级数相比较的方法来确定. 下面的简单定理就是这种比较法的基础.

**定理 1** 设给定二正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (\text{B})$$

如果, 至少从某处开始 (比方说, 对于  $n > N$ ), 不等式  $a_n \leq b_n$  成立, 那么, 从级数 (B) 的收敛性就可推得级数 (A) 的收敛性; 或者 —— 同样地 —— 从级数 (A) 的发散性可推知级数 (B) 的发散性.

**证明** 根据弃去级数的前面有限多个项并不影响级数的性质这一事实 [364, 1°], 不失普遍性, 我们可以认为, 对于所有的值  $n = 1, 2, \cdots$  都有  $a_n \leq b_n$ . 分别用  $A_n$  与  $B_n$  表示级数 (A) 与 (B) 的部分和, 即有:

$$A_n \leq B_n.$$

设级数 (B) 收敛; 于是, 按照基本定理 [365], 和  $B_n$  有界:

$$B_n \leq L \quad (L = \text{常数}; n = 1, 2, \cdots).$$

由于上面的不等式, 更加有

$$A_n \leq L,$$

再依同样的基本定理, 就引出级数 (A) 的收敛性.

由定理 1 推出的下述定理, 有时在实用上更为方便:

**定理 2** 如果极限<sup>①</sup>

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty)$$

存在, 则从级数 (B) 的收敛性, 当  $K < +\infty$  时, 可推得级数 (A) 的收敛性, 而从级数 (B) 的发散性, 当  $K > 0$  时, 可推得级数 (A) 的发散性. [由此可见, 当  $0 < K < +\infty$  时二级数同时收敛或同时发散.]

<sup>①</sup>在此我们假定  $b_n \neq 0$ .



**证明** 设级数 (B) 收敛且  $K < +\infty$ . 任取一数  $\varepsilon > 0$ , 依极限定义, 对于充分大的  $n$ , 有

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \text{ 由此 } a_n < (K + \varepsilon)b_n.$$

由于 364, 3°, 以常数  $K + \varepsilon$  乘级数 (B) 的各项所得到的级数  $\sum (K + \varepsilon)b_n$  与级数 (B) 同时收敛. 由此, 按照上面的定理, 推得级数 (A) 的收敛性.

如果级数 (B) 发散且  $K > 0$ , 则在此情形下, 相反的比值  $\frac{b_n}{a_n}$  具有有限极限; 级数 (A) 一定发散, 因为, 如果级数 (A) 收敛, 则依上面的证明, 级数 (B) 也收敛, 这与假定相矛盾.

最后, 再讲一个比较定理, 这也是定理 1 的推论.

**定理 3** 如果, 至少从某处开始 (比方说, 对于  $n > N$ ), 不等式①

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (3)$$

成立, 那么, 从级数 (B) 的收敛性可推知级数 (A) 的收敛性; 或者 —— 同样地 —— 从级数 (A) 的发散性可推知级数 (B) 的发散性.

**证明** 与定理 1 的证明一样, 不失普遍性, 可以认为, 不等式 (3) 对于所有的值  $n = 1, 2, \dots$  都是正确的. 在这情形下, 有

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

逐项把这些不等式相乘起来, 得到:

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \quad \text{或} \quad a_n \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

设级数 (B) 收敛; 则以常数  $\frac{a_1}{b_1}$  乘级数 (B) 各项所得的级数  $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$  与级数 (B) 同时收敛. 于是, 按照定理 1, 级数 (A) 也收敛. 证毕.

现在讲一些直接应用比较定理来确定级数的收敛性或发散性的例子.

**367. 例题** 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0)$ .

如果  $a \leq 1$ , 则违反 364, 5° 收敛性的必要条件, 因而级数发散. 当  $a > 1$  时, 级数的每一项小于收敛级数  $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$  的各相当项, 故级数收敛 (定理 1).

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  收敛, 因为

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

①在此当然假定  $a_n$  与  $b_n$  都异于零.



(定理 1).

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{x}{3^n} (0 < x < 3\pi).$$

因为

$$2^n \cdot \sin \frac{x}{3^n} < x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

且级数  $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$  收敛, 所以给定级数也收敛 (定理 1).

4) 重新考虑调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  并按照定理 2, 把这个级数跟已知其为发散的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  [363,3] 相比较. 因为 [77,5)(a)]

$$\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以由此就推得调和级数的发散性.

或者按另一种方式: 把有限增量公式应用到区间  $[n, n+1]$  上的函数  $\ln x$  上去, 得到

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} \quad (0 < \theta < 1).$$

在这情形下, 调和级数的各项都大于这里的各相当项, 因而更加是发散的 (定理 1).

5) 类似地, 当我们把级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$  (当  $\sigma > 0$  时) 跟已知为收敛的级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right]$  相比较时, 可以重新确定前者的收敛性. 把有限增量公式应用到区间  $[n-1, n]$  上的函数  $\frac{1}{x^{\sigma}}$  上去, 得到:

$$\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{\sigma}{(n-\theta)^{1+\sigma}} \quad (0 < \theta < 1).$$

这样, 当  $n \geq 2$  时,

$$\frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right],$$

由此, 按照定理 1, 就推得所考虑的级数的收敛性.

6) 为要用类似的方法得到新的结果, 考虑级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  (这个级数的各项比调和级数的各相当项更小).

把这个级数跟已知其为发散的级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\ln \ln(n+1) - \ln \ln n]$$

相比较. 应用有限增量公式到区间  $[n, n+1]$  上的函数  $\ln \ln x$  上去, 得到:

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \frac{1}{(n+\theta) \ln(n+\theta)} \quad (0 < \theta < 1),$$

由此, 按照定理 1, 我们断定, 各相当项更大的给定级数更是发散的.

7) 跟调和级数 4) 及 5) 相比较使我们能够确定许多级数的性质. 依定理 1,

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ 发散: } \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1};$$



$$(б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \text{ 收敛: } \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}};$$

$$(в) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (p > 0) \text{ 发散: } (\ln n)^p < n \text{ (对于充分大的 } n);$$

$$(г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ 收敛: } \frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2} \text{ (对于 } n > 3);$$

$$(д) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \text{ 收敛: } \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2} \text{ (对于充分大的 } n);$$

$$(е) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \text{ 收敛: } \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2} \text{ (对于充分大的 } n);$$

$$(ж) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \text{ 发散: } \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n} \text{ (对于充分大的 } n).$$

8) 按照定理 2,

$$(a) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s} \quad (b > 0) \text{ 当 } s > 1 \text{ 时收敛, 当 } s \leq 1 \text{ 时发散:}$$

$$\frac{1}{(a+bn)^s} : \frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{b^s};$$

$$(б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \text{ 发散: } \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \rightarrow 1;$$

(в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} \quad (0 < x < \pi)$  发散:  $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \rightarrow x$ ; 类似地, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x > 0)$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a \neq 1)$  也发散;

$$(г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) \text{ 收敛: } 1 - \cos \frac{x}{n} : \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{x^2}{2}. \quad (x \neq 0)$$

9) 下面是这种类型的更复杂的例子:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$$

用  $x_n$  表示这个级数的通项对  $\frac{1}{n}$  的比值:

$$\ln x_n = \ln n + n \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right).$$

利用在 125.5) 中讲到的  $\ln(1+x)$  的展开式, 可以写出

$$\ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + a_n \cdot \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

其中  $a_n \rightarrow 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时. 于是

$$\ln x_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n} + a_n \cdot \frac{\ln^2 n}{n} \rightarrow 0,$$

因而  $x_n \rightarrow 1$ . 即所给的级数发散.

$$(б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right).$$

这儿也利用  $\ln(1+x)$  的展开式, 有

$$\ln \frac{2n+1}{2n-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2n-1}\right)^3 + \beta_n \cdot \left(\frac{2}{2n-1}\right)^3,$$

其中  $\beta_n \rightarrow 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 于是

$$n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2n+3}{3(2n-1)} \cdot \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 + \beta_n \cdot \frac{8n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$



这样, 所考虑的级数的通项对  $\frac{1}{(2n-1)^2}$  的比值具有极限  $\frac{1}{3}$ , 所以我们所考虑的级数收敛.

10) 最后, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

我们已知 [133,4)]

$$\ln(1+x) < x \quad (x \neq 0, -1 < x < +\infty).$$

利用这不等式, 可以写出:

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n},$$

同时

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1}.$$

于是

$$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

由此可见, 给定级数的各项都是正的且小于收敛级数  $\sum \frac{1}{n^2}$  [365,2)] 的各相当项, 因而, 给定级数收敛.

如果用  $C$  表示这个级数的和, 则部分和

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = H_n - \ln(n+1) \rightarrow C$$

( $H_n$  总是表示调和级数的部分和). 这儿可以用  $\ln n$  代替  $\ln(n+1)$ , 因为它们的差等于  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ , 这个差趋于 0. 最后: 用  $\gamma_n$  表示某一无穷小, 对于  $H_n$  我们有一个著名的公式

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n. \quad (4)$$

这个公式表明, 当  $n$  无限增大时, 调和级数的部分和  $H_n$  像  $\ln n$  一样增大.

公式 (4) 中固定的常数  $C$  叫做欧拉常数. 这个常数的数值 (它是从另外的办法计算出来的) 是这样的:

$$C = 0.577\ 215\ 664\ 90 \cdots \quad (5)$$

### 368. 柯西判别法与达朗贝尔判别法 把给定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (A)$$

跟不同的已知为收敛或发散的标准级数相比较, 能够引出其他的可以说是更有组织性的形式<sup>56)</sup>.

<sup>56)</sup>如同前一目, 级数 (A) 假定是正项级数.



为了比较, 我们一方面选取收敛的几何级数

$$\Sigma q^n = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots (0 < q < 1),$$

他方面选取发散的级数

$$\Sigma 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

作为级数 (B).

按定理 1 的方式把所考虑的级数跟上述二级数相比较, 可得到下列的判别法:

柯西判别法 对级数 (A) 作序列

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

如果当  $n$  充分大时, 不等式

$$C_n \leq q$$

成立, 其中  $q$  是小于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始,

$$C_n \geq 1,$$

则级数发散.

实际上, 不等式  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$  或  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  分别与不等式  $a_n \leq q^n$  或  $a_n \geq 1$  相当; 剩下的事只是引用定理 1 了<sup>①</sup>.

可是, 这个判别法常常采用另一种形式——极限的形式:

假定序列  $C_n$  具有极限 (有限的或无穷的):

$$\lim C_n = C.$$

那么当  $C < 1$  时级数收敛, 而当  $C > 1$  时级数发散.

如果  $C < 1$ , 则取小于  $1 - C$  的正数  $\varepsilon$ , 于是  $C + \varepsilon < 1$ . 依极限定义, 对于  $n > N$ , 有:

$$C - \varepsilon < C_n < C + \varepsilon.$$

数  $C + \varepsilon$  与上述公式中  $q$  的作用相同, 故级数收敛.

如果  $C > 1$  (并且是有限的), 则取  $\varepsilon = C - 1$ , 于是  $C - \varepsilon = 1$ , 这次对于充分大的  $n$ , 即有  $C_n > 1$ , 故级数发散. 当  $C = +\infty$  时也有类似的结果.

在  $C = 1$  的情形下, 这个判别法就不能够判断出级数是否收敛.

序列  $C_n$  叫做柯西序列.

<sup>①</sup>级数的发散性, 当然, 可以简单地引用违反 364,5° 中收敛性的必要条件这一事实来确定.



如果依定理 3 把级数 (A) 跟上述的作出的标准级数相比较, 就可得到下面的判别法:

**达朗贝尔 (d'Alembert) 判别法** 考虑对于级数 (A) 的序列

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

如果当  $n$  充分大时, 不等式

$$D_n \leq q$$

成立, 其中  $q$  是小于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始,

$$D_n \geq 1,$$

则级数发散<sup>①</sup>.

在这情形下, 也是利用下列的极限形式更为方便:

假定序列  $D_n$  具有极限 (有限的或无穷的):

$$\lim D_n = D.$$

那么当  $D < 1$  时级数收敛, 而当  $D > 1$  时级数发散.

证明与柯西判别法证明的情形一样.

如果  $D = 1$ , 这个判别法就不能决定级数是否收敛.

序列  $D_n$  叫做达朗贝尔序列.

在例题 77,4) 中我们看到, 从序列  $D_n$  的极限的存在性就可以推出序列  $C_n$  的极限的存在性, 并且两个极限相等. 由此可见, 在所有用达朗贝尔判别法对级数的收敛性问题能够得到答案的情形下, 利用柯西判别法也可以得到答案. 在下面的例子中我们可以看出, 相反的断言是不正确的; 因而柯西判别法强于达朗贝尔判别法. 但在实用上, 利用达朗贝尔判别法通常是更简单些.

**369. 拉阿伯判别法** 在上述那些判别法不适用的情形下, 必须采用更复杂的判别法, 这些判别法是根据把所考察的级数跟另一些标准级数 (这些标准级数比起调和级数来可以说是收敛的“较慢”或发散的“较慢”<sup>②</sup>) 相比较而得到的.

在这儿我们就来研究拉阿伯 (Raabe) 判别法; 这个判别法就是利用定理 3 把给定级数 (A) 跟收敛的调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \quad (s > 1) \quad (H_s)$$

<sup>①</sup>这儿, 级数的发散性也可从违反收敛性的必要条件直接推出: 事实上, 如果  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  或  $a_{n+1} \geq a_n$ , 则  $a_n$  不能趋于 0.

<sup>②</sup>参看 375,7).



及发散的调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (\text{H})$$

相比较而得到的. 在此必须研究拉阿伯序列

$$\mathcal{R}_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

**拉阿伯判别法** 如果当  $n$  充分大时, 不等式

$$\mathcal{R}_n \geq r$$

成立, 其中  $r$  是大于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始

$$\mathcal{R}_n \leq 1,$$

则级数发散.

这样, 设  $n$  充分大时, 即有

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > r > 1 \quad \text{或} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$$

现在取介于 1 与  $r$  之间的任意数  $s: r > s > 1$ . 因为根据已知的极限关系[77, 5)]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s,$$

那么对于充分大的  $n$  有

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \quad \text{或} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n},$$

因而

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s.$$

这个等式可改写为如下形式:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{1}{\frac{(n+1)^s}{n^s}}.$$

等式右端是级数  $(H_s)$  的相继的两项; 应用定理 3, 便可断定级数 (A) 收敛.

如果从某处开始

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1,$$



则由此立即得到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}};$$

把定理 3 应用到级数 (A) 与级数 (H) 上, 就可断定级数 (A) 的发散性.

拉阿伯判别法也多半是应用极限的形式:

假定序列  $\mathcal{R}_n$  具有极限 (有限的或无穷的):

$$\lim \mathcal{R}_n = \mathcal{R}.$$

那么当  $\mathcal{R} > 1$  时级数收敛, 而当  $\mathcal{R} < 1$  时级数发散.

比较达朗贝尔判别法与拉阿伯判别法, 我们看出, 后者要比前者强得多. 如果极限  $\mathcal{D} = \lim \mathcal{D}_n$  存在且异于 1, 则对于  $\mathcal{R}_n = n \cdot \left( \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1 \right)$ , 当  $\mathcal{D} < 1$  时有等于  $+\infty$  的极限  $\mathcal{R}$ , 而当  $\mathcal{D} > 1$  时有等于  $-\infty$  的极限  $\mathcal{R}$ . 由此可见, 如果达朗贝尔判别法对于给定级数的收敛性问题能够得到答案, 则拉阿伯判别法就更加能够得到这答案: 而且, 所有这些情形都被  $\mathcal{R}$  所可能取的值中的两个值, 即  $\mathcal{R} = \pm\infty$ , 包括净尽. 这样一来, 对于收敛性问题也可以得到答案的所有其余的  $\mathcal{R}$  值 (除  $\mathcal{R} = 1$  外), 就对应于达朗贝尔判别法由于  $\mathcal{D} = 1$  而不能给出确定答案的那些情形.

但是, 就在这儿当  $\mathcal{R} = 1$  时我们仍然不能回答级数是否收敛的问题; 在类似的情形下 (这是非常少的), 就必须采用更为细致而复杂的判别法 [参看下面第 371 目的例题].

现在讲一些例子.

**370. 例题** 1) 把柯西判别法应用到下列各级数:

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, C_n = \frac{1}{\ln n}, C = 0$ : 级数收敛;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} \right)^n (x > 0), C_n = \frac{x}{n}, C = 0$ : 级数收敛;

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{a_n} \right)^n (x > 0; a_n \text{ 是具有极限 } a \text{ 的正数序列}), C_n = \frac{x}{a_n}$ . 如果  $a = 0$ , 则  $C = +\infty$ ,

因而级数发散; 如果  $a = +\infty$ , 则  $C = 0$ , 因而级数收敛; 最后, 当  $0 < a < +\infty$  时有  $C = \frac{x}{a}$ , 级数的收敛与否就决定于  $x$ : 当  $x < a$  时级数收敛, 当  $x > a$  时级数发散. 当  $x = a$  时, 在一般情形下不能判断出级数是否收敛, 级数的收敛与否要由  $a_n$  接近于  $a$  的特性来决定.

2) 把达朗贝尔判别法应用到下列各级数:

(a)  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (x > 0), \mathcal{D}_n = \frac{x}{n+1}, \mathcal{D} = 0$ : 级数收敛;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} (x > 0), \mathcal{D}_n = x \frac{n+1}{n}, \mathcal{D} = x$ : 级数当  $x < 1$  时收敛而当  $x \geq 1$  时发散 (当  $x = 1$  时可直接验证这一点).

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} (x > 0, s > 0), \mathcal{D}_n = x \left( \frac{n}{n+1} \right)^s, \mathcal{D} = x$ : 级数当  $x < 1$  时收敛而当  $x > 1$  时发散; 当  $x = 1$  时结果是调和级数, 这个调和级数的收敛与否, 我们已经知道, 是由  $s$  来决定的.



(r)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n (x > 0)$ ,  $\mathcal{D}_n = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ ,  $\mathcal{D} = \frac{x}{e}$ : 当  $x < e$  时级数收敛, 当  $x > e$  时发

散; 当  $x = e$  时在极限形式下的达朗贝尔判别法不适用, 但因序列  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  递增地接近  $e$ , 于是  $\mathcal{D}_n > 1$ , 所以原来的判别形式仍然使我们能够断定级数的发散性.

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!} (x > 0)$ ,  $\mathcal{D}_n = x \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\mathcal{D} = x \cdot e$ : 当  $x < \frac{1}{e}$  时级数收敛, 而当  $x > \frac{1}{e}$  时发散; 当  $x = \frac{1}{e}$  时, 因为  $\mathcal{D}_n$  从下面接近  $\mathcal{D} = 1$ , 这次如再利用达朗贝尔判别法, 就什么结果也得不到. 我们将在下面 5)(r) 中讨论这种情形.

### 3) 取级数

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \cdots,$$

其中  $a$  与  $b$  是两个相异的正数. 这儿  $\mathcal{D}_{2n-1} = a$ ,  $\mathcal{D}_{2n} = b$ , 因而达朗贝尔判别法 (在原有的形式下) 只在数  $a, b$  都小于 1 或都大于 1 时, 才使我们能够作出级数收敛或发散的论断.

同时

$$\mathcal{C}_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}} \text{ 及 } \mathcal{C}_{2n} = \sqrt[2n]{a^n b^{n-1}},$$

于是  $\mathcal{C} = \sqrt{ab}$ ; 依柯西判别法, 当  $ab < 1$  时级数收敛而当  $ab > 1$  时级数发散 (显然, 当  $ab = 1$  时也这样).

4) 考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$ , 其中  $x > 0$  而  $\tau(n)$  表示自然数  $n$  的除数的个数. 由于函数  $\tau(n)$  变化的反复无常, 这儿应用达朗贝尔判别法是不可能的. 但柯西判别法完全可以应用:

$$x \leq \mathcal{C}_n = \sqrt[n]{\tau(n)} \cdot x \leq \sqrt[n]{n} \cdot x, \text{ 于是 } \mathcal{C} = x,$$

当  $x < 1$  时级数收敛, 而当  $x > 1$  时级数发散 (显然, 当  $x = 1$  时也这样).

5) 现在讲几个应用拉阿伯判别法的例子.

$$(a) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

对于这个级数, 达朗贝尔判别法是不适用的, 因为  $\mathcal{D}_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \rightarrow 1$  (并且  $\mathcal{D}_n < 1$ ). 作拉阿伯序列:

$$\mathcal{R}_n = n \left( \frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1 \right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}.$$

因为  $\mathcal{R} = \lim \mathcal{R}_n = \frac{3}{2} > 1$ , 所以级数收敛.

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} \quad (x > 0).$$

因为  $\mathcal{D}_n = \frac{n+1}{x+n+1}$ ,  $\mathcal{D} = 1$ , 所以这儿达朗贝尔判别法不适用. 其次, 有  $\mathcal{R}_n = \frac{n}{n+1}x$ , 于是  $\mathcal{R} = x$ . 这样, 当  $x < 1$  时级数发散, 而当  $x > 1$  时收敛; 当  $x = 1$  时得到一个发散的调和级数 (缺第一项).

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(x+a_1)(2x+a_2) \cdots (nx+a_n)},$$

其中  $x > 0$ . 而  $a_n$  是具有极限  $a$  的正的序列.



我们有:  $\mathcal{D}_n = \frac{(n+1)x}{(n+1)x + a_{n+1}}$ ,  $\mathcal{D} = 1$ . 其次,  $\mathcal{R}_n = \frac{na_{n+1}}{(n+1)x}$ ,  $\mathcal{R} = \frac{a}{x}$ . 所以, 当  $x < a$  时级数收敛, 当  $x > a$  时级数发散. 当  $x = a$  时在一般情形下不能断定级数是否收敛; 这时级数收敛的情形由  $a_n$  接近  $a$  的情形来决定.

(r) 最后, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

对于这级数

$$\mathcal{R}_n = n \left[ \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right];$$

为要计算这个序列的极限, 我们以下列更普遍的表达式来代替它:

$$\frac{1}{x} \left[ \frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1 \right] \quad (x \rightarrow 0),$$

这样, 我们就可以把微分学的方法应用这个表达式上去了. 根据洛必达法则, 取导数的比值:

$$\begin{aligned} & - \frac{e}{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \ln(1+x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}-1} \right\} \\ & = \frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}. \end{aligned}$$

令

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2),$$

立即得出所求极限等于  $\frac{1}{2}$ . 级数发散.

**371. 库默尔判别法** 现在我们讲一个非常普遍的判别法, 库默尔 (E.E.Kummer) 判别法, 我们可把它看成对所求得的具体的判别法的普遍公式.

**库默尔判别法** 设

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

是使级数

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

发散<sup>①</sup>的一个正数序列. 对所考虑的级数 (A) 作序列

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

若 (对于  $n > N$ ) 不等式

$$\mathcal{K}_n \geq \delta$$

<sup>①</sup>读者注意: 级数  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{c_n}$  发散这一假定仅仅在推导发散性判别法时用到; 在推导收敛性判别法时不需要这个假定.



成立, 其中  $\delta$  是一个正常数, 则级数收敛. 如果 (对于  $n > N$ )

$$K_n \leq 0,$$

则级数发散.

证明 设

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0$$

(这个不等式, 显然可以认为对所有的  $n$  都是成立的).

以  $a_{n+1}$  乘这个不等式的两端, 得到

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta \cdot a_{n+1}, \quad (6)$$

也就是

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0 \quad \text{或} \quad c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}.$$

由此推知, 变量  $c_n a_n$  单调递减, 因而趋于一个有限极限 (因为这变数以 0 下有界).

于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

收敛, 因为这个级数的前  $n$  项的和

$$c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$$

具有有限极限. 但在这情形下由不等式 (6), 根据定理 1, 可得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$  收敛, 而给定级数 (A) 与这个级数同时收敛.

如果对于  $n > N$ ,

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0,$$

则有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

因已假定级数  $\sum \frac{1}{c_n}$  发散, 故按照定理 3, 级数 (A) 发散. 这就是所要证明的.

在极限的形式下, 库默尔判别法是这样的:

假定序列  $K_n$  具有极限 (有限的或无穷的):

$$\lim K_n = K.$$

那么当  $K > 0$  时级数收敛, 而当  $K < 0$  时级数发散.

现在我们要说明: 如何利用库默尔判别法去求得一些作为它的特别情形的重要的收敛性判别法.



a) 例如, 令  $c_n = 1$ ; 使级数  $\sum \frac{1}{c_n}$  发散的条件被保持着. 我们有:

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{D_n} - 1.$$

如果序列  $D_n$  趋于极限  $D$ , 则  $K_n$  趋于极限  $K = \frac{1}{D} - 1$  ( $K = +\infty$  如果  $D = 0$ ;  $K = -1$ , 如果  $D = +\infty$ ). 当  $D > 1$  时, 显然,  $K < 0$ , 于是按照库默尔判别法, 级数发散; 如果  $D < 1$ , 则  $K > 0$ , 于是级数收敛. 可见, 我们重新得到了达朗贝尔判别法.

б) 其次, 令  $c_n = n$ , 并且看出级数  $\sum \frac{1}{c_n}$  发散. 表达式  $K_n$  有下列的形状:

$$K_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = R_n - 1.$$

如果序列  $R_n$  趋于极限  $R$ , 则  $K_n$  趋于极限  $K = R - 1$  ( $K = \pm\infty$ , 如果  $R = \pm\infty$ ). 当  $R > 1$  时有  $K > 0$ , 于是按照库默尔判别法, 级数收敛; 如果  $R < 1$ , 则  $K < 0$ , 于是级数发散. 我们又得到了拉阿伯判别法.

в) 最后, 取  $c_n = n \ln n$  ( $n \geq 2$ ), 这样的选取是可以允许的, 因为级数  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  发散 [367, 6)]. 在这情形下有:

$$K_n = n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1),$$

这也可以表示成下列的形状:

$$K_n = \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = B_n - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

其中  $B_n$  表示新的序列:

$$B_n = \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \ln n \cdot (R_n - 1).$$

由此就得到新的.

**贝特朗 (Bertrand) 判别法** 假定序列  $B_n$  具有极限 (有限的或无穷的):

$$B = \lim B_n.$$

那么当  $B > 1$  时级数收敛, 而当  $B < 1$  时级数发散.

事实上, 因为  $\lim \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \ln e = 1$ , 所以库默尔序列  $K_n$  趋于极限  $K = B - 1$  ( $K = \pm\infty$ , 如果  $B = \pm\infty$ ). 余下的事只是引用库默尔判别法了.

比较拉阿伯判别法与贝特朗判别法, 就可以重作前面我们关于达朗贝尔判别法与拉阿伯判别法所作的同样的说明 [369]. 这条愈来愈加敏锐的 (但也就更复杂些!) 判别法的链条, 是可以无限地继续下去的.

**372. 高斯判别法** 从达朗贝尔、拉阿伯与贝特朗判别法, 可以很容易地得到下面的高斯 (Gauss) 判别法.

**高斯判别法** 设对于级数 (A), 比值  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  可以表示成下面的形状:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$



其中  $\lambda$  与  $\mu$  是常数, 而  $\theta_n$  是有界的量:  $|\theta_n| \leq L$ ; 那么, 级数收敛, 如果  $\lambda > 1$  或者如果  $\lambda = 1, \mu > 1$ ; 级数发散, 如果  $\lambda < 1$  或者如果  $\lambda = 1, \mu \leq 1$ .

$\lambda \geq 1$  的情形可化成达朗贝尔判别法, 因为  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$ . 现设  $\lambda = 1$ ; 在这情形下

$$\mathcal{R}_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}, \mathcal{R} = \mu,$$

而  $\mu \geq 1$  的情形就被拉阿伯判别法包括净尽. 最后, 如果  $\mu = 1$ , 则有

$$B_n = \ln n (\mathcal{R}_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n.$$

因为已知  $\frac{\ln n}{n}$  当  $n \rightarrow \infty$  时趋于零, 而  $\theta_n$  有界, 故  $B = \lim B_n = 0$ , 于是按照贝特朗判别法, 级数发散.

例子

1) 考虑所谓超几何级数(高斯)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma \cdot (\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n \\ &= 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 \\ &\quad + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2)} x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

暂时假定  $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$ . 这儿

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} x \rightarrow x,$$

于是依达朗贝尔判别法立即可以确定当  $x < 1$  时收敛而当  $x > 1$  时发散. 如果  $x = 1$ , 则取比值

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}$$

并利用展开式:

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1 + \frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1 + \frac{\beta}{n}} \cdot \frac{1}{n^2},$$

把所取比值表示成下面的形状:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

其中  $\theta_n$  为有界. 应用高斯判别法, 我们看出, 级数  $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$  当  $\gamma - \alpha - \beta > 0$  时收敛而当  $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$  时发散. 以后我们要回来讲在对  $\alpha, \beta, \gamma$  与  $x$  更普遍的假定下的超几何级数.

2) 另一个可应用高斯判别法的例子是级数

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots \quad (p > 0),$$



这个级数当  $p > 2$  时收敛, 当  $p \leq 2$  时发散. 在这里按照泰勒公式,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left( \frac{2n}{2n-1} \right)^p = \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由此

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (\theta_n \text{ 有界}),$$

等等.

**373. 麦克劳林-柯西积分判别法** 这个判别法在形式上与所有上述的判别法有所不同. 它是建立在把级数跟积分相比较的观念上的, 并且是我们为了阐明第 367 目例题 4), 5), 6) 中级数的收敛性与发散性而利用过的那个方法的推广.

设所讲到的级数有下面的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad (7)$$

其中  $f(n)$  是当  $x = n$  时对于  $x \geq 1$  ①所确定的某一函数  $f(x)$  的值; 假定这个函数是连续的, 正的单调递减函数.

考虑  $f(x)$  的任何一个原函数  $F(x)$ ; 因为它的导数  $F'(x) = f(x) > 0$ , 所以  $F(x)$  与  $x$  同时增大, 因而, 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 一定具有有限的或无穷的极限. 在第一种情形下, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)] \quad (8)$$

收敛, 而在第二种情形下, 级数发散. 我们就把所考虑的级数跟这个级数相比较.

按照有限增量公式, 级数 (8) 的通项可表示成下面的形状:

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta) \quad (0 < \theta < 1),$$

于是由函数  $f(x)$  的单调性

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n. \quad (9)$$

在级数 (8) 收敛的情形下, 由定理 1, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$  收敛, 因为它的每一项小于级数 (8) 的相当项; 也就是说, 给定的级数 (7) 也收敛. 在级数 (8) 发散的情形下, 给定的级数 (7) 也发散, 因为它的每一项大于级数 (8) 的相当项.

这样, 我们就得到下面的积分判别法——柯西判别法(这一判别法首先由麦克劳林以几何形式发现, 但被人们遗忘了, 后来又重新被柯西发现).

①可以不用 1, 而用任何一个别的自然数  $n_0$  来作为序号  $n$  的开始值; 这时函数  $f(x)$  就必须在  $x \geq n_0$  下来考虑.



**积分判别法** 在上面所作的假定下, 级数 (7) 的收敛或发散, 决定于函数

$$F(x) = \int f(x) dx$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时是否具有有限的或无穷的<sup>极限</sup>。

现在讲一些应用这个判别法的例子 (除去 367 中所考虑过的以外):

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n} (\sigma > 0).$$

这儿  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{1+\sigma} x}$ ;  $F(x) = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x} \rightarrow 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时: 级数收敛.

$$2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

我们有  $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$ ;  $F(x) = \ln \ln \ln x \rightarrow +\infty$ : 级数发散.

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{1+\sigma}} (\sigma > 0).$$

在这情形中

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^{1+\sigma}}; F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot (\ln \ln x)^{\sigma}} \rightarrow 0:$$

级数收敛. 如此等等.

原函数  $F(x)$  也可以取定积分的形式:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时它的极限叫做“由 1 到  $+\infty$  的积分”<sup>①</sup>并这样地表示出来:

$$F(+\infty) = \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

于是, 所讲到的级数 (7) 的收敛或发散, 就要看这个积分是否具有有限值或无穷值而定.<sup>②</sup>

在这样的形式下, 积分判别法就可以有一个简单的几何解释. 如果把函数  $f(x)$  用曲线描绘出来 (图 54), 那么, 积分  $F(x)$  就表示限制在曲线下,  $x$  轴上及两个纵坐标之间的图形的面积; 积分  $F(+\infty)$ , 在某意义下, 可以看作在曲线下向右无穷延伸的整个图形的面积的表达式. 另一方面, 级数 (7) 的项  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  表示在点  $x = 1, 2, \dots, n, \dots$  处纵坐标的大小, 或者, 同样地, 表示底长为 1, 高度等于前述纵坐标的那些矩形的面积.

由此可见, 级数 (7) 的和不是别的, 而是那些外接矩形的面积的和, 也就是那些内接矩形的和只相差了级数的第一项. 这就使得上面所确立的结果完全可从直观来

<sup>①</sup>这就是所谓反常积分; 类似的积分我们将在第十三章中加以研究.

<sup>②</sup>在判别法证明的这种叙述中, 不假定函数  $f(x)$  的连续性, 仅利用定积分 (对单调函数, 积分存在 [298, III]), 便可容易地进行.



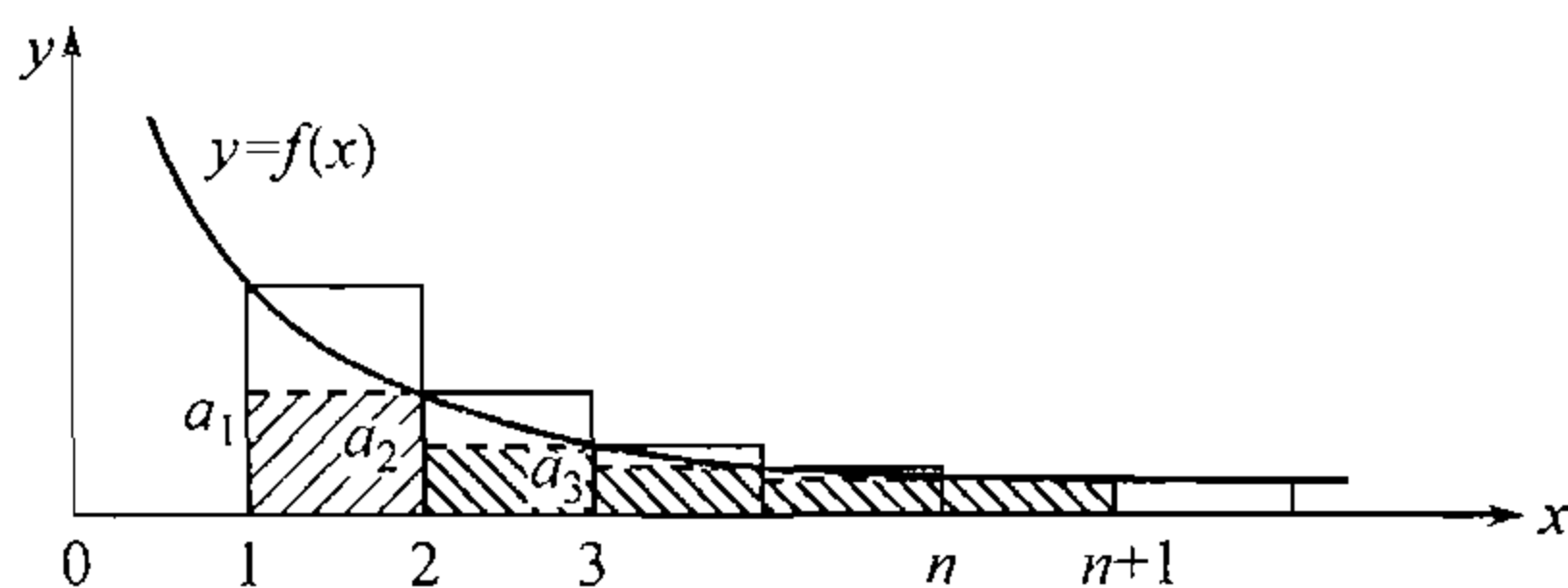


图 54

了解: 如果曲线图形的面积是有限的, 那么, 包含在这曲线图形内的梯形图形的面积就更加是有限的, 因而所讲到的级数收敛; 如果曲线图形的面积是无穷的, 那么, 包含这曲线图形的梯形图形的面积也是无穷的, 于是在这情形下, 级数发散.

现在对不等式 (9) 的更进一步的利用作一些说明:

a) 在有限极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$$

存在的情形下, 对级数 (7) 的余式可以指出一个很方便的估计. 这就是, 把不等式

$$a_k = f(k) < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$$

对  $k = n+1, \dots, n+m$  加起来, 得到:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m) - F(n) < \sum_{k=n}^{n+m+1} a_k.$$

在这里把  $m$  增大到无穷, 取极限:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq F(+\infty) - F(n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

或

$$F(+\infty) - F(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq F(+\infty) - F(n); \quad (10)$$

这就给出了所求的上下界的估计<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>因为

$$F(n+m) - F(n) = \int_n^{n+m} f(t) dt.$$

当  $m \rightarrow +\infty$  取极限时这个积分是反常积分  $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ , 因此在课文中的不等式 (10) 可以改写成这样:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(t) dt. \quad (10a)$$



例如, 对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$  ( $\sigma > 0$ ) 有

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\sigma}}, F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot x^{\sigma}}, F(+\infty) = 0$$

及

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{n^{\sigma}}. \quad (11)$$

6) 如果  $F(x)$  与  $x$  同时增大到无穷, 那么这个函数就使判断级数 (7) 部分和增加的速度成为可能. 考虑不等式

$$0 < f(k) - [F(k+1) - F(k)] < f(k) - f(k+1)$$

并且把它们由  $k=1$  到  $k=n$  加起来, 我们得到一个递增的, 但是有界的序列

$$\sum_{k=1}^n f(k) - [F(n+1) - F(1)] < f(1) - f(n+1) < f(1),$$

这个序列趋于有限极限. 对于序列

$$\sum_{k=1}^n f(k) - F(n+1)$$

这事实同样是正确的. 如果用  $C$  表示这个序列的极限, 而用  $\alpha_n$  表示无穷小 (即所述序列与它自己的极限的差), 就得到公式:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) + C + \alpha_n.$$

例如, 当  $f(x) = \frac{1}{x}$  时,  $F(x) = \ln x$ , 由此又得到第 367 目的公式 (4).

**374. 叶尔马科夫判别法** 叶尔马科夫 (Ermakov, 1845—1922, 俄罗斯数学家) 提出的独特的判别法在积分判别法的应用范围内是非常好的. 这个判别法的陈述中并不包含积分概念.

**叶尔马科夫判别法** 仍假定函数  $f(x)$  当  $x > 1$  时是连续<sup>①</sup>、正的与单调减函数<sup>②</sup>. 若对充分大的  $x$  (比如说,  $x \geq x_0$ ) 成立如下不等式:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q < 1,$$

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \geq 1,$$

则级数 (7) 收敛; 若 (对  $x \geq x_0$ )

则级数 (7) 发散.

<sup>①</sup>实际上, 连续性的要求可以省略. 参看 234 页的脚注<sup>②</sup>.

<sup>②</sup>参看 233 页的脚注.



证明 设第一个不等式成立, 对任意  $x \geq x_0$  有 (代换  $t = e^u$ )

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(e^u) e^u du \leq q \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

由此

$$\begin{aligned} (1-q) \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt &\leq q \left[ \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \right] \\ &\leq q \left[ \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt - \int_x^{e^x} f(t) dt \right] \leq q \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt, \end{aligned}$$

因为

$$e^x > x, \quad (12)$$

在后一方括号内被减项是正的. 在这种情况下

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{q}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt,$$

在不等式两端加上  $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt$ , 得到

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{1}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = L,$$

考虑到式 (12), 从而更有

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \leq L \quad (x \geq x_0).$$

因为随  $x$  的增加, 积分值增加, 则当  $x \rightarrow \infty$  时存在有限的极限

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t) dt,$$

按照 (柯西) 积分判别法, 级数 (7) 收敛.

假设现在是第二个不等式成立, 那么

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

并且若在不等式两端加上  $\int_x^{e^{x_0}} f(t) dt$ , 则

$$\int_x^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = \gamma > 0$$

[因为, 由 (12) 式,  $x_0 < e^{x_0}$ ]. 现在定义序列

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots$$

其中令  $x_n = e^{x_{n-1}}$ ; 按照已证明的

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \geq \gamma,$$



于是

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \geq n\gamma.$$

由此显然有

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t) dt = +\infty,$$

由积分判别法, 级数 (7) 发散.

前一目中的例题, 应用上面证明过的判别法, 很容易解出:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n} (\sigma > 0).$$

在本题中  $f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}$ , 且表达式

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{\ln^{1+\sigma} x}{x^\sigma} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

从而对充分大的  $x$ , 此式小于任意正分数  $q$ : 级数收敛.

$$2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

这里  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}$ , 而表达式

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \ln \ln x \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

对充分大的  $x$  此式的值超过 1: 级数发散.

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{1+\sigma}} \quad (\sigma > 0)$$

这一次  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^{1+\sigma}}$ ,

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^{1+\sigma}}{\ln^\sigma x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty): \text{级数收敛}.$$

最后我们指出, 出现在叶尔马科夫判别法中的函数  $e^x$ , 可用任意其他单调增加、有连续导数并满足如下不等式的正函数  $\varphi(x)$  代替:

$$\underline{\varphi(x) > x}, \quad (12^*)$$

这个不等式代替 (12) 式. 其证明是前述证明的重复. 于是一般形式的叶尔马科夫判别法是对应于不同函数  $\varphi(x)$  的选择而得到的一系列具体判别法的来源.

**375. 补充材料** 1) 为了描述黎曼函数

$$\zeta(1+\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

(它仅仅对  $\sigma > 0$  有定义) 当  $\sigma$  趋于零时的性态, 我们应用估计式 (11).

首先在 (11) 的第一个不等式中令  $n=0$ , 然后在第二个不等式中令  $n=1$ , 得

$$1 \leq \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) \leq 1+\sigma$$



由此有

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \cdot \zeta(1 + \sigma) = 1.$$

如果从显然的等式

$$\zeta(1 + \sigma) = 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}}$$

出发, 可以得到更精确的结果, 对任意的  $n$  应用不等式 (11):

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} - 1 \right] &< \zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma} \\ &< 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{n^{\sigma}} - 1 \right). \end{aligned}$$

令  $\sigma \rightarrow 0$  而取极限, 得

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) &\leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] \\ &\leq \varliminf_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n^{\textcircled{1}} \end{aligned}$$

最后, 由于  $n$  的任意性, 使  $n$  趋于无穷, 因为由 367 目的 (4) 式, 上式中第一个和最末一个式子同趋于欧拉常数  $C$ , 于是上极限与下极限重合, 因而普通极限存在并等于

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] = C.$$

[这个结果属于狄利克雷.]

2) 设级数  $(A)$  的项单调递减; 于是级数  $(A)$  与级数  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$  同时收敛或同时发散(柯西).

事实上, 一方面,

$$A_{2^k} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

而另一方面,

$$\begin{aligned} A_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}). \end{aligned}$$

由此即得所求结果.

例如, 级数  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$  的性质与显然是与发散的级数  $\sum_0^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} \equiv \sum_0^{\infty} 1$  的性态相同. 级数  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} (\sigma > 0)$  与级数  $\sum_0^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k(1+\sigma)}} \equiv \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^{k\sigma}}$  同时收敛. 级数  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散, 因为级数  $\sum_1^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k} \equiv \sum_1^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln 2}$  发散, 等等.

<sup>①</sup>我们暂时还不知道表达式  $\zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma}$  当  $\sigma \rightarrow 0$  时是否存在极限, 所以应用上极限与下极限 [42]. 我们可按照 77 目 5), ( $\sigma$ ) 来求表达式  $\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{n^{\sigma}} - 1 \right]$  及  $\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} - 1 \right]$  的极限.



在这个定理中, 用作比较的级数  $\sum 2^k a_{2^k}$  可以用更普遍的级数  $\sum_{k=0}^\infty m^k a_{m^k}$  来代替, 其中  $m$  是任何一个自然数.

3) 设 (A) 是任意一个收敛级数. 试把通项  $a_n$  跟  $\frac{1}{n}$  相比较, 那么关于  $a_n$  的无穷小的级, 可以得出什么样的结论呢?

首先, 显然, 如果这些无穷小一般地是可以彼此比较的 [60], 即如果下面的极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = c,$$

则必须  $c = 0$ , 于是

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

事实上, 如果不这样, 则由于调和级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$  的发散性, 给定的级数就会是发散的 [366, 定理 2], 这与原来的假设矛盾.

可是, 这种极限的存在, 一般地说, 并不是非此不可的, 这在下面级数的例子中可以看到:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

把级数跟级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$  相比较, 前者的收敛性是显而易见的; 同时, 如果  $n$  不是完全平方, 则对于这个  $n$  有  $na_n = \frac{1}{n}$ , 在相反的情形下:  $na_n = 1$ .

但是, 如果级数的项单调递减, 那么, 对于级数的收敛性, 条件 (13) 仍然是必要的. 事实上, 对任何的  $m$  与  $n > m$ :

其中  $\alpha_m$  是级数的余式. 由此

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + \cdots + a_n < \alpha_m,$$

$\forall \varepsilon, \exists N, m > N, \forall n > m, na_n < \frac{\varepsilon}{n-m} + \frac{\varepsilon}{2}, \exists n > m > N, a_n < \frac{\varepsilon}{n-m} \Rightarrow na_n < \varepsilon$

$$na_n < \frac{n}{n-m} \cdot \alpha_m.$$

设首先这样取  $m$ , 使得  $\alpha_m$  小于任给一数  $\varepsilon > 0$ ; 现在如果假定  $n$  如此的大, 使得

$$\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m},$$

则同时有  $na_n < \varepsilon$ , 这就是所要证明的.

作为结束, 我们指出, 甚至对于单调递减的项的级数, 条件 (13) 也决不是收敛性的充分条件. 这在级数  $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}$  的例子上可以看出.

4) 若级数  $\sum_1^\infty d_n$  发散, 而  $D_n$  表示级数的第  $n$  和, 则级数  $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n}$  也发散, 可是级数  $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}} (\sigma > 0)$  收敛. [阿贝尔阿贝尔 (Abel) 及迪尼 (Dini)]

我们有:

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1} + \cdots + d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1 - \frac{D_n}{D_{n+m}}.$$

不论取  $n$  如何大, 总可以选出这样的  $m$ , 使得

$$\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2}, \text{ 因而 } \frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{1}{2}.$$

对于级数  $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n}$  来说, 这违反收敛性的基本条件 [364, 5°], 故级数发散.



为了证明级数  $\sum_1^\infty \frac{D_n d_n}{D_n^{1+\sigma}}$  的收敛性, 我们采用类似于柯西所用的方法 [373].

把有限增量公式应用到由  $x = D_{n-1}$  到  $x = D_n$  的区间中的函数  $\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x^\sigma}$  上:

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} \right) = \frac{d_n}{\bar{D}_n^{1+\sigma}}, \text{ 其中 } D_{n-1} < \bar{D}_n < D_n.$$

这样, 所考虑级数的每一项各别地小于收敛级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} \right)$  的每一项, 这就证明了上述的断言.  $\sum \frac{1}{n^{1+\sigma}}$

5) 若级数  $\sum_1^\infty c_n$  收敛, 而  $\gamma_n$  表示此级数第  $n$  项以后的余式, 则级数  $\sum_1^\infty \frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$  发散, 可是级数  $\sum_1^\infty \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} (0 < \sigma < 1)$  收敛(迪尼).

证明与前面相似.

6) 下面的收敛性判别法是不久前萨波果夫 (H.A. Сапогоов) 所指出的:

若  $u_n$  是正的单调递增序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{u_{n-1}}{u_n} - 1 \right) \text{ 也一样} \right]$$

在这个序列有界的条件下收敛, 而在相反的情形下发散.

令 (当  $n = 1, 2, \dots$  时)

$$d_n = u_{n+1} - u_n, D_n = \sum_{k=1}^n d_k = u_{n+1} - u_1.$$

于是所述级数可改写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n + u_1},$$

因而它的收敛与否跟级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$$

的收敛与否一致, 也就是说, 跟级数  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  的收敛与否一致 (在级数发散的情形下, 可以引用阿贝尔-迪尼的结果, 3)). 最后的级数的收敛或发散, 由序列  $u_n$  是否有界或无界来决定.

7) 设给定两个收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n.$$

后者叫做比前者收敛较慢的级数, 如果后者的余式  $\gamma'_n$  比起前者的余式  $\gamma_n$  来说, 是低阶的无穷小:

$$\lim \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0.$$

对于每一收敛级数  $\sum_1^\infty c_n$ , 可作一个收敛较慢的级数. 例如, 只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n})^{(1)}$$

<sup>①</sup>我们取整个和  $\sum_1^\infty c_n$  作为  $\gamma_0$ .



就够了, 因为在这情形下  $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$ .

现在考虑两个发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n.$$

我们说后者比前者发散较慢, 如果后者的部分和  $D'_n$  比起前者的部分和  $D_n$  来说, 是低阶的无穷大:

$$\left[ \lim \frac{D'_n}{D_n} = 0 \right]$$

对于每一发散级数  $\sum_1^{\infty} d_n$ , 可作一个发散较慢的级数. 为此目的, 例如, 可取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n \equiv \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}),$$

这儿  $D'_n = \sqrt{D_n}$ .

类似的一些结论可以利用 4) 及 5) 中讨论过的阿贝尔阿贝尔及迪尼级数得出.

上面所建立的例子使我们得到这样的有原则性重要的断言: 任何收敛 (发散) 级数不可能作为建立跟此级数相比较的<sup>①</sup>另一级数的收敛性 (发散性) 的比较法的万能的工具.

这从

$$\frac{c_n}{c'_n} = \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \rightarrow 0$$

及

$$\frac{d_n}{d'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \rightarrow +\infty$$

可显然看出.

8) 设给定两个正数序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{与} \quad b_1, b_2, \dots, b_n.$$

不论怎样的  $n$ , 对这两个序列的前  $n$  个数成立

柯西-赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}}$$

及闵可夫斯基不等式:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

[133, (5) 与 (7)]. 这里  $k$  是任意  $> 1$  的数, 而  $k'$  是另一个  $> 1$  的数, 二者由下式联系着:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

<sup>①</sup>利用第 366 目三个定理中的任何一个定理.



在这两个不等式中令  $n \rightarrow \infty$  时取极限, 我们就得到类似的无穷级数的不等式:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}}.$$

与

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}}.$$

在此可以顺便确立这样的事实: 从这些不等式中 任何一个不等式的右端两个级数的收敛性, 可以推出左端级数的收敛性.

### §3. 任意项级数的收敛性

**376. 级数收敛的一般条件** 现在转到其各项有任意值的级数的收敛性问题. 因为根据定义, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

的收敛性可化归级数的部分和组成的序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots, A_{n+m}, \cdots \quad (1)$$

的收敛性, 自然会对这个序列应用**收敛原理** [39]. 由排列在序列中取的两个序号  $n$  与  $n'$ , 不降低一般性, 可认为  $n' > n$ . 并令  $n' = n + m$ , 其中  $m$  是任意一个自然数. 若记起

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m},$$

则相应于级数的收敛原理可套用成:

为使级数 (A) 收敛, 必须且只需对任意数  $\varepsilon > 0$  相应地有这样的数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对不论怎样的  $m = 1, 2, 3, \cdots$  成立不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon^{①}. \quad (2)$$

换句话说: 级数的充分靠后的任意个数接连的项之和应该任意小.

若假设级数收敛, 在不等式 (2) 中特别取  $m = 1$ , 便得:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{当 } n > N),$$

于是  $a_{n+1} \rightarrow 0$  或 (即是)  $a_n \rightarrow 0$ , 我们便又得到级数收敛的必要条件 [364, 5°], 这一条件远比收敛原理要求的要少: 收敛原理必须不仅是选取个别的靠后的项小. 而

①收敛原理的两个创立者 —— 布尔查诺和柯西 —— 就是把收敛原理叙述为无穷级数的收敛条件.



且是要选取任意数量的靠后的项的和也应当小! 在这个意义上, 回顾一下调和级数 [365,1)] 以及对它所建立的不等式 (1)(即 365 目中的 (1) 式——译者) 是有教益的. 虽然调和级数的通项趋于 0, 但 (本目的) 不等式 (2) 当  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  及  $m = n$  时, 对任何  $n$  都不成立, 所以调和级数发散!

然而, 应该指出, 在具体情况中实行上述的级数收敛条件的验证通常是困难的. 所以研究可借助更为简单的工具使问题得以解决的一类情形是有益处的.

**377. 绝对收敛** 在上节中, 我们看到, 对于正项级数的收敛性, 由于有许多方便的判别法, 大部分是容易确定出来的. 因此, 从把给定级数的收敛性问题化成正项级数的收敛性问题这些情形开始我们的研究, 就是很自然的事情了.

如果级数的项不全是正的, 但从某处开始成为正的, 则在弃去级数开始的足够多的项数后 [364,1°], 原来的问题就变成正项级数的研究了. 如果级数的项是负的, 或者, 至少从某处开始成为负的, 那么, 用改变所有各项的符号的方法 [364,3°], 我们就回到已经考虑过的那些情形了. 这样一来, 主要的新的情形就只是级数的项中有无穷多个是正的, 同时有无穷多个是负的这种情形了. 下面的普遍定理在这儿常常是有用的.

**定理** 设给定项的符号任意出现的级数 (A). 若由这个级数的项的绝对值所组成的级数<sup>①</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \quad (A^*)$$

收敛, 则给定级数也收敛.

**证明** 从收敛原则可立即得到所要的证明: 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|$$

表明, 如果对级数 (A\*) 来说收敛性条件成立, 则对级数 (A) 来说, 这收敛性条件更加成立.

也可以按另一种方式进行讨论. 把级数 (A) 中的正项按次序重新编号组成级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots; \quad (P)$$

同样得出 (A) 中负项的绝对值组成的级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \cdots + q_m + \cdots. \quad (Q)$$

<sup>①</sup>为简短起见, 以后我们把级数 (A\*) 叫做级数 (A) 的绝对值级数. ——译者.



无论是哪一个级数的不论多少项, 全都是包含在收敛级数  $(A^*)$  的项, 对所有的部分和  $P_k$  与  $Q_k$ , 都成立不等式

$$P_k \leq A^*, Q_m \leq A^*,$$

因而两个级数  $(P)$  与  $(Q)$  收敛 [365]; 它们的和分别用  $P$  与  $Q$  表示.

如果取级数  $(A)$  的  $n$  项, 那么其组成中比如说有  $k$  个正项和  $m$  个负项, 那么

$$A_n = P_k - Q_m.$$

这儿号码  $k$  与  $m$  与  $n$  有关. 若在级数  $(A)$  中正项与负项都是无穷集, 则当  $n \rightarrow \infty$  时同时有  $k \rightarrow \infty$  与  $m \rightarrow \infty$ .

在这个等式中取极限, 便重新得到级数  $(A)$  收敛的结论, 同时它的和等于

$$A = P - Q, \quad (3)$$

可以说, 在上述那些假定下, 给定级数的和等于由级数的所有正项组成的级数的和减去由级数所有负项的绝对值组成的级数的和所得之差. 下面我们将应用这一点.

如果级数  $(A)$  与它的绝对值级数  $(A^*)$  同时收敛, 则称级数  $(A)$  **绝对收敛**. 依据刚才证明过的定理, 对于级数  $(A)$  的绝对收敛性, 单只要级数  $(A^*)$  的收敛性就够了.

下面可以看到, 级数  $(A)$  收敛而级数  $(A^*)$  不收敛的情形是可能有的. 这时级数  $(A)$  叫做**非绝对收敛级数**.

为要确定级数  $(A)$  的绝对收敛性, 可以把上节研究过的所有收敛性判别法应用到正项级数  $(A^*)$  上去. 但对发散性判别法则必须当心些: 甚至级数  $(A^*)$  是发散的, 级数  $(A)$  也仍然可以收敛 (非绝对收敛). 仅仅柯西判别法与达朗贝尔判别法是例外, 这因为, 当它们断定级数  $(A^*)$  的发散性时, 那就是说, 级数  $(A^*)$  的通项  $|a_n|$  不趋于 0, 在这情形下,  $a_n$  也就不趋于 0, 于是级数  $(A)$  也就非发散不可了. 因此, 上述的判别法可以稍加改变后应用到任意项级数上去. 例如, 对于达朗贝尔判别法 (它多半是在实际问题中应用的), 我们作出:

**达朗贝尔判别法** 设对于序列  $D_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  存在一个确定的极限

$$D^* = \lim D_n^*,$$

则当  $D^* < 1$  时给定级数  $(A)$  绝对收敛, 而当  $D^* > 1$  时级数  $(A)$  发散.

**378. 例题** 1) 把达朗贝尔判别法应用到 370, 2) 讲过的所有级数 (a)—(д) 上, 但弃去  $x > 0$  这一要求, 我们得到:

(a) 对于所有的  $x$  值, 级数绝对收敛;

(б) 级数当  $-1 < x < 1$  时绝对收敛而当  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$  时发散 (当  $x = \pm 1$  时违反收敛性必要条件);



(B) 级数当  $-1 < x < 1$  时绝对收敛而当  $x > 1$  或  $x < -1$  时发散; 如果  $s > 1$ , 则当  $x = \pm 1$  时级数也绝对收敛, 但若  $0 < s \leq 1$ , 则当  $x = 1$  时级数显然发散, 而当  $x = -1$  时问题暂时是悬而未决的;

(Г) 级数当  $-e < x < e$  时绝对收敛而当  $x \geq e$  或  $x \leq -e$  时发散 (当  $x = \pm e$  时违反收敛性必要条件);

(Д) 级数当  $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$  时绝对收敛而当  $x \geq \frac{1}{e}$  或  $x < -\frac{1}{e}$  时发散 (当  $x = -\frac{1}{e}$  时问题暂时是悬而未决的).

$$2) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \quad (x \neq -1).$$

我们有

$$D_n^* = \frac{|x|}{|1+x^n|}, D^* = \begin{cases} |x|, & \text{如果 } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{如果 } x = 1, \\ 0, & \text{如果 } x < -1 \text{ 或 } x > 1; \end{cases}$$

所以, 对于所有  $x \neq -1$  的值, 级数绝对收敛.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \neq \pm 1).$$

这儿

$$D_n^* = \left| \frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} \right|, D^* = \begin{cases} |x|, & \text{如果 } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{如果 } x > 1 \text{ 或 } x < -1. \end{cases}$$

当  $|x| < 1$  时级数绝对收敛; 当  $|x| > 1$  时达朗贝尔判别法不适用, 但由于违反收敛性必要条件, 仍然可以断定级数的发散性.

4) 回到超越几何级数 [372]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma \cdot (\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n.$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma, x$  是任意的 (只假定参数  $\alpha, \beta, \gamma$  不为 0 及负整数).

应用达朗贝尔判别法的新形式, 我们可以确信: 当  $|x| < 1$  时这个级数绝对收敛, 而当  $|x| > 1$  时发散.

现设  $x = 1$ ; 因为比值

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L)$$

对于充分大的  $n$  是正的, 所以级数的项, 从某处开始后, 将有同样的符号. 在这情形下, 我们照旧把高斯判别法应用到这些项 (或者它们的绝对值) 上去, 这就证明: 当  $\gamma - \alpha - \beta > 0$  时, 级数收敛 (当然是绝对收敛); 而当  $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$  时, 级数发散.

最后, 设  $x = -1$ . 由刚才所说的事实显然可知, 当  $\gamma - \alpha - \beta > 0$  时给定级数  $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$  的绝对值级数收敛, 于是给定级数在这情形下绝对收敛. 当  $\gamma - \alpha - \beta < -1$  时, 从某处开始将有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1, \text{ 即 } |a_n| < |a_{n+1}|,$$

$a_n$  不趋于 0, 级数发散.



在  $x = -1$  与  $-1 \leq \gamma - \alpha - \beta \leq 0$  的情形时级数  $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$  收敛性的问题暂时是悬而未决的.

### 379. 幂级数、幂级数的收敛区间 考虑形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (4)$$

的幂级数, 这幂级数仿佛是变量  $x$  按升幂展开的一个“无穷多项式”( $a_0, a_1, a_2, \cdots$  在这儿表示常系数). 前面我们已经不止一次地跟这种幂级数发生过关系 [例如, 参看前目 1) (a)—(д)].

现在提出一个问题, 即是要说明: 幂级数的“收敛范围”(即是使级数 (4) 收敛的那些变数的值的集合  $\mathcal{X} = \{x\}$ ) 有怎样的形状. 这又是上述应用的一个重要的例子.

**引理** 若对异于 0 的值  $x = \bar{x}$  级数 (4) 收敛, 则对满足不等式  $|x| < |\bar{x}|$  的任何一个  $x$  值, 级数 (4) 绝对收敛.

从级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \cdots + a_n \bar{x}^n + \cdots$$

的收敛性推出: 级数的通项趋于 0 [364, 5°], 因而是有界的 [26, 4°]:

$$|a_n \bar{x}^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots). \quad (5)$$

现在取任何一个  $x$ , 使  $|x| < |\bar{x}|$ , 并作级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots \quad (6)$$

因为 [参看 (5)]

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n,$$

而级数 (6) 的各项都小于收敛几何级数

$$M + M \cdot \left| \frac{x}{\bar{x}} \right| + M \cdot \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^2 + \cdots + M \cdot \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n + \cdots$$

(有公比  $\left| \frac{x}{\bar{x}} \right| < 1$ ) 的相当各项, 所以, 依第 366 目定理 1, 级数 (6) 收敛. 在这情形下, 我们知道级数 (4) 绝对收敛, 这就是所要证明的.

当  $x = 0$  时, 任何级数 (4) 都显然收敛. 但除这个值外, 有对任何  $x$  的值都不收敛的幂级数. 级数  $\sum_1^{\infty} n! x^n$  就可作为这种“处处发散的”级数的例子, 这很容易利用达朗贝尔判别法来断定. 我们对这类级数没有什么兴趣.



我们假定, 对级数 (4) 一般地存在着使级数收敛而异于 0 的一些值  $x = \bar{x}$ , 并且考虑集合  $\{|\bar{x}|\}$ . 这个集合可以是上有界的, 也可以是非上有界的.

在后面一种情形中, 不管怎样取  $x$  的值, 一定可以找到这样的  $\bar{x}$ , 使得  $|x| < |\bar{x}|$ , 于是依引理, 对所取的  $x$  值级数 (4) 绝对收敛. 级数是“处处收敛的”.

现设集合  $\{|\bar{x}|\}$  上有界, 而  $R$  是它的上确界. 如果  $|x| > R$ , 则立即看出, 对这个  $x$  值级数 (4) 发散. 现在取任何一个  $x$ , 使  $|x| < R$ . 按照确界的定义, 一定可以找到这样的  $\bar{x}$ , 使得  $|x| < |\bar{x}| \leq R$ ; 而按照引理, 这又引出级数 (4) 的绝对收敛性.

所以, 在开区间  $(-R, R)$  上级数 (4) 绝对收敛; 对于  $x > R$  与  $x < -R$  级数显然发散, 只有在区间的端点  $x = \pm R$  上不能作出普遍的断言, 在那儿, 要看情况怎样, 级数可以是收敛, 也可以是发散.

我们所提出的问题已经解决了.

对于每一个形如 (4) 的幂级数, 只要它不是处处发散的, “收敛范围” $\mathcal{X}$  就是从  $-R$  到  $R$  (带端点或不带端点) 的整个区间; 这个区间也可以是无穷的. 并且, 在区间内部, 级数绝对收敛.

上述区间叫做收敛区间, 而数  $R(0 < R \leq +\infty)$  叫做级数的收敛半径. 如果回到上目例题 1)(a)—(д), 那么, 容易看出, 有

$$(a) R = +\infty; (б), (в) R = 1; (г) R = e; (д) R = \frac{1}{e}.$$

对于处处发散的级数取  $R = 0$ : 它的“收敛范围”缩减为一点  $x = 0$ .

**380. 用系数表示收敛半径** 现在我们来证明更为精密的定理, 在这个定理中不仅重新建立收敛半径的存在性, 而且根据级数 (4) 本身的系数确定收敛半径的数值.

考虑序列

$$\rho_1 = |a_1|, \rho_2 = \sqrt{|a_2|}, \dots, \rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \dots$$

用  $\rho$  表示这个序列的上极限 [它总是存在的, 42], 于是

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**柯西-阿达马定理** 级数 (4) 的收敛半径是序列  $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$  的 上极限  $\rho$  的倒数:

$$R = \frac{1}{\rho}$$

(这时若  $\rho = 0$ , 则  $R = +\infty$ , 若  $\rho = +\infty$ , 则  $R = 0$ ).

柯西发现的这个定理后来被遗忘了; 阿达马 (Hadamard) 重新又发现了它, 并指出了它的重要应用.

**证明** 情形 I:  $\rho = 0$ . 我们来证明, 在这种情况下  $R = +\infty$ , 即对任何  $x$ , 级数 (4) 绝对收敛.

因为序列  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$  由正的元素组成, 由  $\rho = 0$  推出序列有确定的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0;$$



由此, 柯西序列当  $n \rightarrow \infty$  时, 对任何  $x$

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0.$$

因此, 根据柯西判别法 [368], 由级数 (1) 中各项的绝对值组成的级数收敛, 这意味着级数 (1) 本身绝对收敛.

情形 II:  $\rho = +\infty$ . 我们证明在这种情况下  $R = 0$ , 即对所有的  $x \neq 0$ , 级数 (1) 发散.

因为

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$

那么显然可以找到这样的部分序列  $\{n_i\}$ , 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = +\infty.$$

因此, 对任意  $x \neq 0$ , 存在这样的号码  $i_0$ , 使得对所有的  $i > i_0$ , 成立不等式

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} > \frac{1}{|x|} \quad \text{或} \quad |a_{n_i} \cdot x^{n_i}| > 1.$$

我们看出, 在这种情况下, 级数收敛的必要条件不成立 (级数的通项不趋于零). 因此级数 (4) 发散.

情形 III:  $\rho$  是有限正数:  $0 < \rho < +\infty$ . 我们证明, 在这种情况下  $R = \frac{1}{\rho}$ . 即当  $|x| < \frac{1}{\rho}$  时级数绝对收敛, 而当  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时级数发散. 取任意的  $x$ , 使得对此有  $|x| < \frac{1}{\rho}$ . 取  $\varepsilon > 0$  如此之小, 使得成立不等式

$$|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}.$$

对于这个  $\varepsilon$ , 显然总可以找到这样的数  $N_\varepsilon$ , 根据上极限的第一个性质 [42], 使得对所有的  $n > N_\varepsilon$  有:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon.$$

由此推出, 对于所有的  $n > N_\varepsilon$ , 柯西序列

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < |x| \cdot (\rho + \varepsilon) < 1.$$

根据柯西判别法, 由级数 (4) 的各项的绝对值组成的级数收敛, 这意味着级数 (4) 本身绝对收敛.

现在取任意的  $x$ , 使得  $|x| > \frac{1}{\rho}$ . 取  $\varepsilon$  如此之小, 使得

$$|x| > \frac{1}{\rho - \varepsilon}.$$

根据上极限的第二个性性质 [42], 对不论怎么大的  $n$  成立不等式:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \rho - \varepsilon,$$

所以

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > |x| \cdot (\rho - \varepsilon) > 1.$$

因此, 对不论怎么大的  $n$ , 级数的通项

$$|a_n x^n| > 1,$$

因而级数 (4) 发散.



**381. 交错级数** 级数的项轮流地一会儿有正号, 一会儿有负号的级数, 叫做交错级数. 把交错级数的项的符号明白地写出来是更方便的, 例如

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1}c_n + \cdots \quad (c_n > 0), \quad (7)$$

关于交错级数, 有下面的简单定理.

**莱布尼茨定理** 如果交错级数 (7) 的项的绝对值单调递减:

$$c_{n+1} \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad (8)$$

并且趋于 0:

$$\lim c_n = 0,$$

则级数收敛.

**证明** 偶数个项的部分和  $C_{2m}$  可写成下面的形状:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m})$$

因为每个括号都是正数 [由 (8)], 由此就显然有, 随着  $m$  的增大和  $C_{2m}$  也增大. 另一方面, 如果改写  $C_{2m}$  成为

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

那么就很容易看出,  $C_{2m}$  上有界:

$$C_{2m} \leq c_1.$$

在这情形下, 按照关于单调序列的定理 [34], 当  $m$  无限增大时部分和  $C_{2m}$  具有有限极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m} = C.$$

现在讨论奇数个项的部分和  $C_{2m-1}$ , 显然有,  $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$ . 因为通项趋于 0, 故也有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m-1} = C.$$

由此推知,  $C$  就是给定级数的和.

**附注** 我们看见过, 偶数个项的部分和  $C_{2m}$  递增地向级数的和  $C$  接近. 写  $C_{2m-1}$  成

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1})$$



后, 容易确定, 奇数个项的和递减地趋近于  $C$ . 这样, 就总有:

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

特别地, 可以断定:

$$0 < C < c_1.$$

这使我们得到一个对于所考虑级数的余式(它本身也是交错级数) 的极简单而方便的估计. 即是, 对于

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \cdots,$$

显然有

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1};$$

相反地, 对于

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \cdots = -(c_{2m} - c_{2m+1} + \cdots)$$

有

$$\gamma_{2m-1} < 0, |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}.$$

这样, 在所有的情形下, 莱布尼茨型级数<sup>①</sup>的余式都具有与自己的第一项相同的符号, 并且绝对值比这第一项小.

在利用级数作近似计算时 [参看 409] 常常要用到这个附注.

**382. 例题** 1) 下面两个级数都可作为莱布尼茨型级数的最简单的例子:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

二者的收敛性都可从上面证明过的定理推得.

但同时, 这两个级数的绝对值级数都发散: 对于级数 (a) 这绝对值级数是调和级数, 对于级数 (b) 可得级数

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

这个级数的发散性从它的部分和

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_n$$

可明显地看出.

这样, 我们就有了级数 (a) 与 (b) 这样两个非绝对收敛级数的例子. [以后我们将看到, 第一个级数的和是  $\ln 2$ , 而第二个的和等于  $\frac{\pi}{4}$ ; 388, 2); 405, 404.]

<sup>①</sup>我们把满足莱布尼茨定理的条件的交错级数叫做莱布尼茨型级数.



2) 按照莱布尼茨定理下面几个级数都收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^s n}, \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^s} (s > 0).$$

如果以这些级数的项的绝对值来代替级数的项, 那么, 我们知道, 当  $s > 1$  时得到收敛级数, 而当  $s \leq 1$  时得到发散级数. 由此可见, 原来的级数当  $s > 1$  时是绝对收敛的, 而当  $s \leq 1$  时是非绝对收敛的.

特别地, 关于在 370 与 378 中我们曾经考虑过的幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$ , 现在可以说, 在级数收敛区间的端点  $x = -1$  处, 当  $s \leq 1$  时级数仍然收敛, 但非绝对收敛.

3) 对任何  $x \neq 0$  考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ . 莱布尼茨定理是可以应用的, 如果不能应用到这个级数上的话, 也可应用到它的充分远的 (对下标来说的) 余式上. 事实上, 当  $n$  充分大时,  $\sin \frac{x}{n}$  有与  $x$  相同的符号, 并且它的绝对值随着  $n$  的增大而减少. 所以级数收敛 [显然 非绝对收敛, 参看 367, 8)(B)].

4) 为了要说明在莱布尼茨定理中 数  $c_n$  单调递减 的要求决不是多余的, 我们考虑交错级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

它的通项趋于 0. 它的  $2n$  个项的和等于

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2H_n$$

并且与  $n$  同时无限增大: 级数发散! 不难验出, 递减的单调性在每一次由项  $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$  变到项  $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$  时都被破坏了.

为了同一目的, 发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$$

也可以供我们应用, 证明留给读者去做.

5) 最后的级数还引起这样的说明. 如果把那个级数跟收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  相比较, 就可发现, 它们的通项的比值趋于 1. 由此可见, 第 366 目定理 2 在任意项级数中没有类似的定理.

6) 利用发散级数的计算及在其无穷和上的作用, 可以导致悖论, 下面就是一个例子:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right) - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right) = 0 \end{aligned}$$

若把同样的变换应用于级数

$$p = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (s > 0),$$



则得到

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) q,$$

其中

$$q = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

当  $s < 1$  (在这种情况下后一级数发散!) 仍导致悖论:  $p < 0$  [参看 381, 附注]. 当  $s > 1$ , 是收敛级数, 得到通常的结果.

### 383. 阿贝尔变换 常常必须跟形如

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_m \beta_m \quad (9)$$

的成对的乘积的和发生关系. 同时在很多情形中阿贝尔 (Abel) 所指出的下面的初等变换是有用的.

在讨论中引进和

$$B_1 = \beta_1, B_2 = \beta_1 + \beta_2, B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \cdots, B_m = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m,$$

于是, 在用这些和表示因数  $\beta_i$  之后,

$$\beta_1 = B_1, \beta_2 = B_2 - B_1, \beta_3 = B_3 - B_2, \cdots, \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

可以把和  $S$  写成下面的形状

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \cdots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

如果去掉括号并另外聚集同类项, 就得到最后的公式

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \cdots \\ &+ (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m. \textcircled{1} \end{aligned} \quad (10)$$

[如果把这公式改写成下面的形状

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i,$$

则有限和的这个公式是积分中分部积分的类似公式, 就成为显明的了: 在这儿以差代替微分号, 而以累加号代替积分号].

<sup>①</sup> 实质上, 我们已经利用了证明第二中值定理时的类似的变换 [306].



以公式 (10) 为基础, 现在导出下面的对上述形状和的估计:

**引理阿贝尔!~ 引理** 若因数  $\alpha_i$  都不递增 (或都不递减), 而和  $B_i$  的绝对值都以数  $L$  为上界:

$$|B_i| \leq L \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

则

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

事实上, 因为在 (10) 中所有的差都有相同的符号, 所以

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L + |\alpha_m| \cdot L \\ &= L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \end{aligned}$$

不难看出, 如果因数  $\alpha_i$  都不递增并且都是正的, 则和的估计可以简化:

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot \alpha_1. \quad (11)$$

以后我们将依不同的情况屡次利用这些估计. 现在我们把它们应用来推导一些比上面所确立的莱布尼茨判别法更普遍的收敛性的判别法.

**384. 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法** 考虑级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots \quad (W)$$

其中  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是两个实数序列.

下面的对于这两个序列中的每一个序列的假定, 都保证这个级数的收敛性.

**阿贝尔判别法** 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (B)$$

收敛, 而数  $a_n$  组成单调有界序列

$$|a_n| \leq K \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

则级数 (W) 收敛.

**狄利克雷判别法** 若级数 (B) 的部分和总是有界的<sup>①</sup>:

$$|B_n| \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

<sup>①</sup>这要求比级数 (B) 收敛性的假定更广.



而数  $a_n$  组成单调序列, 且趋于 0:

$$\lim a_n = 0,$$

则级数 (W) 收敛.

为了确立级数 (W) 的收敛性, 在两个情形中, 我们都可求助于收敛原理 [376]. 因此考虑和

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^m a_{n+i} b_{n+i};$$

这和具有 (9) 的形状, 如果令  $\alpha_i = a_{n+i}, \beta_i = b_{n+i}$  的话. 我们试图利用引理来估计这个和.

在阿贝尔的假定下, 给定  $\varepsilon > 0$ , 可以找到这样的下标  $N$ , 使当  $n > N$  时, 不管怎样的  $p$ , 不等式

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

成立 (收敛原理). 因而, 可取  $\varepsilon$  作为引理中提到的数  $L$ . 于是当  $n > N$  且  $m = 1, 2, 3, \cdots$  时, 有:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq 3K \cdot \varepsilon,$$

这就证明了级数 (W) 的收敛性.

在狄利克雷的假定下, 给定  $\varepsilon > 0$ , 可以找到这样的下标  $N$ , 使当  $n > N$  时有

$$|a_n| < \varepsilon.$$

此外, 显然

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq 2M,$$

并且也可以在引理中令  $L = 2M$ . 于是, 当  $n > N$  且  $m = 1, 2, \cdots$  时,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2M \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq 6M \cdot \varepsilon,$$

级数 (W) 的收敛性就被证明了.

**附注** 阿贝尔判别法可从狄利克雷判别法推出. 事实上, 从阿贝尔的假定可推知  $a_n$  具有有限极限  $a$ . 如果改写级数 (W) 成下面两个级数和的形状

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

则其中第二个级数按照假定收敛, 而把狄利克雷判别法应用到第一个级数上去.



**385. 例题** 1) 如果  $a_n$  单调递减且趋于 0, 而  $b_n = (-1)^{n-1}$ , 则狄利克雷定理的条件显然满足. 因而, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

收敛, 这样, 莱布尼茨定理就可作为狄利克雷定理的一个特别推论而得到.

2) 在对于  $a_n$  的同样的假定下, 考虑下列级数 ( $x$  是任意的):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx.$$

在第 307 目的恒等式 (1) 与 (2) 中, 令  $a = 0, h = x$ , 我们得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin ix &= \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \\ \sum_{i=1}^n \cos ix &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \end{aligned}$$

只假定  $x$  不具有  $2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$  的形状. 这样, 只要  $x \neq 2k\pi$ , 对于任何的  $n$ , 两个和的绝对值都以数  $\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$  为上界.

依狄利克雷判别法, 两个级数对于异于  $2k\pi$  的任何  $x$  值都收敛; 可是, 第一个级数在  $x = 2k\pi$  时也收敛, 因为它的所有的项都变成为 0.

特别地, 例如, 下列级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}, \text{ 等等.}$$

3) 我们对形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{12}$$

的级数感到很大的兴趣, 其中  $\{a_n\}$  是任意实数序列. 这些级数叫做狄利克雷级数.

对于这些级数, 可证得下面的引理, 这引理跟第 379 目中属于幂级数的引理具有相似的地方:

若级数 (12) 在某一值  $x = \bar{x}$  时收敛, 则这级数对任何的  $x > \bar{x}$  都收敛.

这可从阿贝尔定理立刻推出, 因为当  $x > \bar{x}$  时级数 (12) 可从收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\bar{x}}}$$

的各项乘以单调递减的正因数  $\frac{1}{n^{x-\bar{x}}} (n = 1, 2, 3, \cdots)$  得到.

级数 (12) 有“处处收敛”的, 如像  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^x}$ ; 也有“处处发散的”, 如像  $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{n^x}$ . 如果除去这些情形, 那么, 利用上述引理, 容易确立收敛边界点  $\lambda$  的存在性, 它使得级数 (12) 当  $x > \lambda$



时收敛而当  $x < \lambda$  时发散. 例如, 对级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$  说来, 显然,  $\lambda = 1$ , 而对级数  $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  则有  $\lambda = 0$ . 如果愿意, 对“处处收敛”的级数可认为  $\lambda = -\infty$ , 而对“处处发散”的级数则令  $\lambda = +\infty$ .

读者容易看出它们跟幂级数的类似之点: 在两种情形中, “收敛范围”都是整个区间. 但也有重大的差别: 绝对收敛的范围在这儿一般地可以跟收敛范围不一致. 例如, 刚才所说的级数  $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  对  $x > 0$  收敛, 但只对  $x > 1$  绝对收敛.

#### 4) 把级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (13)$$

跟系数相同的狄利克雷级数 (12) 相比较, 而且, 当然认为  $x$  异于  $0, -1, -2, \dots$  等等.

在这些限制下, 便有这样的定理, 朗道 (E. Landau) 定理: 级数 (12) 与 (13) 对同样的  $x$  值收敛.

把狄利克雷级数 (12) 的各项分别乘以因式

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (14)$$

便可得到级数 (13). 当  $n$  值充分大时, 这些因式有一定的符号. 此外, 从某处开始后, 它们就单调地变化着.

事实上, 第  $n+1$  个因式与第  $n$  个因式的比值是这样的:

$$\frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1 + \frac{x+1}{n}}.$$

但 [125, 4)]

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x+1} = 1 + \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

并且, 类似地

$$\frac{1}{1 + \frac{x+1}{n}} = 1 - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由此

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1 + \frac{x+1}{n}} = 1 + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从最后的公式中可以明白看出: 当  $(x+1)x > 0$  时上述比值最后成为大于 1, 而当  $(x+1)x < 0$  时, 小于 1.

为要确立因式 (14) 的有界性, 我们引用这个事实 [这在以后在 402, 10) 中要加以证明]: 表达式 (14) 当  $n \rightarrow \infty$  时具有有限极限. 这样, 按照阿贝尔判别法, 级数 (12) 的收敛性就引出级数 (13) 的收敛性.

因为所说的极限 (如我们看到的) 永远异于 0, 所以类似的结论可应用到因式 (14) 的倒数上去. 在这情形下, 根据同一定理, 级数 (13) 的收敛性就可引出级数 (12) 的收敛性. 证明就完全了.



5) 类似的关系可以在所谓兰伯特 (Lambert) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \quad (15)$$

与幂级数 [379]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (16)$$

之间建立, 其中系数  $a_n$  是相同的 (值  $x = \pm 1$  当然除外). 更确切地说:

若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

收敛, 则兰伯特级数 (15) 对所有的  $x$  值都收敛; 在相反情形下, 这级数恰好在幂级数 (16) 收敛的那些  $x$  值下收敛. [克诺普 (K.Knopp).]

(a) 首先设级数 (A) 发散, 于是级数 (A) 的收敛半径是  $R \leq 1$ . 现欲证, 对  $|x| < 1$  说来, 级数 (15) 与 (16) 的敛散情况是同样的.

如果级数 (15) 收敛, 则以  $x^n$  乘此级数的项所得到的级数也收敛<sup>①</sup>, 因而级数 (16) 也收敛, 因为它是前述二级数的差 [364, 4°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} \cdot x^n \right].$$

现设级数 (16) 收敛; 这时, 按照阿贝尔判别法, 以单调递减的因式  $\frac{1}{1-x^{2n}}$  乘此级数的项所得到的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}}, \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}}$$

也收敛. 因而, 级数 (15) 也收敛, 因为它是前面二级数的和 [364, 4°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}} \right].$$

对  $|x| > 1$  说来, 级数 (16) 显然发散; 我们断定, 在这个  $x$  值下级数 (15) 也发散. 事实上, 在相反情形下, 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

的收敛性, 就会推出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

<sup>①</sup>如果任何级数, 比方说,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 那么这就是说, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  当  $x = 1$  时收敛, 于是, 依第 379 目引理, 这级数对  $|x| < 1$  的任何  $x$  说来, 显然收敛. 在课文内进行的讨论中, 我们还有两次要利用这个说明.



与

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

的收敛性 [364, 4°], 这与假定违背.

(5) 如果级数 (A) 收敛 (于是  $R \geq 1$ ), 则对  $|x| < 1$  说来, 级数 (16) 收敛, 而级数 (15) 的收敛性可像上面一样确定出来. 剩下的只要证明级数 (15) 当  $|x| > 1$  时也收敛.

事实上, 此时  $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ , 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

像上述那样, 收敛; 因而, 级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n + a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

也收敛 [364, 4°].

6) 最后, 作为直接应用阿贝尔变换 (10) 的一个例子, 我们举出恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

这儿

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

同时可假定  $|x|$  不仅小于第一个级数的收敛半径  $R$ , 而且小于 1.

实际上, 我们有:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (x^i - x^{i+1}) + A_n x^n.$$

由此, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 只要再确立  $A_n x^n \rightarrow 0$ , 就可得到所要求的等式. 为此目的, 在条件

$$|x| < r < R, r \neq 1$$

下取数  $r$ . 于是  $|a_i| r^i \leq L$  (对  $i = 0, 1, 2, \cdots$  而言) 并且

$$|A_n x^n| \leq L \left( 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n} \right) |x|^n = \frac{L}{1-r} \left( \frac{|x|}{r} \right)^n - \frac{Lr}{1-r} |x|^n.$$

最后的表达式在所作假定下显然趋于 0.



## §4. 收敛级数的性质

**386. 可结合性** 无穷级数的和数的概念与有限多个项的和数的 (在算术及代数中所考虑的) 概念的主要区别, 在于前者中包含着极限的过程. 虽然普通和数的某些性质也为无穷级数所具有, 但常常只在满足一定的条件下才能具有, 而这些条件正是必须研究的. 在另一些情形中, 我们习惯了的许多普通和的性质却非常显著地被破坏了, 因此, 一般地, 在这问题上必须保持小心谨慎.

考虑收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

并且用任意方式把它的项联合成若干组, 但同时不改变它们的分布位置:

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \cdots, a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \cdots$$

这儿  $\{n_k\}$  是某一从自然数序列中抽出的关于下标的部分增序列.

**定理** 从这些和组成的级数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \quad (\tilde{\text{A}})$$

恒收敛, 并具有与原级数相同的和. 换句话说: 收敛级数具有可结合性.

实际上, 新级数的部分和序列

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k, \cdots$$

并非别的, 而是原来级数的和的部分序列

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots$$

这 [40] 就证明了我们的断言.

我们看出 —— 暂时地 —— 跟普通和十分相似之点; 但这相似点会被破坏, 譬如说, 如果我们试图把可结合性在相逆的步骤下来应用的话. 如果给定收敛级数  $(\tilde{\text{A}})$ , 它的每一项都是有限多个加数的和, 那么, 去掉括号之后, 我们得到新的级数  $(\text{A})$ , 这级数就可能是发散的. 简单的例子就是: 级数

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \equiv 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

与

$$1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

显然收敛, 然而从这级数去掉括号后所得到的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$



却是发散的.

当然,如果在去掉括号之后,我们得到收敛级数  $(A)$ , 那么, 它的和就与级数  $(\tilde{A})$  的和相同. 这由上面已知的事实推出.

在某些条件下, 可以预先保证级数  $(A)$  收敛.  $(\tilde{A})$  中 同一括号内部所有的加数有相同符号<sup>①</sup>的级数, 就是这种级数的最简单的情形.

实际上, 在这情形下, 当  $n$  从  $n_{k-1}$  变到  $n_k$  时, 部分和  $A_n$  将单调地变化, 因而将包含在  $A_{n_{k-1}} = \tilde{A}_{k-1}$  与  $A_{n_k} = \tilde{A}_k$  之间. 当  $k$  充分大时, 最后这两个和与级数  $(\tilde{A})$  的和  $\tilde{A}$  相差任意小, 因而对于和  $A_n$  也同样正确, 即当  $n$  充分大时, 有  $A_n \rightarrow \tilde{A}$ .

以后我们将屡次利用这个说明.

现在考虑这样的例子:

**例题** 确定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$  的收敛性.<sup>57)</sup>

这儿首先出来 3 个负项, 之后 5 个正项, 如此下去. 如果把每个这样的相同符号的一群项并成为级数的一项, 就得到交错级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]. \quad (1)$$

容易确立不等式

$$\frac{2}{k+1} < \overbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+k}}^k + \overbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}^{k+1} < \frac{2}{k};$$

例如, 因为开头  $k$  项的和小于  $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$ , 而后面  $(k+1)$  项的和小于  $(k+1) \times \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$ , 所以, 实际上, 整个和将小于  $\frac{2}{k}$ . 由此断定, 级数 (1) 的项将趋于 0, 并且它们的绝对值单调递减. 在这情形下, 根据莱布尼茨定理, 级数 (1) 收敛, 因而, 由于上面所作的说明, 所提出的级数就收敛.

**387. 绝对收敛级数的可交换性** 设给定具有和  $A$  的收敛级数  $(A)$ . 在级数  $(A)$  中用任意方式重新配置级数的项后, 我们得到新的级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k + \cdots \quad (A')$$

这级数的每一项  $a'_k$  跟原级数的一个确定的项  $a_{n_k}$  是相同的<sup>②</sup>.

现在发生了如下的问题: 级数  $(A')$  是否收敛? 而在收敛情形下, 它的和是否等于原级数的和  $A$ ? 在讨论这问题时, 我们必须在绝对收敛与非绝对收敛级数之间实行严格的区别.

<sup>①</sup>对于不同的括号说来, 这个符号可以是不同的.

<sup>②</sup>并且, 没有遗漏及重复的下标的序列  $\{n_k\}$  又产生出自然数序列 (只有次序上的不同).

<sup>57)</sup>我们记得,  $E(x)$  表示数  $x$  的整数部分.



**定理** 若级数 (A) 绝对收敛, 则把它的项重新配置后得到的级数 (A') 也收敛并且具有与原级数相同的和  $A$ . 换句话说: 绝对收敛级数具有可交换性.

**证明** (a) 分成两个步骤来证明. 首先假定, 级数 (A) 是正项级数.

考虑级数 (A') 的任意部分和数  $A'_k$ . 因为

$$a'_1 = a_{n_1}, a'_2 = a_{n_2}, \dots, a'_k = a_{n_k},$$

所以, 取  $n'$  大于所有下标  $n_1, n_2, \dots, n_k$  后, 显然即有  $A'_k \leq A_{n'}$ , 因而, 更加有

$$A'_k \leq A.$$

在这种情形下 (A') 是收敛的 [365], 并且它的和  $A'$  不超过  $A$ :

$$A' \leq A.$$

但级数 (A) 也可从 (A') 重新配置级数的项而得到, 因此, 类似地:

$$\underline{A \leq A'}.$$

比较所得到的关系式, 就得到所要求的等式  $A' = A$ .

(6) 现在设 (A) 是任意绝对收敛级数.

因为收敛的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (A^*)$$

按照上面证明的, 在任意重新配置级数的项时仍是收敛的, 所以根据第 377 目中的定理, 级数 (A) 也同时保持自己的 (绝对) 收敛性.

其次, 在 377 中我们曾经见过, 在级数 (A) 绝对收敛的情形下, 它的和可表示成

$$A = P - Q,$$

其中  $P$  与  $Q$  是正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (P)$$

与

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m, \quad (Q)$$

它们分别是由级数 (A) 的正项和由级数 (A) 的负项的绝对值组成的级数. 级数 (A) 中项的重新配置引起这两个级数中项的重新配置, 但并不影响到 (按上面的证明) 它们的和  $P$  及  $Q$ . 因而级数 (A) 的和仍然是先前的和, 这就是所要证明的.



**388. 非绝对收敛级数的情形** 现在来研究非绝对收敛级数而要确定它们并不具有可交换性: 在每个这样的级数中, 由于级数的项的适当的重新配置, 可能改变它的和, 或者甚至完全破坏了收敛性.

假定级数 (A) 收敛, 但非绝对收敛. 从收敛性推知  $\lim a_n = 0$  [364, 5°]. 至于我们在上目中讲到过的级数 (P) 与 (Q), 那么, 虽则显然

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \text{ 与 } \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0, \quad (2)$$

但在给定的情形下, 它们二者都发散.

事实上, 若  $k$  与  $m$  分别表示级数 (A) 中前  $n$  项中正项的数目与负项的数目, 则成立等式

$$A_n = P_k - Q_m, A_n^* = P_k + Q_m. \quad (3)$$

应强调的是三个号码  $n, k, m$  中, 有一个可以任取, 其他两个则据它而选定, 从 (P) 或 (Q) 之一的收敛性, 根据 (3) 中第一式必然会得出另一个的收敛性, 而由这两个级数的收敛性, 根据 (3) 中第二式推出级数 ( $A^*$ ) 收敛——这与假设矛盾.

现在要证下面的有名的黎曼定理:

**黎曼定理** 若级数 (A) 非绝对收敛, 则无论预先取怎样的数  $B$  (有限的或者等于  $\pm\infty$ ), 都可以这样重新配置这级数中的项, 使得变形后的级数具有和  $B$ .

**证明** 先讨论有限数  $B$  的情形. 首先指出, 由级数 (P) 与 (Q) 的发散性, 根据 364 目 1°, 可推出, 它们所有的余式同样也都发散, 于是这两个级数中的每一个, 从任何地方开始, 可以收集那么多的项, 使得和超过任何一个数.

利用这些说明, 我们就用下面的方式作出级数 (A) 的项的重新配置.

首先取给定级数的这样多的正项 (按照它们在级数中位置的次序), 使得它们的和超过数  $B$ :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > B.$$

在它们之后接着写出负项 (按照它们在给定级数中位置的次序), 取这样多项, 使得总和小于  $B$ :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < B.$$

之后又这样放上一些正项 (从其余的数中取出的), 使得

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > B.$$

然后收集这样多的负项 (从余下的数中取出的), 使得

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - \cdots - q_{m_2} < B.$$



如此下去. 我们设想这个步骤继续到无穷; 显然级数 (A) 的每一项连同自己的符号, 会在一定的位置出现.

写出项  $p$  或  $q$  后, 如果每次收集的项不多于实现所要求的不等式必要的项, 则在这一面或那一面与数  $B$  的偏差, 按绝对值不超过最后写出的项. 于是从 (2) 显然可见, 级数

$$(p_1 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + \cdots \\ + (p_{k_{i-1}+1} + \cdots + p_{k_i}) - (q_{m_{i-1}+1} + \cdots + q_{m_i}) + \cdots$$

具有和  $B$ . 由于 386 的说明, 这在去掉括号之后仍然是正确的.

如果  $B = +\infty$ , 那么, 取增大到无穷的数  $B_i$  的序列后, 就会有可能收集到遵从我们的要求的正数, 使得和依次大于  $B_1, B_2, B_3$  等等, 而从负项收集的数只需依次放在每一正数组之后, 用这方法, 显然会作出具有和是  $+\infty$  的级数. 类似地可以得到和是  $-\infty$  的级数<sup>①</sup>.

上面确立的结果着重表明这样的事实: 非绝对收敛性只是由于正项与负项的互相抵消才能实现, 并且主要由这些项一个跟着一个的次序来决定; 但是, 绝对收敛性则根据这些项减小的速度, 而与它们的次序无关.

例题 1) 考虑显然非绝对收敛的级数

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \cdots \quad (4)$$

容易证得 [参看 2)] 它的和是  $\ln 2$ . 我们这样调动它的项, 使得在一个正项后面跟着两个负项:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \cdots \quad (5)$$

我们断定, 这样调换后的级数的和减小了一半.

事实上, 如果分别用  $A_n$  与  $A'_n$  表示这两个级数的部分和, 则

$$A'_{3m} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2m},$$

于是  $A'_{3m} \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$ . 因为

$$A'_{3m-1} = A'_{3m} + \frac{1}{4m} \text{ 与 } A'_{3m-2} = A'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}$$

趋于同一极限  $\frac{1}{2} \ln 2$ , 所以级数 (5) 收敛并且即以此数为自己的和.

<sup>①</sup>读者容易想出, 如何安排给定级数的项, 使得变形过的级数的部分和, 具有两个预先给定的数  $B$  与  $C > B$  作为最大的与最小的极限.



2) 如果从调和级数的部分和  $H_n$  的公式 [367(4)]

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n$$

出发 (其中  $C$  是欧拉常数, 而  $\gamma_n$  是无穷小), 可以得到更普遍的结果. 由此, 首先有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} &= \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \gamma_m, \\ 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} &= H_{2k} - \frac{1}{2} H_k = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{1}{2} C + \gamma_{2k} - \frac{1}{2} \gamma_k. \end{aligned}$$

现在把级数 (4) 的项排成这样的次序: 首先放  $p$  个正项与  $q$  个负项, 然后又放  $p$  个正项与  $q$  个负项, 如此下去. 为了要确定出级数

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \cdots \quad (6)$$

的和, 轮流把  $p$  项或  $q$  项的序列组结合起来是更方便的. 用这方法得到的级数的部分和  $\tilde{A}_{2n}$  等于

$$\tilde{A}_{2n} = \ln \left( 2\sqrt{\frac{p}{q}} \right) + a_n \quad (a_n \rightarrow 0)$$

并且趋于极限  $\ln \left( 2\sqrt{\frac{p}{q}} \right)$ ; 和  $\tilde{A}_{2n-1}$  也趋于同一极限. 最后, 由于 386 的说明, 级数 (6) 也将以这个数  $\ln \left( 2\sqrt{\frac{p}{q}} \right)$  作为自己的和.

特别地, 对级数 (4) 说来, 可得到  $\ln 2$  ( $p = q = 1$ ), 对级数 (5) 说来, 与 1) 中一样, 得到  $\frac{1}{2} \ln 2$  ( $p = 1, q = 2$ ). 类似地:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots &= \frac{3}{2} \ln 2 \quad (p = 2, q = 1) \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots &= 0 \quad (p = 1, q = 4), \end{aligned}$$

如此类推.

我们指出, 如果正项及负项的序列组中的项数从一组到另一组还要改变的话, 那么, 这个变化的规律容易这样选择, 使得对变形过的级数来说, 实际上, 得到任何预先给定的和. 这点留给读者去证明.

**389. 级数的乘法** 关于两个收敛级数的逐项相加 (或相减), 以及以常数因数与收敛级数逐项相乘, 已经在 364, 3° 与 4° 中讲过. 现在我们研究级数乘法的问题.

设给定两个收敛级数

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (A)$$

与

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_m + \cdots \quad (B)$$



仿照有限和乘法的规则, 在这儿也考虑这两个级数的项所有可能的成对的乘积  $a_i b_k$ ; 从这些乘积可作出无穷矩阵

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_1 b_3 \\ \dots \\ a_1 b_k \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_2 b_3 \\ \dots \\ a_2 b_k \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} a_3 b_1 \\ a_3 b_2 \\ a_3 b_3 \\ \dots \\ a_3 b_k \\ \dots \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} a_i b_1 \\ a_i b_2 \\ a_i b_3 \\ \dots \\ a_i b_k \\ \dots \end{array} & \cdots
 \end{array} \quad (7)$$

这些乘积可以用很多方法排成简单序列的形状. 例如, 可以按**对角线**或按**正方形**写出乘积

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_1 b_1 \quad a_2 b_1 \quad a_3 b_1 \quad \cdots \\
 a_1 b_2 \quad a_2 b_2 \quad a_3 b_2 \quad \cdots \\
 a_1 b_3 \quad a_2 b_3 \quad a_3 b_3 \quad \cdots \\
 \dots \\
 a_1 b_k \quad a_2 b_k \quad a_3 b_k \quad \cdots \\
 \dots
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \dots
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \boxed{a_1 b_1} \quad \boxed{a_2 b_1} \quad \boxed{a_3 b_1} \quad \cdots \\
 \boxed{a_1 b_2} \quad \boxed{a_2 b_2} \quad \boxed{a_3 b_2} \quad \cdots \\
 \boxed{a_1 b_3} \quad \boxed{a_2 b_3} \quad \boxed{a_3 b_3} \quad \cdots \\
 \dots
 \end{array}$$

它们分别引出序列

$$a_1 b_1; a_1 b_2, a_2 b_1; a_1 b_3, a_2 b_2, a_3 b_1; \cdots \quad (8)$$

或

$$a_1 b_1; a_1 b_2, a_2 b_2, a_2 b_1; a_1 b_3, a_2 b_3, a_3 b_3, a_3 b_2, a_3 b_1; \cdots \quad (9)$$

**柯西定理** 如果级数 (A) 与 (B) 绝对收敛, 则由在任何次序下得到的 (7) 的那些乘积组成的级数也收敛, 并且这级数的和即是和的乘积  $AB$ .

**证明** 按照假定, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \quad (A^*)$$

与

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| + \cdots \quad (B^*)$$

收敛, 即具有有限和, 比方说,  $A^*$  和  $B^*$ .

把乘积 (7) 的那些用任意方式排列成序列的形状后, 从它们作出级数

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \cdots + a_{i_s} b_{k_s} + \cdots \quad (10)$$



为要证明相应的绝对值级数

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \cdots + |a_{i_s} b_{k_s}| + \cdots \quad (11)$$

的收敛性, 考虑它的第  $s$  部分和; 如果用  $\nu$  表示记号  $i_1, k_1, i_2, k_2, \cdots, i_s, k_s$  中最大的一个, 则显然,

$$\begin{aligned} & |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \cdots + |a_{i_s} b_{k_s}| \leqslant \\ & (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_\nu|) \leqslant A^* \cdot B^*. \end{aligned}$$

由此 [365] 得出级数 (11) 的收敛性, 因而也得出级数 (10) 的绝对收敛性.

剩下的只是确定级数的和. 为此, 我们先给级数 (10) 的项以更适当的排列, 因为, 这个级数, 像绝对收敛级数一样, 具有可交换性 [387]. 把这些项按正方形像 (9) 中那样排列出来后, 我们把彼此不在同一正方形的序列组合并起来:

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) + \cdots \quad (12)$$

若像通常那样用  $A_n$  与  $B_m$  表示级数 (A) 与 (B) 的部分和, 则对级数 (12) 说来, 部分和是

$$A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \cdots, A_k B_k, \cdots$$

它们趋于乘积  $AB$ , 这样一来,  $AB$  就不仅是级数 (12) 的和, 而且也是级数 (10) 的和了.

在级数的实际相乘时, 像 (8) 中按对角线排列 (7) 的那些乘积, 常常是更便利的: 通常把在同一对角线上的那些项结合在一起:

$$AB = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots \quad (13)$$

柯西即是首次把两个级数的乘积表示成这种形式的. 今后, 我们把上述级数称为级数 (A) 与 (B) 的柯西形式的乘积.

例如, 设把下列两个幂级数相乘:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m + \cdots \end{aligned}$$

[并且  $x$  取在相应的收敛区间内部, 379]. 在这情形下, 不难想出, 上述方法可得出乘积中同类项的系数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

这样一来, 两个幂级数的柯西形式的乘积被直接表为幂级数的形式.



## 390. 例题 1) 级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1)$$

自乘, 用这方法可得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_1^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

## 2) 把级数

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

与级数

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \cdots \quad (14)$$

相乘 (其中  $|x| < 1$ ), 给出这样的结果:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} H_k x^k = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots + (-1)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) x^k + \cdots$$

以后我们将看到 [405], 级数 (14) 的和是  $\ln(1+x)$ , 于是最后的展开式是函数  $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ .

3) 求出 ( $z$  是任意的)

$$\left\{ 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu} \cdot (\mu!)^2} \right\}^2.$$

提示 利用公式

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} (C_{\nu}^{\mu})^2 = C_{2\nu}^{\nu} = \frac{2\nu!}{(\nu!)^2}.$$

答案

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{2\nu! z^{2\nu}}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^4}.$$

## 4) 恒等式 [参看 385,6)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (\text{其中 } A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

容易用逐项相乘的方法证明.

同时, 若在区间  $(-R, R)$  ( $0 < R \leq 1$ ) 内, 两个级数之一收敛, 由此已推出另一级数在同一区间内收敛.



5) 证明恒等式 ( $a > 0$ )

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a+2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^2}{a+4} + \cdots \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \cdots \right) \\ = \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{a+1}{a+2}x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \cdots \right].$$

6) 我们已经知道 [378,1)(a)], 级数

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

对所有的  $x$  值绝对收敛; 我们用  $E(x)$  表示它的和. 以  $y$  代替  $x$ , 可得类似的级数  $E(y)$ , 两个级数柯西形式的乘积可以按照级数乘法的规则得到. 乘积的通项是这样的:

$$1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

这样, 我们对于暂时未知的函数  $E(x)$  得到对于任何实数  $x$  及  $y$  的关系式

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y).$$

以后这将给我们以建立  $E(x)$  是指数函数的可能性 [439,3); 比较 75,1°].

7) 借助于达朗贝尔判别法容易证明, 级数

$$C(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ S(x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \cdots$$

对所有的  $x$  值绝对收敛. 用级数乘法可以证得关系式

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y), \\ S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y).$$

因为实际上  $S(x)$  与  $C(x)$  不是别的, 而是  $\sin x$  与  $\cos x$  [404], 所以我们在这儿得以知道这些函数的有名的加法定理.

8) 最后, 考虑正项级数

$$\zeta(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

这级数对  $x > 1$  收敛 [365,2)] 并且是黎曼函数  $\zeta$ . 借助于级数乘法, 计算它的平方.

我们把所有可能的乘积

$$\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{m^x} = \frac{1}{(n \cdot m)^x}$$



这样排列,使得在分母中有同一数目  $k = n \cdot m$  的那些项列在一起,然后把它们合并起来. 对应于每一个  $k$ , 形如  $\frac{1}{k^x}$  的项共有  $\tau(k)$  个 [ $\tau(k)$  是数  $k$  的除数  $n$  的个数. 参看 370,4)–译者]. 所以,最后

$$[\zeta(x)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^x}.$$

**391. 极限理论中的一般定理** 为了在当前一目和今后简化叙述,我们来建立极限理论中的一个定理,它是著名的柯西与斯托尔茨 (Stolz) 定理的宽泛的推广. 这个定理属于特普利茨 (Töplitz). 我们用两种方式证明.

I. 设无穷“三角形”矩阵的系数

$t_{11}$

$t_{21} \quad t_{22}$

$t_{31} \quad t_{32} \quad t_{33}$

.....

$t_{n1} \quad t_{n2} \quad t_{n3} \cdots t_{nn}$

.....

.....

(15)

符合如下两个条件:

(a) 位于任意一列中的元素趋于零:

$$t_{nm} \rightarrow 0 \quad \text{当} \quad n \rightarrow \infty \quad (m \text{ 固定}).$$

(б) 位于任意一行中元素的绝对值之和被同一个常数界定:

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| \leqslant K \quad (K \text{ 为常数}).$$

那么,若序列  $x_n \rightarrow 0$ , 则对于借助于矩阵 (15) 系数由原先序列值组成的序列

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n \rightarrow 0$$

也成立.

**证明** 对  $\varepsilon > 0$  存在这样的  $m$ , 当  $n > m$  时有  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$ ; 利用条件 (б), 对这样一些  $n$  有

$$|x'_n| < |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为此处  $m$  已经是常数, 那么 —— 由于条件 (a) —— 存在这样的  $N \geqslant m$ , 使得当  $n > N$  时, 右边的第一项  $< \frac{\varepsilon}{2}$ , 因此  $|x'_n| < \varepsilon$ , 这就是所要证明的.

II. 设系数  $t_{nm}$  除条件 (a),(б) 外还符合条件

(B)  $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} \rightarrow 1$ , 当  $n \rightarrow \infty$  ①

那么若数列  $x_n \rightarrow a$  ( $a$ ——有限的), 则同样有

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n \rightarrow a.$$

① 在应用中通常  $T_n \equiv 1$ .



证明  $x'_n$  的表达式显然可以改写为这样:

$$x'_n = t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \cdots + t_{nn}(x_n - a) + T_n \cdot a.$$

把定理 I 应用于序列  $x_n - a \rightarrow 0$ , 且凭借着条件 (B), 可直接达到所要求的结果.

1° 若令

$$t_{n1} = t_{n2} = \cdots = t_{nn} = \frac{1}{n},$$

则由此可得出柯西定理 [33]. 符合条件 (a), (б), (B) 是显然的.

2° 现在转向斯托尔茨定理, 并仍保持原先的表示, 于是设有两个序列  $x_n$  与  $y_n$ , 其中第二个序列单调地趋于  $+\infty$ . 设序列

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow a \quad (n = 1, 2, 3, \cdots; x_0 = y_0 = 0);$$

把定理 II 应用于此式, 设  $t_{nm} = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$ . 容易验证条件 (a), (б), (B) 都成立. 于是得到, 序列

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{m=1}^n t_{nm} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} \rightarrow a,$$

这就完成了证明.

我们来举出特普利茨定理的一系列有用的推论.

3° 设有两个序列  $x_n \rightarrow 0$  与  $y_n \rightarrow 0$ , 同时后者符合如下条件:

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K \quad (n = 1, 2, \cdots; K \text{ 为常数}).$$

那么便有序列

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \rightarrow 0.$$

这是当  $t_{nm} = y_{n-m+1}$  时定理 I 的简单应用.

4° 若序列  $x_n \rightarrow a$ , 而序列  $y_n \rightarrow b$ , 则序列

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \rightarrow ab.$$

首先设  $a = 0$ , 要求证明  $z_n \rightarrow 0$ . 为此只需对  $t_{nm} = \frac{y_{n-m+1}}{n}$  应用定理 I [定理的条件 (б) 由  $y_n$  的有界性直接推出].

转而证明一般情况, 把  $z_n$  改写成如下形式:

$$z_n = \frac{(x_1 - a)y_n + (x_2 - a)y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)y_1}{n} + a \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

根据刚刚证明过的, 右端第一项趋于 0. 根据柯西定理, 右端第二项中  $a$  所乘的因子极限为  $b$ , 所以右端第二项的极限为  $ab$ .

5° 若  $x_n \rightarrow a$ , 则<sup>①</sup>

$$x'_n = \frac{1 \cdot x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \cdots + C_n^n x_n}{2^n} \rightarrow a.$$

<sup>①</sup>序列的号码, 是从 0 开始, 而不是从 1 开始, 这当然不是本质的.



应用定理 II, 令

$$t_{nm} = \frac{C_n^m}{2^n}.$$

因为  $C_n^m < n^m$  及  $\frac{n^m}{2^n} \rightarrow 0$  [32,9)], 则条件 (a) 成立. 由

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$$

可直接推知条件 (6) 与 (B) 成立.

6° 若  $x_n \rightarrow a$  与  $z$  为常数 ( $z > 0$ ), 则

$$x'_n = \frac{1 \cdot x_0 + C_n^1 z \cdot x_1 + C_n^2 z^2 \cdot x_2 + \cdots + C_n^n z^n \cdot x_n}{(1+z)^n} \rightarrow a.$$

这是上一论断的简单推广, 其证明也是类似的, 系数的排列次序也可以反过来, 即

$$x'_n = \frac{z^n \cdot x_0 + C_n^1 z^{n-1} \cdot x_1 + C_n^2 z^{n-2} \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n}{(1+z)^n} \rightarrow a.$$

**392. 级数乘法定理的推广** 梅尔滕斯 (F.Mertens) 已经指出, 柯西的结果可以推广到更一般的情形上去.

**梅尔滕斯定理** 如果级数 (A) 与 (B) 收敛, 并且至少它们中的一个绝对收敛, 则展开式 (13) 成立.

**证明** 比方说级数 (A) 绝对收敛, 即级数 (A\*) 收敛.

把第  $n$  条对角线上的项合并起来, 令

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$$

而

$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n,$$

于是需要证明  $C_n \rightarrow AB$ .

首先, 不难看出

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_2 + a_n B_1. \quad (16)$$

若令  $B_m = B - \beta_m$  (其中余式  $\beta_m \rightarrow 0$ , 当  $m \rightarrow \infty$  时), 则和式  $C_n$  可改写为:

$$C_n = A_n B - \gamma_n, \text{ 其中 } \gamma_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_2 + a_n \beta_1;$$

因为  $A_n \rightarrow A$ , 所以整个问题就归结为证明关系式  $\lim \gamma_n = 0$ .

而这一论断可从 391 的 3° (当  $x_n = \beta_n, y_n = a_n$ ) 一下子推出来, 这只要考虑到:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq A_n^*,$$

其中  $A^*$  按照假定是收敛级数 (A\*) 的和.



作为定理的应用,我们回到 390 目的 4). 如我们现在所看到的,在那里所提到的等式,在级数  $\sum_0^\infty a_n x^n$  的收敛区间的端点  $x = \pm R$  也成立,这只要  $R < 1$ ,且级数在这个端点一般说来是收敛的(哪怕是非绝对收敛也成).

我们指出,如果两个级数 (A) 与 (B) 都仅仅是非绝对收敛的,那么就不能保证级数 (13) 的收敛性.作为例子,试把下述级数 [我们在 382,2) 中已知,它是非绝对收敛的] 自乘一次:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

在这情形下

$$c_n = (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{n-i+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right);$$

因为括号中的每一项都大于  $\frac{1}{n}$ , 所以  $|c_n| > 1$  (当  $n > 1$  时), 因而级数发散 [364,5°].

然而,如果类似地处理同样是非绝对收敛的级数 [382,1)]

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots,$$

那么有

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \cdots + \frac{1}{i \cdot (n-i+1)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

这儿,随  $n$  的增大,  $|c_n|$  趋于 0, 单调递减, 因而 [根据莱布尼茨定理, 381] 级数  $\sum_1^\infty c_n$  仍然是收敛的. 它的和是怎样的, 是否等于  $(\ln 2)^2$ ? 下述定理回答了这个问题:

**阿贝尔定理** 若刚好是对两个收敛的级数 (A) 与 (B), 其所取柯西形式的乘积也收敛, 则乘积级数的和  $C$  必然等于  $A \cdot B$ .

**证明** 保持以前的记号, 从 (13) 式容易得到:

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1.$$

把这个等式逐项地除以  $n$ , 令  $n \rightarrow \infty$  取极限. 因为  $C_n \rightarrow C$ , 则根据柯西定理 [33; 同样参看 391,1°], 算术平均值

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \rightarrow C.$$

另一方面, 根据 391,4° (若令  $x_n = A_n, y_n = B_n$ ),

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB.$$

由此  $C = A \cdot B$ , 这就是所要证明的.



§5. 累级数与二重级数

393. 累级数 给定依赖于两个自然数标记的无穷数集

$$a_i^{(k)}(i = 1, 2, \cdots ; k = 1, 2, \cdots).$$

想象它们分布为无穷长方矩阵的形状:

$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$a_3^{(1)}$	$\cdots$	$a_i^{(1)}$	$\cdots$
$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_3^{(2)}$	$\cdots$	$a_i^{(2)}$	$\cdots$
$a_1^{(3)}$	$a_2^{(3)}$	$a_3^{(3)}$	$\cdots$	$a_i^{(3)}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$\cdots$	$a_i^{(k)}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(1)

这种类型的矩阵称为具有两个列表值的无穷长方矩阵.

现在来讲一个与形状 (1) 矩阵的研究有关的概念——累级数概念.  
若在无穷长方矩阵中分别把每一行加起来, 便得到形如

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

(2)

的级数的无穷序列.

现在把这个序列累加起来, 将有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

(3)

所得到的记号称为累级数. 若把行代之以列, 即若先把无穷矩阵按列加起来, 便得到第二个累级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

(4)

累级数 (3) 称为收敛的, 是指:若首先, 按行的所有级数都收敛 (其和相应地记为  $A^{(k)}$ ), 其次级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$$

收敛; 其和是累级数 (3) 的和. 所有这些都容易照搬到级数 (4).

矩阵 (1) 的元素可用多种方法表为无穷序列

$$u_1, u_2, \cdots, u_r, \cdots$$

(5)



的形式, 据此可组成简单级数

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r. \quad (6)$$

[关于这一点, 我们已在 389 目中, 由于特殊类型的矩阵而说过了.] 反之, 若有一通常的序列 (5), 则把它的所有项分开 (不管其位置) 成无穷组的无穷集合, 可能有许多方法将其表为有两个列表值的矩阵, 并根据这个矩阵组成累级数 (3). 自然地会提出由同样的项组成的级数 (6) 与 (3) 的联系问题.

**定理 1** 若级数 (6) 绝对收敛于和  $U$ , 则不管它的各项怎样排列为矩阵 (1) 的形式, 累级数 (3) 收敛, 同时具有相同的和.

**证明** 按照假设, 级数

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_r| \quad (6^*)$$

收敛; 用  $U^*$  表示它的和.

于是, 首先对任意的  $n$  与  $k$ ,

$$\sum_{i=1}^n |a_i^{(k)}| \leq U^*,$$

由此得出级数  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$  的收敛性 [365], 而意味着级数  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$  的收敛性 [377] (对任意的  $k$ ).

其次, 对任意数  $\varepsilon > 0$ , 存在这样的  $r_0$ , 使得

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| < \varepsilon. \quad (7)$$

因此, 更加有

$$\left| \sum_{r=r_0+1}^{\infty} u_r \right| = \left| U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| < \varepsilon. \quad (8)$$

若  $n$  与  $m$  充分大, 则级数 (6) 的项  $u_1, u_2, \dots, u_r$  含于矩阵 (1) 的前  $n$  行与前  $m$  列之中, 比如说当  $n > n_0, m > m_0$  时. 那么对于所说的  $n$  与  $m$ , 表达式

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r$$

是号码大于  $r_0$  的那一些项  $u_r$  的和, 根据 (7) 式, 按绝对值  $< \varepsilon$ . 令  $m \rightarrow \infty$  取极限 (对于  $n > n_0$ ), 得

$$\left| \sum_{k=1}^n A^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| \leq \varepsilon$$



于是, 由于 (8) 式,

$$\left| \sum_{k=1}^n A^{(k)} - U \right| < 2\varepsilon,$$

由此得出累级数 (3) 的收敛性, 并且就收敛于和  $U$ .

**附注** 矩阵 (1) 的某些行可能由有限数目的项组成; 容易把结果推广到这种情形.

如果我们记起, 在 386 目, 把一个简单级数的项分成有限组, 同时不破坏它们的位置次序, 那么很明显, 定理 1 陈述了对绝对收敛级数 (相容地) 结合性质与交换性质的一种深刻的推广.

“逆定理”仅在对累级数作很强的假定下才成立.

**定理 2** 设给定累级数 (3), 若将其各项代之以各项的绝对值, 得到的是收敛级数, 则不仅级数 (3) 收敛, 而且由与级数 (3) 相同、按任意次序放置的项组成的简单级数 (6) 也收敛, 且收敛于同一个和.

**证明** 按照假设, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$$

收敛; 设  $A^*$  是它的和. 对任意  $n$  与  $m$  有

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)}| < A^*. \quad (9)$$

现在取级数 (6\*) 的任意部分和:

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|.$$

对于充分大的  $n$  与  $m$ , 诸项  $u_1, u_2, \cdots, u_r$  将包含于矩阵 (1) 的前  $n$  行及前  $m$  列中. 那么, 从 (9) 式得出

$$U_r^* < A^*.$$

级数 (6\*) 收敛, 即级数 (6) 绝对收敛.

余下的是应用定理 1.

显然, 关于累级数 (3) 所说的一切, 对累级 (4) 也都成立, 于是作为上述诸定理的推论, 得到如下命题, 它通常是有益的<sup>①</sup>.

<sup>①</sup>在德文文献中, 这个命题被称为 “grosser Umordnungssatz”.



**定理 3** 设给定矩阵 (1). 若将级数 (3) 的各项代之以其各项的绝对值, 得到收敛级数, 则两个累级数 (3) 与 (4) 收敛, 并具有同一个和:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

**394. 二重级数** 二重级数概念与无穷长方矩阵(1)有关. 这就是符号

$$\begin{aligned} & a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \cdots + a_i^{(1)} + \cdots \\ & + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \cdots + a_i^{(2)} + \cdots \\ & \dots\dots\dots \\ & + a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + \cdots + a_i^{(k)} + \cdots \\ & + \dots\dots\dots \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \end{aligned} \quad (10)$$

限于前  $m$  列与前  $n$  行, 考虑有限和

$$A_m^{(n)} = \sum_{i,k=1}^{i=m, k=n} a_i^{(k)},$$

这和叫做给定二重级数的部分和. 我们将同时增大彼此无关的数  $m$  与  $n$ , 使他们趋于无穷., 如果存在着极限

$$A = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m^{(n)},$$

这极限是有限的或无穷的 (但有确定的正号或负号), 则称这极限为二重级数的和, 并写

$$A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

如果级数 (2) 具有有限和, 则称它是**收敛的**, 在相反的情形下, 则称它是发散的.

我们回到前面一节 [389] 以通项是

$$c_i^{(k)} = a_i b_k,$$

的情形作为矩阵 (7) 的例子. 在这种情形, 部分和显然等于 (如果保持以前的记号)

$$C_m^{(n)} = A_m B_n,$$

于是, 相应于这个矩阵所组成的二重级数恒收敛, 并且具有和

$$C = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m B_n = AB. \textcircled{1}$$

<sup>①</sup>由此可见, 若两个收敛的简单级数的乘积表为**二重级数**的形式, 则后者的和总是  $AB$ : 难点在于, 要证明用简单级数来表示级数乘积的同样关系.



容易把以常数乘收敛级数的各项的定理及两个收敛级数相加或相减的定理 [364, 3° 与 4°] 搬用到二重级数上来; 证明留给读者去作.

完全同样地, 二重级数收敛性的必要条件也是通项趋于 0:

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} a_i^{(k)} = 0$$

[比较 364, 5°]. 这从下面的公式一下子就可看出:

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)} \quad 58)$$

自然地要把二重级数 (10) 与前面研究过的累级数 (3) 与 (4) 加以比较. 因为

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} \right\}$$

所以, 在这儿固定  $n$  后取极限, 当  $m \rightarrow \infty$  时 (假定, 行级数收敛) 得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^n A^{(k)},$$

现在显然可见, 累级数 (3) 不是别的, 而正是累极限

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n)} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} A_m^{(n)} \right]$$

两个累级数 (3) 与 (4) 的和相等的问题是二个累极限相等的特殊情况.

把第 168 目中关于二重极限与累极限的一般定理应用到所考虑的情形上去<sup>①</sup>, 得到这样的结果:

**定理 4** 若 1) 二重级数 (10) 收敛而且 2) 所有的行级数收敛, 则累级数 (3) 收敛, 并具有与二重级数相同的和:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \left[ \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \right]$$

对于第二种累级数 (4), 类似的定理也成立.

二重级数收敛性的问题, 对于正项级数的情形可直接解决, 所谓正项级数即是级数的所有的项都是非负的:  $a_i^{(k)} \geq 0$ .

<sup>①</sup>这儿  $m$  与  $n$  起自变量的作用, 而部分和  $A_m^{(n)}$  则起它们的函数的作用.

58) 注意, 和通常的序列与级数不同, 如同收敛的二重级数一样, 收敛于零的二重序列可能并不有界. 例如, 若  $a_1^{(k)} = k = -a_2^{(k)}$  及  $a_i^{(k)} = 0$  (对所有  $k = 1, 2, \dots$  及  $i = 3, 4, \dots$ ), 则级数  $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$  收敛并有等于零的和; 同时不是对什么样的  $M$ , 不等式  $|a_i^{(k)}| \leq M$ , 对所有的  $i, k = 1, 2, \dots$  都能成立.



**定理 5** 若  $a_i^{(k)} \geq 0$ , 则级数 (10) 收敛的充分必要条件是它的部分和有界.

**证明** 这个断言的必要性是明显的. 欲证充分性. 设  $A_n^{(m)} \leq L$ . 取和  $A_m^{(n)}$  的集合的上确界:

$$A = \sup\{A_m^{(n)}\}.$$

现在要证, 这个上确界就是给定级数的和.

给定任意  $\varepsilon > 0$ . 依上确界定义, 可以找到这样的部分和  $A_{m_0}^{(n_0)}$ , 使得

$$A_{m_0}^{(n_0)} > A - \varepsilon.$$

如果取  $m > m_0, n > n_0$ , 那么就更加有

$$A_m^{(n)} > A - \varepsilon,$$

因为  $A_m^{(n)}$  显然随着两个附标  $n$  与  $m$  的增大而增大.

因为每一部分和不超过  $A$ , 所以可以写

$$|A_m^{(n)} - A| < \varepsilon (\text{当 } m > m_0, n > n_0 \text{ 时}),$$

这就表示

$$A = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m^{(n)},$$

亦即, 级数 (10) 收敛.

在这个定理的基础上, 可以确立类似 366 目定理 1 的, 正项二重级数的比较定理; 这留给读者去作.

现在考虑由矩阵组成的二重级数, 而矩阵中的元素不都是正的. 显然如对简单级数那样, 在研究中应除去这样一些情况: 当全部元素都是负的; 或仅仅有有限多个元素是正的或负的, 因为所有这些情况都可归结到已研究过的情形. 所以我们假设, 在所考虑的矩阵 (1) 中, 也意味着在级数 (10) 中, 无论是正的元素, 还是负的元素都是无穷集合.

除矩阵 (1) 外, 从元素的绝对值再作一个矩阵

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & & & & & \\ \begin{array}{c} |a_1^{(1)}| \\ |a_1^{(2)}| \\ \dots\dots\dots \\ |a_1^{(k)}| \\ \downarrow \dots\dots \end{array} & \begin{array}{c} |a_2^{(1)}| \\ |a_2^{(2)}| \\ \dots\dots\dots \\ |a_2^{(k)}| \\ \dots\dots\dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} & \begin{array}{c} |a_i^{(1)}| \\ |a_i^{(2)}| \\ \dots\dots\dots \\ |a_i^{(k)}| \\ \dots\dots\dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} & & \\ & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & & & & & \end{array}$$

并从这个矩阵作二重级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|. \quad (10^*)$$



与第 377 目关于简单级数的定理相类似, 在这儿也有

**定理 6** 若由给定级数 (10) 的项的绝对值所组成的级数 (10\*) 收敛, 则给定级数也收敛.

**证明** 表示  $a_i^{(k)}$  成为下面的形状:

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)},$$

其中

$$p_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| + a_i^{(k)}}{2}, \quad q_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| - a_i^{(k)}}{2}$$

因为  $p_i^{(k)} \leq |a_i^{(k)}|, q_i^{(k)} \leq |a_i^{(k)}|$ , 所以从二重级数 (10\*) 的收敛性可推得下列二重级数的收敛性:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q.$$

但这时级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} (p_i^{(k)} - q_i^{(k)})$$

也收敛, 这就是具有和

$$A = P - Q.$$

若级数 (10\*) 与级数 (10) 同时收敛, 则级数 (10) 叫做**绝对收敛级数**. 若级数 (10) 收敛, 而级数 (10\*) 发散, 则级数 (10) 叫做**非绝对收敛级数**<sup>59)</sup>.

现在证明有关由同样的项组成的二重级数 (10) 与简单级数 (6) 之间联系的定理. 这个定理与定理 1、定理 2 类似.

**定理 7** 设给定由同样的项组成的二重级数 (10) 与简单级数 (6). 那么, 从它们中一个级数的**绝对收敛性**可引出另一级数的**绝对收敛性**, 并且二者的和相等.

**证明** 首先假设二重级数 (10) 绝对收敛, 即级数 (10\*) 收敛; 后者的和记为  $A^*$ . 取任意一个自然数  $r$ , 构成级数 (6\*) 的部分和

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|.$$

如同在证明定理 2 时一样, 容易建立不等式  $U_r^* < A^*$ , 和它一同, 也建立了级数 (6) 的收敛性.

<sup>59)</sup> 二重级数的绝对收敛性 (与非绝对收敛不同) 已经导致其诸项的有界性 (若  $M = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ , 则显然  $|a_{ij}| \leq M$ ).



设现在已知, 简单级数 (6) 绝对收敛, 即级数 (6\*) 收敛; 级数 (6\*) 和记为  $U^*$ . 不管级数 (10\*) 取怎样的部分和

$$A_m^{*(n)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |a_i^{(k)}|,$$

都存在这样大的  $r$ , 使这个和的所有项都含于级数 (6\*) 的前  $r$  项之中, 于是

$$A_m^{*(n)} < U^*.$$

在这种情形下, 按照定理 5, 二重级数 (10\*) 收敛, 这意味着级数 (10) 绝对收敛.

最后, 为了计算级数 (6) 的和  $U$ ——由于它绝对收敛——可以把它的项按任意适当的次序排列 [387]. 我们按正方形的方式将 (1) 排列; 那么若还是把它的项合并, 不在同一正方形的各项排在其后, 便得到

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(n)} = A.$$

这就完成了证明.

对照定理 1,2 与 7, 最后我们叙述这样的

**★推论** 设矩阵 (1) 与序列 (5) 由同样的一些项组成. 那么二重级数 (10), 累级数 (3), (4), 最后, 简单级数 (6)——若至少其中之一, 当其各项代之以各项的绝对值时是收敛的——则所有四者都是收敛的, 并具有同样的和.

### 395. 例题

1) 下面的矩阵给出一个有兴趣的例子 ( $0 < x < 1$ ):

$x$	$-x^2$	$x^2$	$-x^3$	$x^3$	$\dots$
$x(1-x)$	$-x^2(1-x^2)$	$x^2(1-x^2)$	$-x^3(1-x^3)$	$x^3(1-x^3)$	$\dots$
$x(1-x)^2$	$-x^2(1-x^2)^2$	$x^2(1-x^2)^2$	$-x^3(1-x^3)^2$	$x^3(1-x^3)^2$	$\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots$

这儿行级数绝对收敛并分别具有和  $x, x(1-x), x(1-x)^2, \dots$  由这些和组成的级数也绝对收敛; 它的和等于 1. 然而, 另一种累级数却不收敛, 因为列级数具有轮流等于 +1 或 -1 的和.

这件事事实丝毫也不与定理 2 矛盾, 因为对于由绝对值得到的矩阵来说, 任何一种累级数都不收敛. 我们只看出, 行 (或列) 级数的绝对收敛性与由它们的和组成的级数的绝对收敛性的假定, 并不能代替使绝对值矩阵的累级数收敛的要求.



2) 我们来举出著名的“约翰·伯努利悖论”. 考虑如下正矩阵 (其中缺失的项可以用零代替):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \rightarrow & \\
 & & & & & & \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \cdot 2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \cdot 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \cdot 4 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \cdot 5 \end{array} & \cdots & \\
 & & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \cdot 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \cdot 4 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \cdot 5 \end{array} & \cdots & \\
 & & & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \cdot 4 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \cdot 5 \end{array} & \cdots & \\
 & & & & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \cdot 5 \end{array} & \cdots & 
 \end{array}$$

并认为与这个矩阵的相应的两个累级数的和相等. 若起初按行求和, 便得诸和 [比较 25,9]):  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , 由这些和组成调和级数, 这个调和级数的和记为  $s$ . 若按列求和 (所有这些列都只包含有限项!), 便导致结果:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ; 由这些数组成了缺少第一项的调和级数, 其和为  $s - 1$ . 于是  $s = s - 1$ !

当然, 事实上这个“悖论”仅仅是证明了相反的事实: 和  $s$  不可能是有限数, 即调和级数发散.

3) 设  $q$  遍历以自然数为底及指数 (大于 1) 的, 所有可能的乘幂, 并且每一个乘幂只通过一次. 求证

$$G = \sum_q \frac{1}{q-1} = 1.$$

[哥德巴赫(Goldbach).]

如果  $m$  取不是乘幂的所有可能的自然数值 ( $> 1$ ), 则

$$\begin{aligned}
 G &= \sum_m \frac{1}{m^2-1} + \sum_m \frac{1}{m^3-1} + \cdots = \sum_m \left\{ \frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^3-1} + \cdots \right\} \\
 &= \sum_m \left\{ \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots \right) + \cdots \right\} \\
 &= \sum_m \left\{ \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots \right) + \cdots \right\} \\
 &= \sum_m \left\{ \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m^2-1)} + \frac{1}{m^3(m^3-1)} + \cdots \right\}.
 \end{aligned}$$

由此

$$G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

其中  $n$  在这次就遍历从 2 开始的所有的自然数值, 于是, 实际上,  $G = 1$  [25,9)].

[引用已证明过的定理来论证的工作, 留给读者去做.]

把这个结果跟下面的施泰纳 (Steiner) 的结果相比较, 是很有趣的:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

(这儿乘幂可以出现不止一次!)



4) 考虑具有通项

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\cdots(k+i)}$$

的矩阵, 利用在 363 目, 4) 中所建立的关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)} \quad (11)$$

(当  $\alpha=0, p=k$  时), 容易把第  $k$  行求和:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2};$$

由此, 累级数的和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (12)$$

由于  $a_i^{(k)}$  的表示式关于  $i$  与  $k$  是对称的, 另一个累级数与第一个相等, 把二者的和相比较并不能给出任何新的东西.

现在把矩阵这样变形: 在第  $m$  行中使前  $m-1$  项保持原状, 而第  $m$  项代之以第  $m$  行从第  $m$  项开始的所有项的和  $r_m$ , 而丢掉其余的项. 对于新矩阵

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \\ \begin{array}{c} r_1 \\ a_1^{(2)} \\ a_1^{(3)} \\ \dots \\ a_1^{(m)} \\ a_1^{(m+1)} \\ \dots \\ \dots \end{array} & & \begin{array}{c} r_2 \\ a_2^{(3)} \\ \dots \\ a_2^{(m)} \\ a_2^{(m+1)} \\ \dots \\ \dots \end{array} & & \begin{array}{c} r_3 \\ \dots \\ a_3^{(m)} \\ a_3^{(m+1)} \\ \dots \\ \dots \end{array} & & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \\ & & & & \begin{array}{c} a_{m-1}^{(m)} \\ a_{m-1}^{(m+1)} \\ \dots \\ \dots \end{array} & & \begin{array}{c} r_m \\ a_m \\ r_{m+1} \\ \dots \end{array} & & r_{m+1} \end{array}$$

按行求和的诸级数的和, 与先前的第一个累级数的和仍旧一样. 对于按列计算诸级数的和,

$$\begin{aligned} r_m &= \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)\cdots(2m-1+n)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\cdots(2m-1)}; \end{aligned}$$

这里我们又利用了当  $\alpha=m-1, p=m$  的关系式 (11). 第  $m$  列其余各项的和等于

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\cdots(2m+n)} = \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots 2m}; \end{aligned}$$



[在 (11) 式中我们令  $\alpha = p = m$ ]. 最后,  $m$  列各项的和等于

$$3 \cdot \frac{(m-1)!}{m(m+1) \cdots (2m-1) \cdot 2m} = 3 \cdot \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}$$

根据定理 3, 比较这两个累级数的和, 我们得一个有趣的关系式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} \quad (13)$$

因为右边的级数收敛十分快, 它易于作为对等号左边重要级数和的近似计算. 此外, 今后 [440, 7)] 我们会看到, 推出的关系式可以把前一级数的和表为“有限形式”: 它等于  $\frac{\pi^2}{6}$  [这个结果属于欧拉].

5) 讨论限定在  $|x| < 1$  的假定下的兰伯特级数

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k}.$$

我们见过 [385, 5)], 在这假定下, 兰伯特级数对于与幂级数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

相同的  $x$  值收敛. 我们假定这级数的收敛半径  $R > 0$  [379], 并且认定  $|x| < R$ .

显然

$$\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + \cdots + x^{ik} + \cdots$$

现在把这些项乘以  $a_k$  后作矩阵, 把  $x$  的同次幂排在同一列 (空白处可用 0 补进):

$a_1 x$	$a_1 x^2$	$a_1 x^3$	$a_1 x^4$	$a_1 x^5$	$a_1 x^6$	$a_1 x^7$	$a_1 x^8$	$a_1 x^9$	$a_1 x^{10}$	$\cdots$
	$a_2 x^2$		$a_2 x^4$		$a_2 x^6$		$a_2 x^8$		$a_2 x^{10}$	$\cdots$
		$a_3 x^3$			$a_3 x^6$			$a_3 x^9$		$\cdots$
			$a_4 x^4$			$a_4 x^8$				$\cdots$
				$a_5 x^5$				$a_5 x^{10}$		$\cdots$
					$a_6 x^6$					$\cdots$
						$a_7 x^7$				$\cdots$
							$a_8 x^8$			$\cdots$
								$a_9 x^9$		$\cdots$
									$a_{10} x^{10}$	$\cdots$
									$\cdots$	$\cdots$
									$\cdots$	$\cdots$

按行的累级数恰好具有和  $\varphi(x)$ . 因为幂级数在以  $|x|$  代替  $x$ , 以  $|a_k|$  代替  $a_k$  时收敛, 而兰伯特级数随同幂级数也收敛, 所以可以应用定理 3 而按列相加. 我们得到  $\varphi(x)$  的幂级数展开式

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \text{ 并且 } \alpha_n = \sum_{k/n} a_k;$$



记号  $k/n$  习惯上表示, 累加号只遍取  $n$  的除数  $k$ .

例如, 令  $a_k = 1$  或  $a_k = k^{\textcircled{1}}$ , 就分别有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot x^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n,$$

其中  $\tau(n)$  表示  $n$  的所有除数的个数, 而  $\sigma(n)$  表示  $n$  的所有除数相加起来的和.

6) 把上题中所有的项按另一种方式排列, 使在矩阵中没有空白:

$$\begin{array}{cccccc} & \rightarrow & & & & \\ \downarrow & & & & & \\ a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & \cdots \\ a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & a_2x^8 & \cdots \\ a_3x^3 & a_3x^6 & a_3x^9 & a_3x^{12} & \cdots \\ a_4x^4 & a_4x^8 & a_4x^{12} & a_4x^{16} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

按行相加, 就保持与上题按行相加的同一和, 按列相加则依次得到:  $f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4) \cdots$ , 这样, 我们得到联系函数  $\varphi$  与  $f$  的恒等式:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n).$$

例如, 取  $a_k = a^k$ , 其中  $|a| \leq 1$ , 即有

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot x^n}{1-a \cdot x^n} (|a| \leq 1, |x| < 1).$$

7) 所得到的结果可以加以推广. 设给定两个幂级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{与} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

限制  $x$  的值为  $|x| < 1$ , 并且在这些  $x$  值时两个级数都绝对收敛.

以元素  $a_n b_m x^{mn}$  作矩阵. 因为 (对  $m > 1$  与  $n > 1$  说来)  $mn \geq m+n$ , 所以

$$|a_n b_m x^{mn}| \leq |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|.$$

由此容易断定, 对应于所取矩阵的二重级数绝对收敛. 根据推论, 由于两种累级数的和相等, 我们得到恒等式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

由此, 当  $b_m = 1$  时  $\left[ \text{于是 } g(x) = \frac{x}{1-x} \right]$ , 可得到上题的恒等式.

<sup>①</sup>在两种情形下都容易验明,  $R=1$ , 于是只要简单地认定  $|x| < 1$  就够了.



## 8) 级数

$$\left\{ \sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k \right\}$$

可从级数  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$  与  $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$  相乘得到, 后面两个级数当  $|x| < 1$  与  $|y| < 1$  时 (绝对) 收敛; 对于这些  $x, y$  值来说, 二重级数也 (绝对) 收敛.

若  $|x| > 1$  或  $|y| > 1$ , 则违反收敛性必要条件: 通项不趋于 0, 级数发散. 容易直接验证, 发散性在  $|x| = 1$  或  $|y| = 1$  的情形时也出现.

## 9) 考虑级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} (\alpha > 0, \beta > 0).$$

这级数也从级数  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}}$  与  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}}$  相乘得到, 后二者当  $\alpha > 1$  与  $\beta > 1$  时收敛, 于是二重级数在这些假定下也收敛.

反之, 如果  $\alpha \leq 1$  (或  $\beta \leq 1$ ), 则二重级数一定发散, 因为这时所有行 (或列) 级数发散 (比较前一目的推论).

## 10) 研究下面级数的收敛性:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^{\sigma}} (\sigma > 0).$$

为此, 把级数的项依对角线排列起来后, 把级数表示成为简单级数的形状. 因为在同一对角线上的项都相等, 所以, 为计算方便起见把它们合并起来后, 得到级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

由于显然的不等式

$$\frac{1}{2}n \leq n-1 < n,$$

以  $n^{\sigma}$  除后, 即有

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\sigma-1}} \leq (n-1) \cdot \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \frac{1}{n^{\sigma-1}}.$$

由此明白看出, 我们所得到的简单级数当  $\sigma > 2$  时收敛, 而当  $\sigma \leq 2$  时发散. 根据定理 7, 对二重级数说来, 这同样是正确的.

## 11) 现在考虑更复杂的级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(Ai^2 + 2Bik + Ck^2)^{\rho}} \quad (\rho > 0),$$

其中二次型  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  假定是正定的, 于是  $\Delta = AC - B^2 > 0$ , 并且  $A, C > 0$ .

如果用  $L$  表示数  $|A|, |B|, |C|$  中最大的一个, 那么, 显然,

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 \leq L(i+k)^2, a_i^{(k)} \geq \frac{1}{L^{\rho}} \cdot \frac{1}{(i+k)^{2\rho}}.$$

在这情形下, 从 10) 显然看出, 当  $\rho \leq 1$  时给定级数发散.



另一方面, 有

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 = \frac{1}{C}[(AC - B^2)i^2 + (Bi + Ck)^2] \geq \frac{\Delta}{C}i^2,$$

于是

$$a_i^{(k)} \leq \frac{C^\rho}{\Delta^\rho} \cdot \frac{1}{i^{2\rho}}, \text{ 并且, 类似地, } a_i^{(k)} \leq \frac{A^\rho}{\Delta^\rho} \cdot \frac{1}{k^{2\rho}}.$$

由此容易得到

$$a_i^{(k)} \leq \left( \frac{\sqrt{AC}}{\Delta} \right)^\rho \cdot \frac{1}{i^\rho \cdot k^\rho}.$$

把这跟 9) 比较, 我们看出, 当  $\rho > 1$  时, 所考虑的级数收敛.

12) 在定理 4 中, 与关于二重级数收敛的假设同时, 还特别作了所有行级数都收敛的假定. 下面的简单例子表明: 没有第二个假设是不行的 —— 它不能从第一个假设得出. 照如下图式的二重级数:

$$\begin{array}{cccccc} & \rightarrow & & & & \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \cdots \\ & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \downarrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

是收敛的, 其和为 0. 同时, 所有的行级数发散.

13) 确定下列二重级数的和:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1} (p > -1); \quad \text{(б)} \quad \sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2; \\ \text{(B)} \quad & \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln 2; \quad \text{(Г)} \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{1}{4} \ln 2; \\ \text{(Д)} \quad & \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

提示 从按  $m$  求和开始, 变为累级数. 利用展开式

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots &= \ln 2, \\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

作为已知.

14) 考虑两个变量的函数

$$\varphi(x, z) = e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} \quad (z \neq 0).$$

把绝对收敛级数

$$e^{\frac{x}{2} \cdot z} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^i \cdot \frac{z^i}{i!}, \quad e^{-\frac{x}{2} \cdot z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^k \frac{(-1)^k}{k!} \cdot z^{-k}$$



相乘, 就得到对这个函数而言的 (也绝对收敛的) 二重级数:

$$\varphi(x, z) = \sum_{i, k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{i+k} \frac{(-1)^k}{i!k!} z^{i-k}.$$

把  $z$  的同一幂次的项收集在一起 (推论), 可以把二重级数变形成为累级数

$$\varphi(x, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot z^n \textcircled{1},$$

其中对于  $n \geq 0$  说来

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

$$J_n(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

而对于  $n < 0$  说来

可是, 容易看出,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

函数  $J_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$  叫做带下标  $n$  的贝塞尔函数; 这些函数在数学物理、天体力学等学科中起着重要的作用. 函数  $\varphi(x, z)$  (从它的展开式可以得到贝塞尔函数) 叫做贝塞尔函数的“母函数”.

**396. 两个变量的幂级数; 收敛区域** 按变量  $x$  与  $y$  的正整数幂次排列的形如

$$\sum_{i, k=0}^{\infty} a_{i, k} x^i y^k \tag{14}$$

的二重级数, 叫做两个变量  $x, y$  的幂级数.

我们仅限于研究收敛幂级数 (14) 的一种形式, 即是绝对收敛. 与此相联系的是, 我们把绝对收敛的两个变量的幂级数简称为“收敛的”级数; 在不存在绝对收敛性时, 我们便说级数“发散”.

像我们在 379 目中对简单幂级数作过的那样, 在这儿我们也提出问题: 说明级数 (14) 的“收敛区域”(即是使级数收敛的那些平面点的集合  $M = \{M(x, y)\}$ ) 的形状.

**引理** 若级数 (14) 在某一点  $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$  (绝对) 收敛, 这点的两个坐标都异于 0, 则级数在满足不等式  $|x| < |\bar{x}|, |y| < |\bar{y}|$  的所有的点 (即是, 在以坐标的原点为中心而以点  $\overline{M}$  为一个顶点的整个开矩形内) (绝对) 收敛.

<sup>①</sup>级数  $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$  按照定义, 是下列两个级数的和数:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$



证明与 379 目引理的证明完全类似. 从级数 (14) 的项当  $x = \bar{x}, y = \bar{y}$  时的有界性

$$|a_{i,k}\bar{x}^i\bar{y}^k| \leq L \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

可得

$$|a_{i,k}x^iy^k| \leq L \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^i \left|\frac{y}{\bar{y}}\right|^k,$$

于是 —— 只要  $|x| < |\bar{x}|, |y| < |\bar{y}|$  —— 在右端我们有收敛级数的通项 [395,8)]; 由此即推知级数 (14) 的绝对收敛性.

我们只着手研究这样一些级数, 对它们说来, 有类似  $\bar{M}$  的点存在; 至于其他的级数, 我们并不发生兴趣. 由于引理的特性, 容许了我们只要限制我们的讨论在坐标的第一象限内; 由此所得到的结果 —— 按对称性质 —— 可以很容易地推广到其他象限内.

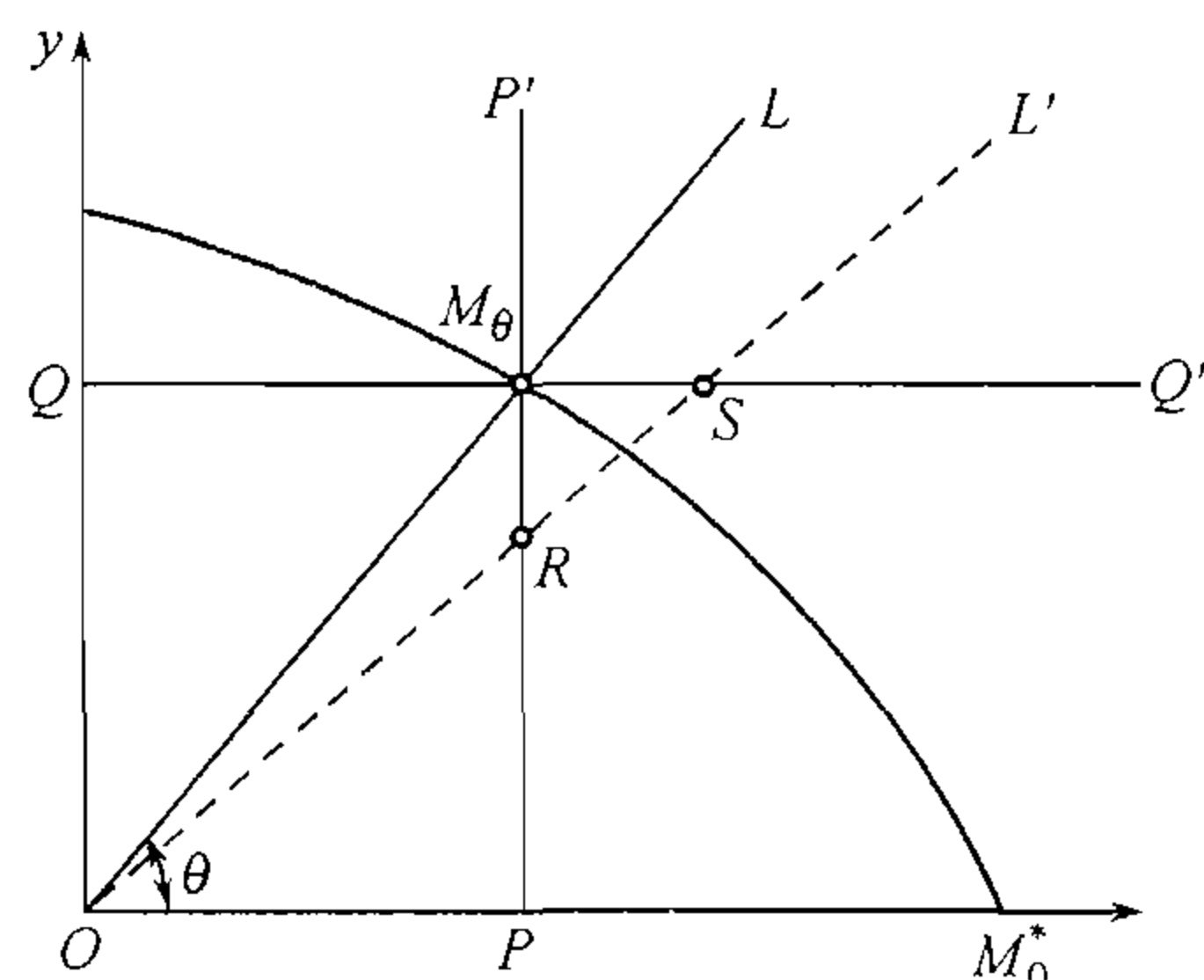


图 55

在第一象限内取从原点开始的射线  $OL$ , 它与  $x$  轴构成角  $\theta$  (图 55). 与 379 目中一样, 利用引理, 可以证明: 我们可找到这样的正数  $R(\theta)$  (它也可能是无穷), 使得在这射线上的所有的点  $M$  中, 对于

$$\overline{OM} < R(\theta)$$

的那些点  $M$  说来, 级数 (14) (绝对) 收敛, 可是, 当

$$\overline{OM} > R(\theta)$$

时, 级数 (14) 发散.

如果至少对于一条射线说来,  $R(\theta) = +\infty$ , 那么, 由于引理, 级数在全平面上是 (绝对) 收敛的, 这时全平面就是 “收敛区域”  $\mathcal{M}$ .

现在除去处处收敛的级数这种情形. 于是  $R(\theta)$  就是  $\theta$  的有限函数, 并且在每一条射线  $OL$  上都可找到一个界点  $M_\theta$ , 对于这界点, 有

$$\overline{OM_\theta} = R(\theta).$$

点  $M_\theta$  把射线上使级数 (绝对) 收敛的点  $M$  同使级数发散的点分开; 而在点  $M_\theta$  本身上, 要看情况, 级数可能收敛, 也可能发散.

如果过  $M_\theta$  作铅垂线  $PP'$  与水平线  $QQ'$  (看图 55), 那么, 在矩形  $OPM_\theta Q$  内部级数显然收敛, 而在角  $Q'M_\theta P'$  内部级数显然发散 (根据引理!). 因此, 在对应于任何另一角度  $\theta'$  的新射线  $OL'$  上, 沿着  $OR$  上的点将是收敛性的, 而沿着  $SL'$  上的点将是发散性的. 因而, 在这条射线上的界点  $M_{\theta'}$ , 应当位于  $R$  与  $S$  之间. 由此容易看



出, 当  $\theta$  由 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时,  $R(\theta)$  连续地变着, 于是点  $M_\theta$  在第一象限内画出一条连续的边界曲线.

因为当  $\theta$  减小时, 点  $M_\theta$  的横坐标  $x_\theta$  不递减, 而它的纵坐标  $y_\theta$  不递增, 所以当  $\theta \rightarrow 0$  时二者都具有极限值. 于是, 显然,  $R(\theta)$  也具有极限值. 如果这极限

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} R(\theta) = R_0$$

是有限的, 则点  $M_\theta$  趋于  $x$  轴上的某一极限点  $M_0^*(R_0, 0)$ , 而在相反的情形下, 边界曲线具有与  $x$  轴平行的渐近线 (这渐近线可能就是  $x$  轴本身). 把  $x$  换成  $y$  后, 容易把所有这些说明转用到  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  的情形上去.

**附注** 可是, 不应当以为刚才讲到的极限点  $M_0^*$  必须跟  $x$  轴本身上的边界点  $M_0$  重合. 点  $M_0$  可以在  $M_0^*$  的更右面 (甚至位于无穷远处). 这一可能性不应当使读者惊讶, 因为引理及根据这引理所建立起来的那些推论, 仅与坐标轴外的点有关.

现在在其他象限中作出 (对于二坐标轴与原点而言) 与第一象限中边界曲线对称的曲线. 用这方法我们得到一条完全的边界曲线, 这曲线事实上就定出我们感到兴趣的“收敛区域” $\mathcal{M}$ : 在有界曲线所划出的那块平面的内部, 级数 (16) (绝对) 收敛, 在那块平面的外部, 级数发散<sup>①</sup>, 在有界曲线本身的点上, 级数可能收敛, 也可能发散. 现在考虑一些例子.

**397. 例题** 1) 像在 395, 8) 中我们已经见过的级数

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k,$$

它的“收敛区域” $\mathcal{M}$  是开矩形  $(-1, 1; -1, 1)$  (图 56). 在这矩形的范围内, 级数的和是  $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$ .

2) 对于与上题类似的级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^i y^k,$$

(这儿指数  $i, k$  从 1 开始变化), 它的“收敛区域”包含着与上题同样的矩形组成的, 并连同两根坐标轴在一起. 在这情形下, 虽然上面讲到过的边界点  $M_0$  当  $\theta \rightarrow 0$  时也趋于  $x$  轴上的极限点  $M_0^*(1, 0)$ , 但收敛性在整个  $x$  轴上都成立 (参看附注).

3) 级数

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{x^i y^k}{i! k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!},$$

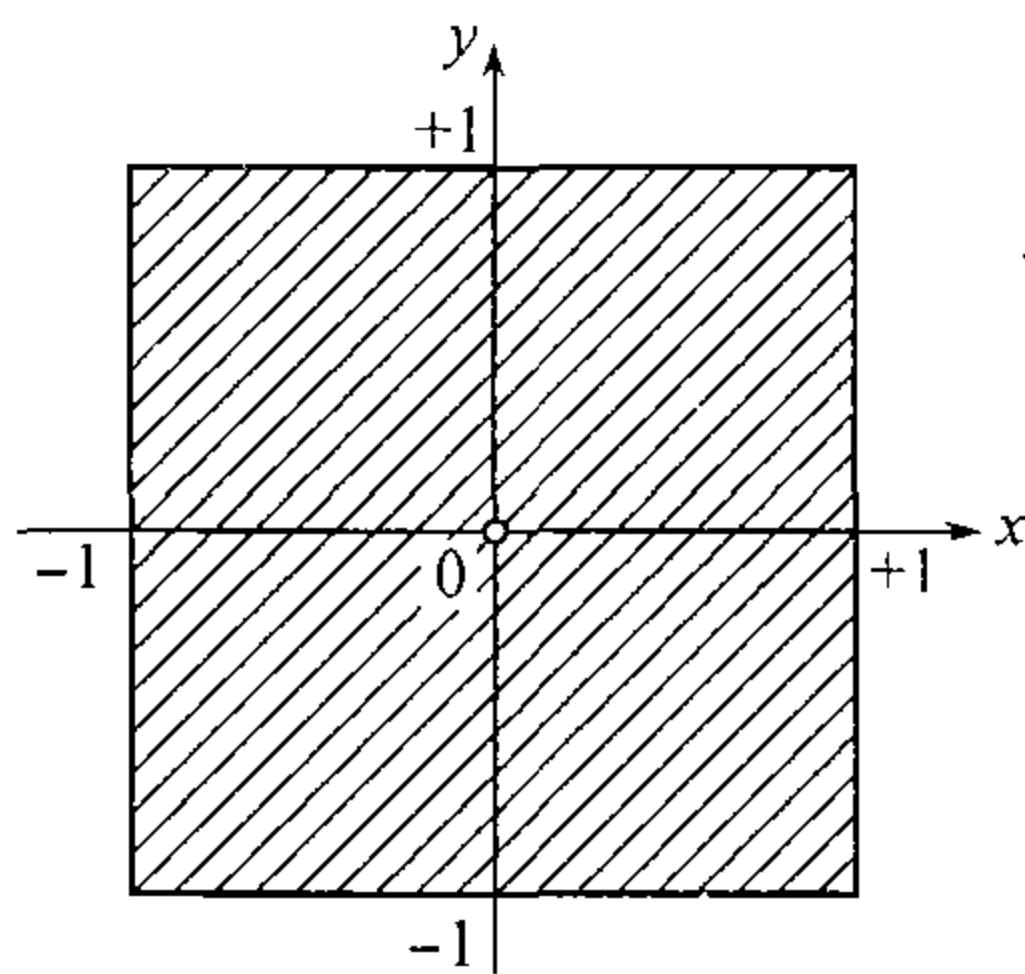


图 56

<sup>①</sup> 如果不算二坐标轴的话; 因为在有些情形下, 沿着这两根坐标轴, 像已经指出过的, 级数也可能在这界线范围外的点上收敛.



显然, 在全平面上绝对收敛.

4) 为了使级数

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!k!} x^i y^k,$$

绝对收敛, 亦即级数

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!k!} |x|^i |y|^k$$

收敛, 必要及充分条件是使级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x| + |y|)^n = \frac{1}{1 - (|x| + |y|)}$$

收敛, 这级数是上述二重级数按对角线相加得到的. 这使我们得到条件  $|x| + |y| < 1$ . 因而, 在这儿“收敛区域”是斜置的以  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$  为顶点的正方形 (图 57).

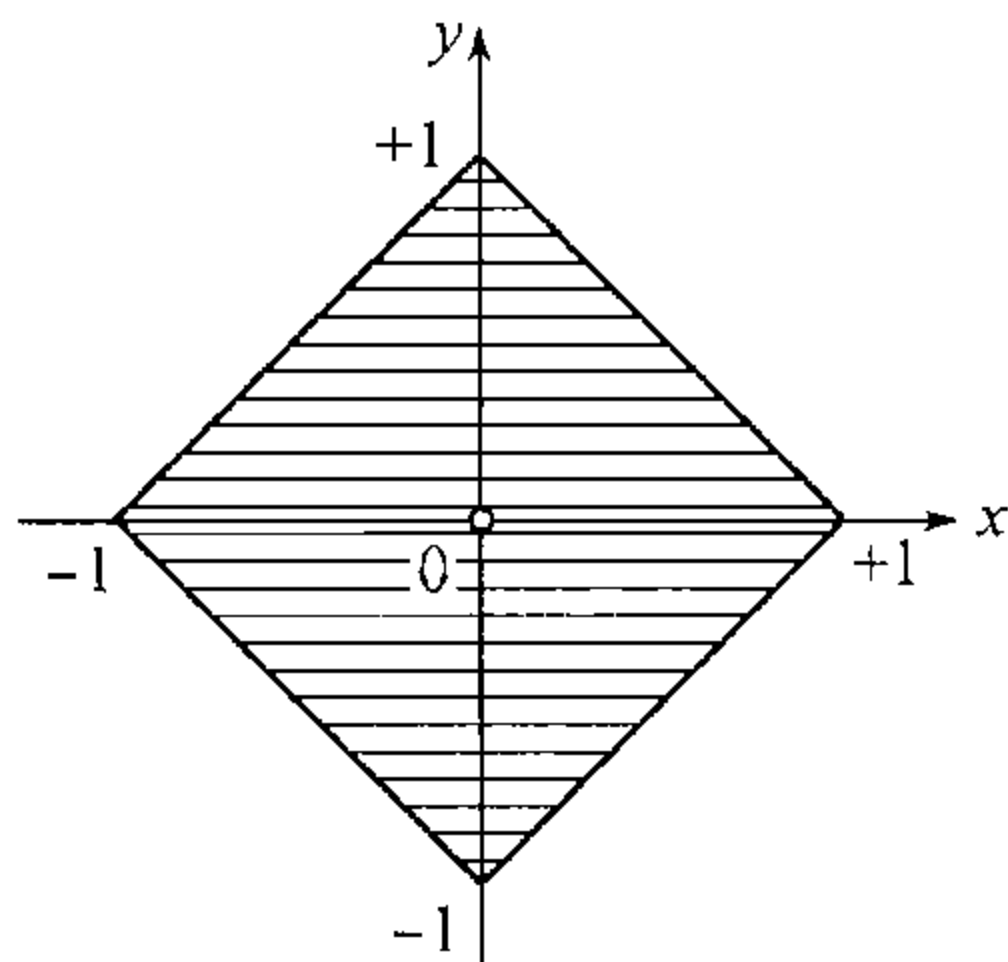


图 57

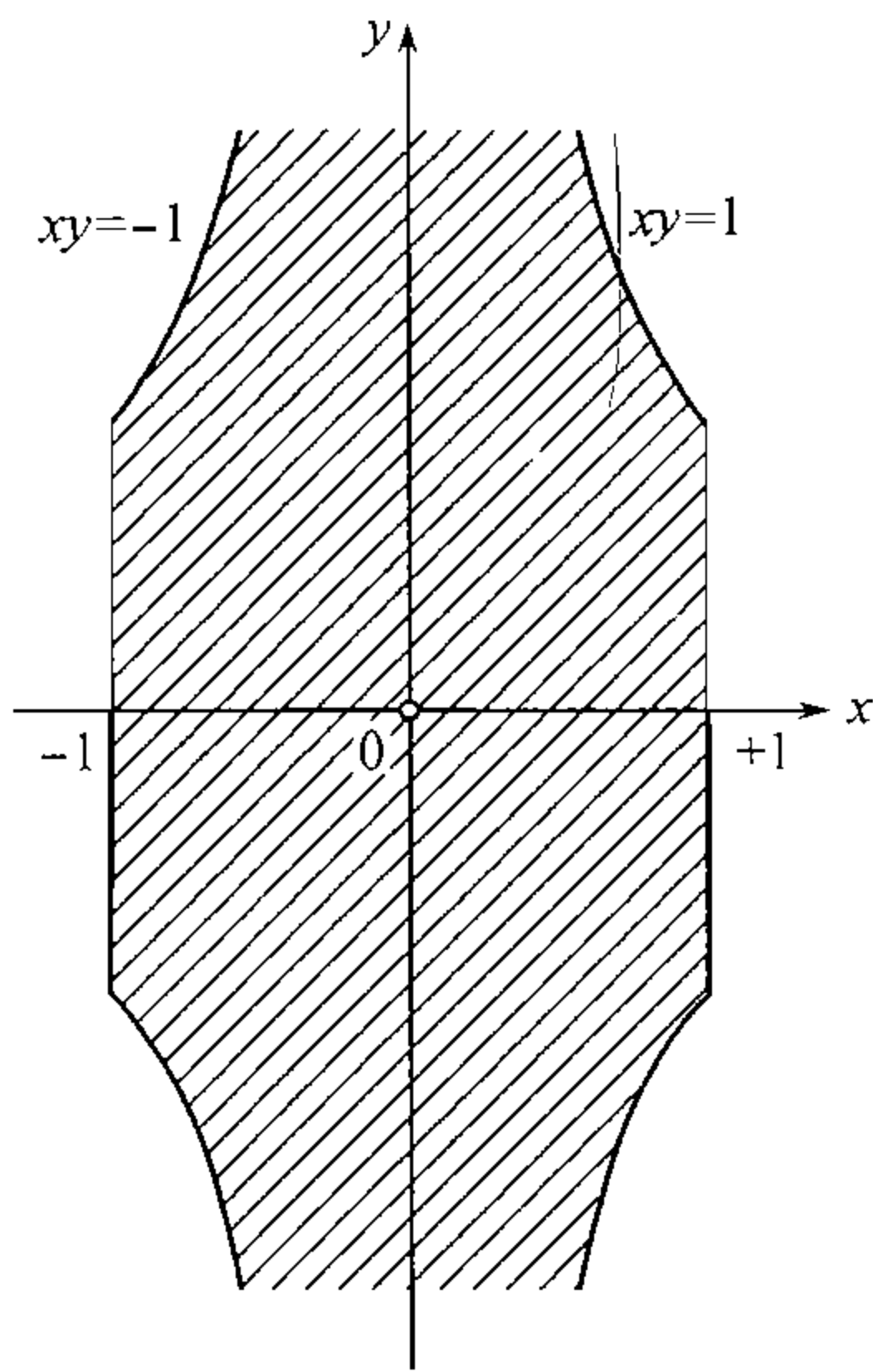


图 58

5) 最后, 考虑下面的二重级数:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq k} x^i y^k &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots + xy + x^2y + \cdots + x^m y + \cdots \\ &\quad + x^2y^2 + \cdots + x^m y^2 + \cdots + x^m y^m + \cdots \end{aligned}$$

假定这级数绝对收敛, 如果把它按横行加起来, 就得到

$$(1 + x + x^2 + \cdots)[1 + xy + (xy)^2 + \cdots] = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-xy}.$$

由此显然看出, 对于绝对收敛性说来, 必须  $|x| < 1, |xy| < 1$ ; 同时, 这些不等式也是充分的.“收敛区域”表示在图 58 上; 这区域上的曲线为等轴双曲线.



**398. 多重级数** 十分自然地产生了对于无穷级数的概念的更进一步的扩展. 设给定用  $s(s \geq 2)$  个下标  $i, k, \dots, l$  编号的无穷数组

$$u_{i,k,\dots,l}$$

这些下标中的每一个都彼此无关地取所有可能的自然数值. 在这情形下, 符号

$$\sum_{i,k,\dots,l=1}^{\infty} u_{i,k,\dots,l}$$

就叫做**多重**(更精确地说是  $s$ -重)级数.

如果级数的部分和数

$$U_{n,m,\dots,p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \cdots \sum_{l=1}^p u_{i,k,\dots,l}$$

当  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty$  时趋于有限或无穷 (但有确定的正号或负号) 极限, 则这极限就是**级数的和**. 级数叫做**收敛的**, 如果它具有有限和的话.

多重级数中最重要的一类是**多变量的幂级数**:

$$\sum_{i,k,\dots,l=0}^{\infty} a_{i,k,\dots,l} x^i y^k \cdots z^l.$$

上述理论的基本概念及定理也可推广到多重级数上去.

## §6. 无穷乘积

**399. 基本概念** 如果

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \quad (1)$$

是某一给定的序列, 则由它们组成的符号

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n^{①} \quad (2)$$

叫做**无穷乘积**.

现在着手把 (1) 中的数连乘起来, 组成**部分乘积**

$$P_1 = p_1, P_2 = p_1 \cdot p_2, P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \dots, P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n, \dots \quad (3)$$

我们总是把这些部分乘积所作成的序列  $\{P_n\}$  跟符号 (2) 相参照.

①乘积的这样的表示法我们早已遇见过, 但那时只是有限多个因数.



如果部分乘积  $P_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时具有有限的或无穷的 (但有确定的正号或负号) 极限

$$\lim P_n = P,$$

则这个极限叫做乘积 (2) 的 值, 并写作

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

如果无穷乘积具有异于 0 的有限值  $P$ , 则乘积本身叫做 收敛的, 在相反的情形下, 乘积叫做发散的<sup>①</sup>.

为要使所有乘积的值等于 0, 只要乘积的因数中有一个是 0 就够了. 在以后的考虑中, 我们把这种情形除开, 于是我们恒有  $p_n \neq 0$ .

读者容易建立起跟无穷级数相似的那些事实 [362], 并可以认识到: 与级数相似, 考虑无穷乘积, 也仅只是研究序列及其极限的一种特殊形式. 熟悉这种形式是有用的, 因为在有些情形下, 这种形式比起另一些形式来是更方便的.

400. 例题 1)  $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$ .

因为部分乘积

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2},$$

所以无穷乘积收敛, 而它的值是  $\frac{1}{2}$ .

2) 沃利斯公式 [317]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)},$$

显然, 相当于数  $\frac{\pi}{2}$  的无穷乘积展开式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

这公式可化成下列公式:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

3) 证明 (当  $|x| < 1$  时)

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

<sup>①</sup>这样一来 (我们强调这点), 如果  $P = 0$ , 则乘积对我们说来是发散的. 虽然这个术语跟无穷级数中所采用的术语有些冲突, 但它是大家采用的, 因为它能使许多定理的叙述更为容易.



实际上, 连乘以后就容易断定

$$(1-x) \cdot P_n = (1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = 1-x^{2^n},$$

$$P_n = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}.$$

由此取极限, 就得到所求等式.

4) 在 54,7a) 中我们曾经有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} (\varphi \neq 0).$$

现在我们可以写成

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

特别地, 当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时, 得到展开式

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdots$$

如果回想一下

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 与 } \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos a},$$

则这个展开式可改写成下列的形状:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

[韦达 (F.Vieta)]. 这个公式与沃利斯公式一起, 在分析史上提供给我们最初两个无穷乘积的例子.

5) 在 315(10) 中, 对于第一类全椭圆积分, 我们确立了公式

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+k_1)(1+k_2) \cdots (1+k_n),$$

其中序列  $k_n$  用下面的递推关系式来确定:

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} \quad (k_0 = k).$$

这公式给出  $\mathbf{K}(k)$  的无穷乘积展开式

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+k_n).$$

6) 再考虑这样的无穷乘积:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

在给定情形中部分乘积具有下面的形状

$$P_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{e^{\ln n + C + \gamma_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot e^C \cdot e^{\gamma_n},$$



其中  $C$  是欧拉常数,  $\gamma_n$  是无穷小量 [367(4)]. 由此可知, 乘积收敛, 并且它的值

$$P = e^C.$$

**401. 基本定理 · 与级数的关系** 在无穷乘积 (2) 中弃去前  $m$  个项后, 得到余乘积

$$\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdots p_{m+k} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n, \quad (4)$$

它与无穷级数的余式完全类似.

1° 若乘积 (2) 收敛, 则对任何一个  $m$ , 乘积 (4) 也收敛; 反之, 从乘积 (4) 的收敛性可推出原来乘积 (2) 的收敛性<sup>①</sup>.

证明留给读者去作 [比较 364, 1°].

由此可见, 在无穷乘积的情形下, 弃去开头的有限多个因数或在前头加进一些新的因数, 也都不影响乘积的敛散性.

2° 若无穷乘积 (2) 收敛, 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m = 1$$

[参看 (4)].

这从等式

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

与  $P_m$  趋于  $P \neq 0$  推得.

3° 若无穷乘积 (2) 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

实际上,  $P_n$  与  $P_{n-1}$  同时趋于  $P$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[比较 364, 5°.]

我们不一一列举类似于无穷级数的其他无穷乘积的性质了. 现在我们来确立无穷乘积与无穷级数的收敛性间的关系, 这关系使我们能够把对于级数详尽地发展的理论直接对于乘积来利用.

在收敛乘积的情形下, 因数  $p_n$ , 从某处开始, 将全是正的 (3°). 而且, 由于 1°, 如果以后假定所有的  $p_n > 0$ , 并不因之破坏普遍性.

<sup>①</sup>提醒一下, 我们永远假定  $p_n \neq 0$ .



4° 无穷乘积 (2) 收敛的必要充分条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \quad (5)$$

收敛.

当这一条件满足时, 如果  $L$  是级数的和, 即有

$$P = e^L.$$

用  $L_n$  表示级数 (5) 的部分和后, 即有

$$L_n = \ln P_n, P_n = e^{L_n}.$$

从对数函数与指数函数的连续性, 现在推知, 如果  $P_n$  趋于有限正极限  $P$ , 则  $L_n$  趋于  $\ln P$ ; 反之, 如果  $L_n$  具有有限极限  $L$ , 则对于  $P_n$  而言, 极限是  $e^L$ .

在研究无穷乘积 (2) 的收敛性时, 令

$$p_n = 1 + a_n,$$

把乘积写成

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \quad (2^*)$$

再把级数 (5) 写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \quad (5^*)$$

这样常常是更方便的.

在这些表示法下, 我们有下面的简单定理:

5° 若至少对于充分大的  $n$  说来, 有

$$a_n > 0 (\text{或 } a_n < 0),$$

则乘积 (2\*) 收敛的必要充分条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6)$$

收敛.

因为对于乘积 (2\*) 与级数 (6) 的收敛性说来, 在每种情形下, 必要条件都是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (7)$$



[参看 3°], 所以我们假定这一条件是成立的. 于是即有关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

[77,5)(a)]. 在这样的情形下, 由于级数 (5\*) 与 (6) 二者的项从某处开始都保持一定的符号; 根据 366 目定理 2, 这二级数同时收敛或同时发散. 由此, 由于 4°, 就推出我们的断言.

回到一般的情形  $a_n \leq 0$ , 还要证明这样的定理:

6° 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (8)$$

与级数 (6) 同时收敛, 则无穷乘积 (2\*) 收敛.

事实上, 从 (8) 首先推出 (7). 回忆一下函数  $\ln(1 + x)$  依泰勒公式的展开式 [125,5)], 我们有

$$\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2),$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

由 366 目定理 2, 级数 (8) 的收敛性引出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1 + a_n)] \quad (10)$$

的收敛性. 因为已假定级数 (6) 是收敛的, 所以由此推出级数 (5\*) 的收敛性. 这里级数 (5\*) 是两个收敛级数的差. 剩下的事就只是应用定理 4° 了.

现在略为讨论一下无穷乘积“发散”于 0 的情形.

7° 无穷乘积 (2)[或 (2\*)] 具有零值的必要充分条件是级数 (5)[或 (5\*)] 具有和  $-\infty$ .

特别地, 若  $a_n < 0$  而级数 (6) 发散, 或级数 (6) 收敛但级数 (8) 发散, 则也有这样结果.

证明留给读者去作. 只是关于最后的假定, 我们指出, 从级数 (8) 的发散性, 由于 (9), 推出级数 (10) 的发散性, 级数 (10) 将有和  $+\infty$ . 而在这情形下, 由于级数 (6) 的收敛性, 显然可知级数 (5\*) 的和是  $-\infty$ .

最后, 我们利用乘积 (2)[或 (2\*)] 与级数 (5)[或 (5\*)] 之间的关系来建立无穷乘积绝对收敛性的概念. 无穷乘积在它的因数的对数所作的对应级数绝对收敛的情形时, 就叫做绝对收敛的.

第 387 目与第 388 目的研究使我们可能立即断定, 绝对收敛乘积具有可交换性, 可是非绝对收敛乘积显然不具有这一性质.



按照 5° 的范例, 容易证明

8° 乘积 (2\*) 绝对收敛性的必要充分条件是级数 (6) 的绝对收敛性.

402. 例题 1) 把上面证明的定理应用到下列无穷乘积上去:

(a)  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$  ( $x > 0$ ) 按照与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  同样的敛散情形, 当  $x > 1$  时收敛, 而当  $x \leq 1$  时发散 (5°); 类似地,  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right)$  当  $x > 1$  时收敛 (5°), 而当  $0 < x \leq 1$  时发散于 0 (7°).

(b)  $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$  当  $x > \frac{1}{2}$  时收敛: 即, 当  $x > 1$  时乘积绝对收敛, 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  收敛 (8°); 而当  $\frac{1}{2} < x \leq 1$  时乘积非绝对收敛, 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$  收敛 (6°); 最后, 当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时乘积的值是 0, 因为这两个级数中的第一个收敛, 而第二个并不收敛 (7°).

2) 设  $x_n$  是包含在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的任意序列. 这时乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \quad \text{与} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$


收敛与否, 要看级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$  是否收敛来决定.

首先假定, 序列  $x_n \rightarrow 0$ ; 这时, 这些论断可从 5° 与 7° 推出, 如果利用下列展开式 [125, 2) 与 3)] 的话.

$$\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2), \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2).$$

若  $x_n$  不趋于 0, 则同时级数也发散, 而两个乘积都具有零值<sup>①</sup>.

3) 从无穷乘积的理论容易得出阿贝尔定理: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是给定的正项级数,  $A_n$  表示其部分和, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$  与给定的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  同时收敛与发散 [参看 375, 4)]. 仅需要对发散情形证明. 若  $A_n \rightarrow \infty$ , 则无穷乘积  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \equiv \prod_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$  发散到 0, 于是 [根据 5°] 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$  发散.

 考虑重要的乘积

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

[以后, 在第 408 目中, 我们将看到, 这乘积代表函数  $\sin x$ ]. 设  $x \neq k\pi$ , 其中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

乘积的收敛性 (当然是绝对收敛性) 从级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 \pi^2}$  的收敛性可一下子推出. 如果把每一个因式分解成两个因式而把乘积写成下面的形状:

$$x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \cdots$$

那么, 因为  $1 - \frac{x}{n\pi} \rightarrow 1$ , 在所指出的因式分解下收敛性保持着, 乘积的值也保持着. 但这次由于级数

$$-\frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi} - \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} - \cdots - \frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi} - \cdots$$

<sup>①</sup>乘积具有确定的有限值, 可从它的所有因式都是真分式这点明白看出; 还有它的值不可能异于 0, 因为这是违反必要条件 (3°) 的.



的非绝对收敛性, 乘积的收敛性成为非绝对的, 于是这些因式不能任意调换位置.

现在以因式  $\left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm \frac{x}{n\pi}}$  代替每一因式  $1 \mp \frac{x}{n\pi}$ ; 容易看出, 这既不影响无穷乘积的收敛性, 也不影响它的值. 同时新的乘积也是绝对收敛的, 因为 [125,1)]

$$e^{\pm \frac{x}{n\pi}} = 1 \pm \frac{x}{n\pi} + \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm \frac{x}{n\pi}} = 1 - \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

并且从某处开始, 因式成为正真分式.

5) 证明恒等式 (当  $0 < q < 1$  时)

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}$$

(欧拉).

提示 两个乘积的收敛性都可借助于  $5^\circ$  来确定. 把它们中的第一个表示成下面的形状:

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}.$$

6) 证明 (当  $\alpha > \beta$  时)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = 0.$$

为此, 只要确立无穷乘积

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n} \equiv \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

的发散性或 [参看  $7^\circ$ ] 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

的发散性就够了. 而这容易从把所写出的级数跟调和级数相比较而推出.

附注 这个例子以及下面的几个例子在这方面是值得特别注意的, 即是, 这些例子指明: 利用相当发展了的无穷乘积的理论, 把寻求序列的极限的问题化成研究无穷乘积的问题, 有时确实是有利的.

7) 现在讲我们早在 370,2)(A) 与 378,1)(A) 中考虑过的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ . 我们曾把在收敛区间端点  $x = -\frac{1}{e}$  上级数的敛散情况留作悬案.

在这情形下可得到交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n},$$

它的项依绝对值单调递减. 回忆一下莱布尼茨定理 [381], 我们看出, 级数收敛性的论断由下面等式的存在来决定:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n} = 0.$$



因为这序列的第  $n+1$  个值跟第  $n$  个值的比值是

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

所以可把问题表示成等价的形式——求无穷乘值

$$\frac{1}{e} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

的值. 取对数, 得到 [125,5)]

$$\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = n \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是类型 (5) 的对数级数发散, 并具有和  $-\infty$ . 在这样的情形下 ( $7^\circ$ ), 无穷乘积的值 (所求极限也跟它一样) 实际上就是 0. 级数收敛.

8) 现在来全部解决当  $x = -1$  时, 在  $-1 \leq \gamma - \alpha - \beta \leq 0$  的假定下 (亦即这种情形我们曾留下了没有考虑过) 超越几何级数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{n! \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdots (\gamma + n - 1)} x^n$$

敛散情况的问题 [参看 372 与 378,4)].

这儿第  $n+1$  项系数跟第  $n$  项系数的比值等于

$$\frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)} = 1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| \leq L). \quad (11)$$

对于充分大的  $n$  值说来, 这比值是正的; 设  $\gamma - \alpha - \beta > -1$ , 于是比值到后来总是小于 1. 这样, 级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{n! \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdots (\gamma + n - 1)} \quad (12)$$

如果在弃去若干个开始项后, 就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了. 并在这儿, 把求通项的 (绝对值的) 极限化成确定无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)} \textcircled{1}$$

的值更为方便. 如果  $\gamma - \alpha - \beta > -1$  (像我们已经假定的), 则从 (11), 由于  $7^\circ$ , 可推知这乘积具有 0 值; 级数收敛.

在  $\gamma - \alpha - \beta = -1$  的情形时, 公式 (11) 得到下面的形状:

$$\frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| \leq L);$$

<sup>①</sup> 开始值  $n = n_0$  可假定为如此之大, 使得所有因数都是正的.



按照定理 5°, 无穷乘积的值异于 0, 对级数 (12) 说来违反了收敛性的必要条件, 级数发散.

我们终于完成了对超越几何级数敛散情况的研究. 所得结果可以作成下表:

$ x  < 1$		绝对收敛
$ x  > 1$		发散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$0 \geq \gamma - \alpha - \beta > -1$	非绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发散

9) 证明, 级数

$$\sum_{n=1}^\infty a_n(x^2 - 1)(x^2 - 2^2) \cdots (x^2 - n^2)$$

对所有  $x$  值收敛, 如果至少对一个非整数值  $x = x_0$  收敛的话 [斯特林 (Stirling)].

这级数的项与收敛级数

$$\sum_{n=1}^\infty a_n(x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2) \cdots (x_0^2 - n^2)$$

的项只相差因式

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2^2) \cdots (x^2 - n^2)}{(x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2) \cdots (x_0^2 - n^2)},$$

这些因式当  $n$  充分大时, 是单调变化着的.

还剩下的事只是确立它们的有界性(因为这时就可以应用阿贝尔判别法了), 为此目的, 最简单的办法是来断定无穷乘积

$$\prod_{n=1}^\infty \frac{x^2 - n^2}{x_0^2 - n^2}$$

的收敛性; 我们把它留给读者去作.

★ 考虑 (像欧拉所考虑过的) 无穷乘积

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^\infty \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}, \tag{13}$$

认定  $x$  异于 0, 并且异于所有负整数.

容易把它的普遍因式表示成这样:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

由此, 由于 8°, 推出给定乘积 (绝对) 收敛. 这乘积所确定的函数  $\Gamma(x)$  是 (在讲了初等函数以后) 在分析中考虑到的最重要的函数中的一个. 以后 [第十四章, §5] 我们要给这函数下一个另外的定义并更深入地研究它的性质.



因为第  $n$  部分乘积具有下面的形状:

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \cdot \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

所以就可以令

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \quad (14)$$

写出  $\Gamma(x+1)$  的类似的公式, 容易看出,

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+1+n} = x,$$

我们就得到一个简单而重要的关系式:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \quad (15)$$

如果令  $x$  等于自然数  $m$ , 就得到递推公式

$$\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m).$$

因为  $\Gamma(1) = 1$  (这很易验明), 所以由此得

$$\Gamma(m+1) = m!.$$

如果把等式

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} \text{ 与 } e^{Cx} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}$$

逐项相乘 (其中前者由 (13) 与 (15) 推出, 而后者容易从 400,6) 得出), 我们还可得到函数  $\Gamma$  的一个重要的公式, 即

$$e^{Cx} \cdot \Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

或

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}}. \quad (16)$$

这就是魏尔斯特拉斯公式.

现在讲一个也是属于欧拉的变换无穷乘积为级数的著名例子. 如果依递增的次序把素数记上号码:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots, p_k, \cdots,$$

则当  $x > 1$  时就有恒等式

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$



或

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

于是这一乘积表示黎曼函数  $\zeta(x)$  [365,2)].

按几何级数的求和公式, 我们有

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = 1 + \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^2)^x} + \cdots + \frac{1}{(p_k^m)^x} + \cdots$$

如果把对应于不超过自然数  $N$  的所有素数的有限个这种级数相乘起来, 那么部分乘积就等于

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad (17)$$

这儿一撇 “'” 表示累加号不是管到所有自然数, 而只是管到它们的那一部分 (还要管到 1), 这一部分自然数在分解成素因式的分解式中, 只包含已经引进的那些素数 (前面  $N$  个自然数当然具有这种性质). 由此, 更加有

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  的收敛性, 表示着这级数第  $n$  项后余式的右端表达式当  $N \rightarrow \infty$  时趋于 0; 取极限, 就得到所要求的结果.

12) 当  $x = 1$  时, 关系式 (17) 还保持有效, 由此

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = H_n,$$

于是当  $N \rightarrow \infty$  时, 这次  $P_1^{(N)} \rightarrow +\infty$ , 即是乘积

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

发散并具有值  $+\infty$ .

欧拉所给的素数集合是无穷的这一事实的新的证明, 就是根据上述结果得出的 (实质上, 在上面所作的讨论中, 我们并不会利用过素集合是无穷的这一事实); 事实上, 当这集合是有限时, 乘积就会具有有限值, 这与上述结果相矛盾. 如果把所得到的结果改写成

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0,$$

则由于  $5^\circ$ , 可以断定级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p_k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$



的收敛性. 此外, 这个重要的命题还给出素数增长的某一特征.[我们强调指出, 这一命题在断定调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的收敛性时是极有力的, 因为这儿只讲到调和级数的所有项的一部分.]

13) 类似地 (当  $x > 1$  时) 可以确立恒等式

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^x}\right) \left(1 - \frac{1}{5^x}\right) \left(1 + \frac{1}{7^x}\right) \left(1 + \frac{1}{11^x}\right) \cdots \left(1 \pm \frac{1}{p_{k+1}^x}\right) \cdots} = 1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \cdots$$

这儿在左端分母中的 + 或 - 号依据 (奇) 素数是否形如  $4n - 1$  或  $4n + 1$  来取定.

## §7. 初等函数的展开

403. 展开函数成幂级数; 泰勒级数 在第 379 目中我们已经考虑过形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (1)$$

的依  $x$  的乘幂展开的幂级数. 如果除去“处处发散”的级数, 则对每一个这样的级数说来, 存在着以点  $x = 0$  为中心, 从  $-R$  到  $R$  (这儿收敛半径  $R > 0$ , 但也可以是无穷) 的收敛区间. 这区间是否包含端点在内, 要看情况怎样来决定.

考虑依二项式  $x - x_0$  (代替  $x$ ) 的乘幂展开的更普遍形状的幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \quad (2)$$

这种级数跟形如 (1) 的级数没有本质上的差别, 因为用一个简单的变量替换:  $x - x_0 = y$  (只有变量表示法上的不同) 就可把它化成级数 (1). 对级数 (2) 说来, 如果它不是“处处发散”的, 也有收敛区间, 但这次中心是点  $x_0$ , 从  $x_0 - R$  到  $x_0 + R$ . 它的端点, 跟级数 (1) 的情形一样, 可以属于, 但也可以不属于区间内.

在以后几节中我们要详细地研究幂级数的性质, 它们在许多方面都与多项式相似. 多项式是幂级数的段 (部分和), 这使幂级数成为近似计算的便利的工具. 由于这个事实, 把预先给定的函数按  $x - x_0$  的乘幂 (特别情形, 按  $x$  的乘幂) 展开的可能性的问题, 亦即把函数表示成类型 (2) 或 (1) 的级数和形状的可能性的问题, 就获得很大的重要性.

在这儿我们要研究初等函数的如此的展开式, 并且在 124 ~ 126 目中详细研究过的泰勒公式给我们打开一条通向解决所提出的问题的道路. 事实上, 假定所考虑的函数  $f(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + H]$  或  $[x_0 - H, x_0]$  ( $H > 0$ ) 上具有各阶导数 (因而它们都是连续的). 于是像我们在第 126 目中已经看到的, 对于在这区间上所有的  $x$  值, 即有公式

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x), \end{aligned} \quad (3)$$



其中余项  $r_n(x)$  可以表示成第 126 目中所指出的形式中的任一个.同时我们可以取  $n$  任意大,即是,把这展开式进行到  $x - x_0$  的任意高的乘幂.

这就自然地引出无穷展开式的想法.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (4)$$

这种级数——它跟收敛与否及是否具有和  $f(x)$  无关——叫做函数  $f(x)$  的泰勒级数.它有 (2) 的形状, 并且它的系数

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \cdots$$

叫做泰勒系数.

因为  $f(x)$  与泰勒级数  $n+1$  项和数之间的差数, 由于 (3), 恰好是  $r_n(x)$ , 所以显然: 在某一  $x$  值时, 展开式 (4) 实际上成立的必要充分条件是, 在这个  $x$  值时, 泰勒公式的余项  $r_n(x)$  随着  $n$  的增大而趋于 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (5)$$

这等式是否成立, 以及在怎样的  $x$  值时这等式成立, 在研究这些问题时, 依赖于  $n$  的余项  $r_n(x)$  的各种形式对我们是有用的.

常常要讨论跟  $x_0 = 0$  与函数  $f(x)$  直接按  $x$  的乘幂展开成级数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \textcircled{1} \quad (6)$$

的情形; 这级数具有 (1) 的形状, 系数为

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots \quad (7)$$

现在更详细地写出适合于这一特别假定:  $x_0 = 0$  [126] 的余项  $r_n(x)$ .

$$\text{拉格朗日形式: } r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (8)$$

$$\text{柯西形式: } r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}. \quad (9)$$

并且, 关于因数  $\theta$  只知道它包含在 0 与 1 之间, 但它在  $x$  或  $n$  改变时 (甚至在从这一形式换成另一形式时) 可以跟着改变.

现在讲一些具体的展开式.

<sup>①</sup>这级数通常叫做麦克劳林级数, 参看第一卷 124 目和 125 目的有关脚注.



**404. 展开指数函数、基本三角函数及其他函数成为级数** 首先证明下面的简单定理, 它直接包含了一系列的重要情形.

若函数  $f(x)$  在区间  $[0, H]$  或  $[-H, 0]$  ( $H > 0$ ) 上具有各阶导数, 并且当  $x$  在所给区间上变化时, 所有这些导数的绝对值被相同的一个数界定:

$$\exists L \forall n \forall x \in [0, H] \text{ 或 } [-H, 0], \quad |f^{(n)}(x)| \leq L \quad (10)$$

这儿  $L$  不依赖于  $n$ , 则在整个区间上展开式 (6) 成立.

事实上, 取拉格朗日形式的余项  $r_n(x)$  [见 (8)], 由于 (10), 我们有

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!},$$

像我们在 35,1) 中见过的, 当  $n$  无限增加时, 表达式  $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$  趋于 0; 但是, 这 [由于 364,5°] 也可从级数

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

的收敛性推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$  [370,2)(a)]. 但在这样的情形下,  $r_n(x)$  就具有极限 0, 这就证明了我们的断言.

(a) 可把这定理应用于在任何区间  $[-H, H]$  上的下列函数:

$$f(x) = e^x, \sin x, \cos x.$$

因为它们的导数  $f^{(n)}(x)$  分别等于

$$e^x, \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

并且在这区间上, 函数  $e^x$  的各阶导数的绝对值以数  $e^H$  为上界, 而函数  $\sin x$  与  $\cos x$  的各导数的绝对值以 1 为上界.

因为在 125,1)—3) 中我们已经计算过这些函数的泰勒系数, 所以可以立即写出展开式:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (11)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \quad (12)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \quad (13)$$

它们在任意  $x$  值时都成立.



(6) 不难用类似方式得到基本双曲函数的展开式, 但更简单的是回忆一下它们的定义:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

然后用把级数 (11) 与下面的级数逐项相加或相减的方法引出这些展开式. 这级数是在级数 (11) 中以  $-x$  代替  $x$  而得到的:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

用这方法我们找到:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \end{aligned} \right\}$$

(B) 开头所证明的定理就不能用到函数  $y = \operatorname{arctg} x$  上. 实际上, 在 116,8) 中已求出的这个函数的第  $n$  阶导数的普遍表达式

$$\left. y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left( y + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (14)$$

并不保证所有的  $y^{(n)}$  有共同的界.

因为对应的泰勒级数 [参看 125,6)]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

只在区间  $[-1, 1]$  上收敛<sup>①</sup>, 所以在这区间外已经用不着说到用这级数来表示函数  $\operatorname{arctg} x$ . 反之, 对于  $|x| \leq 1$ , 依拉格朗日公式 (8) [考虑到 (14)], 我们有

$$|r_n(x)| \leq \frac{\left| \cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1) \left( y_\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right|}{n+1} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

其中  $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$ . 由此显然可知,  $r_n(x) \rightarrow 0$ , 于是对于在区间  $[-1, 1]$  上所有的  $x$  值有展开式

$$\left. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots \right\} \quad (15)$$

我们再一次强调, 虽然  $\operatorname{arctg} x$  在这区间外具有确定的意义, 但展开式 (15) 在那儿就是不正确的, 因为级数没有和.

特别地, 当  $x = 1$  时, 从级数 (15) 可得到著名的莱布尼茨级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} + \cdots, \quad (16)$$

这是给出数  $\pi$  的展开式的第一个级数.

<sup>①</sup>按 [377] 达朗贝尔判别法容易确信: 如果  $|x| < 1$ , 级数 (绝对) 收敛, 而当  $|x| > 1$  时级数发散. 当  $x = \pm 1$  时级数的 (非绝对) 收敛性可从 [381] 莱布尼茨定理推出.



**405. 对数级数** 如果取  $\ln(1+x)$  ( $x > -1$ ) 作为函数  $f(x)$ , 则对应的泰勒级数是这样的 [125,5]):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

这级数只对于在区间  $(-1, 1]$  上的  $x$  值收敛<sup>①</sup>; 这就是说, 研究余项  $r_n(x)$  的情况仅仅对这些值来说才有意义.

首先取拉格朗日形式 (8) 的余项. 因为

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[116,2)], 所以

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果  $0 \leq x \leq 1$ , 则最后的因式不超过 1, 由此

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \text{ 于是 } r_n(x) \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}.$$

但是, 当  $x < 0$  时, 这个因式的情况不明, 因而必须采用柯西余项形式 [见 (9)]. 我们有

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

于是

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n.$$

因为当  $x > -1$  时有  $1+\theta x > 1-\theta$ , 所以最后的因式小于 1; 因而, 只要  $|x| < 1$ , 就显然有  $r_n(x) \rightarrow 0$ .

很有趣地, 虽然柯西形式完全解决了在  $-1$  与  $1$  之间的所有  $x$  值的问题, 但当  $x = 1$  时, 它什么结果也不能给出; 因为在这情形下我们得到

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

但由于  $\theta$  随  $n$  而变的可能性, 不能断定  $(1-\theta)^n \rightarrow 0$ .

所以, 总起来说, 对于在区间  $(-1, 1]$  上所有的  $x$  值, 事实上, 有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (17)$$

特别地, 当  $x = 1$  时就得到我们熟悉的级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots \quad (18)$$

<sup>①</sup>比较上页的脚注; 当  $x = -1$  时可得到 (只有符号上的差别) 发散的调和级数.



从级数 (17) 可以导出另一些有用的展开式. 例如, 以  $-x$  代替其中的  $x$  后, 从级数 (17) 中逐项减去所得到的级数 (在此我们认定  $|x| < 1$ ), 就得到下面的级数:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left( 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \cdots \right). \quad (19)$$

**406. 斯特林公式** 作为应用, 我们说明, 如何借助于这级数可以导出一个重要的分析公式——斯特林 (Stirling) 公式.

在 (19) 中取  $x = \frac{1}{2n+1}$ , 其中  $n$  是任意自然数. 因为在这情形下

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

所以我们得到展开式

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right], \quad (20)$$

这展开式可以改写成下面的形状:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

这个表达式显然大于 1, 但小于

$$1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

所以, 我们有

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

由此, 取指数, 得到

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

现在引进序列  $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ . 这时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

从上面的不等式即可推知

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

于是, 一方面,  $a_n > a_{n+1}$ , 另一方面

$$a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} \cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$



由此可见, 随着  $n$  的增大, 序列  $a_n$  递减 (保持下有界, 例如, 以 0 为下界), 并且趋于有限极限  $a$ ; 而序列  $a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$  递增, 并显然趋于同一极限  $a$  (因为  $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$ ). 因为对任何  $n$ , 不等式

$$a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$$

成立, 所以可以找到包含在 0 与 1 之间的这样的数  $\theta$ , 使得

$$a = a_n \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}} \text{ 或 } a_n = a \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(我们指出, 一般说来, 数  $\theta$  依赖于  $n$ .) 回忆一下变量  $a_n$  的定义, 我们得到

$$n! = a\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1). \quad (21)$$

现在剩下的事只是定出常量  $a$ . 为此目的, 回忆一下沃利斯公式 [317], 这公式可写成下面的形状:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

在括号中的表达式可用下面的方式加以变形:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{2n!};$$

在这儿用公式 (21) 中  $n!$  的表达式代替  $n!$ , 而用类似的表达式

$$2n! = a\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot e^{\frac{\theta'}{24n}} \quad (0 < \theta' < 1)$$

代替  $2n!$ , 用初等方法化简后, 得到

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{4\theta - \theta'}{24n}},$$

于是

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{2\theta - \theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}.$$

由此

$$a^2 = 2\pi \text{ 而 } a = \sqrt{2\pi}.$$

把这个  $a$  值代入公式 (21), 我们就得到 斯特林公式

$$\left\{ n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1), \right\}$$

这公式使我们可能估计很大的  $n$  值时阶乘  $n!$  的数值.

建议读者作为练习实际求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right]$$

的和. 这个级数的收敛性在 367 目 9)(6) 中已证明过了.

提示: 计算第  $n$  部分和, 借助斯特林公式作变换后, 取极限. 答案:  $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ .



**407. 二项式级数** 最后, 取  $f(x) = (1+x)^m$ , 其中  $m$  是任何异于 0 及异于所有自然数的实数 (在自然数  $m$  时按牛顿公式可得已知的有限展开式). 在这情形下, 泰勒级数具有下面的形状 [125,4]:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots;$$

这级数叫做**二项式级数**, 而它的系数叫做**二项式系数**. 在对  $m$  所作的假定下, 这些系数中任何一个都不是 0 (反之, 如果  $m$  是自然数, 则  $x^{m+1}$  及所有在它后面的系数都变成 0). 利用达朗尔判别法 [377] 容易确定, 当  $|x| < 1$  时二项式级数 (绝对) 收敛, 而当  $|x| > 1$  时级数发散. 我们将在  $|x| < 1$  的假定下来作余项  $r_n(x)$  的研究, 并且一开始就取它的柯西形式 (9) (拉格朗日形式在这儿给出的答案不是对所有的  $x$  值的).

因为

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1) \cdots (m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

所以就有

$$r_n(x) = \frac{m(m-1) \cdots (m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n} (1-\theta)^n x^{n+1}.$$

重新配置因数之后, 把它表示成下面的形状:

$$r_n(x) = \frac{(m-1)(m-2) \cdots (\overline{m-1-n+1})}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n \cdot mx(1+\theta x)^{m-1} \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n.$$

这三个表达式中的第一个是二项式级数的通项, 但对应于指数  $m-1$ ; 因为当  $|x| < 1$  时二项式级数收敛, 不管指数是怎样的, 所以这个表达式当  $n \rightarrow \infty$  时趋于 0. 至于其他两个表达式, 则第二个的绝对值包含在与  $n$  无关的界

$$|mx| \cdot (1-|x|)^{m-1} \quad \text{与} \quad |mx| \cdot (1+|x|)^{m-1}$$

之间; 而第三个, 与 405 中一样, 小于 1. 这样一来,  $r_n(x) \rightarrow 0$ , 亦即对于  $|x| < 1$  说来, 有展开式

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots \quad (22)$$

它也是跟牛顿的名字联系着的.

我们还没有考虑过在值  $x = \pm 1$  时展开式的适合的问题. 容易想出, 二项式级数是超越几何级数的特殊情形, 并且可从后者当  $a = -m, \beta = \gamma$  时, 以  $-x$  代替  $x$  而得出. 由于这点, 按照 402,8) 中的表, 容易作出二项式级数在它的收敛区间的端点  $x = \pm 1$  上特征的敛散情况的表:

$x = 1$	$m > 0$	绝对收敛
	$0 > m > -1$	非绝对收敛
	$m \leq -1$	发散
$x = -1$	$m > 0$	绝对收敛
	$m < 0$	发散



可以证明, 每一次当二项式级数收敛时, 它的和就是  $(1+x)^m$ . 在这儿我们不讨论这点, 借以避免余项的烦难的研究, 因为这结果可简单地从以后将要证明的一个普遍定理 [参看 437, 6°] 推出.

我们指出二项式定理的一些特别情形, 例如, 对应于  $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  的情形:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

(通常的几何级数), 然后,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x^n + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (23)$$

与

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^n + \cdots \quad (-1 < x \leq 1) \end{aligned} \quad (24)$$

这是重要的, 强调指出: 在有理数  $m$  的情形下, 二项式级数的和总是给出根式的算术的值.

附注 I. 下面的有趣的展开式, 例如属于施勒米希 (Schlömilch) 的展开式, 就建立在这特别情形上面. 首先, 在 (23) 中令  $x = -y^2$ , 其中  $-1 \leq y \leq 1$ , 我们得到

$$\frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} y^{2n-1}.$$

然后, 在这儿用表达式  $\frac{2z}{1+z^2}$  代替  $y$ , 其中  $z$  在  $-\infty$  与  $+\infty$  之间变化. 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left( \frac{2z}{1+z^2} \right)^{2n-1} = \begin{cases} z & \text{如果 } |z| \leq 1, \\ \frac{1}{z} & \text{如果 } |z| \geq 1. \end{cases}$$

这个例子因为下面的事实而是很有兴趣的: 因为对于在不同区间上由不同的分析表达式  $z$  与  $\frac{1}{z}$  所定义的函数, 同时却给出一个单一的在级数和形状下的分析表达式 [比较 46, 363, 5)].

II. 在上面所有考虑过的例子中, 函数展开成泰勒级数引出这样的结果: 对于使级数收敛的所有  $x$  值, 级数的和等于建立起该级数的那个函数. 因此, 可能会引起读者这样的猜疑: 要保证展开式 (4) 或 (6) 的成立, 甚至想不必去检验关系式 (5), 一般地以为只要确立级数的收敛性就够了.

可是, 事实上, 事情并非这样. 例如, 如果回到在 138 目附注中考虑过的函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{当 } x \neq 0 \text{ 时}), f(0) = 0,$$

则对于这个函数, 如我们见过的, 虽然在  $x = 0$  时有各阶导数, 但在这点都变成 0. 系数全部是 0 的形如 (6) 的泰勒级数当然处处收敛, 但是任何一个  $x$  值 (除  $x = 0$  外) 都不能够再产生原来的函数的值.



**408. 展开  $\sin x$  与  $\cos x$  成无穷乘积** 我们在上面熟悉了一些最重要的初等函数依  $x$  的幂展开的无穷级数展开式, 亦即熟悉了把这些函数表示成“无穷多项式”的形状. 在本节末了, 我们要把  $\sin x$  与  $\cos x$  表示成无穷乘积的形状, 这些乘积仿佛是实现分解成对应于“无穷多项式”的因式.

我们从推导一个辅助公式开始. 从代数学中我们已经知道棣莫弗公式<sup>①</sup>

$$(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz,$$

其中  $m$  认定是自然数. 依普通法则解开左端的括号, 并比较左端与右端的“虚单位” $i = \sqrt{-1}$  的系数, 我们得到

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \cdot \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \cdot \sin^3 z + \cdots$$

如果  $m = 2n + 1$  是奇数, 则按公式:  $\cos^{2k} z = (1 - \sin^2 z)^k$  替换余弦函数的偶次幂后, 我们把所得结果表示成

$$\sin(2n+1)z = \sin z \cdot P(\sin^2 z), \quad (25)$$

其中  $P(u)$  是一个  $n$  次幂多项式.

如果用  $u_1, u_2, \cdots, u_n$  表示这多项式的根, 那么这多项式可以用下面的方式分解成因式

$$P(u) = a(u - u_1) \cdots (u - u_n) = A \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{u}{u_n}\right).$$

从 (25) 容易定出根  $u_1, u_2, \cdots, u_n$ , 只要注意到, 如果  $z$  使  $\sin(2n+1)z$  变成 0, 但保持  $\sin z$  异于 0, 则  $\sin^2 z$  就一定是多项式  $P(u)$  的根. 显然, 包含在 0 与  $\frac{\pi}{2}$  之间并且依次递增的值  $z = \frac{\pi}{2n+1}, 2\frac{\pi}{2n+1}, \cdots, n\frac{\pi}{2n+1}$ , 对应着也是递增着的 (因而是相异的) 根:

$$u_1 = \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, u_2 = \sin^2 2\frac{\pi}{2n+1}, \cdots, u_n = \sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}.$$

最后, 系数  $A = P(0)$  可以作为当  $z \rightarrow 0$  时比值  $\sin(2n+1)z / \sin z$  的极限而定出; 由此  $A = 2n+1$ .

这样一来, 就得到公式

$$\sin(2n+1)z = (2n+1) \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

令  $z = \frac{x}{2n+1}$ , 可把这公式改写成

$$\sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right). \quad (26)$$

我们认定  $x$  异于  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \cdots$ , 于是  $\sin x \neq 0$ . 在条件  $(k+1)\pi > |x|$  下取自然数  $k$ , 并设  $n > k$ . 现在把  $\sin x$  表示成下面乘积的形状:

$$\sin x = U_k^{(n)} \cdot V_k^{(n)}, \quad (27)$$

<sup>①</sup>例如, 参看下面 453 目.



其中

$$U_k^{(n)} = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}} \right) \cdots \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k \frac{\pi}{2n+1}} \right)$$

只包含  $k$  个在括弧中的因式, 而

$$V_k^{(n)} = \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1) \frac{\pi}{2n+1}} \right) \cdots \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n \frac{\pi}{2n+1}} \right)$$

包括所有其余的因式.

暂设  $k$  是固定的; 容易找到当  $n \rightarrow \infty$  时  $U_k^{(n)}$  的极限, 因为这个表达式由确定的有限多个因式组成. 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} &= x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 h \frac{\pi}{2n+1}} &= \frac{x^2}{h^2 \pi^2} \quad (h = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

所以

$$U_k = \lim_{n \rightarrow \infty} U_k^{(n)} = x \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

由于 (27), 极限

$$V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} V_k^{(n)}$$

存在, 并且

$$\sin x = U_k \cdot V_k.$$

现在研究极限  $V_k$  的估值.

已知, 对于  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 不等式

$$\frac{2}{\pi} \varphi < \sin \varphi < \varphi$$

成立 [54, (9); 133, 1)]. 所以

$$\sin^2 \frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

并且

$$\sin^2 h \frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{h^2 \pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h = k+1, \dots, n),$$

于是

$$1 > V_k^{(n)} > \left( 1 - \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{x^2}{4n^2} \right). \quad (28)$$

无穷乘积

$$\prod_{h=h_0}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{4h^2} \right)$$



(其中  $h_0$  如此挑选, 使得  $4h_0^2 > x^2$ ) 收敛, 因为级数  $\sum_{h=h_0}^{\infty} \frac{x^2}{4h^2}$  收敛 [401, 定理 5°]. 因此余乘积

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时应当趋于 1 [401, 2°]. 显然, 如果写

$$1 > V_k^{(n)} > \bar{V}_k,$$

我们只加强了 (28) 中的第二个不等式; 当  $n \rightarrow \infty$  时取极限 (在固定的  $k$  下), 得到

$$1 > V_k \geq \bar{V}_k.$$

由此推知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 1, \text{ 于是 } \lim_{k \rightarrow \infty} U_k = \sin x,$$

最后, 我们就得到有名的展开式

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \cdots \quad (29)$$

这是欧拉首先建立的.

自然, 这个等式对于先前除外的那些值  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \cdots$  也成立, 因为这时等式的两端都是 0. 容易看出, 这些各别的因式恰好对应于  $\sin x$  的不同的根<sup>①</sup>.

如果在所得到的展开式中令  $x = \frac{\pi}{2}$ , 就得到

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right).$$

于是又推出瓦理斯公式 [317; 比较 400, 2)].

我们再指出这个展开式的一个有趣的应用; 以  $\pi x$  代替  $x$ , 这展开式可以表示成下面的形状:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

回忆一下函数  $\Gamma(x)$  的定义 [402, (13)]

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}},$$

及关系式  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$  [402, (15)]. 于是

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

<sup>①</sup>关于重新配置因式的可能性, 参看 402, 4).



相乘以后, 立即得到所谓余元公式

$$\boxed{\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}}, \quad (30)$$

这也是欧拉求得的; 这公式在任何非整数的  $x$  值时成立<sup>①</sup>.

类似于  $\sin x$  的展开式, 可导出展开式

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2} \right),$$

它显出  $\cos x$  的根是  $\pm \frac{2n-1}{2}\pi$ . 并且, 它也可以从  $\sin x$  的展开式依下面的公式得到:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{或} \quad \cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}.$$

最后, 我们提一下展开式

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2} \right), \quad (31)$$

它们也可以借助于相似的讨论建立起来.

## §8. 借助于级数作近似计算

**409. 一般说明** 在我们所得到的具体的展开式的例子上, 我们要说明, 如何利用无穷级数来达到近似计算的目的. 我们预先讲述一些一般说明.

如果我们可把未知数  $A$  展开成级数

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

其中  $a_1, a_2, a_3, \cdots$  是容易计算出的数 (通常是有理数), 并近似地令

$$A \doteq A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

那么, 所要弃去的一切其余各项的校正数可用下面的余式表示出来:

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

当  $n$  充分大时, 这个误差成为任意小, 所以  $A_n$  可以以任意预先给定的精确度来表达  $A$ .

我们感到兴趣的是要简单地作出余式  $\alpha_n$  的估值的可能性; 这使我们当计算接连的部分和时, 在已经得到了所要求精确度的近似值下, 就能够及时停止而不再往下作.

<sup>①</sup>特别地, 在这儿令  $x = \frac{1}{2}$ , 我们得到  $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$ ; 因为当  $x > 0$  时,  $\Gamma(x) > 0$ , 所以  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .



如果所考虑的级数是项的绝对值单调递减的交错级数 (“莱布尼茨型” 的), 那么, 如我们曾经见过的 [381, 附注], 余式的符号即第一项的符号, 并且余式的绝对值小于这项的绝对值. 对于这个估值, 在简易这一意义下说来, 不能再希望有比它更好的估值了.

在正项级数的情形下, 事情就稍微复杂一些.

在这情形下, 通常是设法找出一个其各项大于我们所关心的级数的各项, 容易相加起来的正项级数, 并对这新级数的余式估值.

例如, 对于级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{m^2}$  可得到

$$\sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^\infty \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n}$$

[这个估值跟 373, (11) 式中借助于积分法所得到的估值一致], 而对于级数  $1 + \sum_1^\infty \frac{1}{m!}$ , 有

$$\sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{(n+1) \cdots m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}$$

[在 37 中计算数  $e$  时, 我们实际上就是利用这个估值的].

通常是求数  $A$  的十进位近似值, 可是级数的项也可以不用十进位小数来表示. 在把它们变成十进位小数时, 依尾数的取舍规则使它们进一位, 又是新误差的来源, 这也应当计算进去.

最后, 我们指出, 具有使我们感到兴趣的数  $A$  作为和的任何级数并非都是适合于此数  $A$  的实际计算的 (哪怕它的项是简单的, 并且余式的估值也容易作出来的). 问题在于收敛的速度, 亦即在于部分和向数  $A$  接近的速度.

作为例子, 取分别给出数  $\frac{\pi}{4}$  与  $\ln 2$  的展开式的级数 [参看 404(16) 与 405(18)]:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{与} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

为了要利用它们来计算这两个数, 比方说, 精确到  $\frac{1}{10^5}$ , 在第一种情形, 必须加到五万项, 而在第二种情形, 加到十万项; 这当然是不能实现的. 下面我们用不着费多大的力就可计算上述两数甚至到很大的精确度, 但利用的是更合适的级数.

**410. 数  $\pi$  的计算** 利用已知的反正切函数的级数 [404, (15)]

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

如果取  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 则  $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$ , 我们就得到级数

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots \right),$$

这对于计算已经是合用的.

回忆一下反正切函数的加法公式

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \text{ ①}$$

①在这形状下的这个公式, 只在角度的和依绝对值  $\leq \frac{\pi}{2}$  的假定下才是真确的 [50].



并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad \text{或} \quad (x+1)(y+1) = 2$$

的真分数作为  $x$  及  $y$ , 即有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \left( x - \frac{x^3}{3} + \cdots \right) + \left( y - \frac{y^3}{3} + \cdots \right).$$

例如, 令  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ , 我们得到

$$\frac{\pi}{4} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \cdots \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \cdots \right).$$

可是, 对于数  $\pi$  的计算, 还有更方便的级数. 令  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$  于是

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

由于这数的接近于 1, 显然可知, 角度  $4\alpha$  接近于  $\frac{\pi}{4}$ ; 令  $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ , 即有

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \text{ 于是 } \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

由此

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \cdots \right) - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \cdots \right).$$

这就是梅钦 (Machin) 公式.

我们要按照梅钦公式计算数  $\pi$  到小数后第 7 位数字. 为此, 只需要上面实际上已经写出的那些项就够. 因为两个级数都是莱布尼茨型的, 所以在被减数与减数中, 弃去了的未写出的项的校正数, 分别是

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad \text{与} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

把保留下来的项化成十进位小数, 使它们 (依小数的尾数取舍规则) 近似到第 8 位数字. 把计算列



成下表 (括号中的  $\pm$  号指示校正数的符号):

$\begin{array}{r} \frac{16}{5} = 3.200\ 000\ 00 \\ \frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0.001\ 024\ 00 \\ +) \frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0.000\ 000\ 91 (+) \\ \hline 3.201\ 024\ 91 \\ \\ 3.201\ 024\ 91 \\ -) 0.042\ 695\ 96 \\ \hline 3.158\ 328\ 95 \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0.042\ 666\ 67 (-) \\ \frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0.000\ 029\ 26 (-) \\ +) \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0.000\ 000\ 03 (-) \\ \hline 0.042\ 695\ 96 \\ \\ \frac{4}{239} = 0.016\ 736\ 40 (+) \\ -) \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0.000\ 000\ 10 (-) \\ \hline 0.016\ 736\ 30 \end{array}$
---	---

算出全部校正数, 有

$$\begin{aligned} 3.158\ 328\ 95 < 16\alpha < 3.158\ 328\ 98 \\ -0.016\ 736\ 32 < -4\beta < -0.016\ 736\ 30, \end{aligned}$$

于是

$$3.141\ 592\ 63 < \pi < 3.141\ 592\ 68.$$

所以, 最后,  $\pi = 3.141\ 592\ 6\dots$ , 并且所有写出的数字都是真确的.

#### 411. 对数的计算 级数

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] \quad (1)$$

是计算的基础, 在第 406 目中 [参看 (20)] 导出斯特林公式时我们已经利用过这公式.

当  $n=1$  时, 得到  $\ln 2$  的展开式:

$$\begin{aligned} \ln 2 = \frac{2}{3} & \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{9^5} \right. \\ & \left. + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{9^6} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{9^7} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{9^8} + \dots \right). \end{aligned}$$

这级数对计算是完全合用的. 例如, 只要限于已经写出的这些项, 我们证明可以找到有 9 位真确的十进位数字的  $\ln 2$ .

事实上, 如果弃去这级数从第 10 项开始的那些项, 那么, 相应的校正数就是:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{9^9} + \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{9^{10}} + \dots \right) < \frac{2}{3 \cdot 19 \cdot 9^9} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{12 \cdot 19 \cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}. \end{aligned}$$



计算到 10 位数字, 作出下表:

$\frac{2}{3}$	$= 0.666\ 666\ 666\ 7\ (-)$
$\frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 9}$	$= 0.024\ 691\ 358\ 0\ (+)$
$\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 9^2}$	$= 0.001\ 646\ 090\ 5\ (+)$
$\frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 9^3}$	$= 0.000\ 130\ 642\ 1\ (+)$
$\frac{2}{3 \cdot 9 \cdot 9^4}$	$= 0.000\ 011\ 290\ 1\ (-)$
$\frac{2}{3 \cdot 11 \cdot 9^5}$	$= 0.000\ 001\ 026\ 4\ (-)$
$\frac{2}{3 \cdot 13 \cdot 9^6}$	$= 0.000\ 000\ 096\ 5\ (-)$
$\frac{2}{3 \cdot 15 \cdot 9^7}$	$= 0.000\ 000\ 009\ 3\ (-)$
$\frac{2}{3 \cdot 17 \cdot 9^8}$	$= 0.000\ 000\ 000\ 9\ (+)$
<hr/>	
0.693 147 180 5	

算出所有的校正数后, 我们有  
 $0.693\ 147\ 180\ 2 < \ln 2 < 0.693\ 147\ 180\ 9$ ,  
于是  
 $\ln 2 = 0.693\ 147\ 180 \cdots$ ,  
并且所有写出来的九位数字都是真确的.

现在在 (1) 中令  $n = 4$ , 我们找到

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{81^2} + \cdots \right).$$

利用已经算出来的  $\ln 2$  的值, 按这公式容易算出  $\ln 5$ , 然后也可算出  $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ . 在这之后, 可以算出变自然对数为常用对数时的模

$$M = \frac{1}{\ln 10}$$

到任意精确度; 它等于  $M = 0.434\ 294\ 481 \cdots$ . 乘以这模后, 得到常用对数:  $\lg 2$  与  $\lg 5$ .

在基本公式 (1) 中取常用对数:

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right]. \tag{2}$$

在这儿令  $n = 80 = 2^3 \cdot 10$  并注意  $n+1 = 81 = 3^4$ , 我们找到

$$4 \lg 3 - 3 \lg 2 - 1 = \frac{2M}{161} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25921} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25921^2} + \cdots \right],$$

由此容易找到  $\lg 3$ . 其次, 在公式 (2) 中令  $n = 2400 = 3 \cdot 2^3 \cdot 10^2$ , 即有  $n+1 = 2401 = 7^4$  与

$$4 \lg 7 - 3 \lg 2 - \lg 3 - 2 = \frac{2M}{4801} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{23049601} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{23049601^2} + \cdots \right),$$

于是就找到对数  $\lg 7$ . 选配类似的数的组合, 可以找到素数的对数到任意精确度, 而按素数的对数用相加及以自然数乘的方法, 可找到复合数的对数.



可以按照另一方式来进行我们的工作,即直接计算相继的自然数的对数并借助于公式 (2) 把  $\lg n$  过渡到  $\lg(n+1)$ . 例如,为了计算从 1000 到 10000 的数的对数,在公式 (2) 中只要取一项,亦即近似地令

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1} (10^3 \leq n \leq 10^4).$$

在此校正数是

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2M}{2n+1} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] \\ &< \frac{2M}{3(2n+1)^3} \left[ 1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] = \frac{2M}{3(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n+2)} < \frac{2M}{24n^3}. \end{aligned}$$

因为我们有  $n \geq 10^3$ , 而  $2M < 1$ , 所以

$$\Delta < \frac{1}{24 \cdot 10^9} < \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}.$$

哪怕把所有的误差都加起来,一般地说,误差仍然会小于  $\frac{10^4}{2 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{2 \cdot 10^6}$ . 但在按第一种方法算出整系列的控制对数之后,这种误差的累积是容易避免的. 用这样的方法可以达到极大的精确度,同时保持了第二种方法所固有的计算的自动化的特点(这是很有价值的,尤其在造巨型的表的时候).

**412. 根式的计算** 根式可最简单地借助于对数表来计算. 可是,如果一些个别的根式需要很大的精确度,则更适合的是采用二项式级数 [407(22)]

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

假定需要计算  $\sqrt[k]{A}$ , 并已知这根式的近似值  $a$  (大于或小于真值), 但要求改善它. 如果,比方说

$$\frac{A}{a^k} = 1 + x,$$

其中  $|x|$  是不大的一个真分数, 那么可以用下面的方式把根式变形:

$$\sqrt[k]{A} = a \cdot \sqrt[k]{\frac{A}{a^k}} = a \cdot (1+x)^{\frac{1}{k}}$$

并可利用当  $m = \frac{1}{k}$  时的二项式级数. 有时从等式

$$\frac{a^k}{A} = 1 + x'$$

出发是更合适的, 如果  $|x'|$  又是一个不大的真分数, 并且采用另一变形:

$$\sqrt[k]{A} = \frac{a}{\sqrt[k]{\frac{a^k}{A}}} = a \cdot (1+x')^{-\frac{1}{k}},$$

此后取  $m = -\frac{1}{k}$ , 应用二项式级数.



作为例子, 从  $\sqrt{2}$  的近似值 1.4 出发, 计算  $\sqrt{2}$  到很大的精确度. 为此目的, 按上述两种范式中的一种把根式变形:

$$\sqrt{2} = 1.4 \times \sqrt{\frac{2}{1.96}} = 1.4 \times \sqrt{1 + \frac{0.04}{1.96}} = 1.4 \times \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

或

$$\sqrt{2} = \frac{1.4}{\sqrt{\frac{1.96}{2}}} = \frac{1.4}{\sqrt{1 - \frac{0.04}{2}}} = 1.4 \times \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

为使计算容易起见, 自然宁愿采用第二种方法. 这样, 我们有

$$\sqrt{2} = 1.4 \times \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} + \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} + \cdots\right).$$

限于已经写出的这些项; 它们都可以表示成有限十进位小数:

$$\begin{array}{r} 1 + \cdots + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} = 1.010\ 152\ 5 \\ \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} = 0.000\ 000\ 043\ 75 \\ \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} = 0.000\ 000\ 000\ 787\ 5 \\ \hline 1.010\ 152\ 544\ 537\ 5 \times 1.4 = 1.414\ 213\ 562\ 352\ 50 \end{array}$$

因为在  $\frac{1}{50}$  的幂次下的系数递减, 所以校正数可以像通常那样加以估计:

$$\Delta < 1.4 \times \frac{231}{1024 \times 50^6} \times \left(1 + \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \cdots\right) = \frac{1.4 \times 231}{1024 \times 50^5 \times 49} < \frac{2.1}{10^{11}}.$$

因此

$$\begin{aligned} 1.414\ 213\ 562\ 352 < \sqrt{2} < 1.414\ 213\ 562\ 373, \\ \sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 3\cdots, \end{aligned}$$

小数后所有 10 个数字都是正确的.

利用变形

$$\sqrt{2} = 1.41 \left(1 - \frac{119}{20\ 000}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

容易得到非常多的数字, 现在再举出一些类似的变形的例子 (借助于二项式级数的计算留给读者去作):

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1.73 \times \left(1 - \frac{71}{30\ 000}\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{11} = \frac{10}{3} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}; \\ \sqrt[3]{2} &= \frac{5}{4} \left(1 + \frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}}; \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7} \left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$



**413. 欧拉级数的变换** 当为近似计算而应用级数时, 先对此级数作一个变换有时是有好处的. 这个按某种规则, 用另一个具有相同和的级数代换已知收敛级数, 称为变换. 当然, 仅在新的级数收敛更快, 并便于计算时, 这样的变换才是合适的.

我们来引入以欧拉的名字命名的经典变换的公式. 设给定收敛级数

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^k a_k x^k + \cdots, \quad (3)$$

其中  $x > 0$ , 我们仅仅是为了方便, 才把它的第  $k$  个系数表为  $(-1)^k a_k$ , 完全没有假设所有  $a_k > 0$ . 对于序列  $a_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$  我们在研究时引入序列的差分(这与在 122 目对具有连续变量  $x$  的函数  $f(x)$  所作的类似):

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k, \Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k,$$

一般地

$$\begin{aligned} \Delta^p a_k &= \Delta^{p-1} a_{k+1} - \Delta^{p-1} a_k \\ &= a_{k+p} - C_p^1 a_{k+p-1} + C_p^2 a_{k+p-2} - \cdots + (-1)^p a_k. \end{aligned} \quad (4)$$

把已知级数改写成这样:

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{a_1 x - a_0 x}{1+x} + \frac{a_2 x^2 - a_1 x^2}{1+x} - \frac{a_3 x^3 - a_2 x^3}{1+x} + \cdots$$

这是容许的, 因为新级数的第  $k$  个部分和与级数 (3) 的同类部分和相差的仅仅是  $\frac{1}{1+x}(-1)^{k+1} a_{k+1} x^{k+1}$  这一项, 由于原级数的收敛性, 这一项当  $k \rightarrow \infty$  时趋于 0 [364, 5°]. 为了简化记号, 现在引入差分:

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \{a_0 - \Delta a_0 \cdot x + \Delta a_1 \cdot x^2 - \Delta a_2 \cdot x^3 + \cdots\}.$$

保留第一项  $\frac{a_0}{1+x}$ , 把余下的级数

$$- \frac{x}{1+x} \{ \Delta a_0 - \cancel{\Delta a_1} \cdot x + \Delta a_2 \cdot x^2 - \cdots \}$$

如同  $S(x)$  那样改写为

$$- \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} \{ \Delta a_0 - \Delta^2 a_0 \cdot x + \Delta^2 a_1 \cdot x^2 - \cdots \}$$

的形式, 因此, 再次分出第一项, 便有:

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{x^2}{(1+x)^3} \{ \Delta^2 a_0 - \Delta^2 a_1 \cdot x + \cdots \},$$

继续这样进行下去, 经  $p$  步之后得:

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{\Delta^2 a_0}{(1+x)^3} \cdot x^2 - \cdots + (-1)^{p-1} \frac{\Delta^{p-1} a_0}{(1+x)^p} \cdot x^{p-1} + R_p(x), \quad (5)$$



其中

$$\begin{aligned} R_p(x) &= (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p} \{ \Delta^p a_0 - \Delta^p a_1 \cdot x + \Delta^p a_2 \cdot x^2 - \cdots \} \\ &= (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^p a_k \cdot x^k. \end{aligned}$$

现在来证明:  $R_p(x)$  当  $p \rightarrow \infty$  时趋于 0.

把  $p$  阶差分用它的展开式 (4) 代入, 并重新排列和式, 得到

$$\begin{aligned} R_p(x) &= \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p} x^{k+p} \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i a_{k+p-i} \\ &= \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{i=0}^p C_p^i x^i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p-i} a_{k+p-i} x^{k+p-i}. \end{aligned}$$

若引入对原先的级数 (3) 的余式的表示, 令

$$r_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} a_{k+n} x^{k+n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

则  $R_p$  的表达式最终可以写成

$$R_p(x) = \frac{\sum_{i=0}^p C_p^i x^i \cdot r_{p-i}(x)}{(1+x)^p} = \frac{\sum_{i=0}^p C_p^i x^{p-i} \cdot r_i(x)}{(1+x)^p}.$$

因为  $r_n(x) \rightarrow 0$ , 则根据 391 目 6°,  $R_p(x) \rightarrow 0$ .

在 (5) 式中令  $p \rightarrow \infty$  而取极限, 求出

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1+x} \left\{ a_0 - \Delta a_0 \cdot \frac{x}{1+x} + \Delta^2 a_0 \cdot \left( \frac{x}{1+x} \right)^2 - \cdots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left( \frac{x}{1+x} \right)^p + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

将  $S(x)$  代之以它的表达式 (3), 便得到欧拉变换:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left( \frac{x}{1+x} \right)^p} \quad (6)$$

通常在  $x=1$  时应用此式, 那时它把数值级数变为数值级数:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}} \quad (7)$$

#### 414. 例题

1) 令  $a_k = \frac{1}{z+k}$ , 其中  $z$  是异于  $0, -1, -2, -3, \cdots$  的任意常数. 在级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k}$$



中若去掉前面充分多项, 它便是莱布尼茨型级数, 因此级数收敛.

容易计算差分的序列  $\Delta a_k, \Delta^2 a_k, \dots$ , 借助于数学归纳法, 我们得到:

$$\Delta^p a_k = (-1)^p \frac{p!}{(z+k)(z+k+1)\cdots(z+k+p)};$$

特别地

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}.$$

于是, 按照公式 (7)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}.$$

若令  $z=1$ , 便得到著名的对  $\ln 2$  的级数变换:

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

读者很明了, 对于  $\ln 2$  的近似计算, 利用第二个级数, 远为有益得多: 为了得到 0.01 的准确度, 第一个级数需要 99 项, 而在第二个级数中只需取 5 项!

2) 设  $a_k = \frac{1}{z+2k}$  ( $z$  异于  $0, -2, -4, \dots$ ). 把  $a_k$  改成如下形式:  $a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2} + k}$ , 对表达式

$\Delta^p a_0$  可以利用以前的公式:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p!}{\frac{z}{2} \left(\frac{z}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{z}{2} + p\right)} = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{p+1} \cdot p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}.$$

在这种情况下, 欧拉变换具有如下形式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z+2k} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}.$$

特别地, 当  $z=1$  时由此得出表示  $\frac{\pi}{4}$  的莱布尼茨级数变换:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(2p+1)!!}.$$

3) 对  $0 \leq x \leq 1$ , 在 404 目, (B) 中有展开式

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

欲对这个一般的级数应用欧拉变换, 在 (6) 式中令  $a_k = \frac{1}{2k+1}$ ; 于是对  $\Delta^p a_0$  可利用上一例子的公式 (对  $z=1$ ):

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

此外, 在 (6) 式中以  $x^2$  代替  $x$  且等式两端还乘上因子  $x$ . 结果便得到

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^p. \quad (8)$$



4) 不应认为收敛级数的欧拉变换总是导致收敛性的改善.[这时, 比较两个具有任意符号的项的级数  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  与  $\sum_{k=0}^{\infty} c'_k$  的收敛性质, 像在 375 目 7) 中那样, 从二者的相应余式  $\gamma_n$  与  $\gamma'_n$  的比值的性态出发: 若  $\left| \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} \right| \rightarrow 0$ , 则第一个级数收敛较快, 而第二个级数收敛较慢.]

下面就是例子:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} \text{ 变为收敛较快的级数 } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^p},$$

而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ 变为收敛较慢的级数 } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^p.$$

5) 在应用级数变换作计算时, 直接计算级数的最先若干项, 仅对级数的余式作变换常常是有益的. 我们现在以在 2) 中讲的借助级数计算  $\pi$  值作为例子来加以说明:

$$\pi = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdots p}{3 \cdot 5 \cdots (2p+1)} + \cdots \right\}$$

因为后项与前项之比  $\frac{p}{2p+1} < \frac{1}{2}$ , 所以级数丢掉的余式总是小于被计算的最后一项. 例如, 因为第 21 项

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 20}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 41} = 0.000\ 000\ 37 < 0.000\ 000\ 5,$$

对上述级数计算了 21 项之后, 我们得到小数点后 6 位准确数字. 如果直接计算原来级数的前 7 项, 仅仅对第 7 项以后的余式作变换, 得到

$$\begin{aligned} \pi = & 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) \\ & - 2 \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{15 \cdot 17} + \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 17 \cdot 19} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdots p}{15 \cdot 17 \cdots (15+2p)} + \cdots \right). \end{aligned}$$

在这里, 括号中的级数的 8 项已经小于所要求的界:

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{15 \cdot 17 \cdots 29} = 0.000\ 000\ 2 \cdots,$$

为了达到同样的精确度, 对比前述的 21 项, 除了保持原来形状的 7 项外, 只需再计算 8 项, 即总共 15 项!

**415. 库默尔变换** 我们已看到, 基于准确叙述的规则欧拉变换导致单一的结果, 当真不总是有益的 [414,4)]. 库默尔提出的级数变换的方法允许更大的任意性, 给计算者的技巧提供许多东西, 然而, 在简化近似计算的意义上是目的性更强的. 我们只叙述作为所论方法的思想, 并用少量例子说明它.

设给定收敛级数

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots \quad (9)$$

欲计算级数具有给定近似程度的和. 显然  $A^{(k)} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ . 取另一个与  $A^{(k)}$  等价的无穷小  $a_1^{(k)}$  [62], 使得级数

$$a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots + a_1^{(k)} + \cdots$$



不仅收敛于有限和  $A_1$ , 而且使得这个和易于计算. 如果令

$$A^{(k)} - a_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)},$$

那么

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)} &= o(A^{(k)}), \\ \sum_1^\infty A^{(k)} &= A_1 + \sum_1^\infty \alpha_1^{(k)}, \end{aligned}$$

且计算原级数的和归纳到计算各项显然更快趋于零的变换级数的和.

例如, 想要计算级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$  的和, 我们记起和等于 1 的级数  $\sum_1^\infty \frac{1}{k(k+1)}$  [25,9)] 并注意  
到:(当  $k \rightarrow \infty$  时)

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}.$$

因为差

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

于是

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

且变换级数对计算更为有益.

所指出的过程可以重复进行, 取新的无穷小  $a_2^{(k)}$ , 它与  $a_1^{(k)}$  等价, 使得级数

$$a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_2^{(k)} + \cdots$$

收敛于有限的、易于计算的和  $A_2$ , 我们按公式

$$\sum_1^\infty A^{(k)} = A_1 + A_2 + \sum_1^\infty \alpha_2^{(k)}$$

把计算原级数的和归结为后一级数和的计算, 这后一级数的项

$$\alpha_2^{(k)} = \alpha_1^{(k)} - a_2^{(k)} = o(\alpha_1^{(k)})$$

趋于零比  $\alpha_1^{(k)}$  更快.

重复这个过程  $p$  次, 达到公式

$$\sum_{k=1}^\infty A^{(k)} = A_1 + A_2 + \cdots + A_p + \sum_{k=1}^\infty \alpha_p^{(k)}, \quad (10)$$

其中

$$A_i = \sum_{k=1}^\infty a_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

是一连串分离出来的级数的已知的和. 把事情归结为计算级数  $\sum_1^\infty \alpha_p^{(k)}$  的和.



这样, 我们在前面引入的, 计算级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  的例子可以照如下进行:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)},$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)};$$

接着是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 3! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)(k+3)},$$

如此等等. 经  $p$  步之后, 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1) \cdots (k+p)}. \quad (10a)$$

同时, 我们始终利用为我们已知的公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p-1)(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}$$

[由在 363 目 4) 中所引入的关系式中, 当  $\alpha = 0$  得到的].

这样一来, 计算收敛较慢的级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  的和被归结为计算它的前  $p$  项 (对适当的  $p$  值) 的和及一个收敛较快的变换级数.

再举一个更为复杂的例子.

用  $S_p(p$ ——自然数) 表示级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p-1)^2}.$$

对暂时不定的  $y$  有

$$\begin{aligned} & \frac{k+y}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2 \cdots (k+p)^2} \\ &= \frac{(2p-1)k^2 + p(p+2y)k + yp^2}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p-1)^2(k+p)^2}. \end{aligned}$$

由此可见 (当  $k \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2p-1} \left[ \frac{k+y}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2 \cdots (k+p)^2} \right] \\ & \sim \frac{1}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p-1)^2}. \end{aligned}$$

如果以级数  $S_p$  的与这些项等价的各个差代替级数  $S_p$  的各项, 便得易于计算、其和为

$$\frac{1}{2p-1} \cdot \frac{1+y}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p)^2}$$



的级数, 余 (“被变换的”) 级数将具有通项

$$\frac{\left[2p - \frac{p}{2p-1}(p+2y)\right]k + \left[p^2 - \frac{yp^2}{2p-1}\right]}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p)^2}.$$

现在我们就利用  $y$  的任意性, 选择它使得分子上含有  $k$  的项为零:

$$y = \frac{3p}{2} - 1.$$

考虑到所有讲过的, 对级数  $S_p$  得到这样的变换公式:

$$S_p = \frac{3p}{2(2p-1)(p!)^2} + \frac{p^3}{2(2p-1)} \cdot S_{p+1}. \quad (11)$$

由此, 把数值  $1, 2, \cdots, p$  接连代入  $p$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= S_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} S_2, \\ \frac{1}{2} S_2 &= \frac{3}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{(2!)^3}{2^2 \cdot 3!!} S_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{[(p-1)!]^3}{2^{p-1}(2p-3)!!} S_p = \frac{3}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \frac{(p!)^3}{2^p(2p-1)!!} S_{p+1}, \quad (11^*)$$

最后, 将这些等式逐项相加, 得到如下结果:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{2!}{5!!} + \cdots + \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!!}{(2p-1)!!} \right\} \\ &+ \frac{(p!)^3}{2^p \cdot (2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2 \cdots (k+p)^2}. \end{aligned} \quad (106)$$

例如, 取  $p = 5$ , 在变换级数中也取 5 项, 可以计算原先级数的和准确到  $\frac{1}{10^7}$ .

### 416. 马尔可夫变换 马尔可夫 (A.A.Markov) 所指出的对变换给定的收敛级数 (9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A$$

的方法, 同样给计算者留有很多任意性. 以任意方式把每一个  $A^{(k)}$  展开成收敛级数, 我们有:

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

所有这些级数的项组成具有两个列表值的无穷长方矩阵 [比较 393,(1)].

$$\begin{array}{l} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ \dots \\ A^{(k)} \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ \left( \begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots a_i^{(1)} \dots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots a_i^{(2)} \dots \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \dots a_i^{(3)} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \dots a_i^{(k)} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \end{array} \quad (12)$$



于是所求的数  $A$  径直是由这个矩阵组成的 ~~二重~~ 级数

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

的和. 其次, 还假设所有按列的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A_i$$

收敛, 马尔可夫建立了级数  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$  收敛于同一个和  $A$  的必要与充分条件. 马尔可夫变换是将一个二重级数用另一个二重级数代换:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

例如, 在 393 目定理 3 中给出了应用马尔可夫变换的充分条件 [其实, 马尔可夫定理本身十分宽泛, 因为甚至没有假定在定理中所提到的级数的绝对收敛性.]

395 目中的关系式 (13) 是应用马尔可夫变换的例子, 所谈的级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ , 它的第  $k$  项这次表为有限项的和

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &= a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \cdots + a_{k-1}^{(k)} + r_k \\ &= (k-1)! \left[ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (k+1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (k+2)} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(k-1) \cdot k \cdots (2k-1)} \right] + \frac{(k-1)!}{k^2(k+1) \cdots (2k-1)}. \end{aligned}$$

然后按列求和, 便达到所提到的关系式 [参看 395, 4)].

有趣地指出: 若应用展开式

$$\frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{i(i+1) \cdots (i+k)},$$

则马尔可夫变换, 如 395 目 4) 中已强调的, 不给出任何新东西, 因为径直回到原先的级数.

可以构造联系于重复应用库默尔变换的矩阵 (12). 关于这一点在上一目已经谈到了 [参看 (10)], 但是在那里, 库默尔的 (变换) 过程重复仅仅有限次, 而在这里我们考虑的重复进行是延续到无穷的. 只不过每次应该验证当  $p \rightarrow \infty$  时 (10) 式的“余式”趋于零:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)} = 0.$$

为了证明这一点, 例如, 对于 (106) 式, 我们指出: 在余式中出现的和不超过表达式

$$\frac{1}{(p!)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

因此整个余式不超过量

$$\frac{p!}{2^p(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$



显然, 它当  $p \rightarrow \infty$  时趋于零. 在 (106) 中取极限, 便得等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{2!}{5!!} + \cdots + \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \cdots \right\} \\ &= 3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}.\end{aligned}$$

不难看出它与 395 目的 (13) 式恒等.

然而类似的极限过程并非总是导致有益的结果: 例如, 若在等式 (10a) 中取极限, 我们直接得到等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}.$$

这样一来, 马尔可夫提出的方法给出了十分一般的模式, 给计算者提供广泛的可能性, 但对技巧有较多的要求.

## \* §9. 发散级数的求和法

417. 导言 在本章整章中, 直到现在为止, 对于已给的数值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (\text{A})$$

我们是在部分和的极限

$$A = \lim A_n$$

存在并有限 (或者等于有确符号的无穷大) 的假定下, 取这极限作为级数的和. 我们总认为“振动”发散级数没有和, 并且一贯地不考虑它们.

在 19 世纪后半期, 由于数学分析领域中的种种事实, 例如两个收敛级数乘积的发散性 [392], 自然地提出了在某些新的意义下 (当然与通常意义不同) 发散级数求和的可能性问题. 某些这样的“求和”方法看来特别有效; 我们来详细谈谈这个问题.

必须说明: 在柯西建立严格的极限理论 (以及与它相关的级数理论) 以前, 在数学的应用上已经时常遇到过发散级数. 虽然对于它们在证明中的应用有过争论, 然而有时甚至于曾经有将它们赋予数值意义的企图. 譬如, 从莱布尼茨的时代开始, 已经取数  $\frac{1}{2}$  作为“振动”级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

的“和”. 例如欧拉以为这种做法的理由是: 在展开式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$



(实际上这个展开式只对  $|x| < 1$  成立) 中用 1 代替  $x$  时, 恰好得到

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

在这里已经包含了真理的核心, 不过问题的提法不够明确; 这样任意选取展开式造成了各种可能, 譬如说, 由另一个展开式 (其中  $n$  与  $m$  任意但  $m < n$ )

$$\frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots$$

同时就得到

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

现代分析学用另一种方式提出问题. 它是以级数“广义和”的某些精确表述的定义为基础, 这种定义不仅是为了具体的我们感兴趣的数值级数而建立的, 而且还要应用到一整类这样的级数上. 这种方法的合理性不会引起怀疑: 读者必须回忆到不论通常的“级数和”概念看起来是怎样简单而自然, 它也是建立在 (只是被证实为合适的) 有条件地被采用的定义上; “广义和”的定义通常要适合两个条件:

第一, 若级数  $\sum a_n$  取广义和  $A$ , 级数  $\sum b_n$  取广义和  $B$ , 则级数  $\sum (pa_n + qb_n)$ , 其中  $p$  与  $q$  是两个任意常数, 必须取数  $pA + qB$  作为广义和. 满足这种条件的求和法称为线性的.

第二, 新的定义必须包含通常的定义作为特例. 更精确地说, 在通常意义下收敛于和  $A$  的级数必须有广义和, 并且广义和同样等于  $A$ . 具有这种性质的求和法称为正则求和法. 当然, 只有在比通常的求和法更广泛的情形下还可以求得“和式”的正则求和法才有用处: 只有这时我们才能有充分的理由说到“广义求和”.

我们现在直接转到讨论在应用的观点上特别重要的两种广义求和法.

**418. 幂级数法** 在实质上, 这种方法是泊松 (Poisson) 所发现的, 而且他首先企图将它应用到三角级数. 现叙述这种方法如下:

按照已给的数值级数  $(A)$ , 作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots; \quad (1)$$

若这级数关于  $0 < x < 1$  收敛, 并且它的和  $f(x)$  在  $x \rightarrow 1-0$  时有极限  $A$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A,$$

则数  $A$  称为已给级数的 (在泊松意义下的) 广义和.

例 1) 在这里, 根据定义本身, 从欧拉所讨论过的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$



就可导出它的和为  $\frac{1}{1+x}$  的幂级数当  $x \rightarrow 1-0$  时趋近于极限  $\frac{1}{2}$ . 这就是说, 实际上, 在此处精确建立的意义下, 数  $\frac{1}{2}$  就是所指出的级数的广义和.

2) 我们取更一般的例子: 三角级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (2)$$

对于一切值  $\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi$ , 是发散的.

实际上, 如果  $\theta$  有  $\frac{p}{q}\pi$  的形式, 其中  $p$  与  $q$  是自然数, 则对于  $q$  的倍数  $n$ , 就有

$$\cos n\theta = \pm 1,$$

因此违反了级数收敛的必要条件. 如果比值  $\frac{\theta}{\pi}$  是无理数, 则将它展开为无穷连分数, 并且作出其渐近分数  $\frac{m}{n}$ , 如我们所知, 应有

$$\left| \frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2},$$

从而

$$|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

这样, 对于无穷多个值  $n$ ,

$$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n},$$

因此

$$|\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n}.$$

由此也可见收敛的必要条件不能成立.

如果作出幂级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \quad (0 < r < 1)$$

(在这里字母  $r$  代替了前面的字母  $x$ ), 则对于不等于 0 的值  $\theta$ , 它的和是:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad (3)$$

[参考 440(5)], 并且当  $r \rightarrow 1-0$  时趋近于 0. 因此, 对于  $\theta \neq 0$ , 0 是级数的广义和. 如果  $\theta = 0$ , 则级数 (2) 显然有和等于  $+\infty$ ; 而在这种情形下表示式 (3) 化为  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1-r}$ , 也以  $+\infty$  为极限.

3) 同样, 从只有当  $\theta = 0$  或  $\pm\pi$  时收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

可导出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

[461,6)(a)], 因此在这次广义和当  $\theta \neq 0$  时等于  $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$ , 当  $\theta = 0$  时等于零.



由此显然可见所讨论的广义求和法是线性的. 至于这种方法的正则性, 则可从如下的阿贝尔定理确立:

若级数 (A) 收敛, 并有和  $A$  (在通常的意义下), 则对  $0 < x < 1$ , 幂级数 (1) 收敛, 并且当  $x \rightarrow 1-0$  时, 其和趋于极限  $A$ . ①

首先, 很明显 [379], 级数 (1) 的收敛半径不小于 1, 因而事实上对  $0 < x < 1$ , 级数 (1) 收敛. 我们已有等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

(其中  $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ) [参看 385,6); 390,4)]; 将其与显然的等式

$$A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n$$

逐项相减. 令  $A - A_n = \alpha_n$ , 便得等式

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n. \quad (4)$$

因为  $\alpha_n \rightarrow 0$ , 则对任意给定的  $\varepsilon > 0$  存在这样的  $N$ , 使得只要  $n > N$ ,  $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ .

将 (4) 式右端的级数和分成两个和式:

$$(1-x) \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n \quad \text{及} \quad (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

第二个和式立即可以估计, 且与  $x$  无关:

$$\left| (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| x^n < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

至于第一个和式, 则当  $x \rightarrow 1$  时, 它趋于 0, 因而当  $x$  充分接近 1 时有

$$\left| (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是最后有

$$\left| A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| < \varepsilon,$$

这就证明了我们的论断.

①这个定理是阿贝尔在研究二项级数理论时证明的 [我们在 437 目 6° 中将回到这个定理]. 毋庸置疑, 即是这个定理导致广义求和法的一般表述. 泊松仅仅是把广义求和法应用到特殊情形. 由于此点, 虽然发散级数求和法的观念与阿贝尔全然无关, 方法本身却常常被称为阿贝尔法. 今后, 我们还是把它称为泊松-阿贝尔法.



**419. 陶伯定理** . 若用泊松-阿贝尔法求得级数 (A) 的和  $A$ , 则如我们已经看到的, 这级数在通常的意义下可能没有和. 换句话说, 从极限

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A \quad (5)$$

的存在, 一般说来不就推得级数 (A) 收敛. 因此自然地产生了下面的问题: 为了使得可由 (4) 断定的级数 (A) 收敛, 也就是断定它在通常的意义下有和, 应当对这级数各项的性质加上怎样的补充条件?

在这方面的第一个定理是陶伯 (Tauber) 所证明的; 这个定理说:

设级数 (1) 当  $0 < x < 1$  时收敛, 并且极限等式 (5) 成立. 若级数 (A) 的各项适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0, \quad (6)$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

**证明** 我们将证明分成两部分. 首先假定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 \text{ 或 } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ①.}$$

若令

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|,$$

则当  $n \rightarrow \infty$  时, 数量  $\delta_n$  单调减小, 并趋近于零.

对于任意的自然数  $N$ , 我们有

$$\sum_0^N a_n - A = \sum_0^N a_n(1 - x^n) - \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n + \left[ \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right].$$

因此②

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^N a_n - A \right| &\leq \sum_0^N |na_n|(1-x) + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|na_n|x^n}{n} + \left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right| \\ &\leq (1-x)N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right|. \end{aligned}$$

①根据著名的柯西定理 [33,13], 由此已可推出条件 (6) 成立, 但是反过来却不正确, 因此我们现在是从比 (6) 更特殊的假定出发.

②我们应用到显而易见的 (当  $0 < x < 1$  时) 不等式

$$1 - x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) < n(1-x)$$

及

$$\sum_{N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}.$$



取任意小的数  $\varepsilon > 0$ , 令

$$(1-x)N = \varepsilon \quad \text{或} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

因此当  $N \rightarrow \infty$  时,  $x \rightarrow 1$ . 现在设  $N$  选得充分大, 使得: 1) 不等式  $\delta_{N+1} < \varepsilon^2$  成立; 并且 2) 相对应的  $x$  是这样接近于 1, 以致

$$\left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right| < \varepsilon.$$

这时

$$\left| \sum_0^N a_n - A \right| < (2 + \delta_0) \cdot \varepsilon,$$

这就证明了定理.

定理的一般情形也可化到所考虑的特殊情形. 令

$$v_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \quad (n \geq 1), \quad v_0 = 0,$$

于是

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \quad (n \geq 1),$$

然后

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_1^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n \\ &= a_0 + (1-x) \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

但是由定理的假定, 也就是由于  $\frac{v_n}{n}$  当  $n \rightarrow \infty$  时趋近于零, 我们容易得到

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0. \quad (8)$$

为了要证明它, 在这里只需将和式分成两部分:

$$(1-x) \sum_1^N + (1-x) \sum_{N+1}^{\infty}$$

并且选择  $N$  使得第二个和式中的一切因子  $\frac{v_n}{n}$  的绝对值小于预先指定的数  $\varepsilon > 0$  —— 因而无论  $x$  是怎样, 第二个和式的绝对值小于  $\varepsilon$ ; 至于由确定的有限个项所组成的第一个和式, 则当  $x$  接近于 1 时也是这样.

因此, 由 (7), (5) 与 (8) 就有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

但是在这里已经能应用定理的已证明的特殊情形, 因此

$$\sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$



另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_1^n \frac{v_m}{m(m+1)} &= \sum_1^n \frac{v_m}{m} - \sum_1^n \frac{v_m}{m+1} = \sum_1^n \frac{v_m}{m} - \sum_1^{n+1} \frac{v_{m-1}}{m} \\ &= -\frac{v_n}{n+1} + \sum_1^n a_m.\end{aligned}$$

因为上式右端的第一项趋近于零, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n a_m = A - a_0,$$

这样就完成了定理的证明.

后来, 许多数学家建立了一系列同一类型的精巧的定理 (称为“陶伯型”的定理), 它们包含形状改变了的并且推广了的陶伯条件. 我们对此将不加研究.

**420. 算术平均法** 这种方法的最简单的观念是弗罗贝尼乌斯(Frobenius) 所提出的. 但是通常它与切萨罗(Cesàro) 的名字发生联系, 因为后者对这个方法作了进一步的发展. 这种方法就是:

根据已给的数值级数 (A) 的部分和  $A_n$ , 作出它们的逐步算术平均

$$\alpha_0 = A_0, \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \dots, \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n+1}, \dots$$

如果变量  $\alpha_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时有极限  $A$ , 则这数称为已给级数的 (在切萨罗的意义下的) 广义和.

例 1) 回到级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

在这里我们有

$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \alpha_{2k-1} = \frac{1}{2},$$

于是  $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}$ . 我们所得到的和数与用泊松-阿贝尔法所求得的相同 [418, 1].

2) 级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

的部分和是 (只要  $\theta \neq 0$  时)

$$A_n = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}.$$



现在不难计算算术平均:

$$\begin{aligned}(n+1)\alpha_n &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^n [\cos m\theta - \cos(m+1)\theta] \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2.\end{aligned}$$

因此, 最后得到

$$\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2.$$

显然  $\alpha_n \rightarrow 0$ : 在这里, 当  $\theta \neq 0$  时, 0 就是广义和 [参考 418, 2)].

3) 最后, 重新提出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

当  $\theta \neq 0$  时, 我们有

$$A_n = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

然后

$$\begin{aligned}(n+1)\alpha_n &= \frac{n+1}{2} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=1}^{n+1} [\sin(m+1)\theta - \sin m\theta] \\ &= \frac{n+1}{2} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+2)\theta - \sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}.\end{aligned}$$

由此可见  $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta$ .

在一切情形下, 根据切萨罗法所求得的广义和与根据泊松-阿贝尔法所求得的一样. 以后 [421] 要说明这并不是偶然的.

在这里也立即可见切萨罗法是线性的. 在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

存在时, 由著名的柯西定理 [33, 13)] 就可证明算术平均  $\alpha_n$  也有同样的极限. 因此, 切萨罗法是正则的.

**421. 泊松-阿贝尔法与切萨罗法的相互关系** 我们从简单的说明开始: 如果用算术平均法可求得级数 (A) 的有限“和”A, 则必须有

$$a_n = o(n).$$



实际上, 由  $\alpha_{n-1} \rightarrow A$  及  $\frac{n+1}{n}\alpha_n \rightarrow A$ , 可知

$$\frac{(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} \rightarrow 0.$$

而这时也有

$$\frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{A_{n-1}}{n-1} \rightarrow 0,$$

这就是所需要证明的.

下面的弗罗贝尼乌斯定理可解决在本目标题上所提出的问题:

如果用算术平均法可求得级数 (A) 的有限“和” $A$ , 则同时用泊松-阿贝尔法也可求得相同的和.

这样, 设  $\alpha_n \rightarrow A$ . 由本目开始所作的说明, 显然幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

关于  $0 < x < 1$  收敛. 运用阿贝尔变换两次 [参考 383, 并且特别是 385,6)], 我们逐步得到:

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_n x^n \textcircled{1}$$

[同时应回忆到  $A_0 + A_1 + \cdots + A_n = (n+1)\alpha_n$ ]. 已知 (对于  $0 < x < 1$ )  $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  或

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

用  $A$  乘这个恒等式的两端, 再逐项减去前一恒等式:

$$A - f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(A - \alpha_n)x^n.$$

将右端的和式分成两部分:

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} + (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty},$$

①从右端显然收敛的级数 (由于  $\alpha_n$  有界) 出发, 不难直接证实上面的恒等式正确:

$$\begin{aligned} (1-2x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)\alpha_n - 2n\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_{n-2}]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}] - [n\alpha_{n-1} - (n-1)\alpha_{n-2}]\}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

[这时我们令  $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = A_{-1} = 0$ .] 在这里可知最后一级数收敛.



在这里选择数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,

$$|A - \alpha_n| < \varepsilon,$$

其中  $\varepsilon$  是预先任意给出的正数. 这时第二个和式的绝对值小于  $\varepsilon$  (与  $x$  无关!), 而当  $x$  接近于 1 时, 第一个和式也是这样. 由此证明就完成了 [与 418 目阿贝尔定理的证明相比较].

这样, 我们断定: 在应用切萨罗法的一切情形下, 应用泊松-阿贝尔法也得到同样的结果. 反过来说则不正确: 有的级数可用泊松-阿贝尔法求和, 而在切萨罗的意义下无广义和. 例如, 我们考虑级数

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$$

因为在这里显然 (在本目开始所指出的) 用算术平均法求和的必要条件不成立, 所以不能应用这种方法. 而同时级数

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

有 (对于  $0 < x < 1$ ) 和  $\frac{1}{(1+x)^2}$ , 它当  $x \rightarrow 1-0$  时趋近于极限  $\frac{1}{4}$ . 这就是用泊松-阿贝尔法所求得的级数的广义和.

因此, 泊松-阿贝尔法比切萨罗法要强些, 也就是说可应用到比较广泛的一类情形, 但是当同时可应用两种方法时, 它们彼此不相矛盾.

**422. 哈代-兰道定理** 与在泊松-阿贝尔法的情形一样, 对于切萨罗法也可证明陶伯型的定理, 亦即确立级数各项的一些补充条件, 使得当那些条件成立时, 如果级数可用算术平均法求和, 则它在通常的意义下收敛.

由弗罗贝尼乌斯定理, 显然从泊松-阿贝尔法的每个陶伯定理都可特别引导出切萨罗法的这种定理. 例如陶伯定理本身可以改述为: 若  $\alpha_n \rightarrow A$ , 并且条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \quad (9)$$

成立, 则同时也有  $A_n \rightarrow A$ . 而且在这里, 由容易证实的恒等式

$$A_n - \alpha_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \textcircled{1}.$$

可直接推出这个结果, 这个恒等式指出了: 在所考虑的情形下, 条件 (9) 是必要的.

$\textcircled{1}$ 我们有

$$\begin{aligned} (n+1)A_n - (n+1)\alpha_n &= (n+1)A_n - (A_0 + A_1 + \cdots + A_n) \\ &= (A_n - A_0) + (A_n - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n. \end{aligned}$$



哈代 (Hardy) 证明了: 不仅当  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  时 (这种情形已经包括在前面!), 而且在更广泛的假定

$$|ma_m| < C \quad (C \text{ 为常数}, m = 1, 2, 3, \dots)$$

下, 可断定由  $a_n \rightarrow A$  能推出  $A_n \rightarrow A$ . 兰道 (Landau) 证明了甚至于只要这种关系式“单侧”成立, 也就能够得到这样的结论.

若可用算术平均法求得级数 (A) 的“和”  $A$ , 而且条件

$$ma_m > -C \quad (C = \text{常数}; m = 1, 2, 3, \dots)$$

成立, 则同时也有

$$\sum_0^\infty a_n = A.$$

[改变级数的所有项的符号, 我们看到也可只假定另一方向的不等式成立:

$$ma_m < C.$$

显然这定理可特别应用到各项符号不变的级数.]

为了证明起见, 首先考虑和式

$$S = \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m,$$

其中  $n$  与  $k$  是任意的自然数; 用恒等变换的方法, 容易将它化成下列形式:

$$S = \sum_{m=0}^{n+k} A_m - \sum_{m=0}^n A_m = (n+k+1)\alpha_{n+k} - (n+1)\alpha_n = k\alpha_{n+k} + (n+1)(\alpha_{n+k} - \alpha_n). \quad (10)$$

若取任意的  $A_m$  (当  $n < m \leq n+k$  时), 则利用所假定的不等式  $a_m > -\frac{C}{m}$ , 可得  $A_m$  的在下方的估计值:

$$A_m = A_n + (a_{n+1} + \dots + a_m) > A_n - \frac{k}{n}C,$$

于是对于  $m$  求和, 就得到

$$S > kA_n - \frac{k^2}{n}C.$$

由此与 (10) 式比较, 得到这样的不等式:

$$A_n < \alpha_{n+k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_{n+k} - \alpha_n) + \frac{k}{n}C. \quad (11)$$

现在令  $n$  任意增加到无穷大, 而令  $k$  的变化适合下一条件: 比值  $\frac{k}{n}$  趋近于预先给出的数  $\varepsilon > 0$ . 这时不等式 (11) 的右端趋近于极限  $A + \varepsilon C$ , 因此对于充分大的值  $n$  就有

$$A_n < A + 2\varepsilon C. \quad (12)$$

完全同样, 考虑下一和式:

$$S' = \sum_{m=n-k+1}^n A_m = k\alpha_{n-k} + n(\alpha_n - \alpha_{n-k}).$$



并且作出  $A_m$  (当  $m-k < m < n$  时) 的在上方的估计值:

$$A_m = A_n - (a_{m+1} + \cdots + a_n) < A_n + \frac{k}{n-k}C,$$

我们得到不等式

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k}C.$$

由此

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k}C.$$

如果  $n \rightarrow \infty$ , 并且与在前面一样, 同时  $\frac{k}{n} \rightarrow \varepsilon$  (但这次设  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ), 则这个不等式的右端趋近于极限  $A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C > A - 2\varepsilon C$ . 因此, 对于充分大的  $n$ , 应有

$$A_n > A - 2\varepsilon C. \quad (13)$$

比较 (12) 与 (13), 我们看到确乎

$$\lim A_n = A.$$

这样, 定理得证.

我们注意: 对于泊松-阿贝尔求和法, 也建立过类似的陶伯定理——刚才所证明的定理只是这个定理的一个特别的推论. 但是由于它的证明复杂, 我们在这里不能加以研究.

**423. 广义求和法在级数乘法上的应用** 现在讨论广义求和法在依照柯西法则 [389] 的级数乘法问题上的应用. 设除级数 (A) 外, 还给出级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \quad (B)$$

则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \quad (C)$$

称为级数 (A) 与 (B) 的乘积. 如果两个已给的级数收敛, 并且有通常的和  $A$  与  $B$ , 则级数 (C) 还是可能发散 [在 392 中, 我们有过这样的例子].

然而, 在一切情形下, 我们可用泊松-阿贝尔法求级数 (C) 的和, 并且所得和数就是  $AB$ .

实际上, 对于  $0 < x < 1$ , 级数 (1) 与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

都绝对收敛 [379]; 用  $f(x)$  与  $g(x)$  分别表示它们的和. 根据古典的柯西定理 [389], 这两个级数的乘积, 亦即级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n$$



收敛, 并且以乘积  $f(x)g(x)$  作为和. 当  $x \rightarrow 1-0$  时, 这个和趋近于  $AB$ , 因为如我们所已经看到的, 分别有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = B.$$

因此, 级数 (C) 的“广义 (在泊松-阿贝尔的意义下) 和”的确是  $AB$ , 这就是所需要证明的.

由此, 作为推论得到了关于级数乘法的阿贝尔定理. 同样地, 由证明本身很清楚, 若级数 (A) 与 (B) 不是在通常意义下收敛, 而仅是按照泊松-阿贝尔法求的和  $A$  与  $B$ , 则结论同样保持有效.

在这样的情况下, 考虑到弗罗贝尼乌斯定理 [421], 可以作出如下断言: 若级数 (A), (B) 与 (C) 在切萨罗的意义下可求和, 且分别具有“广义和”  $A, B$  与  $C$ , 则必然  $C = AB$ .

作为例子, 我们考虑级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} + \cdots$$

的“平方”, 这个级数是在二项展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}x^m + \cdots$$

中取  $x = 1$  而得到的. 将所述数值级数自乘, 就得到我们所熟悉的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \textcircled{1}.$$

无论根据泊松-阿贝尔法或是根据切萨罗法, 它的广义和总是  $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ .

其次, 把这个发散级数自乘, 得到级数

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots,$$

其泊松-阿贝尔意义下的广义和是  $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  (在切萨罗意义下它是不可求和的!).

#### 424. 级数的其他广义求和法

1) 沃罗诺伊 (Voronoi) 法. 设有正的数值序列  $\{p_n\}$  且

$$P_0 = p_0 \quad P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \quad (n > 0).$$

由级数 (A) 的部分和组成表达式

$$w_n = \frac{p_n A_0 + p_{n-1} A_1 + \cdots + p_0 A_n}{P_n}.$$

若当  $n \rightarrow \infty$  时  $w_n \rightarrow A$ , 则  $A$  称为级数 (A) 对给定序列  $\{p_n\}$  的选择在沃罗诺伊意义下的广义和.

<sup>①</sup>这儿我们利用了数值的等式

$$\sum_0^n \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{(2n-2m-1)!!}{(2n-2m)!!} = 1,$$

其中  $(-1)!!$  与  $0!!$  约定等于 1.



无论在这种情况下, 还是后面各种情况下, 方法的线性性质都是明显的, 所以我们不再谈它. 对于沃罗诺伊法的正则性, 其必要与充分条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0.$$

**必要性** 我们首先假设所考虑的方法是正则的: 设由  $A_n \rightarrow A$  总可推出  $w_n \rightarrow A$ . 特别若取级数

$$1 - 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

对此级数,  $A_0 = 1$ , 而  $A_n = 0$  (因而  $A = 0$ ), 则必然有

$$w_n = \frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0.$$

**充分性** 现在假定定理的条件成立, 我们来证明, 由  $A_n \rightarrow A$  可推出  $w_n \rightarrow A$ .

注意到特普利茨定理 [391] 且以  $A_n$  代入  $x_n$ ,  $\frac{p_{n-m}}{P_n}$  代入  $t_{nm}$ , 这个定理的条件 (a) 成立, 因为

$$t_{nm} = \frac{p_{n-m}}{P_n} < \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}} \rightarrow 0.$$

条件 (b) 与 (B) 成立是显然的, 因为

$$\sum_{m=0}^n |t_{nm}| = \sum_{m=0}^n t_{nm} = 1.$$

因此, 如所要求证明的  $w_n \rightarrow A$ .

2) 推广的切萨罗法. 我们已经熟悉了算术平均法 [420]; 它是切萨罗提出的求和法的无穷系列中最简单的一种. 一经确定了自然数  $k$ , 切萨罗引进序列

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = \frac{C_{n+k-1}^{k-1} A_0 + C_{n+k-2}^{k-1} A_1 + \cdots + C_{k-1}^{k-1} A_n}{C_{n+k}^k}$$

且把当  $n \rightarrow \infty$  时它的极限看作是级数 (A) 的 ( $k$  次) 广义和<sup>①</sup>. 当  $k = 1$  时, 便回到算术平均法.

今后我们将不止一次用到组合系数  $C$  之间的如下关系式:

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k; \quad (14)$$

若从已知的关系式

$$C_{n+k}^k = C_{(n-1)+k}^k + C_{n+(k-1)}^{k-1}$$

出发, 对  $n$  作数学归纳法, 则 (14) 式易于证明.

首先证明, 所有次数的切萨罗法是正则的沃罗诺伊法的特殊情况. 为此, 只需令  $p_n = C_{n+k-1}^{k-1}$ , 因为由 (14) 式便推出  $P_n = C_{n+k}^k$ , 加之

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{1}{n+k} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

<sup>①</sup>在有的书中将其记为  $(C, k)$ .——译者



借助于等式 (14), 利用量  $S_n^{(k)}$ , 可确立

$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)}. \textcircled{1} \tag{15}$$

这给出了解释  $k$  次切萨罗求和与  $(k-1)$  次切萨罗求和之间关系的可能性. 设级数 (A) 容许  $(k-1)$  次求和. 因此  $\gamma_n^{(k-1)} \rightarrow A$ . 根据 (14) 式与 (15) 式, 有

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(k)} &= \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k} \\ &= \frac{C_{k-1}^{k-1} \gamma_0^{(k-1)} + C_k^{k-1} \gamma_1^{(k-1)} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1} \gamma_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k}. \end{aligned}$$

到这里应用特普利茨定理 [391], 同时令

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \quad \text{及} \quad t_{nm} = \frac{C_{m+k-1}^{k-1}}{C_{n+k}^k} \quad (m = 0, 1, \cdots, n)$$

便得到结论:  $\gamma_n^{(k)} \rightarrow A$ . 这样一来, 若级数 (A) 按某一次数的切萨罗法是可求和的, 则这个级数按任意更高次数的切萨罗法也是可求和, 并且求得同样的和.

现在转向已为我们所熟悉的弗罗贝尼乌斯定理 [421] 的推广: 若级数 (A) 按任意次 (比如说,  $k$  次) 的切萨罗法可求和, 则它按泊松-阿贝尔法可求和并求得同样的和.

设给定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = A. \tag{16}$$

由此容易断定: 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n \tag{17}$$

对  $-1 < x < 1$  收敛. 实际上, 因为  $C_{n+k}^k \sim \frac{n^k}{k!}$ , 则从 (16) 式有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n^{(k)}|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}.$$

若  $A \neq 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S_n^{(k)}|} = 1,$$

因而, 根据柯西-阿达马定理, 级数 (17) 的收敛半径等于 1. 若  $A = 0$ , 级数的收敛半径在任何情况下都不小于 1.

现在考虑等式的系列:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n, \textcircled{2} \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n. \end{aligned}$$

$\textcircled{1} S_n^{(0)}$  就指  $A_n$ .  
 $\textcircled{2}$  此处与后面, 要注意到等式 (15).



在前面我们已得出上述系列最后一个级数在开区间  $(-1, 1)$  内的收敛性, 由此可推出 [参看 390,4)] 前面所有级数的收敛性. 此外

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} C_{n+k}^k x^n. \quad (18)$$

把此式与另一等式

$$1 = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k x^n \quad (19)$$

相比较——(19) 式在同一开区间  $(-1, 1)$  成立, (19) 式是由对级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

微分  $k$  次得到的. 等式 (19) 两端乘以  $A$ , 并从其逐项减去等式 (18), 最后得到

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} [A - \gamma_n^{(k)}] C_{n+k}^k x^n.$$

随后的论证 [考虑到 (16) 式] 与 418 目的阿贝尔定理及 421 目的弗罗贝尼乌斯定理的证明中所用的完全类似, 这些都留给读者. 结果我们得到:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

这就是所要证明的.

注意, 存在着按照泊松-阿贝尔法可求和的发散级数, 但它按推广的切萨罗法没有一个方法是可求和的. 于是, 所说过的方法当中, 第一个方法原来强过所有后面的, 甚至比它们合起来还强.

3) 赫尔德 (Hölder) 法 这些方法不过是重复使用算术平均法. 所有有关正则性及相互关系的问题, 都限于引用柯西定理.

可以说, 使用  $k$  回算术平均法完全等价于应用一回  $k$  次的切萨罗法, 即对同类级数求和, 并得同样的和.

4) 博雷尔 (Borel) 法 这个方法是: 根据级数 (A) 及其部分和  $A_n$  作出表达式

$$\frac{\sum_0^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \sum_0^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

若后一级数收敛, 哪怕是对充分大的  $x$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 其和有极限  $A$ , 则这个数值就是对级数 (A) 在博雷尔意义下的广义和.

我们来证明博雷尔法的正则性. 设级数 (A) 收敛, 并用 (A) 表示其和, 它的余式  $A - A_n$  用  $\alpha_n$  表示. (对于充分大的  $x$ ) 有

$$A - e^{-x} \sum_0^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_0^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \sum_0^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_0^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}.$$



给出任意小的正数  $\varepsilon > 0$ ; 找出这样的数码  $N$ , 使得对  $n > N$  成立  $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 把最末的式子表为和的形式:

$$e^{-x} \sum_0^N \alpha_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}.$$

对不论怎样的  $x$ , 第二项按绝对值  $< \frac{\varepsilon}{2}$ , 而第一项是  $e^{-x}$  乘以 (对  $x$  的) 多项式, 对充分大的  $x$ , 变得绝对小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ . 由此就全部证完了. ①

5) 欧拉法. 对级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

在 413 目有 [参看 (7) 式] 公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Delta^p a_0}{2^{p+1}}, \quad (20)$$

它表示的是欧拉变换. 同时, 如所证明的, 由左端级数的收敛性已经推出右端级数的收敛性, 并且二者的和相等.

然而在第一个级数发散的情况下, 第二个级数可能收敛; 在类似的情况下, 它的欧拉和可作为广义和而赋予第一个级数. 级数求和的欧拉法其实质就在这里, 刚才所作的说明保证方法的正则性.

若把所考虑的级数写成通常的形式 (A), 而不分出正负号  $\pm$ , 并回忆起 413 目, 对  $p$  阶差分的表达式 (4), 则可以说按照欧拉求和法, 取通常的级数和

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_0 + C_p^1 a_1 + C_p^2 a_2 + \cdots + C_p^p a_p}{2^{p+1}},$$

作为广义和 (假设后者收敛).

我们就在这里结束发散级数求和的各种方法的述评, 因为给读者建立起关于这个问题的方法的多样性的印象, 所引述的已经足够了. 在所有的情况下, 我们都把方法的正则性作为其必需的特性建立了起来. 只可惜我们不总是可能充分深入到不同方法之间关系的问题中去. 其实可能会发生两个方法的使用的范围交叉 (而不是一个覆盖另一个); 可能出现两个方法把不同的广义和赋予同一个发散级数的情形.

## 425. 例子

1) 设  $\{a_n\}$  是正的单调递减序列, 收敛于 0. 令

$$A_0 = a_0, A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n > 0).$$

证明 变号级数

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots$$

①读者会觉察到这个证明与阿贝尔定理 [418] 与其他定理的证明的相似之处.



按 (1 次) 切萨罗法是可求和的, 它的广义和等于收敛的莱布尼茨型级数

$$\alpha = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

的和的一半[哈代 (Hardy)].

**提示** 计算所给级数的前  $2m$  个部分和的算术平均值, 它可表为如下形式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(a_0 - a_1) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) + \cdots + (a_0 - a_1 + \cdots + a_{2m-2} - a_{2m-1})}{m},$$

根据柯西定理 [33,13], 它趋于  $\frac{1}{2}\alpha$ . 然后已经容易证明前  $2m+1$  个部分和的平均值趋于同一极限.

2) 取  $a_n = \frac{1}{n+1}$  或  $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1} (n=0, 1, 2, \cdots)$ , 根据 1) 中定理, 证明发散级数

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \cdots \text{①}$$

与

$$\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \cdots$$

二者按切萨罗法可求和, 其广义和分别等于  $\frac{1}{2} \ln 2$  和  $\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$ .

**提示** 在第二种情形利用沃利斯公式 [317].

3) 借助于同一定理证明: 当  $-1 < x < 0$  时, 发散的狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\xi} \quad (\xi = -x, 0 < \xi < 1)$$

可按切萨罗法求和.

**提示** 把  $n^{\xi}$  表为如下和的形状:

$$n^{\xi} = (1-0) + (2^{\xi}-1) + \cdots + (n^{\xi} - (n-1)^{\xi}),$$

并且用微分学的方法证明, 随  $n$  的增长, 序列  $n^{\xi} - (n-1)^{\xi}$  递减 [同时, 由于 32,5), 序列趋于 0].

4) 若把收敛级数的项用零来“稀化”(即指用加入零来作为原先的项之间的间隔——译者), 则这绝不会影响级数的收敛性, 也不会影响其和的数值. 由下面的例子可以看出, 发散级数的广义求和法, 可能是另外一种情况, 考虑级数

$$(a) \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{1} - \underset{3}{1} + \underset{4}{1} - \underset{5}{1} + \cdots$$

$$(b) \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{0} + \underset{3}{1} - \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{1} - \underset{7}{1} + \underset{8}{0} + \cdots$$

$$(B) \underset{0}{0} + \underset{1}{1} - \underset{2}{1} + \underset{3}{0} + \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{0} + \underset{7}{0} - \underset{8}{1} + \cdots \text{②}$$

①(通常)  $H_n$  表示调和级数的第  $n$  个部分和.

②(a) 中的  $\pm 1$  项位于第  $m$  个位置 (其中  $m=0, 1, 2, 3, \cdots$ ), 在 (B) 中  $\pm 1$  项移到了第  $2^m$  个位置, 其余的位置用零填满.



关于第一个级数, 我们已知它的按切萨罗法的广义和等于  $\frac{1}{2}$ . 证明: 级数 (6) 已经有另外一个和, 即  $\frac{1}{3}$ , 而级数 (B) 按切萨罗的意义全然不可求和.

提示 在级数 (B) 的情形, 当  $n$  从  $2^{2m-1}$  变到  $2^{2m} - 1$  时, 前  $n+1$  项的算术平均值

$$\text{从 } \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m-1} + 1} \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{到} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

振动.

5) 设  $k$  是任意自然数, 考虑级数

$$\Sigma_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n+k}^k,$$

证明  $\Sigma_k$  用  $k$  次切萨罗法不可求和, 但用  $(k+1)$  次切萨罗法可以求和 (趋于 “和”  $\frac{1}{2^{k+1}}$ ).

应用等式 (18) 并应用等式 (19) 两次 (第一次以  $-x$  代换  $x$ , 而第二次用  $x^2$  代换  $x$ ), 顺次得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n+k}^k x^n = \frac{1}{(1-x^2)^{k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k x^{2m}. \textcircled{1}$$

比较第一个和最末一个级数中  $x$  的同次幂的系数 [在这里我们应用了幂级数恒等的定理, 这个定理将在后面 437 目, 3° 中证明], 得到结论:

$$S_{2m}^{(k)} = C_{m+k}^k, \quad S_{2m+1}^{(k)} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (21)$$

这样一来

$$\gamma_{2m}^{(k)} = \frac{C_{m+k}^k}{C_{2m+k}^k} \rightarrow \frac{1}{2^k}, \quad \gamma_{2m+1}^{(k)} = 0,$$

所提到的级数没有  $k$  次切萨罗广义和.

另一方面, 由于 (21), (15) 和 (14) 式, 无论是对  $n = 2m$ , 还是对  $n = 2m+1$  都有  $S_n^{(k+1)} = C_k^k + C_{1+k}^k + \dots + C_{m+k}^k = C_{m+k+1}^{k+1}$ . 由此

$$\gamma_{2m}^{(k+1)} = \frac{C_{m+k+1}^{k+1}}{C_{2m+k+1}^{k+1}} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}}.$$

对  $\gamma_{2m+1}^{(k+1)}$  也同样成立. 这就证明了我们的论断.

6) 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k,$$

其中  $k$  是任意自然数, 同样是按  $(k+1)$  次切萨罗法可求和的. 依靠上述结果, 可以证明这一点. 事实上, 把  $C_{n+k}^k$  按照  $(n+1)$  的幂展开:

$$\begin{aligned} C_{n+k}^k &= \frac{1}{k!} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) \\ &= \alpha_1^{(k)} (n+1)^k + \alpha_2^{(k)} (n+1)^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}^{(k)} (n+1); \end{aligned}$$

<sup>①</sup>最末一个级数在开区间  $(-1, 1)$  内的收敛性容易借助于柯西-阿达马定理证明, 由此已推出第一个级数的收敛性.



这里  $\alpha_i^{(k)}$  是常系数, 同时  $\alpha_1^{(k)} = \frac{1}{k!} \neq 0$ . 再把级数记成这样的等式后, 以  $k-1, k-2, \dots, 1$  代换  $k$ , 然后倒容易把  $(n+1)^k$  表成和的形状:

$$(n+1)^k = \beta_1^{(k)} C_{n+k}^k + \beta_2^{(k)} C_{n+k-1}^{k-1} + \dots + \beta_k^{(k)} C_{n+1}^1,$$

$\beta$  为常系数. 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k \equiv \beta_1^{(k)} \Sigma_k + \beta_2^{(k)} \Sigma_{k-1} + \dots + \beta_k^{(k)} \Sigma_1.$$

因为所有的级数  $\Sigma_i (i=1, 2, \dots, k)$  按  $(k+1)$  次切萨罗法可求和 (我们在此处考虑到一系列次数的切萨罗法的性质!), 则由于所说方法的线性性质, 这一点对所论的级数也成立.

计算广义和本身, 只有在后面 [449] 才能够实现.

再举出几个直接应用赫尔德、博雷尔和欧拉法的简单例子.

7) 按赫尔德法计算下列级数的和:

(a)  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

(б)  $1 - 3 + 6 - 10 + \dots$

答案 (a) 两次求平均值给出  $\frac{1}{4}$ .

(б) 三次求平均值给出  $\frac{1}{8}$ .

8) 按博雷尔法求级数  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  的和.

答案  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$ .

9) 按欧拉法求下列级数的和:

(a)  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ;

(б)  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ ;

(в)  $1 - 2 + 2^2 - 2^4 + \dots$ ;

(г)  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$ .

提示 在所有的情况下应用公式 (20) 中的欧拉变换是方便的.

答案

(a)  $A = \frac{1}{2}$

(б)  $\Delta^0 a_0 = 1, \Delta^1 a_0 = 1, \Delta^p a_0 = 0 (p > 1), A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ;

(в)  $\Delta^p a_0 = 1, A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots = \frac{1}{3}$ ;

(г)  $\Delta^0 a_0 = 1, \Delta^1 a_0 = 7, \Delta^2 a_0 = 12, \Delta^3 a_0 = 6, \text{对 } p > 3, \Delta^p a_0 = 0, A = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{12}{8} - \frac{6}{16} = -\frac{1}{8}$ .

**426. 一般的线性正则求和法类** 最后, 我们举出一种极其一般的方式来构成一类线性正则求和法, 在这种求和法中特别包含着上面所详细研究过的所有方法.

设已给出在参数  $x$  的某一变化区域  $\mathcal{X}$  中的一个函数序列

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (\Phi)$$



假定区域  $\mathcal{X}$  以有限的或广义的数  $\omega$  作为凝聚点. 根据已给的数值级数 (A) 作出由函数构成的级数

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots + A_n\varphi_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) \quad (22)$$

(其中  $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ), 若这个级数至少对于充分接近于  $\omega$  的  $x$  是收敛的, 并且它的和  $\varphi(x)$  当  $x \rightarrow \omega$  时趋近于极限  $A$ , 则取数  $A$  作为已给数值级数的广义和.

因此, 与选取序列  $(\Phi)$  及极限点  $\omega$  相关, 我们得到级数的某种求和法. 根据这种方法的作法, 显然可见它是线性的. 现在假定函数  $\varphi_n(x)$  满足下列三个条件:

a) 对任意常数  $n$

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \varphi_n(x) = 0;$$

b) 对充分接近  $\omega$  的  $x$  值<sup>①</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x)| \leq K \quad (K = \text{常数});$$

B) 最后

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1.$$

这时求和法就是正则的.

证明 于是, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

那么, 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到这样的号码  $n'$ , 使得对  $n > n'$  有

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3K}. \quad (23)$$

由于  $A_n$  的有界性以及级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$  是绝对收敛的, 至少对  $|x - \omega| < \delta' (x > \Delta')$  级数  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$  同样收敛. 同时, 显然

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) - A &= \sum_{n=0}^{n'} [A_n - A]\varphi_n(x) + \sum_{n=n'+1}^{\infty} [A_n - A]\varphi_n(x) \\ &\quad + A \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1 \right], \end{aligned}$$

因而取绝对值得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) - A \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^{n'} [A_n - A]\varphi_n(x) \right| \\ &\quad + \sum_{n=n'+1}^{\infty} |A_n - A| \cdot |\varphi_n(x)| + |A| \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1 \right|. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>即: 若  $\omega$  有限, 对  $|x - \omega| < \delta'$ , 或者若  $\omega = +\infty$ , 对  $x > \Delta'$ .



由于 (23) 式及条件 (б), 右端第二项  $< \frac{\varepsilon}{3}$ . 至于第一项和第三项, 由于条件 (a) 与条件 (в), 使  $x$  充分接近  $\omega$  时, 每一项都可使其  $< \frac{\varepsilon}{3}$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A,$$

即广义和是存在的, 并且等于普通和.

若  $x$  是自然参数  $m$  (因此  $\omega = +\infty$ ), 则函数序列  $(\Phi)$  被无穷长方矩阵代替:

	$t_{00}$	$t_{01}$	$t_{02} \cdots t_{0m} \cdots$
	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12} \cdots t_{1m} \cdots$
	$t_{20}$	$t_{21}$	$t_{22} \cdots t_{2m} \cdots$
	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
	$t_{n0}$	$t_{n1}$	$t_{n2} \cdots t_{nm} \cdots$
	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

(T)

取序列

$$T_m = A_0 t_{0m} + A_1 t_{1m} + \cdots + A_n t_{nm} + \cdots,$$

当  $m \rightarrow \omega$  的极限作为级数 (A) 的广义和, 假设这个级数至少对于充分大的数值  $m$  是收敛的.

对这种情况的正则性条件变为如下形式:

(a) 对任意常数  $n$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_{nm} = 0,$$

(б) 对充分大的  $m$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| \leq K \quad (K \text{ 为常数}),$$

(в) 最后,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1.$$

在本质上, 所有这些思想属于特普利茨 [参看 391], 读者记得, 只是那里的矩阵假定是三角形矩阵. 这种特殊情况, 对我们来说多半是充分的. 我们还提到: 无论是按泊松-阿贝尔法求和还是按博雷尔法求和都可达到前面所给的模式. 在第一种情形有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n A_n,$$

因此, 因子  $(1-x)x^n$  在区域  $\mathcal{X} = (0, 1) (\omega = 1)$  起  $\varphi_n(x)$  的作用. 在第二种情形, 在  $\mathcal{X} = (0, +\infty) (\omega = +\infty)$ ,  $\varphi_n(x) = e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$ . 符合条件 (a), (б), (в) 容易验证, 根据前面已证明的一般定理, 仍可建立这些方法的正则性.

前面所给的求和法的一般求和法的定义以及有关它的正则性的定理容易这样来照搬: 使级数 (A) 求和当中参与的不是一部分和而直接是其各项  $a_n$  的情况. 我们不再谈及这一点了.



# 第十二章 函数序列与函数级数

## §1. 一致收敛性

427. 引言 前面我们研究过无穷序列与它的极限, 无穷级数与它的和; 这些序列的元素或这些级数的项都是常数. 实际上, 有时在它们里面包括一些作为参数的变量, 而在研究的时候, 这些变量看作是确定的常数. 譬如, 当我们证明, 序列

$$1 + \frac{x}{1}, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \dots$$

有极限  $e^x$ , 或者级数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

有和  $\ln(1+x)$  的时候,  $x$  是当作常数的. 序列的元素与它的极限的函数性质, 或者级数的项与它的和的函数性质, 以前是完全不考虑的; 而现在引起了我们的注意.

假设已知一序列, 它的元素为同一个变量  $x$  的函数, (而且确定在同一个变化区域  $\mathcal{X} = \{x\}$ <sup>①</sup>上)

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{1}$$

设对于  $\mathcal{X}$  中的每一个  $x$ , 这个序列有有限极限; 因为极限完全由  $x$  的值来确定, 所以它也是  $x$  的函数 (在  $\mathcal{X}$  中):

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \tag{2}$$

我们称它为序列 (1)[或函数  $f_n(x)$ ] 的极限函数.

<sup>①</sup>这区域通常是线段; 但我们现在要暂时保持最大的普遍性, 把  $\mathcal{X}$  了解成任意一个无穷集合.



现在我们不只是对于在每个各别的  $x$  值上, 有极限存在的问题有兴趣, 而对于极限函数的函数性质也有兴趣. 为了使读者预先明了, 这里产生了什么样性质的新问题, 我们从这些问题中举出一个来作为例子讲一讲.

假定序列 (1) 的元素都是在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  内  $x$  的连续函数; 是否能保证极限函数的连续性? 如像从下列例中看到的那样, 有时极限函数保持连续性的性质, 有时就不.

**例** 在以下所有的情形中  $\mathcal{X} = [0, 1]$ .

- 1)  $f_n(x) = x^n$ , 当  $x < 1$  时  $f(x) = 0$ , 而  $f(1) = 1$  (在  $x = 1$  处不连续).
- 2)  $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$ , 当  $x > 0$  时  $f(x) = 0$ , 而  $f(0) = 1$  (在  $x = 0$  处不连续).
- 3)  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$ , 对于所有的  $x$ ,  $f(x) = 0$  (处处连续).
- 4)  $f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}$ , 对于所有的  $x$ ,  $f(x) = 0$  (同上).

很自然的产生了问题 —— 建立极限函数保持连续性的条件; 这是我们要在第 431 与 432 目中讨论的.

我们已经看到 [362], 关于数项级数与它的和的研究只是关于数序列与它的极限的研究的另一种形式. 现在我们来考虑级数的项为同一个变量  $x$  (在域  $\mathcal{X}$  中) 的函数的情形:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (3)$$

设这级数对在  $\mathcal{X}$  中每个  $x$  值都收敛, 则它的和是一个  $x$  的函数  $f(x)$ . 若  $f_n(x)$  表示部分和

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \quad (4)$$

级数的和可以用等式 (2) 的极限来下定义. 相反地, 如设

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f_1(x), u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \cdots \\ u_n(x) &= f_n(x) - f_{n-1}(x), \cdots \end{aligned}$$

关于任意已知序列 (1) 的极限函数的问题, 可以用级数 (3) 求和的形式来研究. 因为这种研究极限函数的方式, 在实际上常是很方便的, 我们就必需时常来处理函数级数.

这里同样也应该强调指出, 我们即将研究的对象不只是级数 (3) 收敛性的问题, 还有它的和的函数性质. 我们可以举出级数和的连续性问题作为例子, 并假定级数的所有各项都是连续的. 这就是与以前提到过的同样的问题.

可见, 极限函数 (或 —— 同一个意思 —— 级数和)  $f(x)$  的函数性质, 主要是依赖于  $f_n(x)$ , 对于不同的  $x$  值, 趋向于  $f(x)$  的特性. 在下目中, 我们要进行这里提出的一般可能性的研究.



**428. 一致收敛性与非一致收敛性** 假设对于  $\mathcal{X}$  中的所有  $x$  都有等式 (2). 按照极限的定义, 这就是说: 只要取定了  $\mathcal{X}$  中  $x$  的值 (为了要处理固定的数序列), 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 都可找到这样一个数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

成立. 这里  $x$  自然就是预先取定的值.

设另取一个  $x$  的值, 得到另一个数序列, 对于同样的  $\varepsilon$ , 先所得到的  $N$  可能已是没有用了; 只好换个更大的. 如  $x$  所取的值为一无穷集合, 我们就有趋向于极限的不同数序列的无穷集合. 对于每个各别的数序列, 可找到它的  $N$ ; 因此产生这样一个问题: 是否存在适合于所有序列的数  $N$ ?

我们举一些例子来说明: 在一种情形, 这样的数  $N$  存在, 在另一种情形, 不存在.

1) 先设

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

因

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

立即就看出, 不管  $x$  的值为什么, 要使不等式  $f_n(x) < \varepsilon$  实现, 取  $n > \frac{1}{2\varepsilon}$  就够了. 这样, 在这情形, 数  $N = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$  同时适用于所有的  $x$ .

2) 设 [427,3)]

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

对于任意固定的  $x > 0$ , 取  $n > E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$ , 就足够使  $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$ . 但是另一方面, 不管  $n$  取得多大, 对于函数  $f_n(x)$  在区间  $[0, 1]$  中总能找到一点  $x = \frac{1}{n}$ , 使函数的值等于  $\frac{1}{2}$ :  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ . 这样, 要想靠着  $n$  的增加而使得一下子对于从 0 到 1 的所有的  $x$  值有  $f_n(x) < \frac{1}{2}$ , 是不可能的. 换句话说, 对于  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 已经不存在同时适用于所有  $x$  的数  $N$  了.

在图 59 中, 对应于  $n = 4$  与  $n = 40$ , 这函数的图形表示出: 当  $n$  增加时, 峰高  $\frac{1}{2}$  有从右向左移动的特性. 虽然当  $n$  增加时, 曲线序列的点沿着任意个别取定的铅垂线无限接近  $x$  轴, 但是在全部从  $x = 0$  到  $x = 1$  的区间上, 没有一个整个曲线是接近这轴的.

而 1) 中所研究的函数则另是一样; 我们不去画它的图了, 因为例如当  $n = 4$  或  $n = 40$  时, 它们可由图 59 所画的图形, 分别将全部纵坐标缩短为原来的  $1/4$  或  $1/40$  而得出. 此时诸曲线立即在每一处都靠近了  $x$  轴.



现在我们给出基本的定义:

设 1) 在  $\mathcal{X}$  中序列 (1) 有极限函数  $f(x)$ , 2) 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $x$  无关的数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式 (5) 对  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  都适合; 那么就说, 序列 (1) 对于区域  $\mathcal{X}$  中的  $x$  一致收敛于  $f(x)$  [或函数  $f_n(x)$  一致趋向于  $f(x)$ ].

这样, 在第一个提到的例中, 函数  $f_n(x)$  对于在区间  $[0, 1]$  中的  $x$  一致收敛于零, 在第二个中就不了.

还需要说明, 前目讨论的其他函数不是一致收敛的.

3) 对于函数  $f_n(x) = x^n$ , 不等式  $x^n < \varepsilon$  ( $\varepsilon < 1$ ), 不可能对所有  $x < 1$  都成立, 显然因为当  $x \rightarrow 1$  时 (对固定的  $n$ ),  $x^n \rightarrow 1$ . 图 60 表示了违反一致性的特性: 这里极限函数有跳跃的改变, 而峰是不变的.

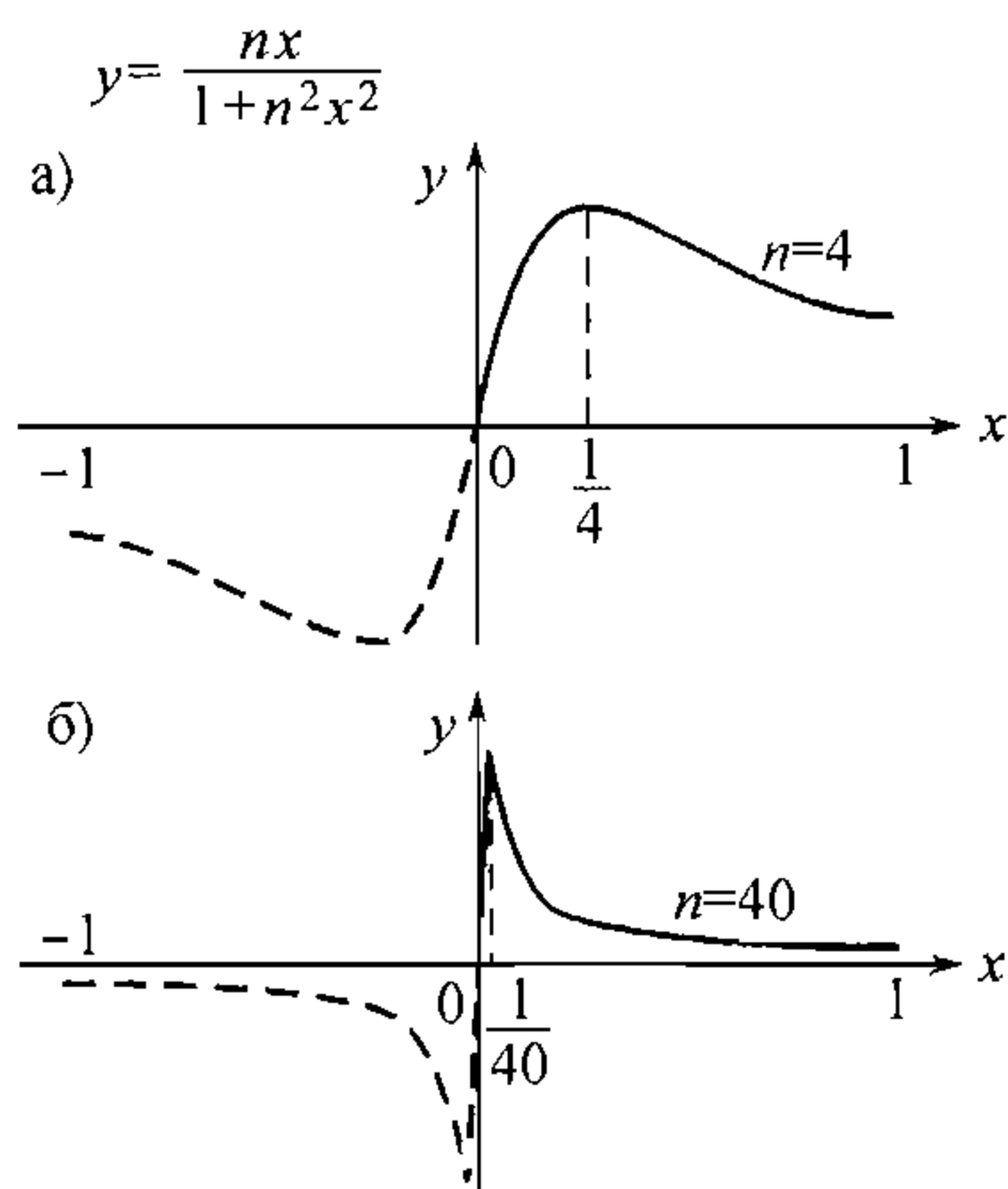


图 59

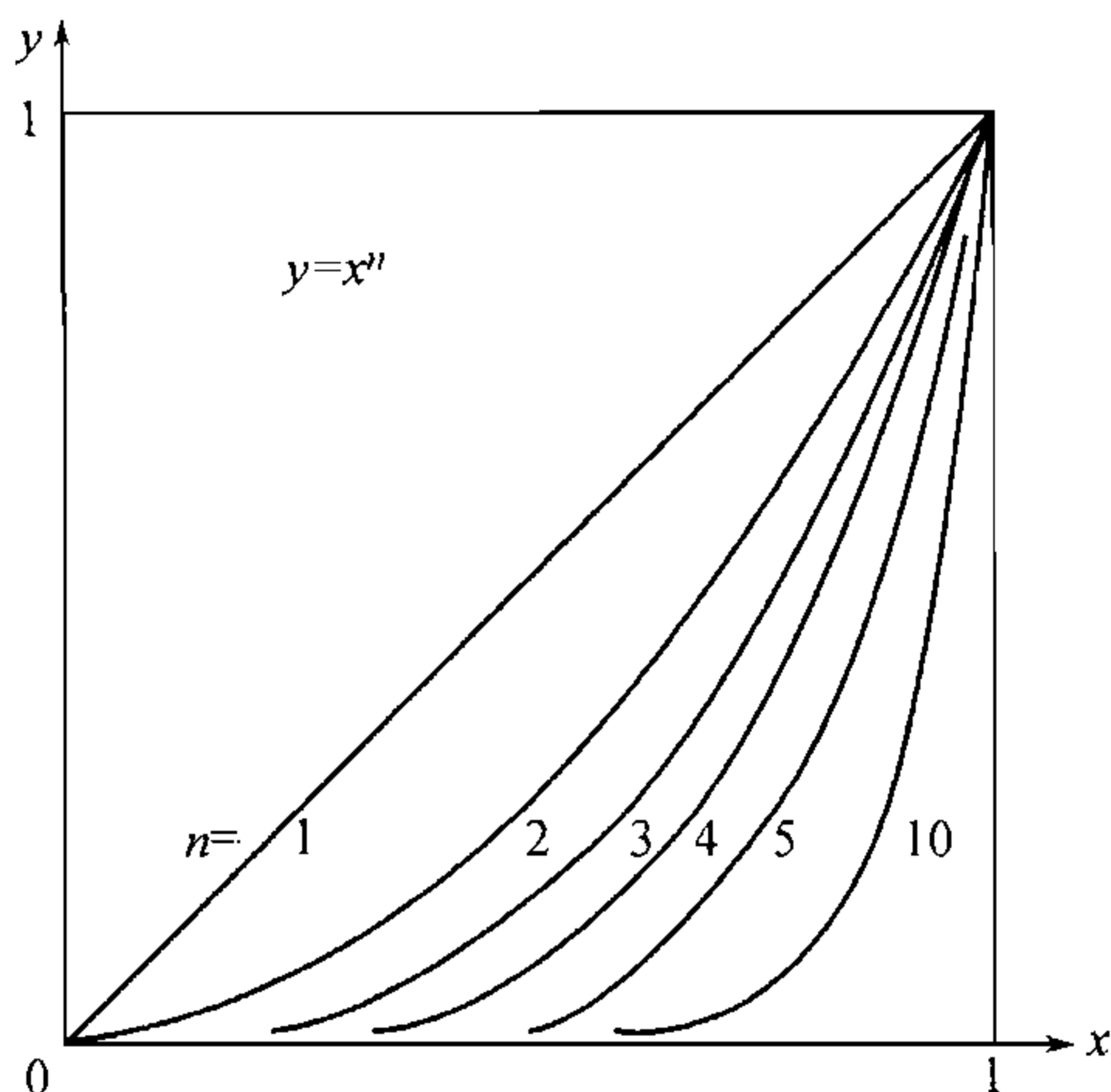


图 60

今设

$$4) f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \text{ 或 } 5) f_n(x) = 2n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2}.$$

极限函数对  $x > 0$  时, 二种情形都是等于 0, 从

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

或

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}$$

看出一致接近极限函数的不可能. 在第二种情形, 峰高不只破坏了一致趋向于 0, 并且还无限增加.

在函数  $x^n$  与  $\frac{1}{1+nx}$  的例中, 我们用另外的方法来研究问题. 不等式

$$x^n < \varepsilon \text{ 与 } \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$



各相当于

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \quad \text{与} \quad n > \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \quad (0 < x < 1; 0 < \varepsilon < 1).$$

因为, 在第一个中当  $x$  趋向于 1 时, 在第二个中当  $x$  趋向于 0 时, 表达式的右边无限增加, 所以知道没有一个数  $n$  可以对于所有的  $x$  值, 适合不等式.

现在我们要把以上所讲过的关于函数序列的收敛性转移到函数级数 (3) 的情形.

假设级数收敛, 我们来考虑, 它的和  $f(x)$ , 部分和  $f_n(x)$  [参看 (4)] 与它  $n$  项以后的余式

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

对于任何固定的  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

若部分和  $f_n(x)$  对于在区域  $\mathcal{X}$  中的  $x$ , 一致趋向于级数和  $f(x)$  [或级数的余式  $\varphi_n(x)$  一致趋向于 0], 则说, 级数 (3) 在这区域中一致收敛.

这定义显然与下面的相当:

假设对于在区域  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  都收敛的级数 (3), 适合以下条件: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $x$  无关的数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{或} \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad (6)$$

对于在  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  都同时适合. 这级数就称作在这域中一致收敛<sup>①</sup>.

一致收敛与非一致收敛的级数的例可以从前面提到的序列的例变换过来. 我们再加一些新的例.

6) 考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ; 它是在开区间  $\mathcal{X} = (-1, 1)$  内收敛. 对于  $\mathcal{X}$  中任意  $x$ , 第  $n$  项以后的余式为

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

设  $n$  为任意取定的, 显然

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

换言之亦即对于同一个  $n$ , 对于所有的  $x$ , 要同时使得不等式

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \left( \text{设 } \varepsilon < \frac{1}{2} \right)$$

成立是不可能的. 级数在区间  $(-1, 1)$  内的收敛性是不一致的; 这对于区间  $(-1, 0]$  与  $[0, 1)$  也是一样的.

<sup>①</sup>在科学中, 级数一致收敛性的概念是由赛得尔 (Seidel) 与斯托克斯 (Stokes) 同时 (在 1848 年) 引进, 但在他们之先, 魏尔斯特拉斯已经用在他的讲稿里了.



7) 对于  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  中的任意  $x$  值, 级数  $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$  收敛, 因为它适合莱布尼茨定理的条件 [381]. 根据在定理证明后面所做的附注, 级数余式的绝对值小于它的第一项:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

由此可明了: 在整个无限区间内, 级数是一致收敛的.

8) 同样, 级数  $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$  在  $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$  内一致收敛, 因为当  $x \neq 0$  时

$$|\varphi_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\dots} < \frac{1}{n}.$$

特别指出, 绝对值组成的级数  $\sum_1^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ , 虽然是收敛的, 但不一致收敛. 实际上, 当  $x \neq 0$  时, 它的余式为

$$\varphi_n(x) = \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n};$$

对于任意固定的  $n$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 它趋向于 1.

**附注** 设在例 2) 中, 用任意区间  $[a, 1]$ ,  $0 < a < 1$ , 代替区间  $[0, 1]$ , 那么它的收敛性就是一致的. 因为, 对所有  $x \geq a$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{n}{1+n^2a^2} < \frac{1}{na^2}.$$

在任意区间  $[0, a]$  中, 它的收敛性显然是非一致的. 这样, 在  $x = 0$  点的周围“积集着”非一致性的性质; 我们就叫它作非一致性的点. 同样在例 4), 5) 与 8) 中也如此. 在例 3) 中的  $x = 1$  点, 在例 6) 中  $x = 1$  与  $x = -1$  二点都起相似的作用.

在更复杂的情形, 非一致性的点可能是无限多的.

**429. 一致收敛性的条件** 布尔查诺-柯西定理 [39] 建立了关于给定的数序列的有限极限的存在性的条件 (“收敛性原理”), 因此很自然地引进了, 关于给定在区域  $\mathcal{X}$  中的函数序列 (1) 的一致收敛性的条件:

为使序列 (1) 有极限函数, 而且 2) 对于在区域  $\mathcal{X}$  中的  $x$  一致收敛于这个函数, 其必要而且充分条件如下: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $x$  无关的数  $N$ , 使得对于  $n > N$  与任意  $m = 1, 2, 3, \dots$ , 不等式

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (7)$$

对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  同时成立.

[这要求可以简单表述如下: 对于序列 (1) 的收敛性原则必须对于在  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  都一致适合.]



**证明 必要性.** 设序列 (1) 有极限函数  $f(x)$ , 而且在  $\mathcal{X}$  中一致收敛于这函数, 那么给定  $\varepsilon > 0$ , 可找到与  $x$  无关的数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对于所有的  $x$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

同样,

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

从这两个不等式得到 (7).

**充分性.** 设定理中的条件适合了. 无论取定  $\mathcal{X}$  中的  $x$  为何值, 我们由序列 (1) 得到适合布尔查诺-柯西条件的数值序列. 因此, 对于这个序列, 存在有限的极限, 因此证明了序列 (1) 极限函数的存在性.

现在任意取定  $n > N$  与  $\mathcal{X}$  中的  $x$ , 在不等式 (7) 中, 无限增加  $m$  ( $n$  与  $x$  固定). 取极限, 得到

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

这就证明  $f_n(x)$  一致趋向于  $f(x)$ .

不难把已证明的条件换成关于函数级数的条件:

级数 (3) 在域  $\mathcal{X}$  中一致收敛的必要与充分条件如下: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $x$  无关的数  $N$ , 使得对于  $n > N$  与任意  $m = 1, 2, 3, \dots$ , 不等式

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon. \quad (8)$$

对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  同时成立.

从此特别得到以下有用的推论.

若级数 (3) 在域  $\mathcal{X}$  中一致收敛, 它的所有的项都乘上同一个在  $\mathcal{X}$  中有界的函数  $v(x)$ :

$$|v(x)| \leq M,$$

则一致收敛性不变.

这里所引入的条件, 对于实际来确定具体的序列或级数的一致收敛性, 并不十分合用. 为了实际应用, 一般都利用 (以这个条件为基础, 但比较便于使用的) 充分的判别法, 这些判别法通常皆表述成适宜于级数之用的形状.

**430. 级数一致收敛性的判别法** 以下是最简单而且常用的判别法.

· **魏尔斯特拉斯判别法** 若函数级数 (3) 的项在区域  $\mathcal{X}$  中适合不等式

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$



这里  $c_n$  为一个收敛数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots \quad (C)$$

的项, 则级数 (3) 在  $\mathcal{X}$  中一致收敛.

当具备不等式 (9) 时, 就说级数 (C) 优于级数 (3), 或级数 (C) 是对于级数 (3) 的优级数.

事实上, 从 (9) 我们得到, 对于区域  $\mathcal{X}$  中所有  $x$ , 同时成立的不等式

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}.$$

应用收敛性原理于数项级数 (C), 对于任一个  $\varepsilon > 0$ , 可以找到  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 上面不等式的右边部分小于  $\varepsilon$ , 而左边同时对于所有的  $x$  也这样. 按照第 429 目的条件, 这就证明了我们的断言.

这样, 例如, 只要设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 在任何区间中, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

一致收敛. 因为

$$|a_n \sin nx| \leq |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|,$$

所以, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  起了优势的作用.

**附注** 在  $\mathcal{X}$  中一致收敛的每一个级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  都可以用加括号的方法变成一个已可向其应用魏尔斯特拉斯判别法的级数.

事实上, 取任何一个正项收敛级数  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , 对数  $c_1$  [429] 存在这样的数码  $m_1$ , 使得在  $\mathcal{X}$  中对  $n > m_1$  有  $|u_{m_1+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_1$ . 然后对数  $c_2$  存在这样的数码  $m_2 > m_1$ , 使得在  $\mathcal{X}$  中对  $n > m_2$  有  $|u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_2$ , 如此等等. 于是对所给级数按如下方式分群:

$$\begin{aligned} & [u_1(x) + \cdots + u_{m_1}(x)] + [u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_2}(x)] \\ & + [u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_{m_3}(x)] + \cdots \end{aligned}$$

所得级数从第二项开始, 按其绝对值在  $\mathcal{X}$  中不超过所取的数值级数.

假设, 魏尔斯特拉斯判别法适用于级数 (3), 那么级数 (3) 必须是绝对收敛. 而且, 项的绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|, \quad (10)$$

与级数 (3), 都一致收敛.



其中可能有这样的情形: 级数 (3) 一致收敛, 而不绝对收敛. 第 428 目的级数 7) 是这样的例 (从与调和级数的比较中, 得到这级数的不绝对收敛性). 甚至于可能有这种情形: 级数 (3) 绝对收敛并一致收敛, 但级数 (10) 不一致收敛 [参看在第 428 目中的级数 8)]. 这种类似的情形显然是不能用魏尔斯特拉斯判别法来包括的; 对于这些, 需要研究更精确的判别法

现在, 我们建立关于形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) = a_1(x) \cdot b_1(x) + a_2(x) \cdot b_2(x) + \cdots + a_n(x) \cdot b_n(x) + \cdots, \quad (\text{W})$$

的函数级数的二种判别法, 其中  $a_n(x), b_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ , 都是在  $\mathcal{X}$  中  $x$  的函数. 这些判别法是从数项级数理论的阿贝尔判别法与狄利克雷判别法中仿制出来的; 我们就用这二学者的名字来称呼它们.

**阿贝尔判别法** 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) + \cdots \quad (\text{B})$$

在域  $\mathcal{X}$  中一致收敛, 但是, 函数  $a_n(x)$  (对于每一个  $x$ ) 成为单调序列, 而且对于任意  $x$  与  $n$ , 都是有界的:

$$|a_n(x)| \leq K.$$

则级数 (W) 在域  $\mathcal{X}$  中一致收敛.

证明与以前的相似. 由于级数 (B) 的一致收敛性, 可以找到与  $x$  无关的  $N$ . 再引用第 429 目的条件 (代替收敛性原理), 其次再用阿贝尔引理 [383] 的帮助, 与以前一样的 ( $n > N$ ), 对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  我们得到

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) \cdot b_k(x) \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+m}(x)|) \leq 3K\varepsilon.$$

这就证明了我们的断言.

**狄利克雷判别法** 设级数 (B) 的部分和, 对于任意的  $x$  与  $n$ , 都是有界的:

$$|B_n(x)| \leq M,$$

而函数  $a_n(x)$  (对于每一个  $x$ ) 成为在域  $\mathcal{X}$  中一致趋向于 0 的单调序列. 则级数 (W) 在这域中一致收敛.

这里的证明是与第 384 目中的证明一样的. 只要注意, 无关于  $x$  的  $N$  的可以获得, 正是由于  $a_n(x)$  的一致趋向于 0.

实际上, 时常函数序列  $\{a_n(x)\}$  是通常的数值序列  $\{a_n\}$ , 或者函数级数  $\sum_1^{\infty} b_n(x)$  是通常的数项级数  $\sum_1^{\infty} b_n$ . 需要注意, 这些情形是前面所讨论的特殊情



形,事实上,序列  $\{a_n\}$  的收敛性与级数  $\sum_1^\infty b_n$  的收敛性可以当作一致收敛性 (与  $x$  无关).

例如, 设  $\{a_n\}$  是单调趋向于 0, 正数的序列, 那么按照狄利克雷判别法, 在任何不包含  $2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  形式的点的闭区间内, 两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

一致收敛. 理由如下: 譬如 [参看 385, 2)],

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin ix \right| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{2}x \right|},$$

并在上述的区间内  $\sin \frac{1}{2}x$  是不等于 0 的, 所以可以得到关于和的与  $x$  无关的界.

读者在第 439 目以及此后几目中, 可以找到更多的一致收敛性判别法应用的例子.

## §2. 级数和的函数性质

**431. 级数和的连续性** 现在我们转向函数级数和的函数性质的研究, 这些性质是与这些组成级数的函数有关的. 前面已经说明过序列的观点与无穷级数的观点是相当的. 在叙述中, 我们宁愿用无穷级数的观点, 因为在应用里几乎只碰到无穷级数. 第 436 目将要特别来讲前述的关于函数级数转移到函数序列的情形.

在所有以后的讨论中, 以前所引进的一致收敛的概念是起决定作用的, 所以要用全部力量把它的重要性弄清楚.

我们从第 427 目中已经提到过的关于级数和连续性的问题开始.

**定理 1** 设函数  $u_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$  定义在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上, 并在这区间的一点  $x = x_0$  上都连续. 若级数 (3) 在区间  $\mathcal{X}$  上一致收敛, 则级数的和  $f(x)$  在  $x = x_0$  点上同样是连续的.

[与此相类似的命题, 是由柯西首先作出的; 不过这位著名的大师把这一命题的形式给得过于宽泛了, 没有提到需要“一致性”, 而缺了这一点, 这命题就不正确了.]

**证明** 用以前的记号, 对于任意  $n = 1, 2, \dots$  与  $\mathcal{X}$  的任意  $x$ , 就有

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x), \quad (11)$$

特别,

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$



因为

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|. \quad (12)$$

现在任意给定  $\varepsilon > 0$ . 由于级数的一致收敛性, 可以确定一数  $n$ , 使得不等式

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon. \quad (13)$$

对于在区间  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  的值 (也对于  $x = x_0$ ) 都成立. 我们看到, 对于这确定的  $n$ , 函数  $f_n(x)$  是有限个在  $x = x_0$  点上连续的函数  $u_n(x)$  的和. 因此它在这点上也连续, 即给定  $\varepsilon > 0$ , 可以找到这样的  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon. \quad (14)$$

所以, 由于 (12), (13) 与 (14), 不等式  $|x - x_0| < \delta$  推出

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

这就证明了定理.

自然, 如果函数  $u_n(x)$  在整个区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上连续. 那么当具有一致收敛性时, 级数 (3) 的和  $f(x)$  也在整个区间上连续.

在定理中, 一致收敛性的要求是不可以去掉的. 譬如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

[参看 428,8)], 它的和在  $x \neq 0$  时等于 1, 在  $x = 0$  时等于 0, 这就说明了这点. 可是一致收敛性只是定理中的充分条件, 不能认为是对于级数和连续性<sup>①</sup>的必要条件: 例如, 虽然两个级数

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e - n^2 x^2 - (n-1)^2 e - (n-1)^2 x^2], \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{nx}{1+n^2 x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2 x^2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

[比较 428,5) 与 2)] 都不一致收敛, 这两个级数在区间  $[0,1]$  中有连续的和 0.

可是, 有这类的情形, 一致收敛性完全是必要的. 在这方面, 我们要证明以下迪尼 (U.Dini) 的定理.

**△ 定理 2** 设级数 (3) 的项, 在整个区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上, 是连续的而且是正的. 若级数有在整个区间上也连续的和  $f(x)$ , 则它在这区间上一致收敛.

**证明** 我们考虑级数 (3) 的余式

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

<sup>①</sup>参看下一目.



$x$  的函数  $\varphi_n(x)$  是两个连续函数的差, 也就是连续的了. 由于级数的项是正的, 对于固定的  $x$ , 序列  $\{\varphi_n(x)\}$  是下降的 (不上升的):

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \cdots \geq \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq \cdots.$$

最后, 因为级数 (3) 在区间  $\mathcal{X}$  上收敛, 对于任意固定的  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

为了要建立级数的一致收敛性, 只要证明, 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在这样一个值  $n$ , 使得对于所有的  $x$  同时  $\varphi_n(x) < \varepsilon$  (因为对于更大的值  $n$ , 这不等式就更对).

我们用反证法. 假设对于某一个  $\varepsilon > 0$ , 这样的数  $n$  不存在. 所以对于任意  $n = 1, 2, \cdots$ , 在区间  $\mathcal{X}$  上可找到这种使得  $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$  的值  $x = x_n$ . 所有在序列  $\{x_n\}$  中的元素都包含在有限的区间  $\mathcal{X}$  上, 我们应用布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理 [41], 并从  $\{x_n\}$  中分出一个收敛于极限  $x_0$  的部分序列  $\{x_{n_k}\}$ .

由于  $\varphi_m(x)$  的连续性, 无论  $m$  是什么, 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0),$$

在另一方面, 对于任意  $m$  与足够大的  $k$ ,

$$n_k \geq m, \text{ 所以 } \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon.$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 取极限, 得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon.$$

但是这些对于任意  $m$  都成立的不等式就与

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_0) = 0.$$

矛盾. 定理证完.

**\* 432. 关于拟一致收敛的附注** 若函数级数 (3) 由在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  连续的函数组成, 并在这个区间上收敛于和  $f(x)$ , 则为使  $f(x)$  是连续的充分条件是级数一致收敛, 但是在一般情形下这完全不是必要的. 迪尼和另外一些人觉察到, 某种“弱”一致收敛性也是充分条件, 这种“弱”一致收敛性是: 对每一个  $\varepsilon > 0$  与每一个数码  $N'$ , 至少存在一个与  $x$  无关的数码  $n > N'$ , 使得不等式 (6) 对  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  成立. 实际上, 在证明定理 1 时我们仅仅利用了一个数码  $n$ , 对它, 不等式 (13) 对  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  成立.

然而甚至这种“弱”一致性对级数 (3) 的和  $f(x)$  的连续性仍然不是必要的. 例如收敛于连续和  $f(x) \equiv 0$  的级数 (15), 不具有这种“弱”一致性.

1883 年阿尔泽拉 (Arzelà) 在研究中引入了特殊类型的收敛性 (后来得到了拟一致收敛的名称), 它解决了保证收敛级数的和函数的连续性的精确特征的问题.



关于在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  内收敛的级数 (3), 若对于每一个  $\varepsilon > 0$  及每一个数码  $N'$ , 区间  $\mathcal{X}$  可以被有限个开区间

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_i, b_i), \dots, (a_k, b_k)$$

所覆盖, 与这些区间对应的可提供  $k$  个数码

$$n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k \quad (> N'),$$

使得对于 ( $\mathcal{X}$  中) 所有的含于  $(a_i, b_i) (i = 1, 2, \dots, k)$  中的  $x$  一致地成立不等式

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| = |\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon,$$

则说级数 (3) 在  $\mathcal{X}$  中拟一致收敛于和  $f(x)$ .

对于上面提到的“弱”一致收敛性,  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  值对应于同一个数码  $n$ , 而这里, 所有的  $x$  被分成若干组, 各组对应于不同的  $n$  值, 但总是有限个  $n$  值.

利用这个概念, 阿尔泽拉证明了如下断言:

**定理 3** 设函数  $u_n(x)$  在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  有定义并且连续, 级数 (3) 在这个区间收敛. 为使级数的和  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  同样是连续的, 必须且只需级数在  $\mathcal{X}$  拟一致收敛于  $f(x)$ .

**必要性** 首先假设函数  $f(x)$  的连续性, 因而意味着所有的余式  $\varphi_n(x)$  也是连续的. 在  $\mathcal{X}$  中取任意点  $x'$ . 按照给定的数  $\varepsilon$  和  $N$ , 对点  $x'$  可找到这样的数码  $n' > N$ , 使得

$$|\varphi_{n'}(x')| < \varepsilon.$$

根据函数  $\varphi_{n'}(x)$  的连续性, 在  $x'$  的某个邻域  $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$  内将成立类似的不等式

$$|\varphi_{n'}(x)| < \varepsilon.$$

由对于  $\mathcal{X}$  中所有可能的  $x'$  构造的这些开区间  $\sigma'$  组成某个无穷的系  $\sum$ , 它覆盖区间  $\mathcal{X}$ . 那么, 根据博雷尔引理 [88]. 从  $\sum$  中可分出区间的有限的子系

$$\sum^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\},$$

它同样覆盖  $\mathcal{X}$ . 这些区间即是在拟一致收敛定义中所提到过的那些开区间.

**充分性** 现在假设级数 (3) 拟一致收敛于自己的和  $f(x)$ . 数  $\varepsilon$  与  $N'$  被指定以后, 我们以定义中指出的性质构造区间  $(a_i, b_i)$  并选择数码  $n_i (i = 1, 2, \dots, k)$ . 在  $\mathcal{X}$  中随意地选择点  $x_0$ ; 设该点含于区间  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ , 如同在证明定理 1 [431, (12)] 那样, 可以写出

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| + |\varphi_{n_i}(x)| + |\varphi_{n_i}(x_0)|. \quad (12a)$$

同时, 显然

$$|\varphi_{n_i}(x_0)| < \varepsilon;$$

若  $x$  也属于这个区间  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ , 则

$$|\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon.$$



可以找到这样的数  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 不仅  $x$  含于区间  $(a_{i_0}, b_{i_0})$ , 而且 (12a) 式右端第一项也  $< \varepsilon$ , 而这意味着

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

$f(x)$  在点  $x_0$  的连续性得证<sup>①</sup>.

从这个定理很容易得出上一目的迪尼定理. 事实上, 若级数 (3) 由正的连续函数组成并收敛于连续的和, 则如我们所见到的, 收敛性必然是拟一致收敛.

利用在这种情况下余式  $\varphi_n(x)$  随  $n$  的增大而减小的事实, 只要取数码  $N$  大过所有  $n_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 使得对  $n > N$ , 不等式 (6) 对  $\mathcal{X}$  中所有  $x$  一致地成立: 收敛性原来是一致的.

**433. 逐项取极限** 我们再引进一个定理, 这是定理 1 的推广. 在这定理中,  $\mathcal{X} = \{x\}$  是有凝聚点  $a$  (有限的或非有限的) 的任意无穷集合 [52]; 这个点的本身可以属于集合, 可以不属于集合.

**定理 4** 设对于  $x$  趋向于  $a$ , 定义在域  $\mathcal{X}$  上的每一个函数  $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  都有有限的极限:

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n. \quad (16)$$

若在域  $\mathcal{X}$  中, 级数 (3) 一致收敛, 则 1) 这些极限所组成的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C; \quad (C)$$

2) 级数 (3) 的和  $f(x)$ , 当  $x \rightarrow a$  时, 有同样的极限:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C. \quad (17)$$

**证明** 按照第 429 目一致收敛性的条件, 对于任意取定的  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N$ , 使得当  $n > N$  与  $n = 1, 2, 3, \dots$  时, 不等式 (8) 对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  都成立. 当  $x \rightarrow a$  时, 同时考虑到 (16), 取极限, 我们得到

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| \leq \varepsilon,$$

所以对于级数 (C) 收敛性的条件是成立的 [376].

像通常一样, 如果用  $C, C_n$  与  $\gamma_n$  分别记级数的和, 部分和与余式, 那么

$$C = C_n + \gamma_n.$$

从 (11) 逐项减去这等式, 很容易得到

$$|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|. \quad (18)$$

<sup>①</sup>如同读者所觉察的, 所有的号码  $n_i$  可以选得随便怎样大的假设事实上并没有用到.



由于级数 (3) 的一致收敛性与级数 (C) 的收敛性, 对任意  $\varepsilon > 0$  可以取定足够大的  $n$ , 使得对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon, \text{ 同样 } |\gamma_n| < \varepsilon. \quad (19)$$

因为, 显然

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k = C_n,$$

如果限制于有限  $a$  的情形, 那么我们找到这样的  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - a| < \delta$  时

$$|f_n(x) - C_n| < \varepsilon. \quad (20)$$

所以, 由于 (18), (19) 与 (20), 对于指定的  $x$  值, 不等式

$$|f(x) - C| < 3\varepsilon$$

成立, 这就得到了 (17)<sup>①</sup>.

等式 (17) 可以写成

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\};$$

这样, 当一致收敛性存在时, 级数和的极限等于它的项的极限所组成的级数的和, 或者换句话说, 在级数中允许逐项取极限.

**434. 级数的逐项求积分** 现在我们来考虑关于收敛函数级数的和的积分的问题.

**定理 5** 若函数  $u_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$  在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上连续, 并且它们所组成的级数 (3) 在这区间上一致收敛, 则级数 (3) 的和  $f(x)$  的积分可表成下列的形状:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \\ &= \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

**证明** 由于函数  $u_n(x)$  与  $f(x)$  的连续性 [431, 定理 1], 所有这些积分的存在是显然的.

在区间  $[a, b]$  上, 积分恒等式

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \varphi_n(x),$$

<sup>①</sup>读者应知在这里所用的方法就是定理 1 的证明中所曾用过的.



我们得到

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

这样, 级数 (21) 的  $n$  项的和与积分  $\int_a^b f(x)dx$  差一项  $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ . 为要证明展开式 (21), 只需要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0. \quad (22)$$

由于级数 (3) 的一致收敛性, 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 可以找到  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 在所考虑的区间上, 对所有的  $x$  同时有

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

所以对于这些  $n$  值, 就有

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a) \cdot \varepsilon,$$

这就证明了极限关系式 (22).

等式 (21) 可以写成

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b u_n(x)dx \right\},$$

所以在一致收敛级数的情形, 级数的和的积分等于它的项的积分组成的级数的和, 或者换句话说, 级数的逐项求积分是允许的.

与在定理 1 的情形一样, 一致收敛性的要求对于展开式 (21) 的正确性是极重要的, 就是不可以简单地去掉, 但是也不是必要的. 在第 431 目中, 考虑过的级数 (15) 同样说明这个现象. 它们在区间  $[0,1]$  上都非一致地收敛于函数  $f(x) = 0$ . 但是, 逐项求第一个级数的积分, 作为积分级数的和, 我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^2}) = 1, \text{ 而 } \int_0^1 f(x)dx = 0;$$

对于第二个级数, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

级数

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (0 \leq x < 1)$$

是个有趣的例子. 这里

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots;$$

因此级数可逐项积分, 虽然当  $x = 1$  时, 级数全然是发散的.

现在我们指出定理 5 的推广, 这是关于在放弃所考虑函数的连续性的要求这一方面的推广.



**定理 6** 若函数  $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上是可积的<sup>①</sup>, 而且它们组成的级数 (3) 一致收敛, 则级数的和  $f(x)$  同样是可积的, 并有展开式 (21).

**证明** 我们来讨论函数  $f(x)$  的可积性.

由于级数的一致收敛性, 对于预先给定的  $\varepsilon$ , 我们可以确定足够大的  $n$ , 使得在区间  $[a, b]$  所有的点上有

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 或 } f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (23)$$

取区间  $[a, b]$  的任意部分  $[\alpha, \beta]$ , 并设  $m, M$  是函数  $f_n(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上的确界, 而  $\omega = M - m$  是它的振幅; 函数  $f(x)$  对应的振幅, 我们记作  $\Omega$ . 由于 (23), 在区间  $[\alpha, \beta]$  上

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 所以 } \Omega \leq \omega + \varepsilon.$$

现在, 把区间  $[a, b]$  分成部分区间  $[x_i, x_{i+1}]$  并在对应于第  $i$  个区间的振幅记上指标  $i$ . 所以  $\Omega_i \leq \omega_i + \varepsilon$ , 并且

$$\sum_i \Omega_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon(b-a).$$

因为右边的第二项可以任意小, 而第一项与  $\lambda = \max \Delta x_i$  同趋向于零, 那么左边的表达式亦是趋于零的, 所以推得函数  $f(x)$  是可积的 [297, (8)].

至于等式 (21), 可以与前面一样地加以证明.

用例子来说明, 对于由可积函数组成的, 违反一致性的级数, 可能有非可积的和. 设当  $x$  表成不可约的分数  $\frac{m}{n}$  时,  $u_n(x)$  (对于  $n = 1, 2, \dots$ ) 等于 1, 当  $x$  是  $[0, 1]$  中其他的点时, 等于 0. 这个函数, 只有有限个不连续点, 在  $[0, 1]$  上是可积的, 而级数的和显然是不可积的狄利克雷函数 [300, (2)].

当然 (我们已在例子中看出), 对于由可积函数所组成的级数的可积性, 一致收敛性不是必要条件.

对于这情形, 阿尔泽拉给了同时充分而且必要的条件 (“广义的拟一致收敛性”), 比较 432 目.

**435. 级数的逐项求导数** 借助于前一目定理 5, 很容易证明以下定理.

**定理 7** 设函数  $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  在区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上确定而且有连续的导数  $u'_n(x)$ . 若在这区间上, 不仅是级数 (3) 收敛, 而且由导数所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \quad (24)$$

<sup>①</sup>在第 283 目的意义下



是一致收敛的, 则级数 (3) 的和  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上有导数, 并且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (25)$$

**证明** 把级数 (24) 的和记作  $f^*(x)$ ; 由于定理 1, 这是  $x$  的连续函数. 现在利用定理 5, 逐项地, 在从  $a$  到  $\mathcal{X}$  中任意  $x$  值的区间上, 求级数 (24) 的积分; 我们得到

$$\int_a^x f^*(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt.$$

但是, 显然  $\int_a^x u'_n(t) dt = u_n(x) - u_n(a)$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_a^x f^*(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a). \end{aligned}$$

[这个改变由预先知道的级数  $\sum u_n(x)$  与  $\sum u_n(a)$  的收敛性所证实; 参看 364, 4°] 因为, 由于被积函数的连续性, 左边的积分有等于  $f^*(x)$  的导数 [305, 12°], 那么与积分只差一个常数的函数  $f(x)$  就有同样的导数.

等式 (25) 可以写成 (如果按照柯西利用记号  $D$  表示导数)

$$D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} D u_n(x)$$

的形式. 这样, 在提出的条件之下, 级数的和的导数是等于由它的项的导数所组成的级数的和, 或者换句话说, 级数的逐项求导数是允许的.

我们来考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2 x^2} - e^{-n^2 x^2}]$$

与

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n} \ln(1+n^2 x^2) - \frac{1}{2(n-1)} \ln(1+(n-1)^2 x^2) \right].$$

这里第一个的和当  $x=0$  时等于 0, 在其余的点上等于 1, 而第二个的和处处都等于 0. 如果逐项求导数, 那么得到我们已经熟识的级数 (15) [431], 这二级数都在整个区间  $[0,1]$  收敛于零, 但是都不是一致收敛的. 在第一个情形, 导数的级数当  $x=0$  时收敛, 在此处原来级数的和不可能有导数, 因为在这点上是不连续的. 反之, 在第二个情形, 逐项求导数处处皆得到正确的结果. 从这些例中, 说明导数级数一致收敛性的要求, 是重要的但不是必要的.

如果不惜将证明变得稍稍复杂一些, 那么就可以去掉定理 7 中某些多余的假设.



**定理 8** 设函数  $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  确定于区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上, 而且在这区间上有有限的导数  $u'_n(x)$ . 设级数 (3) 至少在一点上收敛, 譬如说是  $x = a$  点, 而由导数组成的级数 (24) 在整个区间  $\mathcal{X}$  上一致收敛, 则, 1) 级数 (3) 在整个区间上一致收敛, 2) 它的和  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上有等式 (25) 所表示的导数.

**证明** 在区间  $[a, b]$  上任取二个不同的点  $x_0$  与  $x$ , 作级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}. \quad (26)$$

我们要证明, 当任意取定  $x_0$  时, 这级数对所有的  $x \neq x_0$  都收敛的, 并且还是一致收敛的.

为了这个目的, 任意给定数  $\varepsilon > 0$ , 由于级数 (24) 的一致收敛, 找到  $N$ , 使得当  $n > N$  与  $m = 1, 2, \dots$  时, 不等式

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x) \right| < \varepsilon \quad (27)$$

对于所有  $x$  的值都同时成立. 取定  $n$  与  $m$ , 我们考虑函数

$$U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x);$$

由于 (27) 它的导数

$$U'(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x)$$

的绝对值总  $< \varepsilon$ . 但是, 显然,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(c),$$

这里的  $c$  包含在  $x$  与  $x_0$  之间 [根据拉格朗日定理, 112]. 因此, 对于所有的  $x \neq x_0$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon;$$

因为, 只要  $n > N$ , 无论  $m = 1, 2, 3, \dots$ , 这不等式总是对的, 那么这就证明了级数 (26) 的一致收敛性. 从此已经可以看出所有我们所需要的结论.

首先, 取  $x_0 = a$ , 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a} \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$



[参看第 429 目的推论]的一致收敛性, 以及级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  的收敛性, 我们推论出级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  也有一致收敛性.

用  $f(x)$  记作它的和, 那么级数 (26) 的和显然是  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , 这里的  $x_0$  是在区间  $[a, b]$  上的任一个  $x$  的值. 因为在一致收敛的级数里可以逐项取极限 (根据定理 3), 那么,  $x$  趋向于  $x_0$ , 我们得到

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0),$$

这就是所要证明的.

**附注** 所有这些关于逐项取极限, 逐项积分与逐项微分的定理, 都明确出函数级数与有限个函数的和之间的相似性. 不过这相似性要受我们所知道的那些条件的限制. 特别是一致收敛性占着首要地位.

**436. 序列的观点** 我们对于用函数序列的观点来翻译已经得到的结果是有兴趣的. 这会清楚地指出所考虑的问题与两个极限过程交换的一般问题间的联系, 这在所有分析中都起重要的作用. 另一方面, 指出推广这些结果的方法.

所以, 我们重新比较函数序列 (1) 与函数级数 (3), 它们相互的关系是

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

或相当于

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

对于序列的极限函数与对应级数的和是一样的. 一致收敛性如果成立, 那么就必定同时既是对于序列的又是对于级数的.

I. 我们先看关于极限函数的极限的问题. 设集合  $\mathcal{X} = \{x\}$  有凝聚点  $a$ , 且所有的函数都确定在这集合上. 所以第 433 目的定理 4 可译成:

**定理 4\*** 若函数  $f_n(x)$  有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \text{ 在 } \mathcal{X} \text{ 中}) \quad (28)$$

并且

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (29)$$

同时第一式对于  $x$  (在  $\mathcal{X}$  中) 是一致收敛于极限, 则两个有限极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 与 } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$$



都存在, 而且彼此相等.

若注意 (28) 与 (29), 等式

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$$

可以写成

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

这样, 所考虑的定理指出了, 关于两个变量  $x$  与  $n$  的函数  $f_n(x)$ , 两个累次极限相等与存在的条件, 这些直接与第 168 目中的研究连起来了.

第 431 目中的两个定理, 请读者把它们译成关于序列的定理.

II. 现在假设区域  $\mathcal{X}$  是区间  $[a, b]$ , 我们考虑极限函数的积分的问题. 下面就是类似于定理 6[434] 的定理:

**定理 6\*** 设序列  $\{f_n(x)\}$  是由区间  $[a, b]$  上是可积函数组成的, 而且对于  $[a, b]$  中的  $x$  一致趋向于极限函数  $f(x)$ , 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是可积的, 并且

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

最后的等式可写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} dx, \quad (30)$$

就是说, 对积分取极限是可以直接取被积函数的极限. 这情形说明, 我们允许在积分号下取极限.

在等式 (30) 中, 极限符号与积分符号是互相对换了. 因为定积分同样是从某种极限过程的结果得到的, 那么这里所考虑的问题与在 168 目里研究的问题是类似的.

III. 最后我们转向极限函数的导数的问题. 我们把定理 8[435] 译成:

**定理 8\*** 设所有的函数  $f_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上是可微的, 而且导数的序列  $\{f'_n(x)\}$  在整个区间上对于  $x$  是一致收敛的. 如果已知, 这函数序列  $\{f_n(x)\}$  在区间的一点上收敛, 则可以推断, 1) 这序列在整个区间是收敛的, 而且还是一致收敛的, 2) 极限函数  $f(x)$  是可微的, 而且

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

如果这等式写成更富有表达力的形式

$$D \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ D f_n(x) \},$$



那么立即就明白了极限符号与导数符号的交换. 因为导数同样是极限, 那么这个问题与两个极限过程的交换联系起来了.

我们要特别注意以下一点. 如果站在无穷级数的观点上, 那么自然数的参数  $n$  自然不可能用更普遍的来代替. 而函数序列的情形则不然. 这里函数  $f_n(x)$  可以用两个变量的函数  $f(x, y)$  来代替, 其中  $y$  在一个有凝聚点  $y_0$  (有限或无限) 的任意域  $\mathcal{Y} = \{y\}$  内变动.  $n \rightarrow \infty$  的极限过程可以用  $y \rightarrow y_0$  的极限过程来代替. 对于这种一般情形, 定理的形成与证明都是不难得到的. 以后在第十四章中, 我们将讨论这种一般情形的某些问题.

**437. 幂级数的和的连续性** 幂级数性质的研究是所有现有理论的应用的最重要的例子. 我们限制于形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (31)$$

的幂级数, 因为在 403 目中, 我们已看到较普遍形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \quad (31^*)$$

的幂级数, 用一个简单的变量变换, 就变成 (31) 的形式.

设级数 (31) 有收敛半径  $R > 0$  [379]. 首先可以断定:

1° 任意取正数  $r < R$ , 级数 (31) 在闭区间  $[-r, r]$  上对于  $x$  是一致收敛的. 事实上, 因为  $r < R$ , 那么当  $x = r$  时级数 (31) 绝对收敛, 就是说, 正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \cdots + |a_n| \cdot r^n + \cdots \quad (32)$$

收敛. 当  $|x| \leq r$  时, 级数 (31) 的项的绝对值不超过这个级数的对应项, 这样这级数起了优级数的作用, 根据魏尔斯特拉斯判别法, 级数 (31) 对于指明的  $x$  值是一致收敛的.

虽然数  $r$  可以取得任意接近  $R$ , 但是从证明中, 不能得到在区间  $(-R, R)$  上的一致收敛性. 在级数的例子里 [428, 6], 读者看到, 收敛区间的端点可能是非一致的点.

现在, 我们有定理 1 的推论:

2° 幂级数 (31) 的和  $f(x)$ , 对于所有在  $-R$  与  $R$  之间的  $x$  值, 是  $x$  的连续函数.

无论在收敛区间内如何取值  $x = x_0$ , 总可以选个  $r < R$ , 使得  $|x_0| < r$ . 由于 1°, 在区间  $[-r, r]$  应用定理 1, 我们得到函数  $f(x)$  在这区间上的连续性, 当然在  $x = x_0$  上也连续.



[读者要注意到, 我们是避免在区间  $(-R, R)$  上应用定理 1 的, 因为在这区间上一致收敛性是不能保证的.]

幂级数的和的连续性可以利用来证明关于幂级数恒等的定理(也与关于多项式的定理相类似):

3° 设两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

与

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

在  $x=0$  点的邻近<sup>①</sup>有同样的和, 则这两级数恒等, 就是说, 对应的系数相等:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n, \cdots$$

在等式

$$a_0 + a_1 x + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots$$

中, 设  $x=0$ , 立即得到等式  $a_0 = b_0$ . 去掉等式两边的这些项, 再除以  $x$  (此时, 必须假定  $x \neq 0$ ), 我们得到新的等式

$$a_1 + a_2 x + \cdots = b_1 + b_2 x + \cdots,$$

在  $x=0$  的邻近但不包括这点本身, 这等式成立. 这里不能取  $x=0$ , 我们可以取  $x$  趋向于 0; 利用连续性, 在极限中, 我们得到  $a_1 = b_1$ . 去掉这些项, 再除以  $x \neq 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 得到  $a_2 = b_2$ , 等等.

这就建立了函数用幂级数展开的唯一性, 这个简单的定理是时常用到的. 由于它的帮助, 即刻得到, 偶 (奇) 函数用 (31) 形式幂级数的展开只可能包含  $x$  的偶 (奇) 次项.

现在我们来观察, 在它的收敛区间端点  $x = \pm R$  邻近, 关于级数性质的更精密的问题 (今后这区间认为是有限的). 我们可以限制于右端点  $x = R$ ; 只要简单地以  $-x$  代替  $x$ , 就把所有关于右端点的说明都变成左端点的情形了.

首先知道:

4° 若幂级数 (31) 在它收敛区间的端点  $x = R$  是发散的, 则级数在区间  $[0, R)$  的收敛是不可能一致的.

事实上, 如果一致收敛性存在的话, 根据定理 3, 我们可以对级数当  $x \rightarrow R-0$  逐项取极限, 就得到极限的收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots,$$

<sup>①</sup>这不仅指  $x=0$  点两边邻域  $(-\delta, \delta)$  而言, 还包括单边邻域  $[0, \delta)$  或  $(-\delta, 0]$ .



这与假定相反.

以下是在某种意义下的逆定理.

5° 设幂级数 (31) 当  $x = R$  时收敛(纵然是非绝对的), 则级数在整个区间  $[0, R]$  的收敛性必然是一致的.

事实上, 如果级数 (31) 表成形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n \quad (0 \leq x \leq R),$$

那么所要求的结论即刻可从阿贝尔判别法得到, 因为级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  收敛, 而因子  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  组成单调与一致有界的序列

$$1 \geq \frac{x}{R} \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \cdots \geq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geq \cdots$$

证明了的命题允许把定理 1 应用到整个区间  $[0, R]$ . 这样, 关于在开区间  $(-R, R)$  上幂级数的和的连续性, 我们得到补充定理 2° 的阿贝尔的定理:

6° **阿贝尔定理** 若幂级数 (31) 当  $x = R$  时收敛, 则它的和在这  $x$  值上保持连续性 (自然是左边的连续性), 就是说,

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

阿贝尔定理有很重要的应用.

如果, 只在开区间  $(-R, R)$  上, 得到函数  $f(x)$  的幂级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R < x < R),$$

但是, 在这区间的某一个端点上, 譬如说在  $x = R$  上, 函数保持连续性, 而级数断续收敛, 那么这展开式在这端点上还是正确的. 取以上等式当  $x \rightarrow R - 0$  时的极限, 就容易相信这点的.

这样, 例如, 我们只在  $-1 < x < 1$  时有展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

但是, 知道级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

收敛, 我们就作出结论, 这级数的和是  $\ln 2$ . 完全同样的方法证明第 407 目中的断言, 二项式级数

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} x^n + \cdots$$

在  $x = \pm 1$  时的和是  $(1+x)^m$ , 只需要级数是收敛的.



**438. 幂级数积分与微分** 现在我们把第 434, 435 目中的定理应用到幂级数.

比较已经证明了的性质 1°, 5° 与第 434 目的定理 5, 我们得到:

7° 幂级数 (31) 在区间  $[0, x]$  上可以逐项积分, 其中  $|x| < R$ , 就是

$$\int_0^x f(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots \quad (33)$$

若级数 (31) 在收敛区间的端点上收敛, 其中  $x$  值就可以与这端点的值重合.

转到关于幂级数 (31) 求导数的问题.

8° 幂级数 (31) 在其收敛区间内部可以逐项求导数, 于是

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \quad (34)$$

若上述级数在收敛区间的端点收敛, 则上述断言在这个端点保持有效.

取原来级数的收敛区间内的任意一点  $x$ , 于是  $|x| < R$ , 在  $|x|$  与  $R$  之间插入数  $r' : |x| < r' < R$ . 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nr'^n = a_0 + a_1r' + a_2r'^2 + \cdots + a_nr'^n + \cdots$$

的收敛性, 其通项有界:

$$|a_n|r'^n \leq L \quad (L \text{ 为常数}, n = 1, 2, \cdots).$$

则对级数 (34) 第  $n$  项的绝对值得到如下估计:

$$n|a_n| \cdot |x|^{n-1} = n|a_n| \cdot r'^n \cdot \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r'} \leq \frac{L}{r'} \cdot n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1}.$$

级数

$$\frac{L}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} = \frac{L}{r'} \left\{ 1 + 2 \left| \frac{x}{r'} \right| + \cdots + n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} + \cdots \right\}$$

收敛, 若考虑到  $\left| \frac{x}{r'} \right| < 1$ , 借助于达朗贝尔判别法容易证实这一点. 在这种情形下级数 (34) 绝对收敛. 由此可以明白, 这个级数的收敛半径  $R'$  不小于  $R$ .

若现在取任意  $r < R$ , 则同时有  $r < R'$ ; 根据 1°, 级数 (34) 在区间  $[-r, r]$  一致收敛, 因此按定理 7[435], 在这个区间内容许对级数 (31) 逐项求导数. 因为  $r < R$  是任意的, 定理的基本断言得证.

在级数 (34) 当  $x = R$  时收敛的情形下, 这一收敛性在区间  $[0, R]$  上是一致的 [5°], 定理 7 可应用于整个区间 —— 当  $x = R$  时逐项求导数是容许的.

**附注** 我们已经确认  $R' \geq R$ . 另一方面, 原先的级数 (31) 的项, 按绝对值不超过级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n + \cdots$$



的对应的项,而后者与级数 (34) 有相同的收敛半径  $R'$ . 因此,  $R \geq R'$ . 这样一来,最后有  $R' = R$ : 级数 (31) 与由它逐项求导数得到的级数 (34), 二者的收敛半径重合. 其实, 若记起  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$  [32,10], 借助于柯西-阿达马定理 [380] 可以证明这一点.

因为级数 (31) 可由级数 (33) 逐项求导数得到, 这两个级数有相同的收敛半径.

最后的定理 8° 揭示了幂级数累次重复求导数的可能性. 这样, 像以前一样,  $f(x)$  记作幂级数 (31) 在它收敛区间所表示的函数, 在这区间内我们处处有:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)na_nx^{n-3} + \cdots \\ &\quad \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot na_n + \cdots \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

如果在这些等式里代入  $x = 0$ , 那么我们得到已知的幂级数的系数的表达式:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \\ a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots \end{aligned}$$

[比较 403(7)]. 如果问题是关于一般形式 (31\*) 的级数, 那么只要在这里把  $x = 0$  的值换作  $x = x_0$ . 因此:

9° 幂级数在它的收敛区间内所表示的函数, 在这区间内有任何阶的导数. 这级数本身对于这函数, 不是别的, 就是它的泰勒级数.

这值得注意的结论使得在前章中讨论的函数展开成幂级数的问题更清楚了. 我们看到. 如果函数展开成幂级数, 那么必须展开成泰勒级数; 因此我们只限于去研究, 对于函数泰勒级数表达的可能性. 注意, 展开<sup>60)</sup> 成  $x - x_0$  幂的泰勒级数的函数叫做在  $x_0$  点是解析的.

推广已经阐明了的理论到多重幂级数. 为了明确起见, 我们考虑两个变量的级数

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k.$$

在收敛域内 [396], 这级数同样可以对于任一个变量逐项求导数任意若干次. 因

<sup>60)</sup> 在点  $x_0$  的某个邻域内.



此很容易得到系数的表达式

$$a_{00} = f(x_0, y_0), a_{10} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, a_{01} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, a_{20} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \dots$$

一般地

$$a_{ik} = \frac{1}{i!k!} \frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

这样, 函数  $f(x, y)$  的展开式 (只要它是可能) 必须有形式

$$f(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{1}{i!k!} \frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k} (x - x_0)^i (y - y_0)^k.$$

这级数就叫做泰勒级数; 它很自然地与在 195 目中讲过的泰勒公式衔接起来. 当这样的展开式存在<sup>61)</sup>时, 函数  $f(x, y)$  叫做在  $(x_0, y_0)$  点是解析的.

### §3. 应用

#### 439. 级数和连续性与逐项取极限的例

##### 1) 研究级数和

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 \cdot n^q}$$

的连续性. 假设  $p \cdot q \geq 0$ , 且这两个指数之一大于 1 (这一点保证对所有的  $x$  级数收敛). 显然只限于非负的  $x$ .

如果  $p > 1$ , 那么对  $x \leq x_0$  ( $x_0 > 0$  是任意数), 级数以

$$x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

为优级数, 因此根据魏尔斯特拉斯判别法, 级数一致收敛, 其和在区间  $[0, x_0]$  内连续, 由于  $x_0$  的任意性, 这一点在整个区间  $[0, +\infty)$  上成立.

如果  $p \leq 1$ , 但  $q > 1$ , 那么对  $x > 0$  把级数改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q + \left(\frac{1}{x}\right)^2 n^p}$$

的形式. 如同前面所论证的, 我们得出级数和对所有  $x > 0$  的连续性. 于是, 仅需解决有关点  $x = 0$  的问题.

用求导数的方法可以看出, 当  $x = n^{\frac{p-q}{2}}$  时级数的第  $n$  项达到其最大值

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}.$$

<sup>61)</sup>在点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内.



如果  $p + q > 2$ , 那么级数以收敛级数

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}$$

为优级数, 这一点保证了包括点  $x = 0$  在内对所有  $x$ , 函数  $f(x)$  连续.

留下悬而未决的是若  $p < 1, q > 1$ , 但  $p + q \leq 2$  的情形当  $x = 0$  时  $f(x)$  的连续性问题. 我们在后面 [491,14)] 看到, 在这样一些条件下函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  处有间断.

2) 我们考虑狄利克雷级数 [385,3)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x},$$

此处  $\{a_n\}$  是某个实数序列. 我们假设这个级数不是“处处发散”的, 因此对它存在收敛边界点  $\lambda < +\infty$ . 无论取什么样的  $x_0 > \lambda$ , 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

收敛. 由此可以断言所考虑的级数对所有的  $x \geq x_0$  一致收敛 [与 437 目定理 1° 类似]. 如果把级数改为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

的形式, 注意到因子  $\frac{1}{n^{x-x_0}}$  随  $n$  的增长而递减, 且均以 1 为界. 而那时, 按照定理 1, 级数和对所有  $x > x_0$  连续, 因此 (由于  $x_0$  的任意性) 对所有的  $x > \lambda$  连续 [与定理 2° 类似].

如果  $\lambda$  有限, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$$

收敛, 这样就可证对  $x \geq \lambda$ , 所考虑级数的一致收敛性 [与 5° 比较] 与级数和当  $x = \lambda$  时的右连续性 [与 6° 比较].

3) 在 390,6) 中, 用等式

$$E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

确定  $E(x)$ , 我们知道它适合关系式

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y). \quad (1)$$

现在, 按照第 437 目定理 2°, 函数  $E(x)$  在从  $-\infty$  到  $+\infty$  整个区间内是连续的. 由于在 75 中 1° 的证明, 方程 (1) 的连续解必须有形式  $E(x) = a^x$ . 最后, 底  $a$  显然确定如下:

$$a = E(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

因此,  $E(x) = e^x$  [比较 404,(11)].



4) 我们来给出二项式级数 [407,(22)]

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots$$

一个新的解释. 若  $|x| < 1$ , 此级数绝对收敛. 我们来确定其和. 把这个和表为  $m$  的函数 (对固定的  $x, |x| < 1$ )  $\varphi(m)$ . 从初等代数知, 对任意自然数  $m$  (级数此时在  $(m+1)$  项中断)  $\varphi(m) = (1+x)^m$ ; 我们来证明, 对所有的  $m$  都如此.

取任意  $k$ , 考虑类似的级数

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots + \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots$$

及其和  $\varphi(k)$ , 把两个级数按柯西法则相乘. 不难写出这个乘积的前几项:

$$\begin{aligned} \varphi(m) \cdot \varphi(k) &= 1 + (m+k)x + \left[ \frac{m(m-1)}{2} + mk + \frac{k(k-1)}{2} \right] x^2 + \cdots \\ &= 1 + (m+k)x + \frac{(m+k)(m+k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots \end{aligned}$$

$\frac{x^n}{n!}$  的系数显然是某个关于  $m$  与  $k$  的  $n$  次幂的多项式. 它的形状如何? 若  $m$  与  $k$  是任意的自然数, 都大于  $n$ , 则从初等的考虑可以断定, 所说的系数是

$$(m+k)(m+k-1) \cdots (m+k-n+1).$$

因此 (正如从两个变量的整多项式的恒等定理推出这一点) 对任意的  $m$  与  $k$ , 级数乘积也具有这样的形式. 于是所求函数  $\varphi(m)$  适合函数关系

$$\varphi(m) \cdot \varphi(k) = \varphi(m+k).$$

现在来证明函数  $\varphi(m)$  的连续性. 对于所有按其绝对值不超过任意取的数  $m_0 > 0$  的所有数值  $m$ , 可从二项级数的一致收敛性推出  $\varphi(m)$  的连续性; 对于这些值, 此级数以收敛级数

$$1 + m_0|x| + \frac{m_0(m_0+1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{m_0(m_0+1)(m_0+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \cdots$$

为优级数. 在这种情况下, 正如我们所知 [75,1°], 必然有

$$\varphi(m) = a^m.$$

因为  $a = \varphi(1) = 1+x$ , 于是最终有

$$\varphi(m) = (1+x)^m.$$

5) 由关系式 [77,5(6)]

$$\ln a = \lim_{k \rightarrow \infty} k(\sqrt[k]{a} - 1) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

的帮助, 读者已经知道的对数级数 [405(17)] 可以从二项式级数 [407(22)] 得到.



设  $a = 1 + x$  (此处  $|x| < 1$ ) 并把  $(1 + x)^{\frac{1}{k}}$  用它的展开式

$$(1 + x)^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{k} - n + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdots n}x^n + \cdots$$

来代替. 所以  $\ln(1 + x)$  表示, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 表达式

$$\begin{aligned} k[(1 + x)^{\frac{1}{k}} - 1] &= x - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{x^3}{3} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{2k}\right) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n-1)k}\right) + \cdots \end{aligned} \quad (2)$$

的极限.

这级数的项 ( $x$  为常数) 包含一个自然参数  $k$  作为变量. 在它的整个变化域内, 级数 (2) 对于  $k$  一致收敛; 这点 (按照魏尔斯特拉斯判别法) 是由于, 它可用不包含  $k$  的级数

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \cdots + \frac{|x|^n}{n} + \cdots \quad (x = \text{常数}, |x| < 1)$$

作为优级数. 在这样的情形, 按照定理 4<sup>①</sup>, 级数 (2) 当  $k \rightarrow \infty$  时可以逐项取极限, 这就得到对数级数.

① 从关系式

$$e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

推出指数级数 [404(11)] 也是个有趣的例子.

按照二项式的牛顿公式展开, 就有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k &= 1 + k \cdot \frac{x}{k} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \cdots + \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) + \cdots \end{aligned} \quad (3)$$

实际上, 对于任意  $k$ , 这里的项总共只有有限个 ( $= k + 1$ ), 但是我们可以认为是个“无穷级数”而其余的项都等于 0. 这级数对于所有的  $k$  都一致收敛, 显然, 收敛级数

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \cdots + \frac{|x|^n}{n!} + \cdots \quad (x = \text{常数})$$

是它的优势级数. 在这情形, 按照定理 3, “级数”当  $k \rightarrow \infty$  时可以逐项取极限. 因为, 当  $k < n$  时, 这级数的第  $(n + 1)$  项等于 0, 对于所有  $k \geq n$ , 则有形式

$$\frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right),$$

那么当  $k \rightarrow \infty$  时它的极限为  $\frac{x^n}{n!}$ . 用这样的方法, 我们又得到了指数函数  $e^x$  的展开式.

7) 根据棣莫弗公式, 我们已在 408 目看到公式

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \cdot \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \cdot \sin^3 z + \cdots$$

<sup>①</sup>记住, 在定理 3 中讨论的变量  $x$  的变化域  $\mathcal{X}$  可以是任意的; 特别它可以是自然数列 (就是  $a = +\infty$ ).



我们证明: 正是由此可得到函数  $\sin x$  的幂级数展开.

令  $z = \frac{x}{m}$  并把  $\cos^m \frac{x}{m}$  提到括号外, 上述公式可改写为:

$$\sin x = \cos^m \frac{x}{m} \left\{ m \operatorname{tg} \frac{x}{m} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{(m \operatorname{tg} \frac{x}{m})^3}{3!} + \dots \right\}.$$

把  $x$  看作是不变的, 在等式右端令  $m \rightarrow \infty$  而取极限.

因为  $\cos^m \frac{x}{m} \rightarrow 1$  [例如, 参看 79, 4) 当  $\lambda = 0$ ], 而  $m \operatorname{tg} \frac{x}{m} \rightarrow x$ , 于是在极限中事实上便得到所要的展开 [404, (12)]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

仍需说明括号中能逐项取极限的理由, 括号中当对每个  $m$  项数是有限的, 但随着  $m$  的增长, 项数是无限增长的 [与 6) 比较].

设取  $x$  含于  $-\frac{1}{2}m_0\pi$  与  $+\frac{1}{2}m_0\pi$  之间; 假定  $m > m_0$ . 容易证明表达式  $m \operatorname{tg} \frac{x}{m}$  的绝对值随  $m$  的增长而递减, 因此是有界的:

$$\left| m \operatorname{tg} \frac{x}{m} \right| \leq L = m_0 \operatorname{tg} \frac{x}{m_0} \quad (m > m_0).$$

在这种情况下, 括号中的展开式以收敛级数

$$L + \frac{L^3}{3!} + \dots$$

为优级数. 正如上一个例子那样, 论证完成了.

类似地可以得到  $\cos x$  的幂级数展开.

附注 例子 5), 6), 7) 详细转述了欧拉在其《无穷小分析引论》中的初等函数展开的结论.

8) 证明

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \ln 2;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(a) 设  $0 < x < 1$ ; 因为级数  $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  收敛, 而因子  $\frac{x^n}{1+x^n}$  以 1 为上界, 且当  $n$  增加时单调下降, 那么应用阿贝尔判别法, 即知级数对于在  $(0, 1)$  中所有  $x$  一致收敛. 当  $x \rightarrow 1-0$  时, 逐项取极限 (定理 4), 我们就得到所要求的结果.

(6) 设这里  $0 < x < 1$ , 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}.$$

在这里级数  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}$  不收敛, 但它的部分和有界. 另一方面,  $n$  增加时因子

$$\frac{x^n}{1+x+\dots+x^{2n-1}}$$



不但单调减小, 而且对在  $(0,1)$  中的  $x$  一致趋近于 0, 因为

$$\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n}.$$

在这情形应用狄利克雷判别法, 即知级数一致收敛, 故当  $x \rightarrow 1-0$  时, 允许逐项取极限, 等等.

9) 说到幂级数时, 我们总是默认它的项是按照升幂排的. 如果是在收敛区间的内部, 这样理解与否尚无关系, 因为级数绝对收敛; 可是例如阿贝尔定理等, 若缺少了这一条件就会变成是不正确的了.

在级数

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \cdots$$

上验算一下, 这级数是从对数级数重新排列项得来的 [参看 388, 例 1)].

10) 给一个阿贝尔定理 [392] 在级数乘法问题中很有趣的应用.

考虑两个收敛级数

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{A})$$

与

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\text{B})$$

假设这二级数的乘积 (柯西)

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (\text{C})$$

同样收敛, 这里  $c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$ , 需要证明

$$A \cdot B = C.$$

从级数 (A) 的收敛性, 首先按照第 379 目引理, 我们断定级数

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{A}^*)$$

在  $|x| < 1$  时绝对收敛, 所以这个级数的收敛半径  $R \geq 1$ . 这样, 在任何情形都有关系式

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} A(x) = A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

就是, 当  $R = 1$  时, 根据阿贝尔定理, 当  $R > 1$  时, 根据定理 2° [437]. 如果类似地考虑级数 (当  $|x| < 1$  时)

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad (\text{B}^*)$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad (\text{C}^*)$$



那么关于级数  $(A^*)$  所说的那些, 对于它们都对.

现在把柯西定理应用到绝对收敛级数  $(A^*)$  与  $(B^*)$ , 我们就有

$$A(x) \cdot B(x) = C(x).$$

为了得到要求的结果

$$A \cdot B = C,$$

只需当  $x \rightarrow 1-0$  时, 取极限.

#### 440. 级数的逐项求积分的例

1) 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$  的求和可以这样进行:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

我们首先应用阿贝尔定理, 而后是应用幂级数的逐项积分 [437, 6°; 438, 7°].

2) 在区间  $[0, x]$  (此处  $|x| < 1$ ) 上, 利用级数

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots, \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots \end{aligned}$$

的逐项求积分, 立即得到展开式

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{1+x} &= \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \\ \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \end{aligned}$$

这些在 405 [参看 (17)] 与 404 [参看 (15)] 中是用比较复杂的方法得到的. 由阿贝尔定理 [437, 6°] 的帮助, 说明第一个展开式在  $x=1$  时是对的, 第二个在  $x=\pm 1$  时是对的.

3) 如果回想一下, 函数  $\arcsin x$  的导数  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  展开成以下形式的级数 [407(24)]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1),$$

那么利用这级数的逐项求积分很容易得到反正弦函数本身的展开式 (这对我们是新的):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$



因为这级数对  $x = \pm 1$  也收敛 [370,5)(a)],<sup>①</sup>那么按照阿贝尔定理, 展开式对于这些值也是对的. 特别, 当  $x = 1$  时, 我们有数  $\pi$  的级数:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

同样, 展开导数

$$[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

成级数, 再逐项求它的积分, 我们得到展开式

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

这函数不是别的, 而是  $\text{Arsh } x$ , 就是  $\text{sh } x$  的反函数 [49,4];339, 附注].

4) 由于级数逐项求积分的帮助, 我们可以把那些不能表示成初等函数的有限形式的积分, 展开成无穷幂级数 [参看 227]. 这些展开式在近似计算中是可以利用的.

如从已知展开式

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

出发 [参看 404(11)], 我们求出

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

我们提出这个问题: 计算积分

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

的值准确到 0.000 1. 取积分的上限等于 1, 我们得到  $W$  的一个项的绝对值递减的交错数项级数:

$$I_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1\,320} + \frac{1}{9\,360} - \frac{1}{75\,600} + \cdots$$

因为第八项已经大大地小于给定的限度, 所以我们只保留前七项. 对应的误差 (负的)  $\Delta$  很容易估计

$$|\Delta| < \frac{1}{75\,600} < \frac{1.5}{10^5}.$$

<sup>①</sup> 其实, 级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$  的收敛性现在可以更简单地证明. 对任意  $m$ , 有

$$x + \sum_{n=1}^m \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}.$$

现在使  $x \rightarrow 1$  而取极限, 得到

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2},$$

由此 [365] 推出所求.



计算其他的项到第五位小数, 我们有

$$\begin{array}{rcl}
 1 + \frac{1}{10} = 1.100\ 00 & \frac{1}{3} = 0.333\ 33(+)& \\
 \frac{1}{216} = 0.004\ 63(-) & \frac{1}{42} = 0.023\ 81(-) & \\
 \frac{1}{9360} = 0.000\ 11(-) & \frac{1}{1320} = 0.000\ 76(-) & \\
 \hline
 1.104\ 74 & 0.357\ 90 & \begin{array}{r} 1.104\ 74 \\ -\ 0.357\ 90 \\ \hline 0.746\ 84 \end{array}
 \end{array}$$

如果计算全部误差, 则有

$$0.746\ 81 < I_1 < 0.746\ 85, W = 0.746\ 8 \dots$$

四位小数完全正确 [比较 328,5)].

5) 同样, 因为 [参看 404(12)]

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

所以

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots$$

我们提出, 由这展开式的帮助, 计算积分

$$\mu = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

的值准确到 0.001.

取  $x = \pi$ , 就有

$$\mu = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35\ 280}\pi^7 + \frac{1}{3\ 265\ 920}\pi^9 - \frac{1}{439\ 084\ 800}\pi^{11} + \dots$$

这又是一个项的绝对值递减的交错级数.

因为第六项小于 0.000 7, 那么我们只计算五项, 计算到四位小数

$$\begin{array}{rcl}
 \pi = 3.141\ 6(-) & & \\
 \frac{1}{600}\pi^5 = 0.510\ 0(+) & \frac{1}{18}\pi^3 = 1.722\ 6(-) & \\
 \frac{1}{3\ 265\ 920}\pi^9 = 0.009\ 1(+) & \frac{1}{35\ 280}\pi^7 = 0.085\ 6(+) & \\
 \hline
 3.660\ 7 & 1.808\ 2 & \begin{array}{r} 3.660\ 7 \\ -\ 1.808\ 2 \\ \hline 1.852\ 5 \end{array}
 \end{array}$$

考虑到误差, 我们得到结论:

$$1.851\ 7 < \mu < 1.852\ 7, \mu = 1.852 \pm 0.001.$$

6) 我们提出把积分

$$(a) \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad (b) \int_0^1 x^{-x} dx$$



表示成级数的问题.

(a) 回想一下反正切函数的展开式, 就有

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \cdots \right) dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

因为在积分号下的级数在  $x = 1$  处收敛, 那么就允许逐项求积分 [438, 7°].

我们已经提到过 [328, 6)] 所谓“卡塔兰常数”的这个积分的值

$$G = 0.915\,965 \dots$$

现在我们看到

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

(6) 把被积表达式写成  $e^{-x \ln x}$  的形式, 展开它成指数级数

$$x^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!} \textcircled{1},$$

这级数对于  $0 < x \leq 1$  一致收敛. 因为函数  $|x \ln x|$  的最大值是  $\frac{1}{e}$  (很容易用微分学的方法算出来的), 所以可以写出优级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!}.$$

因此可以逐项求积分. 因为 [312, 4)]

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

那么最后

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

7) 我们有展开式 [414, 8)]

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^p \quad (0 \leq x \leq 1).$$

此处设  $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ , 并且考虑到  $\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$  [50], 求出:

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} y^{2p+1} \quad \left( 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

从 0 到  $y$  积分这个等式, 同时右端是逐项积分:

$$\frac{1}{2}(\arcsin y)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \cdot \frac{y^{2p+2}}{2p+2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[2(m-1)]!!}{(2m-1)!!} \frac{y^{2m}}{2m}.$$

<sup>①</sup>当  $x = 0$  时, 级数的项从  $n = 1$  开始都用极限值来代替, 就是以零来代替.



这个结果可以改写为:

$$2(\arcsin y)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} (2y)^{2m}.$$

当  $y = \frac{1}{2}$  时, 由此得出:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} = \frac{\pi^2}{18}.$$

但是我们已看到 [395,(13); 同样可参看 416],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!},$$

于是最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4)$$

我们将不止一次地回到欧拉的这个有趣的结果.

8) 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

如果利用对数级数 [405(17)], 那么我们得到被积函数的展开式

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^{n-1} + \cdots$$

这级数在整个区间  $[0,1]$  中成立. 逐项求积分, 我们得到

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

我们刚刚建立了等式 (4); 由此式得出<sup>①</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

这样, 我们就达到了所要求的积分的“有限”的表达式  $I = \frac{\pi^2}{12}$ .

9) 设要求积分 ( $|a| < 1$ )

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cdot \cos x)}{\cos x} dx$$

的值 (当  $x = \frac{\pi}{2}$  时被积表达式的值认为是当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时的极限值  $a$ ).

<sup>①</sup>就是在 420,6) 与 422 中将证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , 而由此即推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$



利用对数的展开式, 就有

$$\frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} \cos^n x,$$

而且这级数在区间  $[0, \pi]$  上一致收敛. 注意 [312(8)]

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m-1} x dx = 0, \int_0^{\pi} \cos^{2m} x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \pi,$$

逐项求积分得到

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \left\{ a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \cdot \frac{a^{2m+1}}{2m+1} \right\}.$$

所得到的级数即反正弦函数的展开式 [参看 3)]. 这样最后得到 (有限形式!)

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \cdot \arcsin a.$$

10) 我们考察展开式 ( $|r| < 1$ )

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \cos nx. \quad (5)$$

证明它并不难, 将分母  $1 - 2r \cos x + r^2$  乘到右侧, 我们便得

$$1 - 2r \cos x + r^2 + 2 \sum_1^{\infty} r^n \cos nx - 2 \sum_1^{\infty} r^{n+1} \cdot 2 \cos nx \cdot \cos x + 2 \sum_1^{\infty} r^{n+2} \cos nx.$$

如果以  $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x$  来代替  $2\cos nx \cdot \cos x$ , 第二个和就对应地分解为二, 那么经过消去后, 只余下  $1 - r^2$ . 这就完成了证明.

由于级数  $\sum_1^{\infty} |r|^n$  ( $|r| < 1$ ) 的收敛性, (5) 式右边的级数对  $x$  在区间  $[-\pi, \pi]$  一致收敛. 现在在左边右边都取从  $-\pi$  到  $\pi$  的积分, 其中级数是可以逐项求积分的 (定理 5). 因为  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\pi dx = 0$ . 那么我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = 2\pi$$

[参考 309.8)].

同样, 等式 (5) 的两边乘以  $\cos mx$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), 再逐项求积分, 很容易得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = 2\pi \frac{r^m}{1 - r^2}.$$

这里利用了已知的结果 [309,(4)(r)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n \text{ 时,} \\ \pi & \text{当 } m = n \text{ 时.} \end{cases}$$



11) 如果在等式 (5) 中, 把 1 移到左边, 再两边除以  $2r$ , 那么得到

$$\frac{\cos x - r}{1 - 2r \cos x + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cos nx.$$

此时, 任意取定  $x$ , 而把  $r$  当作以  $(-1, 1)$  为变化域的变量. 把等式的两边对  $r$  从 0 积分到区间上任意的  $r$ , 而右边的幂级数逐项求积分; 因为左边的分子乘上个常数就是分母对  $r$  的导数, 所以就得到

$$\ln(1 - 2r \cos x + r^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos nx \quad (|r| < 1).$$

现在重新取定  $r$ , 而  $x$  可从 0 变到  $\pi$ . 显而易见, 右边的级数对于在这区间上的  $x$  是一致收敛的, 所以是许可逐项求积分的 (定理 5). 积分之, 就得到积分

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 0 \quad (|r| < 1)$$

[比较 307,4); 314,14)]. 因此, 像我们已经看到过那样, 容易得到当  $|r| > 1$  时积分的值.

12) 依赖于  $x$  的积分

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta,$$

$$J_n(x) = \frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) \cos^{2n} \theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

表示所谓的贝塞尔函数 [参看 395,14)]. 以  $x \sin \theta$  的幂次展开被积表达式, 再逐项求积分, 就很容易得到我们所熟知的这些函数的  $x$  幂级数的表达式.

例如, 积分级数

$$\cos(x \sin \theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k} \theta}{2k!}$$

并利用公式 [312(8)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta d\theta = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

我们得到带有零附标的贝塞尔函数

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}.$$

13) 我们已经碰到过所谓第一种与第二种完全椭圆积分 [315 等等]

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

我们提出把它们用模数  $k(0 < k < 1)$  的幂次展开的问题.

以  $x = -k^2 \sin^2 \varphi$  代入第 407 目的公式 (24) 中, 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n} \varphi.$$



这级数对于  $\varphi$  是一致收敛的, 因为对于所有的  $\varphi$  值, 有收敛的优级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n},$$

因此, 按照定理 5, 这里可以逐项求积分, 我们就这样做. 重新利用公式 (6), 由此就得到:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]^2 \cdot k^{2n} \right\}.$$

同样, 从第 407 目的公式 (23) 出发, 得到

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}.$$

这些级数同样可以应用在近似计算方面. 例如, 考察级数

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2\,048} - \frac{175}{262\,144} - \frac{441}{2\,097\,152} - \cdots \right)$$

如果只保持所写出的几项, 那么对应的误差是负的, 并估计如下:

$$|\Delta| < \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{11 \cdot 2^6} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) < 0.000\,24;$$

我们可以期望准确到三位小数. 实际上, 计算五位小数, 就有

$\frac{\pi}{2} = 1.570\,80(-)$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} = 0.196\,35(-)$
	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{256} = 0.018\,41(-)$
$1.570\,80$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{2048} = 0.003\,83(+)$
$- 0.219\,97$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{175}{262\,144} = 0.001\,05(-)$
$\hline 1.350\,83$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{441}{2\,097\,152} = 0.000\,33(+)$
	$\hline 0.219\,97$
$1.350\,57 < \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1.350\,85,$	$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.350 \cdots$ [比较 328, 4].

需要说明的, 就是实际上只有  $k$  的值很小时, 上述的完全椭圆积分  $\mathbf{K}(k)$  与  $\mathbf{E}(k)$  的级数对于计算才是很有利的. 但是有一类变换存在, 可以把所说的积分化成任意小的  $k$  的情形 [参看 315].

14) 为了计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathbf{E}(h \sin \theta)}{1 - h^2 \cdot \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta \quad (0 < h < 1),$$

可以利用所得到的函数  $\mathbf{E}(k)$  的展开式.



首先, 容易验算展开式

$$\begin{aligned}\frac{E(k)}{1-k^2} &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot 5k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot 7k^6 + \cdots \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right)^2 \cdot (2n+1)k^{2n} \right\}\end{aligned}$$

成立 (例如, 等式的右边乘以  $1-k^2$ ).

代入  $k = h \sin \theta$ , 再乘以  $\sin \theta$ , 我们可以对  $\theta$  从 0 到  $\frac{\pi}{2}$  逐项求积分, 因为所得到的级数在这个区间一致收敛 (例如, 上面的级数当  $k = h$  时是它的优级数). 因为 [312(8)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta = \frac{2n!!}{(2n+1)!!},$$

所以, 我们求得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(h \cdot \sin \theta)}{1-h^2 \cdot \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}h^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}h^6 + \cdots \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} h^{2n} \right\}.\end{aligned}$$

比较括号内的表达式与第 407 目的公式 (24), 我们得到未知积分的值的有限形式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(h \sin \theta)}{1-h^2 \cdot \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}.$$

15) 最后, 我们考虑当  $x \geq 0$  时把函数  $y = \arcsin(1-x)$  按照  $x$  的幂 (但不是整数的!) 展开的问题<sup>①</sup>.

我们就有 (利用二项式级数)

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2x}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \cdots \right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{32\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \cdots\end{aligned}$$

并且, 如果去掉在  $x=0$  处趋向于  $\infty$  的第一项, 级数在任意区间  $[0, x]$  上是一致收敛的, 其中  $0 < x < 2$ . 第一项的原函数是  $-\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$ ; 对于剩余的级数, 我们可以用逐项求积分的方法来得到原函数. 因为在  $x=0$  处  $y = \frac{\pi}{2}$ , 所以最后我们得到这按照  $x$  的分数幂的展开式 (对于  $0 \leq x < 2$  成立):

$$y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{80\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}} - \cdots$$

同样得到展开式

$$\arcsin \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = \sqrt{2} \left\{ x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + \cdots \right\}$$

对于  $0 \leq x < 1$ .

<sup>①</sup>这里按照  $x$  的正整幂的普通型式的展开式是不可能的, 因为否则按照第 438 目的定理 9°, 我们的函数在  $x=0$  处是要有有限导数的, 而事实上并没有.



## 441. 级数的逐项求导数的例

1) 重新回到函数 [参看 390,6); 439,3)]

$$y = E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

现在我们很容易求得它的导数; 这只需逐项地对上面的级数求导数即可 [438,8°]. 我们得到  $E'(x) = E(x)$ , 所以我们所考虑的函数满足微分方程  $y' = y$ . 由此  $y = Ce^x$ ; 因为在  $x = 0$  处显然  $y = 1$ , 所以最后我们找到  $E(x) = e^x$ .

2) 可把相同的方法应用于确定二项式级数

$$y = f(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots$$

[这次  $m$  是固定的, 而  $x$  在区间  $(-1, 1)$  内变动; 与 439,4) 比较]. 对它逐项求导数, 得到

$$f'(x) = m \left\{ 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots \right\}.$$

现在不难证实<sup>①</sup>:

$$(1+x) \cdot f'(x) = m \cdot f(x).$$

于是, 这个函数满足微分方程

$$(1+x) \cdot y' = my$$

由此

$$y = C(1+x)^m$$

因为显然当  $x = 0$  时  $y = 1$ . 则常数  $C = 1$ . 最后

$$y = f(x) = (1+x)^m.$$

3) 我们已知狄利克雷级数的和 [385,3)]

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

对  $x > \lambda$  (其中  $\lambda$  是收敛边界点,  $\lambda < +\infty$ ) 是连续函数 [439,2)].

可以用逐项求导数来求这个函数的导数:

$$\varphi'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \ln n \quad (x > \lambda).$$

<sup>①</sup> 当用  $1+x$  去乘  $f'(x)$  时, 必须应用二项式系数的性质:

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \\ = \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}, \end{aligned}$$

此式是著名的关系式

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$$

的特殊情形.



我们暂时还只是形式地得到这个结果. 为了证明这样做合理, 只需证实这后一级数对所有适合  $x \geq x_0$  的  $x$  是一致收敛的, 其中  $x_0$  是任意 (但是固定的) 大于  $\lambda$  的数. 这可如同 439 目的 2) 中那样, 借助阿贝尔判别法来建立, 根据因子  $\frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$  从  $n=2$  开始随  $n$  的增长而递减, 均以数  $\ln 2$  为上界. 无论取怎样的值  $x > \lambda$ , 它都可置于  $x' > \lambda$  与  $x'' > x'$  之间; 可应用定理 7 [435] 于区间  $[x', x'']$ .

用这样的方法可以证实函数  $\varphi(x)$  的各阶导数的存在性并且得到其级数形式的表达式.

特别地, 所说过的可应于黎曼  $\zeta$  函数 (当  $x > 0$ ):

$$\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x}.$$

4) 我们已经碰到过带有零附标的贝塞尔函数展开成幂级数的展开式

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

[395,14);440,12)].

现在我们证明这个函数适合贝塞尔微分方程

$$xu'' + u' + xu = 0.$$

设  $u = J_0(x)$ , 就有

$$xu = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)^2}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1},$$

然后把  $u$  的展开式逐项求微分二次,

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1},$$

$$xu'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(2k-1)}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1}.$$

如果把这些等式相加, 那么  $x^{2k-1}$  的系数等于

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} [2k(2k-1) + 2k - (2k)^2] = 0,$$

这就证明所要求的断言.

同样可以验证带有任意自然数附标的贝塞尔函数  $J_n(x)$  与前面一样的适合一般的贝塞尔方程

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

5) 问题的另一提法大可注意: 设求可对所有的  $x$  值展开成幂级数, 并且适合贝塞尔方程的所有一切函数.

我们来看, 例如, 最简单的情形  $n=0$ . 我们把未知函数的展开式写成待定系数的级数

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$



的形式, 并且认为它是处处收敛的, 我们逐项微分二次. 把所有这些展开式代入方程, 我们得到

$$a_1 + \sum_{m=2}^\infty (m^2 a_m + a_{m-2}) x^{m-1} = 0.$$

按照定理 3°[437]

$$a_1 = 0, m^2 a_m + a_{m-2} = 0 \quad (m = 2, 3, \cdots).$$

由此, 首先, 带有奇附标的系数  $a_{2k-1} = 0(k = 1, 2, \cdots)$ , 至于带有偶附标的系数  $a_{2k}$ , 按照递推公式都可以用  $a_0$  来表示:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}.$$

这样, 只差个任意因子  $a_0$ , 我们又得到函数  $J_0(x)$ .

这所得到的级数可以直接验证为处处收敛. 从其得出的方法就可以看出其所表示的函数适合方程.

[读者要注意到待定系数法的特殊的应用法, 此处我们所有的已经是这些系数的无穷集合了, 就必须利用幂级数恒等定理以代替普通所用的多项式恒等定理.]

6) 高斯引进函数

$$\begin{aligned} u &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n \end{aligned}$$

[超几何级数; 参看 372; 378,4)]. 二次逐项求这级数的导数 (当作  $|x| < 1$ ), 可以证明, 这函数适合所谓超几何微分方程

$$x(x-1)u'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \cdot u' + \alpha\beta \cdot u = 0.$$

这里留给读者一些繁重的但是不困难的计算. 这里也可以变更一下问题的提法, 就像例题 5) 中所做的一样.

7) 我们用等式

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$$

来定义对于  $0 \leq x \leq 1$  的函数  $f(x)$ . 我们要证明, 当  $0 < x < 1$  时这函数满足有趣的函数方程

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = \text{const.}$$

只需要证明左边的表达式对  $x$  的导数恒等于零:

$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} \ln x = 0.$$

逐项求定义函数  $f(x)$  的级数的导数, 我们得到

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x);$$



把  $x$  换成  $1-x$ , 我们得到

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x} \ln x.$$

这就完成了证明.

8) 在 400,4), 曾研究过无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

假设  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 首先把这个等式取对数 [401,4°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{\varphi}{2^n} = \ln \sin \varphi - \ln \varphi,$$

然后将所得级数逐项求导数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^n} = \frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi.$$

因为由求导数所得级数以收敛的几何级数为优级数, 所以逐项求导数是合理的.

9) 在 408 中, 我们看到了把  $\sin x$  展开成无穷乘积

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

取绝对值, 因此我们得到

$$|\sin x| = |x| \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right|.$$

如果  $x$  不取  $k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  形式的数值, 那么取对数, 我们就得出无穷级数

$$\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right|.$$

逐项微分我们就得到这样一个展开式

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

为了验证这个, 只需要说明, 这所得到的级数, 在任意不包含  $k\pi$  形式的点的有限闭区间中, 一致收敛. 事实上, 当  $x$  在这种区间上变动时, 它的绝对值是保持有界的:  $|x| < M$ . 所以, 至少对于  $n > \frac{M}{\pi}$ ,

$$\left| \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \right| = \frac{2|x|}{n^2 \pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2 \pi^2 - M^2}.$$

因为级数

$$\sum_{n > \frac{M}{\pi}}^{\infty} \frac{2M}{n^2 \pi^2 - M^2}$$

收敛, 所以借助于魏尔斯特拉斯判别法, 就得到所要求的结果.



$\operatorname{ctg} x$  的展开式可以具有形式

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right);$$

这乃是  $\operatorname{ctg} x$  对应于分母  $\sin x$  不同的根 0 与  $\pm n\pi$  的部分分式的展开式.

按照公式  $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$ , 可以得到  $\operatorname{tg} x$  的部分分式的展开式:

$$\operatorname{tg} x = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}.$$

同样, 如果利用公式

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$$

可以得到  $\frac{1}{\sin x}$  的展开式:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

逐项求  $\operatorname{ctg} x$  的展开式的导数 (让读者证明这是许可的), 我们还得一个有用的展开式:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(x - n\pi)^2} + \frac{1}{(x + n\pi)^2} \right].$$

10) 如果从  $\operatorname{sh} x$  的无穷乘积表达式出发 [400], 那么类似的可以推出展开式

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} x &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \\ \frac{1}{\operatorname{sh} x} &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \text{等等.} \end{aligned}$$

11) 对于函数  $\Gamma(x)$ , 我们在第 402 目中引进魏尔斯特拉斯公式 [参看 (16)]

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

考虑到  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ , 并且取对数, 就容易得到 (这里  $x$  不等于 0 与负整数)

$$\ln |\Gamma(x)| = -\ln |x| - Cx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} - \ln \left| 1 + \frac{x}{n} \right| \right).$$

逐项求级数的导数, 由此我们形式上得到

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - C + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right).$$



现在我们要证明, 右边的级数在任意有限区间 (不包含负整数) 上一致收敛. 实际上, 因为对于这些  $|x|$  保持有界的:  $|x| < M$ , 所以, 至少对于  $n > M$  就有

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right| = \frac{|x|}{n(n+x)} < \frac{M}{n(n-M)}.$$

因为级数  $\sum_{n>M}^{\infty} \frac{M}{n(n-M)}$  收敛, 所以, 按照魏尔斯特拉斯判别法, 一致收敛性是成立的. 我们就得以引用第 435 目定理 7, 而且用这来证明  $\ln |\Gamma(x)|$  的导数的存在, 因而,  $\Gamma(x)$  的导数的存在. 等等.

把级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = 0$$

加到所得到的公式的右边, 就将公式化成以下形状:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{x+\nu} \right).$$

很容易说明函数  $\Gamma(x)$  的任意级导数的存在.

**442. 隐函数理论中的逐次逼近法** 为了表明函数级数 (或序列) 的理论的功用. 我们重新考虑关于隐函数存在的问题 [206 等]. 我们限制于最简单的一个方程

$$F(x, y) = 0 \tag{7}$$

的情形, 其中  $y$  应定义作  $x$  的单值函数. 此时我们采用逐次逼近法, 这方法使我们不仅可以鉴定这函数的存在, 而且可以给出关于它的实际的计算.

设函数  $F(x, y)$  与它的导数  $F'_y(x, y)$ , 在以  $(x_0, y_0)$  点为中心的某正方形

$$\mathcal{D} = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$$

中连续, 并且

$$F(x_0, y_0) = 0, \text{ 但 } F'_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{8}$$

则方程 (6) 在  $(x_0, y_0)$  点的附近把  $y$  定义为  $x$  的单值与连续的函数, 并且在  $x = x_0$  处等于  $y_0$ .

为了方便, 我们先考虑方程 (7) 有

$$y = y_0 + \varphi(x, y) \tag{7*}$$

形式的特别情形, 这里函数  $\varphi$  与  $\varphi'_y$  同样适合连续性的条件, 但条件 (8) 替换为

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1. \tag{8*}$$

由于导数的连续性, 我们在开始的时候, 可以认为域  $\mathcal{D}$  是足够小, 使得在这域中恒有

$$|\varphi'_y(x, y)| < \lambda, \tag{9}$$



这里  $\lambda$  是个小于 1 的常数. 然后保持变量  $y$  的变化区间, 还需要我们缩小变量  $x$  的变化区间, 把它改变为小区间  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , 使得在它的范围内,  $x$  的连续函数  $\varphi(x, y_0)$  (这个函数在  $x = x_0$  处是等于零的) 适合不等式

$$|\varphi(x, y_0)| < (1 - \lambda)\Delta.$$

这样我们准备了一个区域

$$\mathcal{D}^* = [x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta], \quad (10)$$

对此我们将作更进一步的讨论.

把常数  $y_0$  代入方程 (7\*) 的右边部分中的  $y$ , 我们得到  $x$  的某函数

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

同样的, 我们逐次设

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1),$$

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2),$$

.....

而一般的

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}). \quad (11)$$

这些函数

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

就逐渐近似于未知函数  $y(x)$ .

当然余下来还要证明的, 是所有这些都不跑出区间  $[y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$  以外去, 因为, 如果这些中的某个跑出了这区间, 那么它已经不能代替方程 (7\*) 的右边中的  $y$  了.

我们用归纳法来证明这一点, 假设我们说

$$y_0 - \Delta \leq y_{n-1} \leq y_0 + \Delta.$$

从 (11)

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}).$$

但是

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \leq |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|.$$

按照中值定理变换一下右边的第一部分, 并根据 (9)

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, \eta) \cdot (y_{n-1} - y_0)| < \lambda \cdot \Delta,$$

但由于 (10), 第二部分小于  $(1 - \lambda)\Delta$ , 所以总起来

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1 - \lambda)\Delta = \Delta,$$

这证明了我们的断言.



所利用的归纳法同时还建立起一个断言,即用上述方法得到的函数都是连续的.

现在转向关于函数序列  $\{y_n\}$  的极限的问题. 为了方便, 我们考虑级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}). \quad (12)$$

从我们序列的定义的本身, 就明白

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2}).$$

再次利用中值定理与不等式 (9), 我们得到

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda |y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

因此, 把  $n$  改换为  $n-1$ , 改换为  $n-2$ , 等等, 由于 (10) 最后我们得到

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} \cdot |y_1 - y_0| \leq \lambda^{n-1} \cdot (1 - \lambda) \cdot \Delta.$$

这样, 几何级数

$$(1 - \lambda) \Delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \quad (13)$$

就成为级数 (12) 的优级数, 因之, 级数 (12) 对于在区间  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  内所有  $x$  的值一致收敛. 所以, 按照第 431 目的定理 1, 极限函数

$$y = y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

在指定的区间内连续.

取方程 (11) 当  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 很容易说明这个函数适合开始所说的方程 (7\*). 余下的还要证明, 除去从这函数得到的值以外, 不存在适合方程 (7\*) 的其他的值  $y$ . 实际上, 如果对某一  $x$ , 同时有 (7\*) 与

$$\tilde{y} = y_0 + \varphi(x, \tilde{y})$$

那么, 相减再估计  $\varphi$  的差值, 我们得到

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda \cdot |y - \tilde{y}|,$$

因而  $y \neq \tilde{y}$  是不可能的.

由此可见

$$y(x_0) = y_0;$$

不过从所有的  $y_n(x_0) = y_0$  也可以直接知道的.

定理在所考虑的特殊情形是证明了. 一般情形很容易化成特殊情形; 就是, 方程 (7) 可以写成形式

$$y = y_0 + \left[ y - y_0 + \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)} \right],$$

如果设

$$\varphi(x, y) = y - y_0 + \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0 - y_0)},$$



这就与 (7\*) 一致了. 这函数是满足条件 (8\*) 的, 特别对于第二个条件是因为  $\varphi'_y(x_0, y_0)$  等于 0.

如上面已经提到过的, 所述的步骤使得未知函数  $y(x)$  关于实际的近似计算就很容易了. 从  $y(x)$  改变到  $y_n(x)$  的误差很容易估计, 因为几何级数 (13) 第  $n$  项以后的余式为级数 (12) 第  $n$  项以后的余式的优级数. 因此得到:

$$|y(x) - y_n(x)| < \Delta \cdot \lambda^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

很值得注意的是, 把在第 206 目中隐函数定理的证明与这里所提到的证明比较一下. 那里只是关于纯粹的“存在性的证明”, 这里却还有关于未知函数的构造.

用同样的方法, 我们能够有效地证明第 208 目中普遍的定理. 我们限制于最简单的情形, 为的是更好地显出这方法的概念.

**443. 三角函数的分析定义** 读者已看到过三角函数在分析中占着何等重要的位置. 但是, 它们的引进是在于纯粹几何的观察, 完全与分析无关. 因此, 关于利用分析本身的方法来定义三角函数与研究它们基本性质的可能性的问题就有了原则性的重要性. 而无穷级数就正是可以借以实现所有这些的工具, 我们在这目中要按照三角函数的分析定义来进行三角函数的研究, 作为上面所提到的理论的应用方面的新的例子.

于是, 我们考虑两个函数  $C(x)$  与  $S(x)$ , 它们是形式地用 (对所有实值  $x$  处处收敛的) 级数

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

来定义的. 暂时我们丝毫不把它们与我们所熟知的函数  $\cos x$  与  $\sin x$  混同起来. 我们已经碰到过一次这样定义的函数 [390.7]); 由于级数乘法的帮助, 如以前提到过的可以建立对于所有  $x$  与  $y$  的值都成立的两个基本公式:

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y), \quad (14)$$

$$S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y). \quad (15)$$

我们继续研究函数  $C(x)$  与  $S(x)$  的性质. 把  $x$  换成  $-x$ , 马上看到,  $C(x)$  是偶函数, 而  $S(x)$  是奇函数:

$$C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x).$$

再取  $x = 0$ , 我们得到

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0.$$

现在如果, 保持  $x$  任意, 在 (14) 中代入  $y = -x$ , 那么 —— 只要考虑到已经建立的等式 —— 我们得到连系这两个函数的代数关系式

$$C^2(x) + S^2(x) = 1. \quad (16)$$

倍变量或半变量的公式也是很容易得到的.

从 437 的定理 2° 与 438 的定理 10° 我们可以断言, 这两个函数  $C(x)$  与  $S(x)$  不但连续, 而且有任何阶的导数. 特别是, 把逐项微分 [438, 10°] 应用到定义函数的级数上, 很容易地看到

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \quad (17)$$



我们看到的所有这些性质都是很容易建立的. 要求证明所考虑的函数的周期性则需多费一些力气, 现在我们就来从事于此.

开始我们证明, 在区间  $(0, 2)$  中函数  $C(x)$  存在唯一的根. 事实上, 我们知道  $C(0) = 1, C(2)$  的值可以写成以下的形式 (把对应的级数的前三项分开, 而其余的两项两项的并起来):

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left( \frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) - \dots$$

因为所有括号内都是正的:

$$\frac{2^{2n}}{2n!} - \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n}}{2n!} \left( 1 - \frac{2 \cdot 2}{(2n+1)(2n+2)} \right) > 0,$$

而前三项的和是  $-\frac{1}{3}$ , 所以  $C(2) < -\frac{1}{3}$ , 也就是说  $C(2)$  是负的. 由于函数  $C(x)$  的连续性, 因此得到, 在区间  $(0, 2)$  中的确有这函数的根.

在另一方面, 在同一区间内函数

$$S(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left( 1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots$$

显然保持正号, 而导数  $C'(x) = -S(x)$  保持负号, 因而函数  $C(x)$  当  $x$  从 0 增加到 2 时递减且只有一次等于 0.

现在我们把函数  $C(x)$  的所述的根记作  $\frac{\pi}{2}$ , 这样  $\pi$  在这里完全是从形式上引进的, 暂时不能把它和圆周与直径的比值混同起来.

于是, 就有

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

最后这个等式是根据 (16) 并考虑到函数  $S(x)$  当  $0 < x \leq 2$  时为正而得到的.

先以  $x = y = \frac{\pi}{2}$  代入公式 (13) 与 (14), 然后以  $x = y = \pi$  代入, 我们就得到:

$$C(\pi) = -1, S(\pi) = 0; \quad C(2\pi) = 1, S(2\pi) = 0.$$

如果在同样这些公式里, 保持  $x$  任意, 而取  $y = \pi$  或  $y = 2\pi$ , 那么我们得到

$$C(x + \pi) = -C(x), \quad S(x + \pi) = -S(x) \tag{18}$$

与

$$C(x + 2\pi) = C(x), \quad S(x + 2\pi) = S(x).$$

后面的关系式说明, 函数  $C(x)$  与  $S(x)$  都有周期  $2\pi$ .

不难推演出其他的“化简公式”; 我们把这些留给读者去作.

现在我们企图证明所考虑的函数  $C(x)$  及  $S(x)$  与三角函数  $\cos x$  及  $\sin x$  重合, 而且同样企图证明我们形式上引进的数  $\pi$  与在几何学中占重要位置的数  $\pi$  相等.

为了这个目的, 我们来考察由参数方程

$$x = C(t), \quad y = S(t)$$



所给的曲线, 这里变量  $t$  从 0 变到  $2\pi$ . 由于 (16), 所有它的点满足方程  $x^2 + y^2 = 1$ , 就是在圆心为原点半径为 1 的圆周上(图 61). 我们要证明, 同时圆周上每一点皆可由所给的曲线的参数方程得出, 并且仅只是一次; 自然开始点  $A$  是要除外的, 这点相当值  $t = 0$  与  $t = 2\pi$ .

我们已经看到, 当  $0 < t \leq \pi$  时  $S(t) > 0$ , 显然更不用说在  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$  的时候了. 在公式 (18) 的第二个中, 把  $x$  换成  $-t$ , 我们得到

$$S(\pi - t) = S(t);$$

由此可以看到, 当  $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$  时  $S(t) > 0$ . 在这情形, 导数等于  $-S(t)$  的函数  $C(t)$  在  $t$  从 0 变到  $\pi$  时是单调下降的, 所以  $C(t)$  经过从 1 到  $-1$  中每一个值一次. 因此变量变化的区间  $[0, \pi]$  一一对应于我们圆周的上半部分. 由于 [参看 (18)]

$$C(t + \pi) = -C(t), S(t + \pi) = -S(t),$$

关于变量值的区间  $[\pi, 2\pi]$  与圆周的下半部分可以得到相似的断言.

现在我们按照第 329 目的公式 (4) 来计算弧长  $AM$ , 认为点  $M$  是对应于变量值  $t$  的. 注意到 (17) 与 (16), 我们得到

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2 + [S'(t)]^2} dt = t.$$

这证明了,  $t$  与表成弧度的角度  $\theta = \angle AOM$  重合, 所以

$$C(\theta) = x = \cos \theta, \quad S(\theta) = y = \sin \theta.$$

同时, 按照我们的公式, 整个圆周的长等于  $2\pi$ ; 因之我们引进的数与在几何学中所讨论的数是恒等的.

**444. 没有导数的连续函数的例子** 第一个这种例子是魏尔斯特拉斯建立的; 他的函数是用级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi x)$$

来定义的, 这里  $0 < a < 1$  而  $b$  是奇整数 (并且  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ). 收敛级数  $\sum_1^{\infty} a^n$  为这个级数的优级数, 因之这个级数是一致收敛的 [430, 431 定理 1], 而且它的和是  $x$  的处处都连续的函数. 经过精密的研究, 魏尔斯特拉斯成功地证明了, 对于这个函数没有一点上存在有限导数.

我们提出范德瓦尔登(van der Waerden)所建立的更简单的例子, 这个例子实质上是由与上一个例相同的想法而做出来的: 只是把振动曲线  $y = \cos \omega x$  改换为振动折线.

于是我们用  $u_0(x)$  来记数  $x$  与它的最接近整数之间的差的绝对值. 这个函数在每一个  $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$  形式的区间上是线性的, 这里的  $s$  是整数; 它是连续的并有周期 1. 它的图形就是在图 62a)中表示的折线; 折线的每一节有斜率  $\pm 1$ .

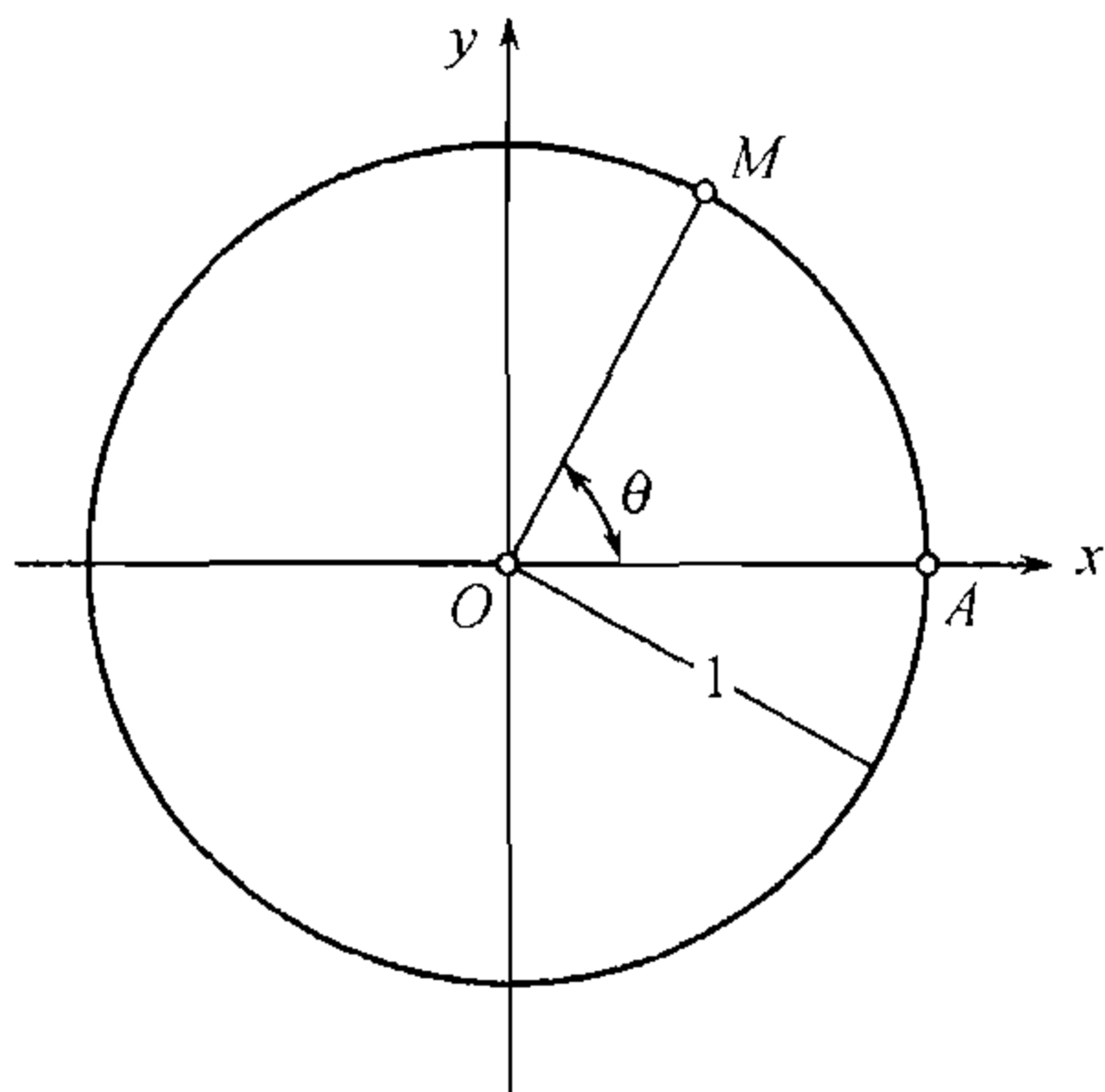


图 61



然后, 对于  $k = 1, 2, \dots$ , 我们取

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

这个函数在  $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$  区间上是线性的; 它也是连续的而且有周期  $\frac{1}{4^k}$ . 它的图形也是折线, 但是具有更细的齿形; 例如在图 62, 6) 上画的是函数  $u_1(x)$  的图形. 在所有情形里, 折线每一节的斜率都等于  $\pm 1$ .

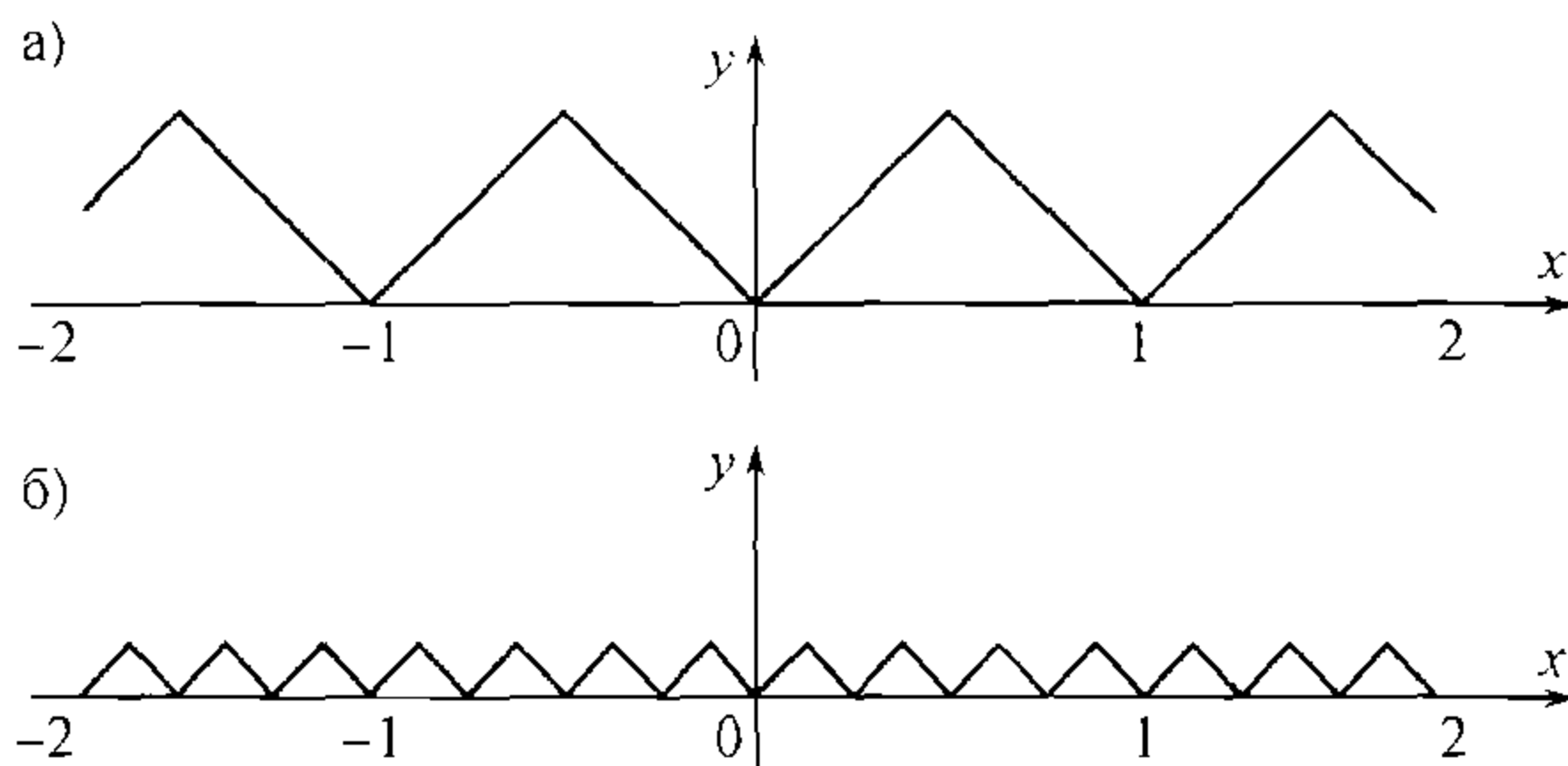


图 62

现在我们对于所有  $x$  的实数值用等式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

来定义函数  $f(x)$ . 因为显然  $0 \leq u_k(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 4^k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 所以收敛级数  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$  是这级数的优级数, 因此 (像在魏尔斯特拉斯函数的情形一样) 这级数一致收敛, 并且函数  $f(x)$  处处连续.

我们取定任意值  $x = x_0$ . 计算  $x_0$ , 精确到相差不到  $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$  (这里  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 我们把它放在这种数之间:

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leq x_0 < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n},$$

这里的  $s_n$  是整数. 显然, 这些闭区间

$$\Delta_n = \left[ \frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n} \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

是一个套一个的. 在每一个这些区间上可以找到一点  $x_n$ , 使得它与  $x_0$  点的距离等于区间长的一半:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}};$$

很清楚,  $n$  增加时, 变量  $x_n \rightarrow x_0$ .

现在我们作改变量的比

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$



但是, 当  $k > n$  时, 数  $\frac{1}{4^{n+1}}$  是函数  $u_k(x)$  的周期  $\frac{1}{4^k}$  的整数倍, 所以  $u_k(x_n) = u_k(x_0)$ , 级数的对应项等于零, 因此就可以去掉了. 如果  $k \leq n$ , 那么函数  $u_k(x)$  在区间  $\Delta_k$  上是线性的, 在  $\Delta_k$  所包含的区间  $\Delta_n$  上也是线性的, 并且

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

这样, 最后我们有

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n (\pm 1);^{62)}$$

换言之, 当  $n$  为奇数时这比值等于偶整数, 当  $n$  为偶数时这比值等于奇整数. 因此可以明白, 当  $n \rightarrow \infty$  时改变量的比不可能趋向有限的极限, 所以我们的函数在  $x = x_0$  处没有有限的导数.

## §4. 关于幂级数的补充知识

**445. 关于幂级数的运算** 在已经知道的基础上, 我们用这一目来概述一下关于幂级数的运算, 作为更进一步深入的出发点.

考虑两个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (2)$$

假定这两级数的收敛半径都不等于零, 我们把它们中小的那一个记作  $r$ . 那么对于  $|x| < r$ , 我们知道 [364, 4°; 389], 这两级数可以逐项相加, 逐项相减与逐项相乘, 并且结果又可写成  $x$  的幂级数:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) x^n. \end{aligned} \quad (3)$$

我们设级数 (2) 与 (1) 恒等; 那么得到, 在收敛区间的范围内, 幂级数可以乘方如下:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0) x^n.$$

如果按照上面已知的规律, 把最后的级数再乘上级数 (1) 并重复若干次, 那么我们可以断言, 在收敛区间范围内, 这幂级数可以乘任意整数  $m$  次方, 并且结果同样可表

<sup>62)</sup> 这个级数中的正负号可能完全任意地交替.



成幂级数的形式:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

系数  $a_n^{(m)}$  是依赖于原来级数的系数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  的, 而且根据 (3), 只要借助于加法与乘法就能得到它们. 这个说明对我们以后是需要的.

现在我们特别来讲幂级数的无穷集合的加法, 这是和我们以后经常有关的. 于是设已知的幂级数的无穷序列为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \quad (m = 0, 1, 2, \dots);$$

我们从它们组成二重级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \right\}. \quad (5)$$

若对于取定的  $x$  值, 把它的项都换成它们的绝对值的级数是收敛的话, 则级数 (5) 也收敛, 并且它的和  $A(x)$  可以径直用归并同次幂项的方法来展开成幂级数:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \text{ 这里 } A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

根据第 393 目的定理 3, 证明就解决了.

我们用例子来阐明这个重要定理的应用.

例 1) 把函数

$$(a) \quad f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2}; \quad (b) \quad f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2}$$

(假设  $|x| < 1$  及  $0 < a < 1$ ) 展开成  $x$  的幂级数.

(a) 我们有

$$\frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{m(2n+1)} x^{2n},$$

将其代入  $f_1(x)$  的表达式并交换求和次序:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{(2n+1)m} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{(2n+1)m}}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{a^{2n+1}} x^{2n}. \end{aligned}$$

因为二重级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m} x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - a^{2m} x^2} < \frac{1}{1 - x^2} e^a$$



收敛, 所以交换求和次序是合理的.

(6) 类似地

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a^{2n+1}} x^{2n}.$$

2) 现在我们从函数  $x \operatorname{ctg} x$  的部分分式展开式 [441,9)] 出发, 把它表成幂级数. 为了简单起见, 我们把  $x$  换成  $\pi x$ , 所以

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2}.$$

如果  $|x| < 1$ , 那么对于任意  $m = 1, 2, \dots$

$$\frac{x^2}{m^2 - x^2} = \frac{\frac{x^2}{m^2}}{1 - \frac{x^2}{m^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{m^2} \right)^n.$$

由于所有的项都是正的, 我们按照定理立即得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \cdot x^{2n}, \quad \text{这里 } s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

这样, 对于  $|x| < 1$  就有

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}.$$

3) 完全相似的, 从函数  $x \cdot \operatorname{cth} x$  的部分分式展开式 [441,10)] 出发, 我们得到表成幂级数的展开式

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

以后 [449] 我们要对于在 2) 与 3) 的展开式的系数给以另外的表达式.

4) 当无穷个量相加的级数退化为普通的有限多项式的时候, 定理在这情形也保持它的价值. 例如, 根据以下讨论, 我们从二项式级数与指数级数出发来推出对数级数.

对于  $|x| < 1$  与任意  $\alpha$  我们有 [407 (22)]:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

取定  $x$ , 我们开始把这级数的项考虑作关于  $\alpha$  的多项式. 因为利用达朗贝尔判别法很容易说明级数

$$1 + |\alpha| \cdot |x| + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \dots$$

是收敛的, 所以按照定理, 在前面的那个级数中, 可以归并同次幂项:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \dots$$



另一方面, 显然

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)} = 1 + \alpha \ln(1+x) + \cdots$$

因为两个展开式必须恒等, 所以, 对于  $\alpha$  的系数令其相等, 我们便得到

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

我们要注意到, 这证明了的定理可以直接推广到多重级数, 例如推广到级数

$$\sum_{k=0, m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nkm} x^n \right\}.$$

事实上, 为了把它变为已经研究过的情形, 只要把二重级数换成简单级数就行了.

**446. 把级数代入级数** 我们考虑在区间  $(-R, R)$  可展开成幂级数 (1) 的函数  $y = f(x)$ . 此外, 设对于在区间  $(-\rho, \rho)$  中的  $y$  值, 给定函数  $\varphi(y)$  可以展开成幂级数

$$\varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \cdots + h_m y^m + \cdots \quad (6)$$

如果  $|a_0| = |f(0)| < \rho$ , 那么, 对于足够小的  $x$ ,  $|f(x)| < \rho$ , 因此有复合函数  $\varphi(f(x))$ .

在唯一的条件  $|a_0| < \rho$  之下, 如果把级数 (1) 代入 (6) 中的  $y$ , 并且按照 (4) 做出所有乘幂以后再归并同次幂项, 则这函数  $\varphi(f(x))$  在  $x=0$  点的附近就可以展开成  $x$  的幂级数.

**证明** 设  $|x| < R$ , 我们考察级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |x|^n + \cdots$$

根据它的和的连续性 [437, 2°], 由于  $|a_0| < \rho$ , 对于足够小的  $x$  满足不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \rho, \quad (7)$$

所以级数

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m$$

是收敛的.

与 (4) 相似, 假定

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \cdot |x|^n,$$



前面的级数可以写成

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \cdot |x|^n \right)$$

这样的形式. 因为  $a_n^{(m)}$  利用加法与乘法从  $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|$  的得来与  $a_n^{(m)}$  的从  $a_0, a_1, \dots, a_n$  的得来完全相同 [445], 那么显然  $|a_n^{(m)}| \leq \alpha_n^{(m)}$ . 所以对于上面提到的  $x$  的值, 级数

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)}| \cdot |x|^n \right)$$

收敛. 因此把前目中最后的断言应用到级数

$$h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \cdot x^n \right),$$

就证明了定理.

我们的推论所保证函数  $\varphi(f(x))$  可展开成  $x$  的幂级数的  $x$  的变化域, 其特征是除了当然的不等式  $|x| < R$  以外, 还有不等式 (7). 当  $R = +\infty$  时就不需要引进第一个限制, 当  $\rho = +\infty$  时就可以去掉第二个限制.

在定理的大多数应用中. 知道对于  $|x|$  小的值有展开式就足够了. 如果是有兴趣于所得级数的整个运用的范围. 那么需要分别的研究它的收敛区间.

作为例子, 我们在简单情形来实行这一点. 在区间  $(-1, 1) [\rho = 1]$  考虑函数

$$\varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} y^m,$$

用  $f(x) = 2x - x^2 [R = +\infty]$  代替  $y$ . 复合函数

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{1 - (2x - x^2)} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

仅当  $-1 < 2x - x^2 < 1$ , 即  $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$  但  $x \neq 1$ , 时有意义其对  $x$  的幂次的展开我们已熟知<sup>①</sup>:

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

这个级数对  $-1 < x < 1$  收敛. 总起来, 等式

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2x - x^2)^m = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

<sup>①</sup>参看 390,1), 逐项微分 [438,8°] 几何级数

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

可以得到此式.



在条件

$$1 - \sqrt{2} < x < 1$$

下成立. 把这一点与上述论断所说的加以比较是有趣的. 按照论断应该要求, 必须有 [参看 (7)]

$$2|x| + |x|^2 < 1 \quad \text{或} \quad 1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1.$$

正如我们所看到的, 所得等式事实上可应用于更宽的区域.

这里需要注意到定理的更进一步推广的可能性. 例如, 设给定对于  $|y| < \rho$  与  $|z| < \rho$  收敛的二重级数

$$\varphi(y, z) = \sum_{k, m=0}^{\infty} h_{km} y^k z^m,$$

与对于  $|x| < R$  收敛的两个级数

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad z = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n;$$

于是, 在条件  $|a_0| < \rho$  与  $|b_0| < \rho$  之下, 若把对应级数代入  $y$  与  $z$  的位置, 并完成乘幂与乘法以后归并同类项, 则就可以在  $x = 0$  点附近展开复合函数  $\varphi(f(x), g(x))$  成  $x$  的幂级数.

**447. 例** 1) 求函数  $\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$  按照  $x$  的幂次展开式的前几项.

对于  $|x| < 1$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots} \\ &= 1 + \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots \right)^2 + \frac{1}{6} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \right)^4 + \frac{1}{120} \left( -\frac{x}{2} + \dots \right)^5 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \frac{959}{2304}x^5 + \dots \end{aligned}$$

[类似形式的问题近似于在 125 中研究过的那些.]

2) 我们提出, 从对数级数与指数级数出发, 求二项式级数的问题.

对于  $|x| < 1$  与任意  $\alpha$ , 显然有

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= e^{\alpha \ln(1+x)} = e^{\alpha \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)} \\ &= 1 + \alpha \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \frac{\alpha^2}{2!} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \end{aligned}$$



前几个系数的形式是立即可以确定的. 包括  $x^n$  的通项的系数可以从下面的推理得到. 直接知道它是关于  $\alpha$  的  $n$  次整多项式:  $Q_n(\alpha)$ . 因为当  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$  时在展开式中没有  $x^n$  项, 所以这多项式在这些点上等于 0, 因而我们有

$$Q_n(\alpha) = c \cdot \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)$$

的形式. 当  $\alpha = n$  时  $x^n$  的系数是 1,  $Q_n(n) = 1$ ; 因此  $c = \frac{1}{n!}$ , 最后,

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

3) 设  $f(x)$  为可展开成  $x$  的幂级数而没有常数项的一个函数:

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

那么, 按照一般的定理, 对于同样  $x$  的值, 函数  $g(x) = e^{f(x)}$  可以展开成级数, 并且常数项显然是等于 1. 要求找这展开式.

我们要指出, 对于这个问题可以利用待定系数法.

设

$$g(x) = e^{f(x)} = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

微分这个等式, 我们得到

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots + nb_nx^{n-1} + \cdots$$

把左边部分的因式代成它们的展开式,

$$(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots$$

这个条件引进了下面的方程组:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, 2a_2 + a_1b_1 = 2b_2, 3a_3 + 2a_2b_1 + a_1b_2 = 3b_3, \cdots, \\ na_n + (n-1)a_{n-1}b_1 + \cdots + 2a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} &= nb_n, \cdots, \end{aligned} \quad (8)$$

从这方程组可以依次定出未知系数  $b$ .

例如我们用说过的方法来解决下面的 (魏尔斯特拉斯) 问题.

证明函数

$$g(x) = (1-x)e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{m-1}}$$

的展开式是从  $1 - \frac{x^m}{m} + \cdots$  项开始的, 而且所有它的系数的绝对值都小于 1.

我们把  $g(x)$  写成

$$g(x) = e^{\ln(1-x) + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{m-1}} = e^{-\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \cdots}$$

的形式; 那么断言的第一部分显然是成立的. 用归纳法来证明第二部分. 我们假定所有附标小于  $n$  的系数  $b_k$  的绝对值都小于 1. 因为在所给的情形

$$\text{当 } k < m \text{ 时 } a_k = 0 \text{ 而当 } k \geq m \text{ 时 } a_k = -\frac{1}{k} \quad (ka_k = -1).$$



所以从 (8) 中的第  $n$  个等式发现  $|b_n| < 1$ .

[建议读者把这里说明的方法用到例 1) 与例 2) 中去.]

4) 方程 (8) 在其他问题中也是有用的. 设给定函数

$$g(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

的展开式, 要找函数

$$f(x) = \ln g(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

的展开式. 很容易了解, 系数  $a$  与  $b$  是由同样的关系 (8) 联系着的, 但是这一回需要去决定系数  $a$ .

5) 证明无穷乘积

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^m x) = (1 + qx)(1 + q^2x)(1 + q^3x) \cdots (|q| < 1)$$

对于足够小的  $x$  可以展开成  $x$  的幂级数, 并确定这展开式的系数.

当  $|x| < 1$  时乘积是收敛的并且有正的值; 取对数我们得到

$$\ln F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln(1 + q^m x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( q^m x - \frac{1}{2} q^{2m} x^2 + \cdots \right).$$

特别当把  $x$  换成  $|x|$  与把  $q$  换成  $|q|$  时, 这级数收敛. 因此从 [445] 推出,  $\ln F(x)$  在零的附近可以展开成  $x$  的幂级数, 而同样地 [按照第 446 目的定理] 也可以展开表达式

$$F(x) = e^{\ln F(x)}.$$

所以, 对于足够小的  $x$ , 我们有

$$F(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

这里的系数  $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$  还需要决定. 如果从显然的等式

$$F(x) = (1 + qx) \cdot F(qx)$$

出发, 去实行这个计算比一切的方法都要简单, 利用展开式, 这显然可以写成

$$1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots = (1 + qx)(1 + b_1qx + b_2q^2x^2 + \cdots + b_nq^n x^n + \cdots)$$

的形式. 按照关于幂级数恒等的定理, 因此

$$b_1q + q = b_1, b_2q^2 + b_1q^2 = b_2, \cdots, b_nq^n + b_{n-1}q^n = b_n, \cdots$$

或者

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{b_1q^2}{1-q^2}, \quad \cdots, \quad b_n = \frac{b_{n-1}q^n}{1-q^n}, \quad \cdots$$



最后

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, b_2 = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}, \dots,$$

$$b_n = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}, \dots$$

6) 我们取函数  $\frac{\sin x}{x}$  的无穷乘积的展开式 [408] 与无穷级数的展开式 [404,(12)], 令它们的对数相等 [401,4°]:

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots \right)$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{n^2 \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{x^4}{n^4 \pi^4} + \cdots \right) = \left( \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots \right)^2 + \cdots$$

把左右两边依照  $x$  的幂次展开 [445,446] 且令两边的系数相等, 我们得到等式

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2\pi^4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{180}, \dots$$

因此

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \dots$$

此外, 我们在以后 [449] 要从别的考虑得到这些公式.

7) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-R, R)$  中能展开成幂级数 (1) 而  $\bar{x}$  是在这区间中的任意点, 则在这点的附近函数可以依照  $x - \bar{x}$  的幂次展开成级数.

实际上, 我们在 (1) 中设  $x = \bar{x} + y$ ; 按照一般的定理 (只是把  $x$  与  $y$  互换), 当  $|\bar{x}| + |y| < R$  或  $|y| < R - |\bar{x}|$  时, 可以推出这函数依照  $y$  的幂次的展开式, 就是依照  $\bar{x} - x$  的幂次的展开式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - \bar{x})^k.$$

在级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\bar{x} + y)^n$  中, 算出所有的乘幂并归并同类项, 很容易决定这展开式的系数:

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = f(\bar{x}),$$

一般地,

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} a_n \bar{x}^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n \bar{x}^{n-k} = \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}.$$



由于 438,9°, 这结果并不显得突然.

只是为了简单起见, 我们才把初始的级数取成依照  $x$  幂次的展开式, 假设函数  $f(x)$  是用依照差  $x - x_0$  的展开式给出的话, 问题还是没有什么改变.

我们要注意, 在  $x = x_0$  点的附近可以依照  $x - x_0$  的幂次展开成级数<sup>①</sup> 的函数  $f(x)$  称为在这点上是解析的. 这样, 我们证明了, 在某一点上解析的函数在这点的某一个邻域内的所有的点上也是解析的.

这个断言可以推广到多元函数的情形.

8) 作为最后的例子, 我们考察, 对于任意取定的  $x$ , 函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = [1 + (\alpha^2 - 2x\alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

依照  $\alpha$  的幂次的展开式. 只要  $|\alpha|^2 + 2|x| \cdot |\alpha| < 1$ , 我们的定理可以保证这展开式的可能性. 很容易看出,  $\alpha^n (n \geq 1)$  的系数是某种  $n$  次的多项式  $P_n = P_n(x)$ , 所以

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = 1 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots \quad (9)$$

为了确定这些系数, 我们对  $\alpha$  求等式 (9) 的导数:

$$\frac{x - \alpha}{(\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2})^3} = P_1 + 2P_2\alpha + \cdots + nP_n\alpha^{n-1} + \cdots$$

把这结果与 (9) 比较, 很容易得到

$$\begin{aligned} & (1 - 2x\alpha + \alpha^2)(P_1 + 2P_2\alpha + \cdots + nP_n\alpha^{n-1} + \cdots) \\ &= (x - \alpha)(1 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots). \end{aligned}$$

现在我们把两边  $\alpha$  的同幂次的系数相等起来. 首先, 我们找到

$$P_1 = x \text{ 与 } 2P_2 - 2xP_1 = -1 + xP_1, \text{ 因此 } P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2},$$

然后, 一般地

$$(n+1)P_{n+1} - 2nx \cdot P_n + (n-1)P_{n-1} = xP_n - P_{n-1}$$

或是

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

知道了最初的两个多项式, 就可以根据这个递推简化公式循序计算其余的.

一望而知, 多项式  $P_1$  与  $P_2$  和最初两个勒让德多项式相同, 而上述的公式, 又和第 308 目中所据以计算勒让德多项式的类似公式 (11) 一样. 由此我们得出结论: 展式 (9) 的系数恰为勒让德多项式.

因为这个缘故, 二变量  $\alpha$  与  $x$  的函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$$

称作勒让德多项式的“母函数”. 展式 (9) 可以很有成效地利用来研究这些多项式的性质.

<sup>①</sup>这级数必须是它的泰勒级数 [438,9°].



**448. 幂级数的除法** 幂级数的除法问题, 乃是关于级数代入级数的定理的一个重要应用实例.

设级数 (1) 的自由项  $a_0$  非 0; 将这个级数表示成

$$a_0 \left( 1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \frac{a_3}{a_0}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \cdots \right) = a_0(1 + y),$$

在其中设

$$y = \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \cdots$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots} &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + y} \\ &= \frac{1}{a_0} (1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^m y^m + \cdots) \end{aligned}$$

最后的级数就相当于级数 (6), 而  $\rho$  在此处为 1. 按照一般定理, 此表达式至少对于足够小的  $x$  值, 例如对于满足不等式

$$\left| \frac{a_1}{a_0} \right| \cdot |x| + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| \cdot |x|^2 + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \cdot |x|^n + \cdots < 1$$

的那些  $x$  值, 能够按  $x$  的幂次而展开:

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots} = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

我们来研究第二个幂级数 (设其收敛半径不为 0)

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

那么, 对于足够小的  $x$ , 商式

$$\frac{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots}{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots}$$

便可以用乘积

$$(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots)(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots)$$

来代替, 因而就又表成了某一幂级数

$$d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + \cdots$$

的形式.



按照待定系数法来确定这个级数的系数最为简单; 由关系式

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)(d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + \cdots) \\ = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

出发, 其中系数  $a$  及  $b$  均假定为已知的. 先将左侧级数按照一般法则 [445] 作乘法, 然后我们令左右  $x$  同幂项的系数相等. 用这个办法便得到了无穷方程组

$$a_0d_0 = b_0, a_0d_1 + a_1d_0 = b_1, a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0 = b_2, \cdots \\ a_0d_n + a_1d_{n-1} + \cdots + a_{n-1}d_1 + a_nd_0 = b_n, \cdots \quad (10)$$

因为假定了系数  $a_0$  非 0, 故由第一个方程中立即得到  $d = \frac{b_0}{a_0}$ , 然后第二个给出  $d_1 = \frac{b_1 - a_1d_0}{a_0} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_0^2}$ , 如此类推. 在一般的情形下, 如果已经找出了  $n$  个系数  $d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}$ , 那么第  $n+1$  个方程仅含有一个未知数  $d_n$ , 就可以确定出它的值来了. 这样一来, 方程组 (10) 就顺序地并且完全单值地, 确定了商式所有的系数.

例 1) 求商式

$$\frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots}$$

的前几项.

方程组 (10) 在这里取以下形状:

$$d_0 = 1, \quad d_1 + \frac{1}{2}d_0 = 0, \quad d_2 + \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{3}d_0 = 0, \\ d_3 + \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{4}d_0 = 0,$$

以及诸如此类; 由此  $d_0 = 1, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{12}, d_3 = -\frac{1}{24}, \cdots$ . 因之

$$\frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \cdots$$

2) 将  $\operatorname{tg} x$  看作是  $\sin x$  与  $\cos x$  的商 ( $\sin x$  与  $\cos x$  的展式是已知的 [第 404 目 (12) 与 (13)]), 试求  $\operatorname{tg} x$  在原点的邻域内的展式.

根据一般性定理, 这样的展式存在, 是预先晓得的. 因为  $\operatorname{tg} x$  是奇函数, 所以这个展式仅包含有  $x$  的奇次幂. 于所求展式中将  $x^{2n-1}$  的系数取成  $\frac{T_n}{(2n-1)!}$  形状是有便利的. 这样一来, 我们就有

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad (11)$$



以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

显而易见,  $T_1 = 1$ . 为了要确定其余的数  $T_n$ , 令左右  $x^{2n-1}$  的系数相等, 我们就得到形如

$$\frac{T_n}{(2n-1)!} - \frac{T_{n-1}}{(2n-3)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{n-2}}{(2n-5)!} \cdot \frac{1}{4!} - \cdots = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

的方程序列, 或者乘以  $(2n-1)!$ :

$$T_n - C_{2n-1}^2 T_{n-1} + C_{2n-1}^4 T_{n-2} - \cdots = (-1)^{n-1}.$$

因为所有的数  $C_{2n-1}^k$  皆是整数, 所以顺序地, 我们可以肯定所有的  $T_n$  也都是整数. 以下是其中前几个的值:

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 16, T_4 = 272, T_5 = 7936, \cdots$$

因而

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

在下一目中, 将要指出这个展式的系数的另一算法, 并且准确地定出它的可用范围.

**449. 伯努利数及含有伯努利数的展式** 我们再来研究一个具有重要应用的除法的例:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots}.$$

依据第 448 目的一般性结论, 这个商式至少对于足够小的  $x$  值, 可表成幂级数

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n \quad (12)$$

的形式, 其系数我们取成了  $\frac{\beta_n}{n!}$  的形状, 这 (我们可以看到) 会使顺次确定这些系数时较为方便.

根据关系式

$$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots\right) \times \left(1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\beta_n}{n!}x^n + \cdots\right) = 1.$$

令左侧各个方幂  $x^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$  的系数等于零. 我们便得出方程组, 形状有如

$$\frac{1}{n!1!}\beta_n + \frac{1}{(n-1)!2!}\beta_{n-1} + \cdots + \frac{1}{(n-k+1)!k!}\beta_{n-k+1} + \cdots + \frac{1}{1!n!}\beta_1 + \frac{1}{(n+1)!} = 0,$$

或者乘以  $(n+1)!$ :

$$C_{n+1}^1\beta_n + C_{n+1}^2\beta_{n-1} + \cdots + C_{n+1}^k\beta_{n+1-k} + \cdots + C_{n+1}^n\beta_1 + 1 = 0.$$

利用其与牛顿二项式相似之点, 这些方程可以在符号上写成这样:

$$(\beta + 1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots);$$



依照普通法则将二项式依升幂式展开并消去最高次项之后, 幂方  $\beta^k$  就应换成这里的系数  $\beta_k$ . 这样, 为要确定数  $\beta_n (n = 1, 2, \dots)$ , 我们便有无穷方程组

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + 1 &= 0, 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 = 0, 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 = 0, \\ 5\beta_4 + 10\beta_3 + 10\beta_2 + 5\beta_1 + 1 &= 0, \dots \end{aligned}$$

由此顺序得到

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{6}, \beta_3 = 0, \beta_4 = -\frac{1}{30}, \beta_5 = 0, \\ \beta_6 &= \frac{1}{42}, \beta_7 = 0, \beta_8 = -\frac{1}{30}, \beta_9 = 0, \beta_{10} = \frac{5}{66}, \\ \beta_{11} &= 0, \beta_{12} = -\frac{691}{2730}, \beta_{13} = 0, \beta_{14} = \frac{7}{6}, \beta_{15} = 0, \\ \beta_{16} &= -\frac{3617}{510}, \beta_{17} = 0, \beta_{18} = \frac{43\,867}{798}, \beta_{19} = 0, \beta_{20} = -\frac{174\,611}{330}, \dots \end{aligned}$$

因为数  $\beta$  是从整系数线性方程组中确定出来的, 所以它们全都是有理数. 不难确定, 一般情形下, 带奇数附标的数  $\beta$  (除掉第一个) 皆为零. 事实上将等式 (12) 中  $\frac{x}{2}$  项搬到左边, 我们在等式左边所得到的, 显而易见, 是一个偶函数

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

在这种情形下, 它的展式

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$

不能含有  $x$  的奇次幂, 此即所欲证.

对于带有偶数附标的数  $\beta$ , 我们引用比较惯常的符号, 命

$$\beta_{2n} = (-1)^{n-1} B_n^{\text{①}},$$

于是

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \\ B_6 &= \frac{691}{2730}, B_7 = \frac{7}{6}, B_8 = \frac{3617}{510}, B_9 = \frac{43\,867}{798}, B_{10} = \frac{174\,611}{330}, \dots \end{aligned}$$

根据雅可比—伯努利的名字而称为伯努利数的, 恰恰就是这些数  $B_n$ , 伯努利在研究顺序的自然数方幂 (其指数也是自然数) 的和时, 首先得到了它们. 伯努利数在许多分析问题中占重要的位置.

那么为了便利起见, 将  $x$  换成  $2x$ , 最后我们就有展式

$$\begin{aligned} x \operatorname{cth} x &= 1 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}, \end{aligned} \quad (13)$$

①不久我们就会亲眼看到, 所有的  $B_n$  都是正的.



它对于足够小的  $x$  值均成立.

在第 455 目, 3) 中我们已经有了展式

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} \cdot x^{2n},$$

其中  $s_{2n}$  表示级数  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$  的和. 在等式 (13) 中将  $x$  也换作  $\pi x$ , 将它写成

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2n!} \cdot x^{2n}.$$

两个展式当然应该恒等; 因此

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n},$$

于是就发现所有的数  $B_n$  原来都是正的. 因为当  $n \rightarrow \infty$  时, 显而易见,  $s_{2n} \rightarrow 1$ , 所以从所得到的公式中可以明白看出, 伯努利数当其附标数码增加时, 上升而无止境<sup>①</sup>.

附带我们注意一下对于和数  $s_{2n}$  得到的一些有用的表达式:

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \cdot B_n;$$

其中 [参看第 447 目, 6)]

$$s_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

现在我们回忆, 我们也已经有过了  $\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x$  的展式 [第 445 目, 2)], 其中系数也依赖于和数  $s_{2n}$ :

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}. \quad (14)$$

将此处的  $\pi x$  换成  $x$ , 并用所求得的  $s_{2n}$  通过伯努利数的表达式来替代  $s_{2n}$ , 使得

$$x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}. \quad (15)$$

因为我们知道展式 (14) 当  $|x| < 1$  时成立, 故展式 (15) 当  $|x| < \pi$  时成立. 但是在  $x \rightarrow \pm\pi$  时, 等式 (15) 左侧无限增大, 因而右侧级数在  $x = \pm\pi$  时不可能收敛, 在  $|x| > \pi$  时更不可能收敛: 其收敛半径恰恰正等于  $\pi$ <sup>②</sup>.

<sup>①</sup>虽然如此, 我们已经看到了, 并非是单调的, 而是遵循着十分错综复杂的规律.

<sup>②</sup>其实, 所有与确定幂级数收敛半径有关的问题, 都容易借助于柯西-阿达马定理 [380] 解决. 例如, 对级数 (15) 有

$$\begin{aligned} \rho_{2n-1} &= 0, \rho_{2n} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2 \cdot (2n)!}{(2n)^{2n}} \cdot s_{2n}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{2s_{2n}} \\ \rho &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \rho_m = \frac{1}{\pi}, R = \frac{1}{\rho} = \pi. \end{aligned}$$



顺便提一下, 从这里就显示出级数 (13) 的收敛半径也是同样的, 同时作为出发点的级数 (12) 便有收敛半径  $2\pi$ .

利用恒等式

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x,$$

从 (15) 中很容易再度得出  $\operatorname{tg} x$  的展式:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n!} B_n \cdot x^{2n-1}. \quad (16)$$

它与以前所得到的恒等 [参看 (11)], 然而宁愿把它写成这个形状, 因为伯努利数是被很好地研究过的, 并且对于它们还有很多丰富完备的表格. 代表  $\operatorname{tg} x$  的级数之收敛半径为  $\frac{\pi}{2}$ ; 现在, 从其推得的方法本身, 即可看出这一点.

还有许多其他有用的展式也与伯努利数有关. 例如, 因为

$$\left(\ln \frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x \operatorname{ctg} x - 1) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n-1},$$

所以, 逐项积分, 便得 (对于  $|x| < \pi$ )

$$\ln \frac{\sin x}{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

类似的, 由展式 (16) 逐项积分就得到 (对于  $|x| < \frac{\pi}{2}$ )

$$\ln \cos x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

从这些展式中不难得出  $\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}$  的展式. 这些级数在作三角对数表时是有用处的.

最后, 回到我们在 425 目 6) 中所研究过的发散级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k.$$

在那儿曾建立了级数的  $k$  次切萨罗法的可求和性, 但“广义和”本身 (用  $A^{(k)}$  表示) 我们并未求出, 现在来完成这一步. 其实, 我们按泊松-阿贝尔法对级数求和, —— 如我们所知 [424, 2] —— 应导致同一个结果.

当  $t < 0$  时有  $0 < e^{-t} < 1$ , 将级数求和, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t} &= \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} = \frac{1}{e^t + 1} \\ &= \frac{1}{e^t - 1} - \frac{2}{e^{2t} - 1} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{e^{2t} - 1}. \end{aligned}$$

应用展开式 (12), 对充分小的  $t$  有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!} t^{n-1}.$$



把两个级数逐项微分  $k$  次; 对右边的幂级数, 我们根据定理 8°[438], 对于左边级数若引入变量  $x = e^{-t}$ , 这个级数也是幂级数. 对它微分也是根据这个定理. 结果求得


$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k e^{-(n+1)t} = (-1)^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 1)\beta_n}{n!} (n-1)(n-2)\cdots(n-k)t^{n-k-1}.$$

现在令  $t$  趋于 0, 因而  $x$  趋于 1. 左边取极限得到的即是  $A^{(k)}$ , 而右边是常数项

$$(-1)^{k+1} \frac{(2^{2(k+1)} - 1)\beta_{k+1}}{k+1}.$$

我们记得, 数  $\beta$  对大于 1 的奇数下标均为零, 而具有偶数下标的  $\beta$ , 导致伯努利数, 最后得到公式:

$$A^{(2m)} = 0, \quad A^{(2m-1)} = (-1)^{m-1} \frac{2^{4m} - 1}{2m} B_m \quad (m \geq 1).$$

450.  利用级数解方程 我们再回到关于从尚未解出的方程

$$F(x, y) = 0 \quad (17)$$

中, 将变量  $y$  确定作  $x$  的函数的问题上来 [参看第 206 目及第 442 目!], 不过用另外一种提法:

我们假定, 函数  $F(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的邻近区域内能够按照  $x - x_0$  与  $y - y_0$  的幂次而展成级数, 并且其中常数项等于 0, 而  $y - y_0$  项的系数不为 0<sup>①</sup>. 于是被方程 (17) 确定在  $(x_0, y_0)$  邻近区域内的函数  $y = y(x)$  就也能够按  $x = x_0$  附近按  $x - x_0$  的幂次展成级数.

换句话说, 假若方程 (17) 左侧的函数  $F$  在点  $(x_0, y_0)$  是解析的, 那么, 由方程所确定的函数  $y = y(x)$  在点  $x_0$  就也是解析的. 因此, 这里谈到的就已经不止是未知函数的存在或是它的值的计算, 而且还涉及它的分析表示法.

**证明** 可以取  $x_0 = y_0 = 0$ , 而无伤于一般性; 究其实, 这就归结到我们是把差数  $x - x_0$  取作了新变量, 可是保持了老符号. 如果分出  $y$  的一次项, 那么把它搬到另一侧并且用它的系数来除, 就可以把这个方程改写成这样:

$$y = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \cdots \quad (18)$$

我们对  $x$  的函数  $y$  寻求下列形状的级数:

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (19)$$

<sup>①</sup>这恰恰就相当于通常的条件

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$



首先,假使像这样的展式在原点的邻域内成立,那么它的系数就由关系式 (18) 而完全单值地确定.

实际上,在其中用展式 (19) 来代替  $y$  (在上述的假定之下), 我们就得到

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots &= c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &+ c_{02} \cdot (a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2 \cdot (a_1x + \cdots) \\ &+ c_{12}x \cdot (a_1x + \cdots)^2 + c_{03}(a_1x + \cdots)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (18a)$$

根据第 446 目定理, 对于足够小的  $x$ , 此处右侧可以做出所有的乘方并归并同类项. 如果这以后再利用幂级数恒等定理, 即令左右两侧  $x$  的同幂次项系数相等, 则我们得到关于未知系数  $a_1, a_2, a_3, \cdots, c_n, \cdots$  的 (无穷的!) 方程组

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{10}, a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ a_3 &= c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \cdots \end{aligned} \quad (20)$$

因为在 (18) 中右侧所有含  $y$  的项不低于二次 (就是说或是含有  $y$  的高次方, 或是  $y$  为一次, 但乘有  $x$  的若干次方), 故在方程组 (20) 的第  $n$  个中, 系数  $a_n$  就被带有较小附标的一些系数  $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$  (及已知的诸系数  $c$ ) 所表出了. 由此即保证了能够循序一个一个地确定系数  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{10}, a_2 = c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ a_3 &= (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) \\ &+ c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \cdots \end{aligned} \quad (21)$$

我们顺便来作这样一条说明, 这对于下文颇为重要: 因为在破除 (18a) 中的括弧时, 对于字母  $a$  及  $c$  除掉加法与乘法之外, 无需进行其他演算, 所以在等式 (20) 的右侧我们将有关于这些字母的整多项式, 其系数显见为正数 (甚至还是自然数). 于是此时公式 (21) 的右侧, 就也是对于字母  $c$  的, 具正系数的整多项式.

现在我们作出: 具有系数  $a$  (就是由 (21) 诸式算出的) 的级数 (19). 关于级数 (19), 可以指出, 它 “形式地” 满足关系式 (18a). 要是对于足够小的  $x$ , 这个级数的收敛性被证明了, 那么就已经无需再去证明它所代表的函数适合条件 (18), 因为此时级数系数所满足的等式 (20) 与 (18a) 完全等价. 因之, 现在全部问题就归结到: 只需证明在原点的某一邻域内, 级数 (19) (其系数是由公式 (21) 确定的) 收敛.

与 (18) 同时, 我们来研究类似的关系式

$$y = \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 + \gamma_{11}xy + \gamma_{02}y^2 + \gamma_{30}x^3 + \gamma_{21}x^2y + \gamma_{12}xy^2 + \gamma_{03}y^3 + \cdots \quad (18^*)$$

其中所有的系数  $\gamma_{ik}$  都是正的, 并且除此而外还满足不等式

$$|c_{ik}| \leq \gamma_{ik}. \quad (22)$$



对于 (18\*), 我们 —— 暂时形式地 —— 建立一个与 (19) 类似的级数

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots \quad (19^*)$$

这里, 它的系数和 (21) 相似, 我们用下列诸式

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_{10}, \alpha_2 = \gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2, \\ \alpha_3 &= (\gamma_{11} + 2\gamma_{02}\gamma_{10})(\gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2) \\ &\quad + \gamma_{30} + \gamma_{21}\gamma_{10} + \gamma_{12}\gamma_{10}^2 + \gamma_{03}\gamma_{10}^3, \cdots \end{aligned} \quad (21^*)$$

来确定. 由于以上所指明的, 这些式子里的各组成项就保证了数  $\alpha_n$  都是正的. 不仅如此, 与 (21) 相比较, 并且考虑到 (22), 我们便看出还有

$$|a_n| \leq \alpha_n \quad (\text{对于所有的 } n). \quad (23)$$

假如能够选得出这样的正系数  $\gamma_{ik}$ , 使得不仅条件 (22) 成立, 而且相应建立起来的级数 (19\*) 还具有非零的收敛半径, 那么由于 (23), 级数 (19) 就也有非零的收敛半径 —— 定理即得证明. 现在我们就专门从事于数  $\gamma_{ik}$  的选择.

存在有这样的一对正数  $r$  与  $\rho$ , 使得二重级数

$$|c_{10}| \cdot r + |c_{20}| \cdot r^2 + |c_{11}| \cdot r\rho + |c_{02}|\rho^2 + \cdots$$

收敛; 既然使得这个级数收敛, 故其一般项  $c_{ik}r^i\rho^k$  趋近于 0, 因而是有界的:

$$|c_{ik}|r^i\rho^k \leq M, \text{ 由此 } |c_{ik}| \leq \frac{M}{r^i\rho^k}.$$

令  $\gamma_{ik} = \frac{M}{r^i\rho^k}$ , 并且按照前所指出的, 我们来考察关系式

$$y = \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r\rho}xy + \frac{M}{\rho^2}y^2 + \cdots = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} - M - \frac{M}{\rho}y$$

或者最后

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\rho + M}y + \frac{M\rho^2}{\rho + M} \cdot \frac{x}{r - x} = 0.$$

至此就可以将满足方程的函数  $y = y(x)$  实际求出, 即在  $x = 0$  时  $y$  成为 0 的那一支<sup>①</sup>. 解二次方程, 我们便得到 (假定  $|x| < r$ ):

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\rho + M)}{\rho^2} \cdot \frac{x}{r - x}} \right]. \quad \textcircled{2}$$

<sup>①</sup>由以上二次方程所确定的函数  $y = y(x)$  是双值函数, 它所代表的曲线有两支, 现在我们取其当  $x = 0$  时  $y = 0$  的那一支. —— 译者注.

<sup>②</sup>根式前取负号就是为了要在  $x = 0$  时有  $y = 0$ .



如果为了写起来简单, 引入符号

$$r_1 = r \left( \frac{\rho}{\rho + M} \right)^2, \quad (24)$$

则  $y$  的表达式可以改写成

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

的形式, 由此即可明白看出, 倘使利用二项级数, 则对于  $|x| < r_1 < r$ ,  $y$  可依  $x$  的幂次展开. 因为这个展式应该和 (19\*) 恒等, 故级数 (19\*) 收敛性的证明借此乃告完成. 因而级数 (19) 的收敛性 (至少对于  $|x| < r_1$ ) 也就得以证明.

注意, 定理只是确定了  $y$  能够在  $x = 0$  附近按照  $x$  的幂次 (或者在一般情形下, 在  $x = x_0$  附近按照  $x - x_0$  的幂次) 而展开. 要断定这个展式的确切收敛区间则须个别研究.

在一般的情形下, 即由方程组来确定一个函数组的时候, 亦可应用类似的方法加以论述.

上文中所采用的巧妙研究方法, 是属于柯西的. 其要点就在于: 将给定的 (单变数或多变数的) 幂级数用一个比较便于研究的“优”级数 (其系数都是正的, 并相应地大于给定的级数的系数的绝对值) 来代替. 此法之所以获名为优级数法即系于此. 在微分方程的理论中时常会用到这个方法.

**451. 幂级数之反演** 现在我们将幂级数的反演问题, 作为前目中所解决了的问题的一个特殊情形来研究. 设函数  $y = f(x)$  在点  $x = x_0$  的某邻域内, 表成了按照  $x - x_0$  的幂次而排列的级数. 用  $y_0$  来表示自由项 (它表达当  $x = x_0$  时  $y$  的值), 我们便把这个展式写成了以下形状:

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

当  $a_1 \neq 0$  时, 在  $y = y_0$  的邻域内,  $x$  由上式确定成  $y$  的函数, 并且  $x$  反转过来可展为按照  $y - y_0$  幂次的级数. 这样一来, 倘若  $y$  是在点  $x_0$  处的  $x$  的解析函数, 则在对应的点  $y_0$  处 (在所指出的条件之下) 反函数就也是解析的.

这都可由前目中所证明了的定理直接推知. 为了简单起见, 设  $x_0 = y_0 = 0$ , 我们仿效 (18) 的样子, 将联系  $y$  及  $x$  的关系式写成以下形状:

$$x = by + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots \textcircled{1}$$

于是待定的展式

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots$$

①需要注意, 此处  $x$  与  $y$  的地位互相调换了.



的诸系数就顺次由以下各方程来确定:

$$\begin{aligned} b_1 &= b, b_2 = c_2 b_1^2, b_3 = 2c_2 b_1 b_2 + c_3 b_1^3, \\ b_4 &= c_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3c_3 b_1^2 b_2 + c_4 b_1^4, \\ b_5 &= 2c_2(b_1 b_4 + b_2 b_3) + 3c_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4c_4 b_1^3 b_2 + c_5 b_1^5. \end{aligned}$$

例如, 知道了正弦展式

$$y = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

即可求出展式

$$x = \arcsin y = y + b_3 y^3 + b_5 y^5 + \cdots$$

(我们只写出  $y$  的奇次幂, 因为由函数  $y = \sin x$  是奇函数可以推知其反函数也是奇函数). 确定诸系数  $b$  的各方程此时即有以下形状:

$$b_1 = 1, b_3 = \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{6}, b_5 = \frac{1}{2}b_1^2 b_3 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{3}{40}, \cdots$$

另一个例子: 设

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

由此

$$x = \ln(1 + y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots$$

诸系数  $b$  可逐次确定:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, b_2 = -\frac{1}{2}b_1^2 = -\frac{1}{2}, b_3 = -b_1 b_2 - \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{3}, \\ b_4 &= -\frac{1}{2}(2b_1 b_3 + b_2^2) - \frac{1}{24}b_1^4 = -\frac{1}{4}, \\ b_5 &= -(b_1 b_4 + b_2 b_3) - \frac{1}{2}(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) - \frac{1}{6}b_1^3 b_2 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{1}{5}, \cdots \end{aligned}$$

于是

$$\ln(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \cdots$$

为保证反函数存在并且所得展开式有效力,  $y$  的变动区域可能要根据 450 目的考虑来确定, 但是这通常是很过分降低的. 比如说, 若在上述第一个例子中, 改写联系着  $x$  与  $y$  的方程为 (18) 的形式:

$$x = y + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \cdots$$

并且以  $|x| \leq \frac{\pi}{2}, |y| \leq 1$  来限制它, 即取  $\rho = \frac{\pi}{2}, r = 1$ , 那么得  $M = 1$ , 且 —— 按照公式 (24)——

$$r_1 = \left( \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 2} \right)^2 < 0.2,$$

可是所得结果的合理应用区域是区间  $[-1, 1]$ !



**附注** 弄清条件  $a_1 \neq 0$  的意义是有益的, 仅在这个条件下, 前述论断才是正确的. 设  $a_1 = 0$  但  $a_2 \neq 0$ , 比如说  $a_2 > 0$ , 于是在  $x = 0$  附近 (为了简单, 设  $x_0 = y_0 = 0$ ) 有

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

因此  $y > 0$ . 以  $y^{\frac{1}{2}}$  表示  $y$  的算术根, 我们看到

$$\sqrt{y} = \sqrt{a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots} = \pm x \sqrt{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2} x + \frac{a_4}{a_2} x^2 + \cdots},$$

同时所置正负符号应与  $x$  的符号相合. 由于 50 目的定理, 在  $x = 0$  附近后一根式本身是自由项为 1 的幂级数. 于是最后有

$$\pm \sqrt{y} = a'_1 x + a'_2 x^2 + \cdots$$

其中  $a'_1 = \sqrt{a_2} > 0$ . 应用本目的定理 (量  $\pm \sqrt{y}$  起  $y$  的作用), 我们得到对  $x$  的两个不同的展开, 它依赖于符号的选择:

$$x_1 = b_1 y^{\frac{1}{2}} + b_2 y + b_3 y^{\frac{3}{2}} + b_4 y^2 + \cdots > 0 \quad \left( b_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} > 0 \right)$$

与

$$x_2 = -b_1 y^{\frac{1}{2}} + b_2 y - b_3 y^{\frac{3}{2}} + b_4 y^2 - \cdots < 0.$$

读者既要注意到反函数的双值性, 又要注意到它的每一个分支不是按变量  $y$  的整数次幂而是按分数次幂展开的.

**452. 拉格朗日级数** 我们将第 450 目的定理应用到形状有如

$$y = a + x\varphi(y) \tag{25}$$

的特殊方程, 此处函数  $\varphi(y)$  假定在点  $y = a$  是解析的. 于是我们知道, 对于充分小的  $x$  值,  $y$  被方程 (25) 确定为  $x$  的函数, 在点  $x = 0$  处是解析的, 并且在  $x = 0$  时  $y = a$ .

又设  $u = f(y)$  是  $y$  的某一个函数, 在  $y = a$  处是解析的. 如果在这里把  $y$  替换为前述的  $x$  的函数, 则  $u$  就是  $x$  的函数, 在  $x = 0$  处也是解析的. 我们提出的问题就是: 求  $u$  按照  $x$  的幂次的展式, 更确切些, 就是求这展式中诸系数的适当的表达式.

我们先注意当  $a$  为变量时,  $y$  由方程 (25) 确定成  $x$  与  $a$  两个变量的函数, 可按照  $x$  与  $a - a_0$  (此处  $a_0$  是  $a$  的任意一个固定值) 的幂次而展成二重级数<sup>①</sup>. 于是变量  $u$  就也是  $x$  与  $a$  这两个变量的函数.

将 (25) 对  $x$  并对  $a$  微分, 便得

$$[1 - x \cdot \varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \quad [1 - x \cdot \varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial a} = 1,$$

<sup>①</sup>这一项断言是预先假定第 423 目的定理被推广到了这种情形: 即在方程中出现有三个变量, 而其中之一被确定作其余两个的函数.



由此显而易见,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial a}, \quad (26)$$

而一般的在  $u = f(y)$  时, 也同样有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}. \quad (26a)$$

另一方面, 不论  $F(y)$  是怎样一个函数, 只要它对于  $y$  的导数存在, 我们就有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (27)$$

直接微分, 并引证恒等式 (26) 与 (26a), 这就很容易得以肯定.

所有附记的这些, 我们用来证明一条于下文中颇为重要的公式:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[ \varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] \textcircled{1}. \quad (28)$$

当  $n = 1$  时它就化为 (26a). 现在假定它对于某值  $n \geq 1$  是对的, 我们来确定它对于  $(n+1)$  阶导数也对, 将 (28) 对  $x$  微分, 并利用更换微分次序的法则 [190], 使得

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

但是借助于 (27) 与 (26a), 我们顺次有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

把这个代到前一个等式里, 就得出

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left[ \varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

因此, 公式 (28) 由归纳法得以证实.

最后, 回到我们所感兴趣的, 函数  $u$  依照  $x$  的幂次的展式上来. 在  $a$  为常量时, 此展式必定具有泰勒展式的形状 [438, 9°]:

$$u = u_0 + x \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_0 + \cdots$$

其中指标 0 是表示函数及其导数都取  $x = 0$  时的值. 但  $x = 0$  时,  $y = a$  所以  $u_0 = f(a)$ , 而此后根据公式 (28),

$$\left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a) \cdot f'(a)].$$

代入这些系数值, 我们就得到展式

$$\begin{aligned} f(y) = f(a) + x \cdot \varphi(a) f'(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{da} [\varphi^2(a) \cdot f'(a)] + \cdots \\ + \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a) \cdot f'(a)] + \cdots \end{aligned} \quad (29)$$

<sup>①</sup> 此处  $\varphi^n(y)$  表示自乘方:  $[\varphi(y)]^n$ .



此即称为拉格朗日级数. 由于其系数是表成  $a$  的显函数的形状, 所以这级数是非常之好.

如果  $f(y) \equiv y$ , 则特别就得到

$$y = a + x \cdot \varphi(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{da} [\varphi^2(a)] + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a)] + \cdots \quad (29a)$$

本目所考虑的问题与幂级数反演问题有着紧密的联系. 若 (假设  $\varphi(a) \neq 0$ ) 把方程 (25) 改写为如下形式:

$$x = \frac{y-a}{\varphi(y)} = b_0 + b_1(y-a) + b_2(y-a)^2 + \cdots$$

则拉格朗日问题与这个级数按  $y-a$  的幂次排列的反演是等价的. 反之, 若提出幂级数

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (a_1 \neq 0)$$

的反演问题, 则把此式改写成:

$$y = x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots),$$

把括号内的级数表为  $\psi(x)$ . 那时便得 (25) 类型的方程

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(x)};$$

这里  $a=0$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ , 此外,  $x$  与  $y$  角色互换, 后一说明的重要性还因为对 (29a) 的反演的结果可以立即给出一般表示:

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!} \left[ \frac{d}{dx} \frac{1}{\psi^2(x)} \right]_{x=0} + \cdots + \frac{y^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{\psi^n(x)} \right]_{x=0} + \cdots \quad (30)$$

我们引几个实例.

1) 我们即从应用公式 (30) 开始. 设给定方程

$$y = x(a+x) \quad (a \neq 0)$$

或

$$x = y \cdot \frac{1}{a+x}.$$

因为

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{(a+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \cdots (2n-2)}{(a+x)^{2n-1}},$$

那么得到这样的展开:

$$x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} \frac{y^n}{a^{2n-1}} + \cdots$$

从  $x$  的诸值中选择与  $y$  一起变为 0 的  $x$  值以后, 若解对  $x$  的二次方程得到同样展开式.

2) 以 (25) 类型的方程

$$y = a + \frac{x}{y}$$



为出发点, 于是这里的  $\varphi(y) = \frac{1}{y}$ . 设  $f(y) = y^{-k}$ , 根据拉格朗日公式 (29) 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^k} &= \frac{1}{a^k} - x \cdot \frac{k}{a^{k+2}} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{k(k+3)}{a^{k+4}} - \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}} \\ &\quad + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}} - \dots \end{aligned}$$

因为给定的方程可以化为二次方程

$$y^2 - ay - x = 0,$$

故显而易见,

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x}. \textcircled{1}$$

例如, 假使  $a = 2$ , 则得出 (乘以  $2^k$ ) 这样的展式:

$$\left( \frac{2}{1 + \sqrt{1+x}} \right)^k = 1 - k \cdot \frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!} \left( \frac{x}{4} \right)^2 - \frac{k(k+4)(k+5)}{3!} \left( \frac{x}{4} \right)^3 + \dots$$

### 3) 开普勒方程

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E$$

在理论天文学上占有很重要的地位, 此处  $E$  是行星的偏近点角 (excentric anomaly),  $M$  是其平均近点角 (mean anomaly), 而  $\varepsilon$  是行星轨道离心率. 利用拉格朗日级数 (29a), 可以求出  $E$  依照离心率的幂次的展式, 其诸系数依赖于  $M$ :

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{d}{dM} \sin^2 M + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \sin^n M + \dots$$

在这里就显示出知道收敛区间的确切大小的重要性来了. 拉普拉斯 (Laplace) 首先确定了: 对于  $\varepsilon < 0.6627 \dots$  收敛性成立.

### 4) 最后, 我们来研究方程

$$y = x + \frac{\alpha}{2}(y^2 - 1) \textcircled{2}.$$

当  $\alpha = 0$  时  $y = x$  这样的解为

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{\alpha} = \frac{2x - \alpha}{1 + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}.$$

这个函数依照  $\alpha$  的幂次的展式具有以下形状:

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{\alpha}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \frac{d(x^2 - 1)^2}{dx} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^n \cdot \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} + \dots \end{aligned}$$

①根式前取正号是由于当  $x = 0$  时应 有  $y = a$ .

②此处  $x$  相当于  $a$ , 而  $\alpha$  相当于  $x$ .



将这等式两侧对  $x$  微分 (此处  $y$  是  $\alpha$  与  $x$  两个变量的函数, 从它的解析性质可以断定, 级数可以逐项微分). 我们便得到展式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} &= 1 + \alpha \cdot \frac{1}{2} \frac{d(x^2-1)}{dx} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2!2^2} \cdot \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} + \dots \\ &+ \alpha^n \cdot \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \dots \end{aligned}$$

现在我们直接看出 [参看 447,8)], 它的系数就是勒让德多项式

$$P_n = \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

## §5. 复变量的初等函数

**453. 复数** 虽然本教程完全致力于实变量以及实变量的实函数, 而本节将离开这条主线来讲复变量的初等函数. 这个问题的论述要归附于幂级数的理论, 而反之它也阐明了幂级数理论上的若干根本特色. 除此而外, 通晓复变函数在实变数分析中以及在计算方面都是有用的 [参看第 461 目中各例题, 以及本教程第三卷中用来讲傅里叶级数的第十九章].

我们假定读者在代数中已知道了复数. 因此在这里我们仅限于简略的叙述其基本性质.

复数  $z$  具有形状:  $z = x + yi$ , 此处  $i$  为虚单位,  $i = \sqrt{-1}$ , 而  $x$  及  $y$  为实数. 其中  $x$  称为数  $z$  的实组成部分或实部,  $y$  称为数  $z$  的虚组成部分或虚部, 并且记成

$$x = R(z), \quad y = I(z).$$

两个复数  $x + yi$  与  $x' + y'i$ , 当而且只当分别有  $x = x'$  并  $y = y'$  时, 才是相等的<sup>①</sup>. 复数的加法与乘法依照下列公式来做:

$$\begin{aligned} (x + yi) + (x' + y'i) &= (x + x') + (y + y')i, \\ (x + yi)(x' + y'i) &= (xx' - yy') + (xy' + x'y)i; \end{aligned}$$

不难验算, 差与商皆存在, 可表成这样:

$$\begin{aligned} (x + yi) - (x' + y'i) &= (x - x') + (y - y')i, \\ \frac{x + yi}{x' + y'i} &= \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \end{aligned}$$

(在商式中假定  $x' + y'i \neq 0$ , 就是说  $x'^2 + y'^2 > 0$ ). 这样, 复数便保持了运算的一切普通性质, 只要是不牵涉到大于和小于的概念 (这概念对于复数是不成立的). 更确切些说, 第 3 目性质 II'1°~4° 以及第 4 目 III'1°~5° 都是复数具有的.

在平面上取直角坐标轴  $xOy$  (图 63). 于是每一个复数  $z = x + yi$  都可以在平面上用一个点  $M(x, y)$  来表示, 其坐标就是这个复数的实部与虚部. 显而易见, 反过来讲就是平面

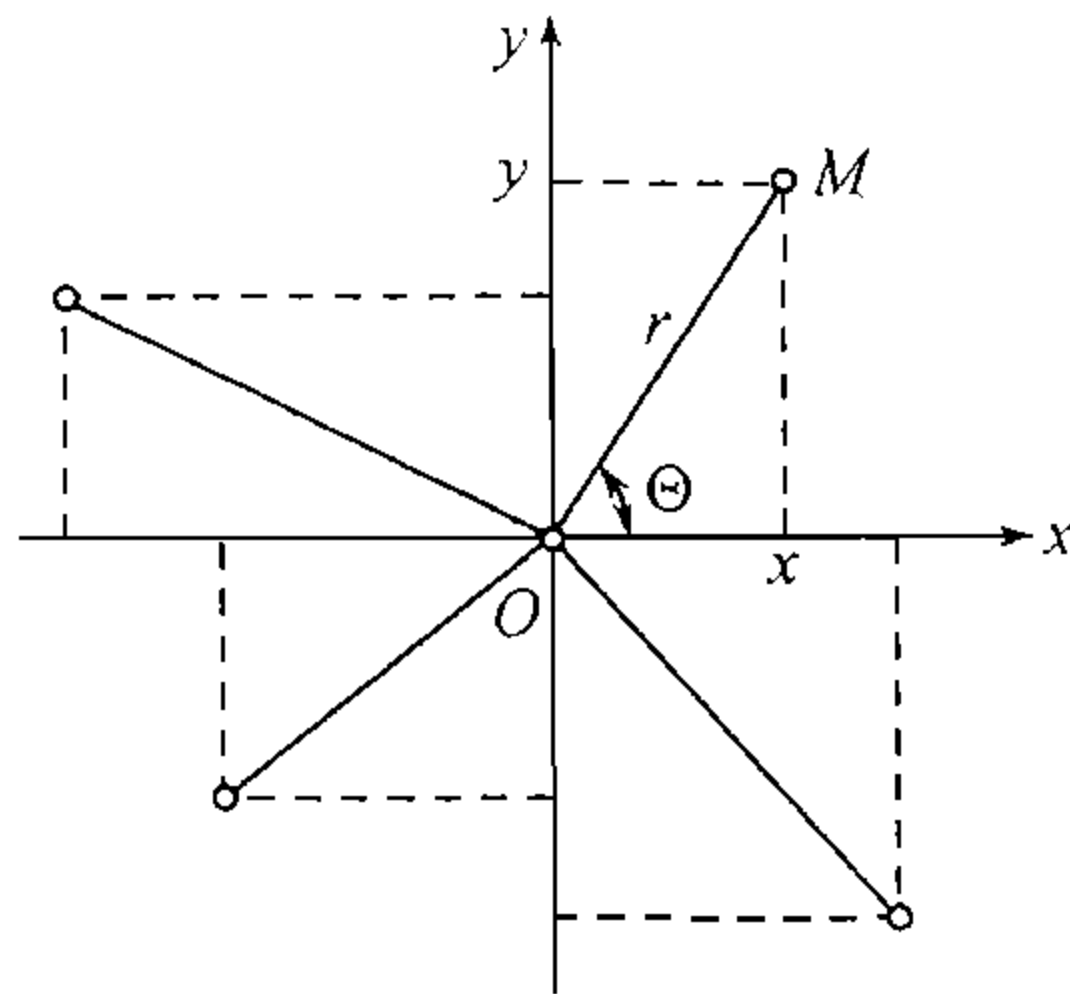


图 63

<sup>①</sup>换句话说, 在这里, 等式对于我们说来, 也就变成了单纯恒等式 [参看第 2 目].



每一个点  $M$  对应一个完全确定的复数. 以此之故, 所说的平面称之为复变数  $z$  的平面, 或简称复平面.

实数  $x = x + 0 \cdot i$  用  $x$  轴上的点 (因为对于这些点  $y = 0$ ) 来表示, 而纯虚数  $yi = 0 + yi (x = 0)$  用  $y$  轴上的点来表示. 第一条轴即称为实轴, 而第二条轴即称为虚轴.

代表复数  $z = x + yi$  的点的极坐标  $r$  与  $\Theta$  (见图), 也占很重要的地位. 数  $r$  (非负的) 称为复数  $z$  的模或绝对值, 并且记成这样:  $r = |z|$ . 模是由复数  $z$  而单值确定的:

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

并且在而且只在  $z = 0$  时为 0. 角  $\Theta$  称为复数  $z$  的辐角,  $\Theta = \text{Arg} z$ . 当  $z \neq 0$  时, 它由等式

$$\cos \Theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \Theta = \frac{y}{r}$$

来确定, 但仅确切到相差一个  $2k\pi$  ( $k$  为整数) 形状的项. 对于  $z = 0$ , 则辐角就成为完全不确定的了. 除掉这种情形是个例外以外, 对于每一个数  $z$ , 存在有一个而且仅有一个辐角  $\theta$ , 满足不等式

$$-\pi < \theta \leq \pi;$$

$\theta$  称为辐角的主值, 并用  $\arg z$  来表示, 如果  $\theta < \pi$  则

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{r + r \cos \theta} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

并且可用等式

$$\arg z = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

来确定角  $\arg z$ ; 这等式对于除掉负实数 (及 0) 以外的所有复数都适用.

我们注意, 对于复数  $z = x + yi$  及  $z' = x' + y'i$  的模, 犹如对于实数绝对值所十分熟悉的情形一样, 不等式

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

成立. 实际上, 在这种情形下, 它可化为已知的闵可夫斯基不等式的特殊情形 [133, (7)]

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

由它所推出的一些推论也是成立的 [参看第 17 目].

倘若在复数的记法  $z = x + yi$  中, 设  $x = r \cos \Theta$ ,  $y = r \sin \Theta$ , 则得到所谓的复数三角式:

$$z = r(\cos \Theta + i \sin \Theta).$$

将第二个复数也取成三角式:

$$z' = r'(\cos \Theta' + i \sin \Theta').$$

那么三角式的乘积  $zz'$  可以写成

$$zz' = rr'[\cos(\Theta + \Theta') + i \sin(\Theta + \Theta')];$$



这可由正弦及余弦的和角定理直接推得. 由此

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \operatorname{Arg} zz' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'.$$

类似的, 对于数  $z$  及  $z'$  的商我们得到

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \operatorname{Arg} \frac{z}{z'} = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'.$$

从乘积公式可以得出带有自然数指数  $n$  的乘方公式:

$$z^n = r^n (\cos n\Theta + i \sin n\Theta),$$

特别当  $r = 1$  时, 就导出了棣莫弗 (A.deMoivre) 公式:

$$(\cos \Theta + i \sin \Theta)^n = \cos n\Theta + i \sin n\Theta.$$

最后, 对于  $z$  的  $n$  次根, 我们有

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\Theta}{n} + i \sin \frac{\Theta}{n} \right);$$

其中  $\sqrt[n]{r}$  是  $r$  的算术根. 在这里, 例如轮流命

$$\Theta = \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots, \theta + 2(n-1)\pi,$$

我们就得到根  $\sqrt[n]{z}$  的  $n$  个不同的值 (当然是假定  $z \neq 0$ ); 在其他的  $\Theta$  值之下, 则只不过是再重复这些根值而已.

**454. 复整序变量及其极限** 我们来研究一个序列  $\{z_n\}$ , 它是由各复数  $z_n = x_n + y_n i$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 组成的, 并且变量  $z$  依照附标增加的顺序来取这些值.

这样的复整序变量的极限, 也用与实整序变量情形中一样的那么一套专门术语来定义 [23]:

常数  $c = a + bi$  称为整序变量  $z = z_n$  的极限, 如果不论  $\varepsilon > 0$  是怎样小的一个数, 对于它总存在有这样的附标  $N$ , 使得所有带有附标  $n > N$  的值  $z_n$  满足不等式

$$|z_n - c| < \varepsilon.$$

这时就写

$$\lim z_n = c \text{ 或 } z_n \rightarrow c.$$

无穷小量与无穷大量的定义也可以照样搬到复数情形里来<sup>①</sup>.

例如我们来考察整序变量  $z_n = z^n$ , 此处  $z$  为一复数. 如果这时  $|z| < 1$ , 则  $z_n \rightarrow 0$ , 但若  $|z| > 1$ , 则  $z_n \rightarrow \infty$ ; 不难看出, 当  $|z| = 1$  (但  $z \neq 1$ ) 时, 整序变量  $z_n$  根本没有极限.

不难将极限论的基本定理, 对于复整序变量直接地重证一次, 这差不多就是照以前的论证逐字逐句重复一下. 而另一方面, 所有这些定理可以自然而然地移置到复整序变量的情形, 只需根据以下的简单的定理:

<sup>①</sup>我们注意, 现在不能够讲整序变量趋于确定符号的无穷, 因为一般不加给复数什么符号



复整序变量  $z_n = x_n + y_n i$  趋于极限  $c = a + bi$ , 当而且只当实整序变量  $x_n$  与  $y_n$  对应地趋于极限  $a$  与  $b$  的时候.

其证明由不等式

$$\left. \begin{array}{l} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{array} \right\} \leq |z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

立即推得.

因此研究一个复整序变量可以变为研究两个实整序变量. 特别是用这个办法可以对于复整序变量也证明收敛原理 [39].

现在我们来考察具有复数项  $c_n = a_n + b_n i$  的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

在这里也将部分和

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k$$

的极限称作级数的和. 那么例如于对几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots$$

(其中  $z$  是不等于 1 的复数), 部分和等于

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z};$$

由此显然可见, 当  $|z| < 1$  时, 级数具有和

$$C = \frac{1}{1 - z},$$

而当  $|z| \geq 1$  时, 级数没有 (有限的) 和.

所有从第 362 目, 364 目的基本概念与定理 (及其证明) 都保留下来了.

研究一个复数级数可以化为研究两个实数级数, 只需根据以下的基本定理:

复数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) \quad (C)$$

收敛到和  $C = A + Bi$  等价于两个实数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

对应地收敛到和  $A$  与  $B$ .



显而易见, 此项断言无非是将以上用整序变量语言证实了的定理, 换了一句话来说而已.

现在我们来证明一个与第 377 目定理相类似的定理.

倘若级数 (C) 中各项的模所组成的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \quad (C^*)$$

收敛, 则级数 (C) 亦收敛.

实际上, 由于显然的不等式

$$\left. \begin{array}{l} |a_n| \\ |b_n| \end{array} \right\} \leq |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

级数 (C\*) 的收敛性就包含了

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

两个级数的收敛性. 由此推知 [377], 级数 (A) 与 (B) 收敛, 于是根据前面的定理, 级数 (C) 也收敛.

级数 (C\*) 收敛时, 级数 (C) 称为是绝对收敛的; 注意, 此时如我们在前面所看见的, 级数 (A), (B) 也绝对收敛.

根据这条定理, 例如达朗贝尔判别法 [377] 等得以保持有效.

第 387 目关于级数的项的调换的定理, 以及第 389 目关于级数的逐项相乘的法则, 可以运用于绝对收敛的复数级数. 对于前一个定理, 只需归结到两个实数级数即得证明, 而后者则基本上可以因袭以前的证明.

最后, 应用类似的方式, 可将二重级数理论中的基本概念与定理搬到复数的情形上来.

**455. 复变量的函数** 设复变量  $z = x + yi$  在某一个 (几何意义为复平面上开 (或否) 域的) 集合  $\mathcal{Z} = \{z\}$  内采取一切可能的值. 如果区域  $\mathcal{Z}$  中的每一个值  $z$  对应另一复变量  $w = u + vi$  的一个值或几个值, 则  $w$  (相应地) 称为区域  $\mathcal{Z}$  中的  $z$  的 (单值或多值) 函数, 并记作

$$w = f(z) \quad \text{或} \quad w = g(z),$$

以及诸如此类.

$|z|, z^n$  或是一般地说, **整有理函数**, 即具有任意复数系数  $c_0, c_1, \dots, c_n$  的整多项式

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n.$$

都可以作为单值函数 (并且此时还是在整个复平面上的单值函数) 的实例. **分式有理函数**, 即不可约简的两个多项式的商, 也是单值地确定在整个平面上, 不过在相当于分母的根的那些点上, 函数就变为无穷了. 作为非单值函数的实例, 我们可以引  $\text{Arg} z$  与  $\sqrt[n]{z}$ . 以下在 457 ~ 460 中, 我们将研究一些其他的重要的复变量函数.

下文中如无其他声明, 则我们将是研究单值函数.



假使  $w = u + vi$  是区域  $\mathcal{Z} = \{z\} = \{x + yi\}$  中的  $z = x + yi$  的函数, 则其组成部分  $u, v$  显然也是  $z$  的函数, 或者也可以说是在相应的区域  $\mathcal{Z}^* = \{(x, y)\}$  (它在几何上所表出的图形与  $\mathcal{Z}$  相同) 中的  $x, y$  的函数:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

例如, 对于实值函数  $w = |z|$  或  $w = \arg z$ , 我们分别有

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{或} \quad u = 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (v = 0);$$

对于函数  $w = z^n = (x + yi)^n$ , 显而易见,

$$\begin{aligned} u &= x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \cdots \\ v &= nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} y^3 + \cdots \end{aligned}$$

设  $c$  是区域  $\mathcal{Z}$  的一个聚点. 假若对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 可找到这样的数  $\delta > 0$ , 使得只要  $|z - c| < \delta$  (并且  $z \neq c$ ), 就有  $|f(z) - C| < \varepsilon$ ; 则称函数  $w = f(z)$  于  $z$  趋向  $c$  时, 有极限  $C$ <sup>①</sup>.

这件事情通常也记作

$$\lim_{z \rightarrow c} w = \lim_{z \rightarrow c} f(z) = C.$$

不难把这个定义照搬  $c$  (或  $C$ ) 为  $\infty$  的情形中去; 这个定义也可以表为“整序变量语言”.

如果  $c = a + bi$ ,  $C = A + Bi$ . 则 [不难由第 454 目推出] 以上的关系式等价于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} u(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} v(x, y) = B.$$

函数  $f(z)$  在区域  $\mathcal{Z}$  的某一点  $z_0 = x_0 + y_0 i$  的连续性, 用等式

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

来定义. 这显然等价于两个组成部分  $u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的连续性.

因此, 回想一下刚才引入的  $|z|$  以及  $z^n$  组成部分的表达式, 我们就看出, 这些函数在整个复平面上是连续的. 类似的,  $\arg z$  除掉实轴上负的部分以外, 也是处处连续的.

当然, 也可以从复数考虑, 直接确定其连续性. 例如, 对于函数  $|z|$ , 其连续性可由不等式

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$$

立即推得. 对于函数  $z^n$ , 我们有

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1}).$$

当  $z$  与  $z_0$  充分接近时,  $z$  值是有界的而受某一常量限制:  $|z| \leq M$ , 所以

$$|z^n - z_0^n| \leq nM^{n-1} \cdot |z - z_0|,$$

由此即得出所要的结论.

<sup>①</sup>此处  $c$  与  $C$  皆为复数.



现在不难证明整有理函数及分式有理函数的连续性 (后一种情形需除去分母的各个根).

函数  $w = f(z)$  在点  $z = z_0$  处导数的定义, 与通常微分学中的定义有同样的形式:

$$w' = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

例如, 对于函数  $w = z^n$ , 我们有

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1},$$

于是在  $z \rightarrow z_0$  时趋于极限, 我们就又得出了熟知的公式

$$w' = n z_0^{n-1}.$$

第 94 目中关于反函数的导数的公式以及第 97, 98 目中所有的微分法则, 可以原封不动地搬运过来, 高阶导数概念的建立也是相类似的.

我们还提出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots,$$

其中各项均为同一区域  $Z$  内的复变量  $z$  的函数.

在这里, 首先可以用与第 428 目中同样的那么一套术语, 建立起一致收敛性的概念. 在复变函数级数的情形下, 同样也可以根据正项级数的存在, 以确定其一致收敛性, 因为魏尔斯特拉斯判别法在这里也是保持有效的. 在关于函数级数的定理中, 我们需要更深入一些的关于一致收敛级数中逐项取极限的定理 [433, 定理 4], 其证明也和以前是同样的.

现在我们特别来研究幂级数, 它在复变量函数的理论中占有非常重要的位置. 我们用单独的一目来讲它.

**456. 幂级数** 设有级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \quad (1)$$

其中  $c_0, c_1, c_2, \cdots$  为常复数系数, 而  $z$  为变量, 变化于整个复平面. 对于这里的幂级数, 也可以完全如同在第 379 目 [或第 380 目] 所作的那样, 断定有这样的非负的数  $R$  存在, 使得对于  $|z| < R$  (如果  $R > 0$ ) 级数 (1) 绝对收敛, 而对于  $|z| > R$  (如果  $R < +\infty$ ) 级数发散. 这样一来, 如若除掉  $R = 0$  的情形, 则当  $R = +\infty$  时, 级数在整个复平面上收敛而当  $R$  为有限数时, 级数在以原点为心,  $R$  为半径画出的圆的内部收敛而在此圆之外发散. 此处收敛区间是被收敛圆代替了, 而“半径”这个术语也初次得以兑现.

例如, 借助于达朗贝尔判别法, 不难认出, 级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

对于任何复值  $z$  绝对收敛, 同时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$



都具有收敛半径  $R = 1$ .

在收敛圆的边缘上, 幂级数的性质可以是不同的. 例如, 在刚才所引起的三个级数中, 第一个在圆周  $|z| = 1$  的所有的点上都发散. 因为与收敛的基本条件不合——通项不趋近于 0; 第二个级数在这圆的所有的点上都绝对收敛, 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛; 最后, 第三个级数, 如果在其中设  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , 则取以下形状,

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n},$$

它也是收敛的 (除掉  $\theta = 0$ , 亦即  $z = 1$  的情形) [385, 2)], 但非绝对收敛, 因为级数  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

附注 倘若幂级数的系数是实数 (如以上所引的例), 则显然可见, 复平面上“收敛圆”的半径  $R$  与从前实轴上“收敛区间”的半径是相同的.

现在我们列举出可以搬到复数幂级数上面来的, 关于幂级数的一些较为深入的定理.

第 437 目定理 1° 与 2° 完全保留下来了, 于是在收敛圆的内部, 幂级数 (1) 的和便是  $z$  的连续函数.

至于阿贝尔定理 [437, 6°] 也是一样的, 今将其叙述成以下形式:

假若级数 (1) 在圆周  $|z| = R$  上的某一点  $z_0$  收敛, 则当点  $z$  从里面沿着半径逼近于点  $z_0$  时, 我们有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n \text{ ①}.$$

在特殊情形下, 即当  $z_0 = R$  时, 就可以认为  $z = r$  是一个正的实变数, 而所要证的等式就表成以下形状

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

若设  $c_n = a_n + b_n i$ , 则上式分解为这样两个等式:

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n.$$

由于假定了级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i) R^n$$

的收敛性, 因而上两个式子右侧的级数收敛, 所以上两个式子的证明只需援引一下普通的阿贝尔定理即可.

我们来看一般情形. 用  $\theta_0$  表示数  $z_0$  的辐角. 于是可命

$$z_0 = R(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0), \quad z = r(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0),$$

①在更一般的  $z$  逼近于  $z_0$  的规律之下, 也可以证明这个等式, 然而我们不预备在这里来讲它



并且所要证明的等式可以写成这样:

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) R^n.$$

若将括弧内因子并入系数之内, 则显而易见, 问题就化成已经考察过了的情形.

现在我们 (不引用关于级数微分的一般定理) 直接来证: 幂级数在其收敛圆内部可以逐项微分, 也就是说, 若对  $|z| < R$  命

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ 则 } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

首先, 我们注意, 后一个级数的收敛半径也是  $R$ , 例如借助于柯西-阿达玛定理, 就很容易承认这一点.

我们在固定的点  $z_0$  以及  $|z| < R$ , 来进行讨论. 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

如果取  $\rho$  介于  $|z_0|$  与  $R$  之间, 那么就也可以算作  $|z| < \rho$ ; 于是

$$|c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1})| < n \cdot |c_n| \cdot \rho^{n-1}.$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| \rho^{n-1}$  收敛, 因为  $\rho$  小于  $R$ , 而  $R$  (如我们前所指出的) 也是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  的收敛半径. 在此情形下, 应用魏尔斯特拉斯判别法, 我们就肯定了级数 (2) 的一致收敛性; 当其中  $z \rightarrow z_0$  时, 可以逐项取极限, 这就导出了我们所要求的结果.

由此即已推知, 第 438 目的定理 9° 与 10° 也可以原封不动地搬到复数的情形里来.

因此, 在收敛圆以内, 幂级数之和及其各阶导数尽皆连续. 换句话说, 如果我们将函数按照  $z$  的幂次展为级数, 则离原点最近的函数的间断点与原点的距离, 就是这个展式的收敛半径的自然界限.

在级数

$$1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \frac{1}{1+z}$$

的情形中, 这样的点就是  $z = -1$ ; 这一点是在实轴上的, 所以我们早也就明白, 函数  $\frac{1}{1+z}$  的展式的收敛半径不能大于 1. 而级数

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+z^2}$$

的情形则是另外一样, 在虚轴上, 距原点为 1 的点  $z = \pm i$  处, 级数的和数有了间断点; 若仍然是在实轴上, 则沿着实轴, 函数  $\frac{1}{1+x^2}$  以及其各阶导数皆是连续的, 就无法可以理解何以其展式的收敛半径是等于 1.

把实变量的实函数转到复数域里面去的时候, 常有助于理解其展式之具有某些特点的真正原因; 这一类的例子我们在下面还会碰到.



最后, 我们指出, 所有的幂级数运算法则 [445], 并于以级数代入级数的定理 [446], 关于级数除法的定理 [448], 以及末尾关于幂级数的反演的定理 [451], 在此处尽皆保持有效; 其中一些形式化的证明, 对于复数幂级数也是完全适用的.

**457. 指数函数** 我们在第 404 目 (11) 业已看见, 展式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

对于任意的实数  $x$  都成立. 倘若在这个级数里将实变量  $x$  换为复变量  $z = x + yi$ , 则得出级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , 关于这个级数我们已经知道 [456] 它收敛了, 就是说在整个复变数平面上, 它有确定的有限和. 根据定义, 就将它的和取作指数函数  $e^z$  对于任意复数  $z$  的值, 就是说, 命

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (3)$$

这个定义, 如我们在前面看见的, 并不与实数指数情形下的普通定义冲突, 而是其自然的推广.

如若利用幂级数相乘的法则, 那么便与在第 390 目 6) 中一样, 很容易肯定: 对于任意的复数值  $z$  与  $z'$ , 有

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \quad (4)$$

因而指数函数的这一特性在复数域内仍然得以保持.

函数  $e^z$  在全平面上是连续的, 不仅如此, 它还具有各阶导数; 逐项微分其定义级数, 使得

$$(e^z)' = e^z,$$

恰和以前是一样的.

设  $z = x + yi$ , 其中  $x$  与  $y$  为实数; 在 (4) 中把  $z$  换成  $x$ , 而把  $z'$  换成  $yi$ , 我们便有

$$e^z = e^x \cdot e^{yi}.$$

现在我们来考察具有纯虚数指数的特殊幂次  $e^{yi}$ . 如若根据定义 (3) 将  $z$  代为  $yi$ , 则我们得出

$$e^{yi} = 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{2n!} + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}i + \cdots$$

或者分离实部与虚部,

$$\begin{aligned} e^{yi} = & \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{2n!} + \cdots \right) \\ & + \left( y - \frac{y^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right) i. \end{aligned}$$

我们看出上式中的两个级数就是  $\cos y$  与  $\sin y$  的展式 [404, (12) 与 (13)], 这样一来, 我们便导出了一个很值得注意的公式

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y, \quad (5)$$

此公式系由欧拉所首先创立; 因此, 例如有

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$



于是如果  $z = x + yi$ , 则

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)^{\textcircled{1}}; \quad (6)$$

我们看出,

$$e^x = e^{R(z)} = |e^z|, y = I(z) = \operatorname{Arg} e^z.$$

因为对于任何实数  $x, e^x > 0$ , 所以对于任何复数  $z, e^z$  均非 0.

将 (5) 中的  $y$  换成  $-y$ , 再利用两个公式的相加与相减, 就得出: 以纯虚变量的指数函数来表达实变量的三角函数的关系式

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \quad (7)$$

在下文中我们还将回头来讲这一值得注意的事实.

假若在等式 (6) 中, 将  $y$  换作  $y + 2\pi$ , 则等式右侧的值 (也就是说等式左侧的值) 不变; 换句话说,

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

即指数函数乃是具有纯虚周期  $2\pi i$  的周期函数.

很容易证明, 除了  $2k\pi i$  ( $k$  为整数) 形状的周期以外, 函数  $e^z$  不能再有其他的周期. 事实上, 假若  $e^{z+\omega} = e^z$ , 则 (命  $z = 0$ )  $e^\omega = 1$ . 比如说设  $\omega = \alpha + \beta i$ , 那么 [参看 (6)]  $e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta) = 1$ ; 由此  $e^\alpha = 1$  即  $\alpha = 0$ , 其次  $\cos \beta = 1, \sin \beta = 0$ , 故  $\beta = 2k\pi$ , 是即所欲证者.

现在我们知道了  $e^{\pm 2\pi i} = 1$ , 于是才弄明白何以函数  $\frac{x}{e^x - 1}$  展成幂级数 [449, (12)] 时具有收敛半径  $2\pi$ ; 虽然在实轴上函数  $\frac{x}{e^x - 1}$  并没有什么特异之处足以解释这一点, 然而在虚轴上却有着使得函数化为无穷的那样的点, 并且其中与原点相隔最近的恰好就是在距离  $2\pi$  处的点  $z = \pm 2\pi i$ .

与指数函数推广到任意复数指数的情形相关连, 我们回想一下在第 138 目与第 407 目所研究过的一个有趣的函数:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), f(0) = 0.$$

虽然这函数本身以及其各级导数在实轴上, 包括点  $x = 0$ , 都是连续的, 但无论在零点的怎样一个邻域内, 却总不能将此函数按照  $x$  的幂次而展开; 这在转换到复变量  $z = x + yi$  的时候, 就直接变为显而易见的了. 实际上, 当  $z \rightarrow 0$  时, 函数  $e^{-\frac{1}{z^2}} (z \neq 0)$  是甚至连极限也没有的, 因为例如在沿着虚轴趋近于零时, 即  $z = yi$  而  $y \rightarrow 0$ , 则有

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{y^2}} \rightarrow \infty.$$

**458. 对数函数** 我们取出任意一个非零的复数  $w$ , 而我们所提出的问题就是要找数  $z$ , 使得满足方程

$$e^z = w$$

(我们知道, 当  $w = 0$  时这个方程是无解的). 这样的数  $z$  就称为  $w$  的(自然)对数, 并用等号.

$$z = \operatorname{Ln} w \quad (8)$$

<sup>①</sup>也可以将这个等式给作复变量的指数函数的定义; 于是 (4) 可由余弦与正弦的和角定理推出.



来记.

若  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , 并令  $z = x + yi$ , 则根据 (6), 方程 (8) 分解为这样三个方程:

$$e^x = r, \quad \cos y = \cos \theta, \quad \sin y = \sin \theta.$$

由此

$$x = \ln r, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

我们就得到结论:  $w (w \neq 0)$  的对数永远存在, 等于

$$\operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \cdot \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \cdot \arg w + 2k\pi i, \quad (9)$$

并且因而乃是多值的. 不过根据指数函数的周期性, 也很容易预料到这一点. 取  $k = 0$ , 我们便得到所谓的对数主值:

$$\ln w = \ln |w| + i \cdot \arg w, \quad (10)$$

其特点就在于: 其虚部含于区间  $(-\pi, \pi]$  之内,

$$-\pi < \operatorname{Im}(\ln w) \leq \pi.$$

例如, 我们有

$$\ln 1 = 0, \operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i; \ln(-1) = \pi i, \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i; \ln i = \frac{\pi}{2}i, \operatorname{Ln} i = \frac{4k+1}{2}\pi i. \text{ 等等.}$$

$w$  变化时, 公式 (10) 表示多值对数函数  $\operatorname{Ln} w$  的主支. 在不同的整数值  $k$  之下, 根据公式

$$\operatorname{Ln} w = \ln w + 2k\pi i,$$

就得到其他的一些支.

不难看出, 在除掉原点及实轴上负的部分以外的整个复变数  $w$  的平面上, 函数 (10) 都是连续的. 当  $w = 0$  时的不连续性, 是无法避免的, 因为当  $w \rightarrow 0$  时, 显而易见,  $\ln w \rightarrow \infty$ . 负实值  $w_0 = u_0 < 0$  的情形则又是一样. 这里所发生的不连续现象, 在某种意义上, 乃是人工造成的, 因为我们的条件是要将  $\arg w$  取在区间  $(-\pi, \pi]$  之内. 当  $v = 0$ , 而令  $w = u + vi \rightarrow w_0$  时, 则  $\arg w \rightarrow \pi = \arg w_0$ , 而假如其中  $v < 0$ , 则  $\arg w \rightarrow -\pi$ . 如果我们从第二象限的主支  $\ln w$  过渡到第三象限的另外一支  $\ln w + 2\pi i$ , 那么连续性就可以恢复. 这样一来, 我们为了要想避免多值性而将多值函数分割成一些单值的支, 同时就对每一个单独的支造成了不连续点. 而反之, 从一支过渡到另外一支时倒是连续着的. 复平面的值得注意的独特之处, 就在于多值函数不同的各支间的这种关系上, 这是与定义在实轴上的多值实函数没有共同之点的.

根据关于反函数导数的一般定理, 我们有 (除掉不连续点以外)

$$(\ln w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}. \quad (11)$$

将  $w$  换成  $1 + w$ , 我们来研究函数  $z = \ln(1 + w) (w \neq -1)$ . 这时

$$e^z = e^{\ln(1+w)} = 1 + w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ 因而 } w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

① 此处表示正数  $r$  的普通自然对数.



由此推知, 对于充分小 (对于绝对值而言) 的  $w$  值, 函数  $z = \ln(1+w)$  可依照  $w$  的幂次展为级数:

$$z = w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \cdots + c_n w^n + \cdots$$

这个函数对于  $w$  的导数便可以表成级数:

$$[\ln(1+w)]' = 1 + 2c_2 w + 3c_3 w^2 + \cdots + nc_n w^{n-1} + \cdots$$

同时, 由于 (11), 它又可以表成这样:

$$[\ln(1+w)]' = \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \cdots + (-1)^{n-1} w^{n-1} + \cdots$$

比较这两个展式, 便可看出

$$2c_2 = -1, 3c_3 = 1, \cdots, nc_n = (-1)^{n-1}, \cdots$$

由此

$$c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{3}, \cdots, c_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \cdots$$

因而, 最后, 在原点的邻域内我们便有展式:

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n} + \cdots \quad (12)$$

很容易验证, 所得到的级数具有收敛半径  $R = 1$ . 我们已经知道, 对于足够小的  $z$ , 级数和数是对数的主值  $\ln(1+w)$ ; 是不是在整个的圆  $|w| < 1$  里总是这样呢?

因为级数 (12) 形式上满足等式

$$e^{w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots} = 1 + w,$$

所以当级数 (12) 收敛时, 也就实际上满足这等式, 这样一来, 在整个圆  $|w| < 1$  之内, 级数 (12) 的和便一定是  $\ln(1+w)$  的值中的一个; 现在所有问题就在于: 是不是永远恰好就是主值呢?

如果  $|w| < 1$ , 那么数  $1+w$  所表示的点便在以点  $w = 1$  为心而半径为 1 的圆的内部, 所以  $\arg(1+w)$  介于  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间, 而  $\text{Arg}(1+w)$  其他的值则在区间

$$\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{9\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\right), \cdots$$

或

$$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right), \cdots$$

之内. 级数 (12) 的和的虚部即是  $\text{Arg}(1+w)$  [参看 (9)]. 对于足够小的  $w = u + vi$ , 虚部为主值  $\arg(1+w)$ , 就是说包含于  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间; 而同时虚部是  $u$  与  $v$  的连续函数, 不能跳到其他上述区间之内, 因之, 对于所有的  $|w| < 1$ , 它都恰好等于主值  $\arg(1+w)$ . 由此得以证明, 等式 (12) 在整个圆  $|w| < 1$  内部成立.

在 (12) 中将  $w$  换为  $-w$ , 并从级数 (12) 减去这样得到的级数, 我们就得出有用的展式<sup>①</sup>:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w} = w + \frac{w^3}{3} + \cdots + \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (13)$$

这个展式适用于  $|w| < 1$ .

<sup>①</sup>因为差数  $\ln(1+w) - \ln(1-w)$  的虚部介于  $-\pi$  与  $\pi$  之间, 所以这个差数刚好就是主值  $\ln \frac{1+w}{1-w}$ .



**459. 三角函数及反三角函数** 我们知道 [404(12) 与 (13)], 对于实数  $x$ , 函数  $\cos x$  与  $\sin x$  可表为以下的级数:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

很自然的, 对于任意复数  $z$  的函数  $\cos z$  与  $\sin z$ , 就用类似的级数

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (14)$$

来定义, 此二级数在变量  $z$  的全平面上都收敛.

这种引进三角函数的方法, 对于我们已经不是新的了: 在第 443 目中, 还在实数域里的时候, 我们就已经 (为了讨论这些分析上重要的函数时不用到几何) 应用了这种方法. 仿效那里所作的论证, 就可以在这里也建立起余弦与正弦的和角定理, 化简公式, 周期性, 以及它们的微分法 (但已是对于复值自变量而言了).

不过要得出那些结果, 还可以利用其他的办法 —— 建立三角函数与指数函数之间的关系. 即是把第 457 目中对于  $z = yi$  所作的加以推广, 就可以对于任意的复数  $z$  都得出 [参看 (5)]

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \cdot \sin z,$$

而由此推知 [参看 (7)]

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \quad (15)$$

这些公式就将三角函数的研究工作完全化成指数函数的研究工作 [可以不用 (14), 而用 (15) 给出三角函数的定义]. 我们建议读者根据公式 (15), 以重新证明以上所提到的余弦及正弦之各项性质, 并且再确定: 1)  $\cos z$  与  $\sin z$  除掉  $2k\pi$  ( $k$  为整数) 以外, 没有其他的周期, 2) 这两个函数的全部的根尽皆是实的.

如若在 (15) 中取  $z = yi$  ( $y$  是实数), 则得出

$$\cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y, \quad \sin yi = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot i = i \operatorname{sh} y. \quad (16)$$

这样一来, 就建立了实变量的双曲线函数与纯虚变量的三角函数之间的直接关系. 有趣的是: 注意  $\cos yi$  乃是实数, 恒大于 1.

现在, 利用和角定理, 可以写出

$$\begin{aligned} \cos(x + yi) &= \cos x \cdot \cos yi - \sin x \cdot \sin yi, \\ \sin(x + yi) &= \sin x \cdot \cos yi + \cos x \cdot \sin yi \end{aligned}$$

或 [注意 (16)]

$$\begin{aligned} \cos(x + yi) &= \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \sin(x + yi) &= \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y, \end{aligned}$$

而由此, 余弦与正弦就分成实部与虚部了.



函数  $\operatorname{tg} z$  与  $\operatorname{ctg} z$  是用公式

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} \quad \left( z \neq \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \right), \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} \quad (z \neq k\pi)\end{aligned}$$

来定义, 它们具有周期  $\pi$ .

将第 449 目中所得到的  $\operatorname{tg} x$  与  $x \cdot \operatorname{ctg} x$  的展式中的实变数  $x$ , 换成复变数  $z$  以后, 仍然保持有效.  $x \cdot \operatorname{ctg} x$  与  $x \cdot \operatorname{cth} x$  展式的相似之点, 如果考虑到从 (16) 推出的关系式

$$\operatorname{tgy} i = i \cdot \operatorname{th} y, \quad \operatorname{ctgy} i = -i \cdot \operatorname{cth} y,$$

那么就会成为完全显然的了.

在反三角函数中, 我们选反正切函数与反正弦函数来讲.

由于三角函数化为了指数函数, 因而很自然的就预料到: 其反函数是与对数函数有关的.

我们从某一项注释来入手, 这就是:  $w = \operatorname{tg} z$  不会取值为  $\pm i$  (这一点由反面来论证就很容易明白). 设  $w \neq \pm i$ ; 此时方程

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = w$$

可以解出  $z$  来:

$$e^{2zi} = \frac{1 + wi}{1 - wi}, \quad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + wi}{1 - wi}.$$

反函数  $\operatorname{Arctg} w$  这样的表达式, 显而易见, 和  $\operatorname{Ln}$  一起都是无穷多值的.

如果对数取其主值, 那么我们就得到**反正切的主值**

$$\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + wi}{1 - wi} \quad (w \neq \pm i),$$

其特点就在于其实部是包含在区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  里:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(\operatorname{arctg} w) < \frac{\pi}{2}.$$

根据公式

$$\operatorname{Arctg} w = \operatorname{arctg} w + k\pi \quad (k \text{ 为整数}),$$

就得出其他的值.

在级数 (13) 中, 用  $wi$  去替换  $w$ , 我们就得出反正切的主支的展式

$$\operatorname{arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

此展式对于  $|w| < 1$  成立<sup>①</sup>.

最后, 我们来看方程

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

<sup>①</sup>当  $w = \pm i$  时, 函数  $\operatorname{arctg} w$  就成为  $\infty$ .



对于  $z$  的解

$$e^{2iz} - 2wi \cdot e^{iz} - 1 = 0, \quad e^{iz} = wi \pm \sqrt{1 - w^2},$$

由此推知

$$z = \operatorname{Arcsin} w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(wi \pm \sqrt{1 - w^2});$$

在这里我们也得出了无穷多值函数。

我们限制取对数的主值:

$$z = \frac{1}{i} \ln(wi \pm \sqrt{1 - w^2}).$$

当  $w = +1$  或  $w = -1$  时, 根式成为 0, 我们便分别得出  $z = \frac{\pi}{2}$  或  $z = -\frac{\pi}{2}$ , 就取这两个值作为反正弦的主值. 现在设  $w \neq \pm 1$ , 则在我们面前就有两个  $z$  值可供选择. 显而易见,

$$(wi + \sqrt{1 - w^2})(wi - \sqrt{1 - w^2}) = -1,$$

于是

$$\frac{1}{i} \ln(wi + \sqrt{1 - w^2}) + \frac{1}{i} \ln(wi - \sqrt{1 - w^2}) = \pm \pi,$$

因而即有

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{i} \ln(wi + \sqrt{1 - w^2}) \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{i} \ln(wi - \sqrt{1 - w^2}) \right) = \pm \pi,$$

同时其虚部仅相差一符号. 因为每一个实部皆不能出于限制区间  $(-\pi, \pi]$ , 故其中仅有一个<sup>①</sup>是被包含在  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间; 其所对应的反正弦的值就取作主值. 只有在两个实部皆等于  $\frac{\pi}{2}$  或  $-\frac{\pi}{2}$  的情形下, 是个例外; 此时便将具有正虚部的值取作主值<sup>②</sup>. 可以说, 限制条件就是: 反正弦的主值要由条件

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re}(\operatorname{arcsin} w) \leq \frac{\pi}{2}$$

来确定.

不难验证, 其他的值可表成公式

$$\operatorname{Arcsin} w = \operatorname{arcsin} w + 2k\pi, \quad \operatorname{Arcsin} w = (2k + 1)\pi - \operatorname{arcsin} w \quad (k \text{ 为整数}).$$

在最末尾我们提一下  $\operatorname{arcsin} w$  依照  $w$  幂次的展式. 在实变量的区域中, 我们已经看到了对于级数

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

[它表示  $\sin x$ ] 加以反演即得级数

$$x = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

[它表示  $\operatorname{arcsin} x$ ; 参看 440, 3)]. 因为在复数的情形中, 系数的确定是完全一模一样的, 所以显然可见, 反演级数

$$w = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

<sup>①</sup> 仅有一个而且必有一个 —— 译者注.

<sup>②</sup> 例如  $\operatorname{arcsin} 2 = \frac{\pi}{2} + i \ln(2 + \sqrt{3})$ .



的结果, 就应该得到级数

$$z = w + \frac{1}{2} \cdot \frac{w^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{w^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

其收敛半径  $R = 1$ <sup>①</sup>; 当  $|w| < 1$  时, 它给出  $\operatorname{Arcsin} w$  的一个值. 我们证明, 这恰好就是主值  $\arcsin w$ . 实际上,  $|\operatorname{Re}(z)|$  不能超过

$$|z| < 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{2},$$

由此即推得所要求的结论.

**460. 乘方函数** 设  $a$  与  $b$  为两个复数, 其中  $a \neq 0$ . 此时乘方  $a^b$  的定义是这样的:

$$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a} = e^{b(\ln a + 2k\pi i)} \quad (k \text{ 为整数}),$$

因此乘方一般说来乃是多值的. 当  $k = 0$  时, 就得出所谓的乘方主值:

$$a^b = a^{b \ln a}.$$

为了不致发生混淆, 有时将乘方的一般表达式按照柯西的记法, 记成这样:

$$((a))^b = a^b \cdot e^{2k\pi bi} \quad (k \text{ 为整数}).$$

若  $b$  等于整数, 则第二个因子成为 1: 在此情形下, 乘方仅有一个值. 当  $b$  是不可约简的有理分数  $\frac{p}{q}$  ( $q > 1$ ) 时, 则乘方就恰恰有  $q$  个不同的值. 最后, 当  $b$  是任何其他值时, 乘方的值就构成无穷集合.

例如,

$$2^i = e^{i \ln 2} = \cos(\ln 2) + i \cdot \sin(\ln 2), ((2))^i = 2^i \cdot e^{-2k\pi} \quad (k \text{ 为整数}),$$

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}}, ((i))^i = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad (k \text{ 为整数}).$$

若  $m$  是任意的常复数, 则一般说来, 乘方函数  $((z))^m$  乃是多值的. 其主支为  $(z \neq 0)$ <sup>②</sup>

$$z^m = e^{m \cdot \ln z}.$$

由关系式

$$(1+z)^m = e^{m \cdot \ln(1+z)}$$

出发, 与在第 447 目, 2) 中完全同样地, 可以得出二项式级数:

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} z^n + \cdots.$$

假如  $|z| < 1$ <sup>③</sup>, 则此级数对于任意的复数  $m$  都是收敛的, 并且从得出这个级数的方法的本身就可看出, 这级数恰好就表达二项式乘方的主值. 阿贝尔阿贝尔曾经研究过这个级数.

①当  $w = \pm 1$  时, 反正弦的导数  $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$  的连续性被破坏了.

②如果  $R(m) > 0$ , 有时就对于  $z = 0$  确定  $z^m = 0$ .

③当  $z = -1$  时, 乘方  $(1+z)^m$  本身或其充分高阶的导数一定会有间断点; 而  $m$  等于 0 或自然数时, 则为唯一的例外.



461. 例 在本目中, 我们用若干实例来显示出, 复变量及其初等函数如何来为实数分析服务.

1) 如果将函数  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  表成

$$y = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

的形状, 则其各级导数便很容易求得. 即

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \frac{1}{2i} (-1)^{n-1} (n-1)! \left[ \frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \cdot \frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^n} \cdot \left[ nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \dots \right]. \end{aligned}$$

例如,

$$\left( \frac{1}{x^2+1} \right)^{(4)} = 24 \cdot \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2+1)^5}.$$

显而易见, 同时也就得出了函数  $\operatorname{arctg} x$  的各阶导数 [参看 116,8) 与 118,4)].

2) 通过指数函数以表出余弦与正弦的欧拉公式, 可以多方利用. 例如, 我们要想找和数

$$s = \sum_1^n \cos kx$$

的简短表达式, 这问题可以简化成几何级数的求和问题:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left( \sum_1^n e^{kxi} + \sum_1^n e^{-kxi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}} + \frac{e^{-xi} - e^{-(n+1)xi}}{1 - e^{-xi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{(n+\frac{1}{2})xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{\frac{1}{2}xi}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{-(n+\frac{1}{2})xi}}{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2i} (e^{(n+\frac{1}{2})xi} - e^{-(n+\frac{1}{2})xi}) - \frac{1}{2i} (e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi})}{\frac{1}{2i} (e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi})} \\ &= \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3)  $\sin x$  与  $\cos x$  的正整数次方, 以及它们的正整数次方的乘积, 都可以表成倍角的正弦与余弦的线性组合. 先依牛顿二项式展开以下表达式:

$$\sin^n x = \left( \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \right)^n, \quad \cos^n x = \left( \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \right)^n \dots$$



仍然再利用欧拉公式, 这问题就很容易的得以解决. 例如,

$$\begin{aligned}
 \sin^5 x &= \frac{1}{32i} (e^{5xi} - 5e^{3xi} + 10e^{xi} - 10e^{-xi} + 5e^{-3xi} - e^{-5xi}) \\
 &= \frac{1}{16} \left( \frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} - 5 \frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + 10 \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x); \\
 \cos^4 x \sin^3 x &= \left( \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \right)^4 \left( \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \right)^3 \\
 &= -\frac{1}{128i} (e^{2xi} - e^{-2xi})^3 (e^{xi} + e^{-xi}) \\
 &= -\frac{1}{128i} (e^{6xi} - 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} - e^{-6xi}) (e^{xi} + e^{-xi}) \\
 &= -\frac{1}{128i} (e^{7xi} + e^{5xi} - 3e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} + 3e^{-3xi} - e^{-5xi} - e^{-7xi}) \\
 &= -\frac{1}{64} (\sin 7x + \sin 5x - 3 \sin 3x - 3 \sin x).
 \end{aligned}$$

也可以建立出一般的公式:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sin^{2\nu} x &= \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}} \left\{ \cos 2\nu x - 2\nu \cos(2\nu - 2)x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\nu(2\nu - 1)}{1 \cdot 2} \cos(2\nu - 4)x - \cdots + \frac{(-1)^\nu}{2} \frac{2\nu(2\nu - 1) \cdots (\nu + 1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \right\}, \\
 \text{(b)} \quad \sin^{2\nu+1} x &= \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}} \left\{ \sin(2\nu + 1)x - (2\nu + 1) \sin(2\nu - 1)x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2\nu + 1)2\nu}{1 \cdot 2} \sin(2\nu - 3)x + \cdots + (-1)^\nu \frac{(2\nu + 1)2\nu \cdots (\nu + 2)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \sin x \right\}, \\
 \text{(B)} \quad \cos^n x &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos nx + n \cos(n - 2)x + \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2} \cos(n - 4)x + \cdots \right\},
 \end{aligned}$$

此处公式 (B) 中后面的项有以下的形状:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\nu(2\nu - 1) \cdots (\nu + 1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu}, \quad \text{或} \quad \frac{(2\nu + 1)2\nu \cdots (\nu + 2)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \cos x,$$

到底是哪一种就得看  $n = 2\nu$  呢, 还是  $n = 2\nu + 1$ .

当积分时, 这样变换形状是很有利的 [参看 287].



4) 积分学中 (有关于求原函数的) 一些最简单的公式, 可以推广到实变量或复变量的复值函数<sup>63)</sup>.

假定要求出积分

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

此问题即等价于要求出积分

$$\int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{(a+bi)x} dx,$$

而根据基本公式, 此积分等于

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x} &= \frac{\cos bx + i \sin bx}{a+bi} e^{ax} \\ &= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + i \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}. \end{aligned}$$

令实部与虚部各各相等, 就得到我们所已知的积分 [参看 271,6)]<sup>64)</sup>.

形如

$$\int P(x) \cdot e^{ax} dx$$

的积分 (其中  $P(x)$  是整多项式) 的计算公式 [271,4)], 也可以推广到复数  $a$  的情形. 此时不仅是积分 [271,4)]

$$\int P(x) \cos bx dx, \quad \int P(x) \sin bx dx,$$

而且连积分 [289]

$$\int P(x) e^{ax} \cos bx dx, \quad \int P(x) e^{ax} \sin bx dx$$

也都可以归结到上述积分.

5) 对数函数与反三角函数之间的关系, 使得积分学中许多看来似乎全然不同的公式, 可以合并到一起, 并且还能够建立出新的公式来. 例如, 积分

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad \text{及} \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

<sup>63)</sup> 注意, 远非所有与原函数有关的公式当从实函数变为复函数时仍保持有效. 例如容易证实, 公式  $\int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C$  不可能推广到实直线范围之外的不论任何地方; 不但如此, 对复变量  $z$  的函数  $\ln |z|$  在任何地方都不可微 (不排除实轴上的点). 类似地, 等式  $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C$  (其中假设变量  $x$  是实数) 中一旦数  $a$  不再是实数, 等式便失效 (同时函数  $\ln |x+a|$  对复数  $a$  关于实变量  $x$  仍然是可微的).

然而对于初等函数的原函数的基本公式, 依靠已经证明的对导数的公式, 在复变量时的情形是容易验证的. 特别地, 由于已知的公式  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ , 其中  $\ln$  表示对数的主值, 我们有  $\int \frac{dz}{z} = \ln z + C$ , 同时  $z$  可以在复平面上不包含实轴上区间  $(-\infty, 0]$  的任意区域  $\mathcal{D}$  的范围内变化. 关于区间  $(-\infty, 0]$  的约定是本质的: 在这个区间的点处, 对数主值受到间断, 而导数  $(\ln z)'$  不存在.

进一步验证所遇到的对于原函数的公式以及关于每一个公式应用区域的相应约定的工作留给读者 (注意, 在一系列公式中, 应用形如  $\int f(x) dx = F(x)$  的记法 —— 没有任意常数; 这种记法意味着, 函数  $F$  是对  $f$  的原函数).

更为详尽的复函数的积分是在专门的复变函数论的教科书中加以研究.

<sup>64)</sup> 此处变量  $x$  假定是实的.



或

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \quad \text{及} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$$

由于将  $x$  替换为  $xi$ , 就可将其中的一个归入于另外一个<sup>65)</sup>.

6) 分离已知的复数展式中的实部与虚部, 有时可以很简单的得出实数域里有用的展式.

(a) 取级数 ( $|z| < 1$ )

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

并设  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . 在右侧我们得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

而在左侧则得到表达式

$$\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{(1 - r \cos \theta) - ir \sin \theta} = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} + \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \cdot i.$$

令等式两侧实部, 虚部分别相等 (并消去  $r$ ), 我们便导出展式:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta - r}{1 - 2r \cos \theta + r^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cos n\theta, \\ \frac{\sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \sin n\theta. \end{aligned}$$

[参看 440,11).]

(6) 对于对数级数

$$\ln(1-z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1)$$

也来如法炮制, 便得到: 对于  $r < 1$  [参看 440,(1)]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) &= - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n}, \\ \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n}. \end{aligned}$$

设  $0 < \theta \leq \pi$ ; 因为当  $r = 1$  时, 右侧之二级数仍然收敛 [385,2)], 故可利用阿贝尔定理 [437,6°], 取  $r \rightarrow 1-0$  时之极限. 在头一个式子的左侧我们得到  $\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos \theta) = \ln 2 \sin \frac{\theta}{2}$ , 而在后一个式子的左侧则得到  $\operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} \right) = \frac{\pi - \theta}{2}$ . 因而我们就有

$$\ln 2 \sin \frac{\theta}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad \frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta \leq \pi).$$

<sup>65)</sup>为使所给替换是正确的, 所列举公式中的变量  $x$  应当认为是复的. 使所给例子的公式成立的复平面的区域, 可分别根据对数、反正切、反正弦与平方根的主值的性质来求出 (为了详细, 读者应参考复变函数论的教科书).



[在本教程第三卷中, 我们还将碰到许多值得注意的三角展式.]

7) 在第 447 目, 8) 中, 我们已见到了展式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \cdot a^n,$$

其中  $P_n(x)$  是勒让德多项式. 当  $x$  在  $-1$  与  $1$  之间变化时, 可在此处命  $x = \cos \theta$ :

$$(1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \cdot a^n.$$

现在用  $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$  来代替  $2 \cos \theta$ ; 我们便得到

$$\begin{aligned} (1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} &= [1 - a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + a^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1 - ae^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - ae^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}ae^{i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a^2e^{2i\theta} + \dots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{2}ae^{-i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a^2e^{-2i\theta} + \dots\right). \end{aligned}$$

将上式中两个级数按照一般法则乘出来, 再令两个展式中  $a^n$  的系数相等, 我们就导出了  $P_n(\cos \theta)$  的表达式:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{(2n-1)!!}{2n!!}(e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}) + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{2}(e^{(n-1)i\theta} + e^{-(n-1)i\theta}) \\ &\quad + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(e^{(n-2)i\theta} + e^{-(n-2)i\theta}) + \dots \end{aligned}$$

现在可顺次将括弧替换为  $2 \cos n\theta, 2 \cos(n-1)\theta, 2 \cos(n-2)\theta$ , 等等. 因为这里所有的系数都是正的, 所以非常明显, 当  $\theta = 0$  时, 也就是说当  $x = \cos 0 = 1$  时, 这个表达式达到最大值. 这样一来, 利用从复变函数范围内来考虑, 我们就得出了完全属于实数域的结果: 当  $x$  在区间  $[-1, 1]$  中变化时, 所有的勒让德多项式皆在端点  $x = 1$  处达到其最大值.

## §6. 包络级数与渐近级数 · 欧拉-麦克劳林公式

**462. 例** 在上一章的 §9, 我们介绍了对发散级数的“广义和”的一些重要定义, 同时也知道了, 级数的部分和本身最不适于这个“和”的近似计算. 现在, 我们回到发散级数问题, 但完全是另一个方面: 我们证明: 在确定的条件下, 在一定的范围内, 发散级数的部分和可能是对这个级数“引起”的在某种意义上的数的最好的近似. 为使读者预先感受到在近似计算中应用发散级数的实际重要性, 只需指出, 为了预先计算天体的位置, 天文学家习惯于使用这个方法, 并且所得结果的准确性是完全令人满意的.

我们力求一开始用两个简单的例子来解释对我们来说必要的概念.

1) 考虑对数级数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (1)$$



已熟知 [405]: 这个级数仅对  $-1 < x \leq 1$  收敛并表示函数  $\ln(1+x)$ . 在这个区间之外 (比如  $x > 1$ ) 级数发散且不存在和. 然而对  $x > 1$ , 函数  $\ln(1+x)$  的拓展与这个发散级数的一个截段有关, 因为按泰勒公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

其中余式  $r_n(x)$ , 比如说, 可以取拉格朗日形式 [126]:

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0 < \theta, \theta_1 < 1).$$

结果是: 余式绝对值小于级数被丢掉的第一项, 并同这一项有相同的符号. (这正像莱布尼茨型的收敛级数一样!) 于是在  $x > 1$  时, 如果用发散级数 (1) 的一个截段代替  $\ln(1+x)$  的值, 那么我们便有对误差的合适估计 (甚至还知道其符号). 为了数  $\ln(1+x)$  的近似计算, 可利用所说的这一截段, 这就足够了!

当然, 当  $0 < x \leq 1$  时, 随  $n$  增大到无穷, 误差便趋于 0, 而当给定  $n$ , 但  $x \rightarrow 0$  甚至有

$$\frac{r_n(x)}{x^n} \rightarrow 0, \text{ 即 } r_n(x) = o(x^n),$$

即误差同  $x$  相比是其大于  $n$  阶的高阶无穷小. 对任意固定的  $x > 1$ , 所估计的项本身随  $n$  的无限增加而增长到无穷大, 因而对给定的  $x$ , 谈不到依靠  $n$  来使得误差任意小, 然而正如估计本身所表明的

$$|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

当  $x$  充分接近 1 时, 仍然可以作到使误差任意小! 若  $x$  固定, 但接近于 1, 则级数 (1) 的诸项甚至在  $x > 1$  时, 最初将按绝对值减小, 即只要比值

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x < 1, \text{ 或 } n < \frac{1}{x-1}$$

时即是如此, 尔后才开始增加. 在标号  $n = E\left(\frac{1}{x-1}\right)$  截断级数较为有利: 这时对给定的  $x$ , 可得数  $\ln(1+x)$  的最好近似.

在上述例子中, 所研究的级数毕竟在  $-1 < x \leq 1$  时还是收敛的. 第二个在这方面富有教益的例子是: 考虑一个总是发散的级数.

2) 现在设 (对于  $x > 0$ )

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k},$$

其中  $0 < c < 1$  (级数收敛!).

当  $k < x$  时, 我们有

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \cdots$$

可是倘若  $k \geq x$ , 则此级数发散. 但是虽然如此, 我们先形式地将此展式代入定义  $F(x)$  的级数里去, 再归并同类项即由此得出级数

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \cdots \quad (2)$$



其中

$$A_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} c^k.$$

不难确知, 确定各系数  $A_n$  的各级数全都是收敛的. 但是前面的那个级数却显然发散, 因为

$$|A_n| \geq n^{n-1} c^n \quad \text{即} \quad \left| \frac{A_n}{x^n} \right| \geq \frac{n^{n-1} c^n}{x^n},$$

而最后的表达式当  $n \rightarrow \infty$  时趋于  $\infty$ .

对给定的级数 (2) 其第  $n$  个截段乃是:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{x^\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{\nu-1} k^{\nu-1}}{x^\nu} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 1 + (-1)^{n+1} \frac{k^n}{x^n} \right] \frac{c^k}{x+k}, \end{aligned}$$

因此余式

$$r_n(x) = F(x) - S_n(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n c^k}{(x+k)x^n}.$$

且此处有

$$r_n(x) = \theta \cdot (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^n c^k \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \theta \cdot \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

又一次出现所熟悉的、莱布尼茨型级数型的特点, 虽然所考虑的级数是发散级数. 当然, 对固定的  $x$ , 使部分和  $S_n(x)$  与  $F(x)$  相比较时, 显然不能得到任意的精确度, 但对充分大的  $x$  可以达到任意的精确度. 对于所考虑的情况, 如下的附注保持有效: 增加保留的项数, 仅到诸项的绝对值还是递减时, 即  $\left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| < x$ , (在增大精确度的意义下) 才是有利的.

显然, 对固定的  $n$ , 若  $x \rightarrow \infty$ , 余式  $r_n(x)$  趋于零. 不仅如此, 因为这时

$$x^n r_n(x) = \frac{\theta A_{n+1}}{x} \rightarrow 0,$$

则

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad (3)$$

因此,  $r_n(x)$  乃是高于  $n$  阶的无穷小.

为了近似表示  $F(x)$ , 保留的发散级数的项数越多, 则可期望当  $x \rightarrow \infty$  时, 这个近似的误差造成的无穷小的阶数越高!

**463. 定义** 现在转向一般的叙述与定义. 设给定数值级数

$$\sum_0^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots \quad (4)$$

(a) 若其部分和依次地时而小于时而大于某个数  $A$ , 即, 若由公式

$$A = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + r_n \quad (5)$$



定义的余式是交错的, 则说级数 (4) 包络数  $A$ .

简单的等式

$$r_n = a_{n+1} + r_{n+1}$$

以显然的方式给出与之等价的定义.

(6) 级数 (4) 被称为是包络数  $A$  的, 是指: 若首先, 这个级数是交错级数, 其次, 公式 (5) 中的余式  $r_n$  按绝对值小于数  $a_{n+1}$ , 并与其有相同的符号<sup>①</sup>.

在上一目我们已遇到这样的级数: 级数 (1) 显然对  $\ln(1+x)$  是包络的 (对任意  $x > 0$ ), 而级数 (2) 对在 2) 中定义的  $F$  是包络的 (也是当  $x > 0$ ).

注意, 在发散级数 (4) 的情形, 它可能同时包络数  $A$  的无穷集合. 例如级数

$$1 - 2 + 2 - 2 + 2 - \dots$$

具有部分和  $1, -1, 1, -1, \dots$ , 显然它包络区间  $(-1, 1)$  中的每一个数.

定义 (6) 中所述包络级数的性质, 通常使其成为近似计算的重要工具, 不言而喻, 远不是任何包络数  $A$  的级数都可以用于这个目的.

设代替具有常数项的级数 (4) 及常量  $A$ , 是如下的函数项级数

$$\sum_0^{\infty} a_n(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots \quad (6)$$

及某个函数  $A(x)$ , 同时所有的函数  $a_n(x)$  与  $A(x)$  都给定在同一个区域  $\mathcal{X}$ . 刚才引入的包络给定数的数值级数的定义自然可推广到包络已知函数的函数级数的情况. 不再谈论它而引入一个新的定义, 这是有关这样一种特别的情况: 级数的项与 (6) 类似, 含有一个参数  $x$ , 它的变化区域  $\mathcal{X}$  以有限的或无穷的数  $\omega$  作为聚点. 像往常一样, 我们用等式

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + r_n(x)$$

来定义余式  $r_n(x)$ .

(B) 级数 (6) 被称为函数  $A(x)$  在  $x = \omega$  附近的渐近展开, 是指: 若对任意固定的  $n$  有

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{r_n(x)}{a_n(x)} = 0^{(2)}. \quad (7)$$

这个事实可记为:

$$A(x) \sim a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + \dots$$

由于

$$r_n(x) = a_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$$

以及

$$\frac{r_n(x)}{a_n(x)} = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \cdot \left[ 1 + \frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)} \right],$$

<sup>①</sup>若在定义中假设的条件仅对  $n$  充分大成立 (比如说, 对  $n \geq n_0 > 1$ ), 在这种情况下, 我们仍保留名词 “包络的”.

<sup>②</sup>同时, 自然地, 假设  $a_n(x)$  异于零 (至少对于充分接近  $\omega$  的  $x$  而言).



如同从 (7) 推出的, 得到

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0. \quad (8)$$

容易证明如下断言:

若级数 (6) 包络函数  $A(x)$ , 同时适合 (8) 式, 则所说的级数就是函数  $A(x)$  在  $x = \omega$  附近的渐近展开.

事实上, 我们有

$$|r_n(x)| \leq |a_{n+1}(x)|,$$

因此

$$\left| \frac{r_n(x)}{a_n(x)} \right| \leq \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right|.$$

那么从假设 (8) 直接推出 (7).

上文中作为例子引入的两个级数 (1) 与 (2), 都是相应函数的渐近展开, 第一个是在  $x = 0$  附近, 而第二个是在  $x = \infty$  附近.

在以下的叙述中, 我们通常会遇到形如

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (9)$$

在  $x = \infty$  附近的渐近展开式. 注意上述关系式的意义仅仅是:

无论怎样的固定的  $n$ , 总有

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

或更详细地

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \cdots - \frac{a_n}{x^n} \right] x^n = 0. \quad (10)$$

于是, 对于“大的” $x$  成立近似公式

$$A(x) \doteq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n},$$

其性质由等式 (10) 描述.

若把这个等式改写成:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \right] \cdot x^n = a_n, \quad (10^*)$$

则函数  $A(x)$  的形如 (9) 的渐近展开的唯一性就变得很明显了 —— 当然要假定这个函数一般说来容许这样的展开, 依照公式 (10\*), 一切系数  $a_n$  都可依次完全地唯一确定!

然而相反的断言不正确: 不同的函数可能有同一个渐近展开. 例如, 已知  $e^{-x} \cdot x^n \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ ; 所以显然形如  $A(x) + C \cdot e^{-x}$  的函数与函数  $A(x)$  有同样的渐近展开.

附注 有时为了方便, 我们记

$$B(x) \sim \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n},$$



其中  $B(x), \varphi(x), \psi(x)$ ——定义在  $\mathcal{X}$  上的函数, 这意味着

$$\frac{B(x) - \varphi(x)}{\psi(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

**464. 渐近展开的基本性质** 当谈到渐近展开时, 这里与今后, 都理解为 (9) 形式的展开<sup>①</sup>. 所有被研究的函数都假设定义在具有聚点  $+\infty$  的区域  $\mathcal{X}$  内.

1° 若

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad (11)$$

则显然

$$A(x) \pm B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{x^n},$$

即渐近展开式可以逐项相加或相减.

2° 现在证明: 乘积  $A(x) \cdot B(x)$  的渐近展开可以把展式 (11) 照“柯西的规则”用形式上相乘的方法得到.

对任意的  $n$ , 我们有

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

及

$$B(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

连乘后得

$$A(x) \cdot B(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

其中

$$c_m = \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i}.$$

这与断言

$$A(x) \cdot B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$$

等价, 后者是我们原本应予证明的.

若  $B(x)$  与  $A(x)$  恒等, 我们便得平方  $[A(x)]^2$  的渐近展开, 同样可得函数  $[A(x)]^m$  的渐近展开, 其中  $m$  是任意自然数.

3° 其次, 设给定在点  $y = 0$  解析的某个函数  $F(y)$ , 即在这个点的邻域中可展开为幂级数:

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m y^m = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_m y^m + \cdots$$

除此以外考虑函数  $A(x)$ , 它容许无自由项的渐近展开:

$$A(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (12)$$

<sup>①</sup>这样的理论是由庞加莱 (Poincaré) 充分发展了的, 他给出了在微分方程理论和天体力学中的重要应用.



因此, 当  $x \rightarrow \infty$  时  $A(x) \rightarrow 0$ . 在这种情况下, 至少对于充分大的  $x$ , 复合函数

$$F(A(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m [A(x)]^m$$

是有意义的.

若  $A(x)$  的每一个幂  $[A(x)]^m$  可用  $A(x)$  的渐近展开式代替且形式上适合归并同类项, 则函数  $F(A(x))$  也容许有渐近展开, 这个展开可由上述展开式得到 [参看 446].

注意, 首先在点  $y = 0$  的邻域内函数  $F(y)$  有连续的 (从而是有界的) 导数, 且对这个邻域中的任意两点  $y$  与  $\bar{y}$  成立不等式

$$|F(\bar{y}) - F(y)| \leq L \cdot |\bar{y} - y| \quad (L \text{ 为常数}).$$

用  $A_n(x)$  表示 (12) 式的级数的第  $n$  个截段:

$$A_n(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}.$$

当固定  $n$  时对充分大的  $x$ , 两个函数  $A(x)$  与  $A_n(x)$  落到刚才提到的邻域, 因此当  $x \rightarrow \infty$  时

$$|x^n [F(A(x)) - F(A_n(x))]| \leq L \cdot x^n |A(x) - A_n(x)| = L \cdot x^n |r_n(x)| \rightarrow 0,$$

于是

$$F(A(x)) = F(A_n(x)) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

另一方面, 根据我们已知的在 446 目的定理, 对充分大的  $x$ :

$$\begin{aligned} F(A_n(x)) = & \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (A_n(x))^m = \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} \\ & + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \cdots + \frac{\beta_1 a_n + \cdots + \beta_n a_1^n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \end{aligned}$$

由前面的关系式, 对  $F(A(x))$  也可以写出同样的等式, 这就证明了我们说过的渐近展开式

$$\begin{aligned} F(A(x)) \sim & \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} \\ & + \cdots + \frac{\beta_1 a_n + \cdots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \cdots \end{aligned}$$

的正确性.

例如, 若取

$$F(y) = e^y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!},$$

则有

$$\begin{aligned} e^{A(x)} \sim & 1 + \frac{a_1}{x} + \left[ \frac{a_2}{1!} + \frac{a_1^2}{2!} \right] \frac{1}{x^2} + \left[ \frac{a_3}{1!} + \frac{2a_1 a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} \right] \frac{1}{x^3} \\ & + \cdots + \left[ \frac{a_n}{1!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!} \right] \frac{1}{x^n} + \cdots \end{aligned}$$



函数  $B(x)$  与  $A(x)$  的渐近展开的相除, 在下一函数假设其自由项  $a_0$  异于零时, 是关于级数代入级数的定理的一个有趣应用. 因为与 488 目相比较, 这里无需引入任何新的思想, 我们就不再停留于此问题了.

4° 我们转而讨论渐近展开式的积分.

设函数  $A(x)$  在区间  $\mathcal{X} = [a, +\infty)$  连续并容许有渐近展开式

$$A(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (13)$$

它以含有  $\frac{1}{x^2}$  的项开头. 于是对于这个函数存在着由任意  $x \geq a$  到  $+\infty$ <sup>①</sup> 的有限积分, 并且这个积分 (作为  $x$  的函数) 同样也有渐近展开式

$$\int_x^\infty A(x)dx \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots \quad (14)$$

它可形式地从 (13) 式逐项积分得到.

事实上, 设

$$A_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{x^k}, \quad r_n(x) = A(x) - A_n(x),$$

当任取  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 且对充分大的  $x$  任意固定  $n$ , 则有

$$x^n \cdot |r_n(x)| < \varepsilon. \quad (15)$$

若  $X > x$ , 则

$$\begin{aligned} \int_x^X A(x)dx &= \int_x^X A_n(x)dx + \int_x^X r_n(x)dx \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k-1} \left( \frac{1}{x^{k-1}} - \frac{1}{X^{k-1}} \right) + \int_x^X r_n(x)dx. \end{aligned}$$

当  $X \rightarrow \infty$  时得

$$\int_x^\infty A(x)dx = \frac{a_2}{1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + R_{n-1}(x), \quad (16)$$

其中

$$R_{n-1}(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_x^X r_n(x)dx = \int_x^\infty r_n(x)dx.$$

因为根据 (15) 式, 对充分大的  $x$

$$\left| \int_x^X r_n(x)dx \right| \leq \int_x^X |r_n(x)|dx < \varepsilon \int_x^X \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-1} \left( \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}} \right),$$

<sup>①</sup>我们记得 [参看 373 目]: 极限

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$$

称之为函数  $f(x)$  从  $a$  到  $\infty$  的积分.



则当  $X \rightarrow \infty$  时取极限,(对上述的  $x$ ) 有

$$|R_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{x^{n-1}},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1} R_{n-1}(x) = 0.$$

而这一点连同等式 (16) 就证明了渐近展开式 (14) 的正确性.

可以证明: 函数  $A(x)$  的渐近展开式中存在  $\frac{a_1}{x}$  ( $a_1 \neq 0$ ) 这样的项时, 就使得这个函数从  $x$  到  $\infty$  的有限积分不可能存在 [参看后面的 474].

附注 有趣的是: 对渐近展开式形式地逐项微分, 一般说来, 是不容许的, 作为例子考虑函数  $F(x) = e^{-x} \cdot \sin e^x$ . 因为对任意  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \cdot x^n = 0,$$

那么  $F(x) \sim 0$ , 即函数  $F(x)$  的渐近展开式由零组成. 然而对导数  $F'(x) = -e^{-x} \cdot \sin e^x + \cos e^x$  来说, 这样的展开式是不可能的, 因为极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} F'(x)$  甚至都不存在.

**465. 推导欧拉-麦克劳林公式** 这个公式在分析中起着重要作用; 特别是, 为了得到具体的包络和渐近展开, 时常要用这个公式. 我们给出它的推导, 并指出它的应用.

我们从带有定积分形式余项的泰勒公式出发 [318]:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + h) - f(x_0) \\ &= hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \rho, \end{aligned}$$

其中余式

$$\rho = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_0+h} f^{(m+1)}(t)(x_0 + h - t)^m dt = \int_0^h f^{(m+1)}(x_0 + h - z) \frac{z^m}{m!} dz.$$

这里依次地取函数

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad f(x), \quad hf'(x), \quad h^2 f''(x), \quad \cdots, \quad h^{m-2} f^{(m-2)}(x)$$

替代函数  $f$ , 同时相应地以

$$m, \quad m-1, \quad m-2, \quad m-3, \quad \cdots, \quad 1$$

替代  $m$ . 我们得一组  $m$  个等式:

$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(x_0) + \frac{h}{2!} f'(x_0) + \frac{h^2}{3!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_0$	1
$\Delta f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_1$	$A_1$
$h\Delta f'(x_0) = h^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_2$	$A_2$
.....	...
.....	...
$h^{m-2} \Delta f^{(m-2)}(x_0) = \frac{h^{m-1}}{1!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_{m-1}$	$A_{m-1}$

<sup>①</sup>我们在这里与今后, 不再专门约定, 总是假设所有提到的导数都存在并且连续.



消去方程组右端所有的导数; 为此把第一个等式与所有其余等式分别乘以数  $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  后逐项相加, 我们选取这些数使得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2!} + A_1 &= 0, \quad \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}A_1 + A_2 = 0, \dots \\ \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m-1)!}A_1 + \frac{1}{(m-2)!}A_2 + \dots + A_{m-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

结果得出:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt + A_1 \Delta f(x_0) + A_2 h \Delta f'(x_0) \\ &\quad + \dots + A_{m-1} h^{m-2} \Delta f^{(m-2)}(x_0) + r, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} r &= -\rho_0 - A_1 \rho_1 - A_2 \rho_2 - \dots - A_{m-1} \rho_{m-1} \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h f^{(m)}(x_0 + h - z) \left\{ \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{hz^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1} h^{m-1} z \right\} dz, \end{aligned}$$

或者更简化些,

$$r = -\frac{1}{h} \int_0^h f^{(m)}(x_0 + h - z) \varphi_m(z) dz, \quad (18^*)$$

其中令

$$\varphi_m(z) = \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{hz^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1} h^{m-1} z \quad (19)$$

显然, 从线性方程组 (17), 系数  $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  可依次唯一确定, 并且它们与函数  $f$ , 数  $x_0$  及  $h$  无关. 同时这些系数是我们已知道的了——这些系数就是把  $\frac{x}{e^x - 1}$  按  $x$  的幂次展开的系数  $\frac{\beta_k}{k!}$  [449, 12)]. 事实上, 如果我们记起数  $\beta$  适合的符号方程

$$(\beta + 1)^k - \beta^k = 0,$$

那么容易证明: 数  $\frac{\beta_k}{k!}$  就是方程 (17) 的解. 由在 449 目所说的  $\beta_k$  可以断定

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta_1}{1!} = -\frac{1}{2}, \quad A_{2p-1} = \frac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!} = 0 \text{ 对 } p > 1, \\ A_{2p} &= \frac{\beta_{2p}}{(2p)!} = (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中  $B_p$  是第  $p$  个伯努利数.

设在有限区间  $[a, b]$  考虑函数  $f(x)$ ; 令  $h = \frac{b-a}{n}$ , 其中  $n$  为自然数, 依次取数

$$a, a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h = b-h$$

为  $x_0$ , 对每个区间  $[a+(i-1)h, a+ih]$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 分别写出 (18) 型的等式, 并且具有余式 (18\*), 并把这些等式逐项相加, 得到<sup>66)</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h) &\equiv \sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1 [f(b) - f(a)] + A_2 h [f'(b) - f'(a)] + \dots \\ &\quad + A_{m-1} h^{m-2} [f^{(m-2)}(b) - f^{(m-2)}(a)] + R, \end{aligned} \quad (21)$$

<sup>66)</sup> 符号  $\equiv$  意味着这里按定义相等, 用它是为了引出新的表示  $\sum_a^b f(x)$ .



其中余式

$$R = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \int_0^h f^{(m)}(a+ih-z) \varphi_m(z) dz \equiv -\frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h f^{(m)}(x+h-z) \varphi_m(z) dz. \quad (21')$$

这个公式就是欧拉-麦克劳林公式, 同时带有余式 (当然, 公式的作者没有把它写出来). 对数  $m$  可以给从 2 开始的不同的值.

**466. 对余式的研究** 首先对函数  $\varphi_m(z)$  作某些说明.

首先, 微分 (19), 得

$$\varphi'_m(z) = \varphi_{m-1}(z) + A_{m-1}h^{m-1}. \quad (22)$$

其次, 对任何  $\geq 2$  的  $m$ , 有

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(h) = 0. \quad (23)$$

第一个从多项式  $\varphi_m(z)$  的形状本身就很明白 [参看 (19) 式], 而第二个可由方程组 (17) 中最后一式推出.

现在证明这样的断言: 函数  $\varphi_{2k}(z)$  (偶数次) 在区间  $[0, h]$  取任何值不可能多于两次, 假设不然, 那么它的导数 [参看 (23) 式]  $\varphi'_{2k}(z) = \varphi_{2k-1}(z)$  (要知道  $A_{2k-1} = 0$ ), 除了区间  $[0, h]$  的端点, 在区间内部, 根据罗尔定理不少于两次取 0 值. 在这种情况下导数  $\varphi'_{2k-1}(z) \equiv \varphi_{2k-2}(z) + A_{2k-2}h^{2k-2}$  按照同一定理, 在  $[0, h]$  内部取 0 值应不少于 3 次, 即函数  $\varphi_{2k-2}(z)$  在这个区间内部取同一值  $-A_{2k-2}h^{2k-2}$  不少于 3 次. 这样逐步降低函数  $\varphi_{2k}$  的次数每次是 2, 最后达到函数  $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}hz$  (二次二项式) 取某个值不少于 3 次. 而这是不可能的! 由此便证明了断言.

由上述断言得出这样重要的推论: 函数  $\varphi_{2k}(z)$  在区间  $(0, h)$  保持其符号, 因为在区间的端点它变为 0 [参看 (23) 式], 它在区间内部已不再可能变为 0. 容易弄清楚函数  $\varphi_{2k}(z)$  保持怎样的符号: 对小的  $z$  值 (意味着在 0 与  $h$  之间处处) 有低阶项  $A_{2k-2}h^{2k-2}z^2$  的符号 ( $A_{2k-1} = 0$ ), 即——因为  $A_{2k-2} = (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}$ ——符号  $(-1)^k$ .

于是, 两个接连的偶次函数  $\varphi_{2k}(z)$  与  $\varphi_{2k+2}(z)$ , 每一个都在  $(0, h)$  保持确定的符号, 但它们的符号相反! 这个说明正是我们现在需要的.

转而研究余式  $R$ , 将假设  $m$  是偶数,  $m = 2k$ , 并假设这次导数  $f^{(2k)}(z)$  与  $f^{(2k+2)}(z)$  在区间  $[a, b]$  上二者都是正的或都是负的.

由  $R$  的表达式分部积分两次, 并考虑到 (22) 与 (23) 式便逐次得到

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k} f^{(2k)}(x+h-z) dz \\ &= \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h (A_{2k}h^{2k} - \varphi'_{2k+1}(z)) f^{(2k)}(x+h-z) dz \\ &= \frac{1}{h} A_{2k}h^{2k} \sum_a^b [f^{(2k-1)}(x+h) - f^{(2k-1)}(x)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+1}(z) f^{(2k+1)}(x+h-z) dz \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi'_{2k+2} f^{(2k+1)}(x+h-z) dz \\
&= A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+2}(z) f^{(2k+2)}(x+h-z) dz
\end{aligned}$$

因为下面画了着重线的诸积分之和, 根据所作的假设, 二者有相反的符号, 那么其中第一个和与表示式

$$A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

有相同的符号, 其绝对值小于上式的绝对值. 于是最后有

$$\begin{aligned}
R = R_{2k} &= \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&= \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \quad (0 < \theta < 1). \quad (21^*)
\end{aligned}$$

若现在假设: 所有的偶数阶导数  $f^{(2k)}(z)$  在区间  $[a, b]$  保持同一个符号, 并且写出无穷级数代替有限的公式 (21), 另外考虑到系数  $A_m$  的 (20) 式的值, 则得欧拉-麦克劳林无穷级数

$$\begin{aligned}
\sum_a^b f(x) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] \\
&\quad + \frac{B_1}{2!} h [f'(b) - f'(a)] - \frac{B_2}{4!} h^3 [f'''(b) - f'''(a)] \\
&\quad + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!} h^{2k-3} [f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)] \\
&\quad + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \cdots \quad (24)
\end{aligned}$$

一般说来, 这个级数发散 (因此符号 “=” 的使用是有条件的!). 根据所作假设, 它至少从第三项开始是交错的, 再考虑到 (21\*) 式, 可以说上述级数包络 (24) 式左端的和  $\sum_a^b f(x)$ . 若把这个和与积分  $\frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx$  交换地位, 同时把所有其余各项的符号变为相反, 便得所说积分的包络级数.

这个级数的部分和有时可以以大的精确度, 在知道积分时计算和  $\sum_a^b$ , 或知道和  $\sum_a^b$  去计算积分  $\frac{1}{h} \int_a^b$ . 当然, 所有这些, 预先知道余式的估计这样一件事, 起着基础的作用!

#### 467. 借助于欧拉-麦克劳林公式进行计算的例

1) 求 900 项 (!) 之和

$$\sum_{i=100}^{i=999} \frac{1}{i} \equiv \sum_{100}^{1000} \frac{1}{x}$$

的近似值. 令  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $a = 100$ ,  $b = 1000$ ,  $h = 1$ . 因为

$$\begin{aligned}
f'(z) &= -\frac{1}{z^2}, f''(z) = \frac{2}{z^3}, f'''(z) = -\frac{6}{z^4}, \\
f^{(4)}(z) &= \frac{24}{z^5}, f^{(5)}(z) = -\frac{120}{z^6}
\end{aligned}$$

且, 一般地

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{z^{2k+1}}.$$



那么对偶数阶导数, 条件成立.

我们持续展开到含有  $f'''$  的项, 于是在余式中的项已超过  $f^{(5)}$ . 在这种情况下, 欧拉-麦克劳林公式给出:

$$\sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2} \right) - \frac{6}{720} \left( \frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4} \right) + \theta \cdot \frac{12}{3024} \left( \frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6} \right) \quad (0 < \theta < 1).$$

因为

$$\begin{aligned} \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} &= \ln 10 = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045 \dots, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} \right) &= 0.004\ 5 \\ \frac{1}{12} \left( \frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2} \right) &= 0.000\ 008\ 25 \\ -\frac{6}{720} \left( \frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4} \right) &= \frac{-0.000\ 000\ 000\ 083\ 325}{2.307\ 093\ 342\ 910\ 720} \\ \theta \cdot \frac{12}{3024} \left( \frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6} \right) &< 0.000\ 000\ 000\ 000\ 004 \end{aligned}$$

则准确到  $\frac{1}{10^{14}}$  可令  $\sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} = 2.307\ 093\ 342\ 910\ 72$ .

2) 现在计算  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ . 这里  $f(z) = \frac{1}{1+z}$ ,  $a=0, b=1$ , 取  $h = \frac{1}{10}$  ( $n=10$ ). 我们有

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{1}{(1+z)^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{(1+z)^4} \\ f^{(4)}(z) &= \frac{24}{(1+z)^5}, \quad f^{(5)}(z) = -\frac{120}{(1+z)^6}, \quad \text{一般地} \\ f^{(2k)}(z) &= \frac{(2k)!}{(1+z)^{2k}}, \end{aligned}$$

因此条件依然成立. 应用变形的欧拉-麦克劳林公式, 这次在含有  $f'''$  的项处截断这个级数:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dz}{1+z} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} \\ &+ \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{1200} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{6}{7\ 200\ 000} \left( 1 - \frac{1}{16} \right) \\ &- \theta \cdot \frac{12}{3\ 024\ 000\ 000} \left( 1 - \frac{1}{64} \right) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

其次, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} &= 0.718\ 771\ 403 \\ -\frac{1}{20} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) &= -0.025 \\ -\frac{1}{1200} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) &= -0.000\ 625 \\ \frac{6}{7\ 200\ 000} \left( 1 - \frac{1}{16} \right) &= \frac{+0.000\ 000\ 781}{0.693\ 147\ 184} \\ \theta \cdot \frac{12}{3\ 024\ 000\ 000} \left( 1 - \frac{1}{64} \right) &< 0.000\ 000\ 004 \end{aligned}$$



所以精确到  $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$  我们得到

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0.693\ 147\ 18.$$

3) 最后, 我们说明, 如何借助于欧拉-麦克劳林级数可以近似地计算收敛, 但又很慢的无穷级数. 即来谈一下级数

$$\pi^2 = 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

在一般公式 (21)[及 (21\*)] 中

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad h = 1, \quad b = a + nh,$$

其中  $a$  与  $n$ ——现在暂时是任意自然数. 积分与导数容易计算; 把  $A_m$  用其表示式代入, 我们得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+i)^2} &= - \left[ \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(a+n)^2} - \frac{1}{a^2} \right] \\ &\quad - B_1 \left[ \frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3} \right] + B_2 \left[ \frac{1}{(a+n)^5} - \frac{1}{a^5} \right] \\ &\quad - (-1)^{k-2} B_{k-1} \left[ \frac{1}{(a+n)^{2k-1}} - \frac{1}{a^{2k-1}} \right] \\ &\quad - \theta_n (-1)^{k-1} B_k \left[ \frac{1}{(a+n)^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right] \quad (0 < \theta_n < 1). \end{aligned}$$

对固定的  $a$  与  $k$ , 这里令  $n$  趋于  $+\infty$  而取极限. 容易证明, 因子  $\theta_n$  这时也趋于某个极限  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , 结果

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+i)^2} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + B_1 \cdot \frac{1}{a^3} - B_2 \cdot \frac{1}{a^5} + B_3 \cdot \frac{1}{a^7} \\ &\quad + (-1)^{k-2} B_{k-1} \cdot \frac{1}{a^{2k-1}} + \theta (-1)^{k-1} B_k \cdot \frac{1}{a^{2k+1}}. \end{aligned}$$

现在具体取  $a = 10, k = 10$ , 应用已知的伯努利数 [449], 最后得

$$\begin{aligned} \pi^2 &= 6 \sum_{i=1}^9 \frac{1}{i^2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{5 \cdot 10^5} + \frac{1}{7 \cdot 10^7} - \frac{1}{5 \cdot 10^9} \\ &\quad + \frac{5}{11 \cdot 10^{11}} - \frac{691}{455 \cdot 10^{13}} + \frac{7}{10^{15}} - \frac{3617}{85 \cdot 10^{17}} \\ &\quad + \frac{43\ 867}{133 \cdot 10^{19}} - \theta \cdot \frac{174\ 611}{55 \cdot 10^{21}}. \end{aligned}$$



计算到小数点后 19 位:

$$\begin{aligned}
 6 \sum_{i=1}^9 \frac{1}{i^2} &= 9.238\ 606\ 386\ 999\ 244\ 142\ 1 \\
 \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} &= 0.631 \\
 -\frac{1}{5 \cdot 10^5} &= -0.000\ 002 \\
 \frac{1}{7 \cdot 10^7} &= 0.000\ 000\ 014\ 285\ 714\ 285\ 7 \\
 -\frac{1}{5 \cdot 10^9} &= -0.000\ 000\ 000\ 2 \\
 \frac{5}{11 \cdot 10^{11}} &= 0.000\ 000\ 000\ 004\ 545\ 454\ 5 \\
 -\frac{691}{455 \cdot 10^{13}} &= 0.000\ 000\ 000\ 000\ 151\ 868\ 1 \\
 \frac{7}{10^{15}} &= 0.000\ 000\ 000\ 000\ 007 \\
 -\frac{3\ 671}{85 \cdot 10^{17}} &= -0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 425\ 5 \\
 \frac{43\ 876}{133 \cdot 10^{19}} &= 0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 033\ 0 \\
 &\quad \overline{9.869\ 604\ 401\ 089\ 358\ 621\ 7}
 \end{aligned}$$

如果考虑到舍入及余式的修正, 那么是

$$\pi^2 = 9.869\ 604\ 401\ 089\ 358\ 62,$$

它精确到  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-17}$ .

这个例子是十分有教益的: 实际上我们是采用包络数值  $\pi^2$  的发散级数的部分和去计算收敛级数  $\pi$ , 而且达到十分高的精确度. 如果我们利用收敛级数本身要达到同样的精确度, 那么必须取超过 10 亿项!

**468. 欧拉-麦克劳林公式的另一种形式** 回到公式 (21) 与 (21'), 但假设: 函数  $f(x)$  的所有各阶导数在无穷区间  $[a, +\infty)$  存在并适合如下条件:

- (a) 所有偶数阶的导数  $f^{(2k)}(z)$  在这个区间具有同样的确定符号;
- (b) 所有奇数阶导数  $f^{(2k-1)}(z)$  当  $z \rightarrow \infty$  时都趋于 0.

设数  $m$  是偶数:  $m = 2k$ . 固定数  $a$  与  $h$ , 而  $b = a + nh$  (连同  $n$ ) 假设是变动的. 余式  $R$  [参看 (21')] 现在可表示为如下形式:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz + \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz \\
 & \equiv -\frac{1}{h} \sum_a^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz + \frac{1}{h} \sum_b^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz.
 \end{aligned}$$

将这些和式的第一个及 (21) 式当中含有  $a$  的项合并为一个常数之后:

$$C_k = -A_1 f(a) - A_2 h f'(a) - \cdots - A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(a) - \frac{1}{h} \sum_a^{\infty} \int_0^h,$$



这个常数显然与  $b$  无关, 把 (21) 式改写为:

$$\begin{aligned} \sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) \\ + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + R', \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b + ih - z) dz \equiv \frac{1}{h} \sum_b^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz. \end{aligned}$$

为了证明所引入的变换合理仅仅还需要确证所用的无穷级数的收敛性; 我们从级数  $\frac{1}{h} \sum_a^{\infty}$  开始. 由 (24) 式推出

$$0 < \frac{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz}{A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(a + nh)]} < 1.$$

按照函数  $\varphi_{2k}(z)$  的性质并因为假设 (a), 分子中所有各项有相同的符号, 这个符号与分母一样. 由此, 令  $n \rightarrow \infty$  而取极限并考虑到假设 (δ) 便作出关于级数

$$\frac{1}{h} \sum_a^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz$$

收敛的结论, 同时级数的和与表达式  $A_{2k} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(a)$  有相同的符号, 且按其绝对值不超过  $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(a)$ . 在所进行的论述中以  $b$  代替  $a$ , 便可证明级数

$$\frac{1}{h} \sum_b^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b + ih - z) dz$$

的收敛性, 而同样地其和与  $A_{2k} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(b)$  有同样的符号, 且按绝对值不超过后者.

于是, 我们不仅证明了所用无穷级数的收敛性, 同时也顺便弄清: 公式 (25) 的余式  $R'$  可记成如下形式:

$$R' = \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(b) \quad (0 < \theta < 1). \quad (25^*)$$

十分有趣的是: (25) 式中的常数  $C_k$ , 按其组成的方法, 不能排除与指标  $k$  有关的可能性, 而事实上它与  $k$  却无关! 为了查明这一点, 只需对照公式 (25) 及 (25\*) 与  $k=1$  时的上述公式:

$$\sum_a^b f(x) = C_1 + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1 f(b) + \overline{R'},$$

其中

$$\overline{R'} = \bar{\theta} \cdot A_2 h \cdot f'(b) \quad (0 < \bar{\theta} < 1).$$



我们有:

$$C_1 + \bar{\theta} \cdot A_2 h \cdot f'(b) = C_k + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) \\ + \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b).$$

如果当  $b \rightarrow \infty$  而取极限, 那么, 考虑到假设 (6), 便得:  $C_k = C_2 = C$ . 常数  $C$  很自然地称之为函数  $f(x)$  的欧拉-麦克劳林常数,  $C$  除了与这个函数有关之外还与  $a$  和  $h$  有关.

**附注** 在不等式中取极限时, 应当把各个符号归并到不等式的符号中, 且对 (25\*) 中的因子  $\theta$  写  $0 \leq \theta \leq 1$ , 显然等于 0 可排除, 这立即可明白, 各项具有同样符号的无穷级数不可能为零. 若令  $\theta = 1$ , 那么在公式 (25) 中当给号码  $k$  增加 1 时, 有  $R' = 0$ , (如同我们刚才说明的) 这不可能. 于是, 事实上:  $0 < \theta < 1$ , 这正如我们所写的.

代替有限和 (25), 我们写出无穷级数. 我们得到如下形式的欧拉-麦克劳林级数

$$\sum_a^b f(x) = C + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} f(b) + \frac{B_1}{2!} h f'(b) - \frac{B_2}{4!} h^3 f'''(b) + \cdots \\ + (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) + \cdots$$

[符号 “=” 在这里同样仅有约定的意义!] 由于假设 a), 所有的导数  $f^{(2k-1)}(b)$  随  $b$  的增加, 往同一个方向变化; 而因为, 按照假设 (6), 当  $b \rightarrow \infty$  时它们趋于零, 那么它们有同样的符号. 由此 [和由 (25\*)] 断定: 在新的形式中欧拉-麦克劳林级数包络位于左方的和  $\sum_a^b f(x)$ .

**附注** 最后, 对于确定前面叙述中出现的常数  $C$  本身的可能性作一点说明. 选择某一  $b > a$ , 对于  $b$  及级数和、积分的计算是容易的, 对于数  $C$  可得到包络它的级数:

$$C = \sum_a^b f(x) - \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} f(b) - \frac{B_1}{2!} h f'(b) + \frac{B_2}{4!} h^3 f'''(b) - \cdots$$

此级数容许在多数情形下求  $C$  的近似值.

**469. 斯特林公式与斯特林级数** 作为应用上一目所得到的展开式的例子, 我们应用它于计算

$$\ln(n!) = \ln n + \sum_{i=1}^{n-1} \ln i.$$

取  $a = 1, h = 1$  (以  $n$  代替  $n-1$ )  $b = n$ , 令  $f(z) = \ln z$ , 因而  $f^{(m)}(z) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{z^m}$ , 条件 (a) 与 (6) 都适合. 于是我们得到对  $\ln(n!)$  的渐近展开<sup>①</sup>:

$$\ln(n!) \sim C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} \\ - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) \cdot 2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots \quad (26)$$

<sup>①</sup>在对数的和中加上了另写出的  $\ln n$ . 当求积分时得到的加项数 1, 已含于  $C$  内.



这就是所谓的斯特林级数; 它显然是发散的, 因为它的通项的绝对值 [449] 等于  $\frac{s_{2k}}{2\pi^2 n} \cdot \frac{(2k-2)!}{(2\pi n)^{2k-2}}$ , 此式趋于  $\infty$ .

由  $\ln(n!)$  的渐近展开, 如 464 目 3° 中所指出的, 可得到阶乘本身的展开. 即把  $B_k$  的数值代入, 得

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left\{ 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \cdots \right\}.$$

若在 (26) 式中满足于在所写出的各项而截断, 但加上余式, 则得到斯特林公式:

$$\begin{aligned} \ln(n!) = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots \\ + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) \cdot 2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \theta \cdot (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{n^{2k+1}}, \end{aligned} \quad (27)$$

我们看到, 它对于近似计算已完全适用了.

令  $k=1$ , 我们得到斯特林公式的最简单与最重要的情况:

$$\ln(n!) = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{\theta}{12n};$$

将对数还原, 公式通常写成如下形式:

$$n! = e^C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

这个公式在 406 目已用另外的方法引出; 在那里, 我们已求得  $e^C = a = \sqrt{2\pi}$ , 因此, 迄今为止不为我们所知的常数  $C$  原来等于  $\frac{1}{2} \ln 2\pi$ .

作为例子, 我们来计算  $\ln(100!)$  到小数点后 10 位. 按公式 (27), 取  $k=2$ , 把五个数值

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln 2\pi &= 0.918\,938\,533\,204 \\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n &= 100.5 \cdot \ln 100 = 462.819\,603\,691\,803 \\ -n &= -100 = -100 \\ \frac{B_1}{2n} &= \frac{1}{1200} = 0.000\,833\,333\,333 \\ -\frac{B_2}{12n^3} &= \frac{1}{36 \cdot 10^7} = -0.000\,000\,002\,777 \end{aligned}$$

加起来便得  $\ln(100!)$  的值 363.739 375 555 6, 准确到  $\frac{1}{2 \cdot 10^{10}}$  (考虑到余式及四舍五入的修正值). 逼近的准确性还可以大大地增加, 只要取更多的项并在每一项中写出更多位有效数字. 对本问题, 大约到 300 项以内, 准确性是增加的 (直到各项的绝对值持续下降以前为止).

**附注** 读者从一系列例子中看到: 明显地, 发散级数的一个截段有时可用于求出所需量的数值, 甚至还有较高的精确度. 在早先与在现今, 某些作者把类似的级数称为“半收敛的”. 然而, 我们倾向于不采用这个术语, 因为很难给它一个足够普遍的同时又是准确的定义.



## 第十三章 反常积分

### §1. 积分限为无穷的反常积分

**470. 积分限为无穷的反常积分的定义** 第九章里所讲的定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的概念是对于有限区间  $[a, b]$  与有界函数  $f(x)$  而说的. 这一章是要把这个概念向各个方向推广. 我们先来看无穷区间上的积分.

假定函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, +\infty)$  上, 而且在这区间的任一有限部分  $[a, A]$  上都是可积的; 因而函数  $f(x)$  对于所有  $x \geq a$  都有定义而且积分  $\int_a^A f(x)dx$  对于任意一个  $A > a$  都有意义.

若这积分当  $A \rightarrow +\infty$  时具有一个确定的有限的极限, 则称这极限为函数  $f(x)$  在由  $a$  到  $+\infty$  的区间上的积分而且用符号记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (1)$$

在这种情形下我们说积分 (1) **存在或收敛**, 而函数  $f(x)$  则说是在无穷区间  $[a, +\infty]$  上为可积的. 为了要与以前所讲的在通常意义下的积分, 即常义积分, 有所区别, 我们就称刚才所定义的积分为**反常积分**<sup>①</sup>.

若极限 (1) 为无穷或根本不存在, 则关于这样的反常积分, 我们说它**不存在或发散**. [但是有时候为了方便也把这无穷极限 (在带有定号的时候) 看作积分 (1) 的值.]

例题

1) 函数  $\frac{1}{1+x^2}$  在任意有限区间  $[0, A] (A > 0)$  上都是可积的, 而且我们有

<sup>①</sup>试回忆一下, 我们在第 373 目中就已经遇到过反常积分的概念了.



$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \operatorname{arctg} A.$$

因这积分当  $A \rightarrow +\infty$  时具有有限极限  $\frac{\pi}{2}$ , 所以由 0 到  $+\infty$  的积分收敛而且其值为

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2) 试研究这样一个问题: 问对于指数  $\lambda > 0$  的哪些值, 反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a > 0) \quad (2)$$

是存在的. 先设  $\lambda \neq 1$ , 则

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda} (A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}).$$

这表达式当  $A \rightarrow +\infty$  时具有极限为  $\infty$  或有限数  $\frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$ , 要看  $\lambda < 1$  或  $\lambda > 1$  而定. 今若  $\lambda = 1$ , 则

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^A = \ln A - \ln a,$$

因而当  $A \rightarrow +\infty$  时得到极限  $\infty$ .

这样看来, 积分 (2) 在  $\lambda > 1$  时收敛 (且以  $\frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$  为其值), 而在  $\lambda \leq 1$  时发散.

与 (1) 同样, 函数  $f(x)$  由  $-\infty$  到  $a$  的积分定义为:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x) dx. \quad (A' < a), \quad (3)$$

而且一样, 函数  $f(x)$  由  $-\infty$  到  $+\infty$  的积分定义为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^A f(x) dx.$$

在讨论积分 (1) 时所引进的术语这里也照样适用.

在最后这一情形, 我们可以取任意一数  $a$  而把末后这一积分写成

$$\int_{A'}^A f(x) dx = \int_{A'}^a f(x) dx + \int_a^A f(x) dx,$$

因而当  $A' \rightarrow -\infty$  与  $A \rightarrow +\infty$  时左边积分的极限的存在显然是与右边两积分的极限 (1) 与 (3) 的存在等价<sup>①</sup>. 这样, 由  $-\infty$  到  $+\infty$  的积分就可以用等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

<sup>①</sup> 仅仅除去这样的情形: 两个积分都是无穷大, 但符号不同.



(假定右边两积分都存在<sup>67)</sup>) 来下定义. 这样定义出来的积分值事实上并不依赖于点  $a$  的选择.

例题

$$\begin{aligned} 3) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctg} A') = \frac{\pi}{2}; \\ 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 = \pi. \end{aligned}$$

**471. 积分学基本公式的用法** 在以上所举例题中都是利用原函数先在有限区间上取积分然后再取极限. 我们现在要把这两个步骤合并在一个公式里面.

例如假定函数  $f(x)$  是定义在区间  $[a, +\infty)$  上而且在这区间的任一有限部分  $[a, A]$  上都是可积的. 如果同时  $f(x)$  还有一个原函数  $F(x)$  存在于整个区间  $[a, +\infty)$  上, 则按照积分学基本公式 [308] 当有

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x) \Big|_a^A.$$

由此可见, 要说存在反常积分 (1) 就等于说存在有限极限

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = F(\infty),$$

于是

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^\infty.$$

同样, 若把  $F(-\infty)$  看成极限  $\lim_{A' \rightarrow -\infty} F(A')$ , 则

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^a, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^\infty.$$

双重替换的求值牵涉到其中出现的极限的存在 (而且有限) 的问题, 如果可以求值, 那么就证实了所算积分的存在.

我们要再讲一些例题.

#### 472. 例题

$$1) \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

因原函数

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{-ax},$$

<sup>67)</sup> 区别于具有不同符号的无穷大.



所以  $F(0) = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ ,  $F(+\infty) = 0$ ; 因而

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

同样

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$3) \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} = 1.$$

4)  $\int_0^{\infty} \sin x dx$ . 这里原函数是  $-\cos x$ , 但双重替换  $-\cos x \Big|_0^{\infty}$  没有意义, 因  $\cos x$  当  $x \rightarrow \infty$  时不趋向任何极限: 这就是说积分不存在.

$$5) \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx.$$

用分部积分法与展成简单分式, 得到原函数

$$F(x) = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx = -\frac{1}{4} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{1}{8} \frac{1}{1+x^2}.$$

当  $x \rightarrow 0$  时我们有  $\lim F(x) = \frac{1}{8}$ ; 这极限值也就是函数在  $x = 0$  处所取的值. 但另一方面,  $F(+\infty) = 0$ , 所以积分值是  $-\frac{1}{8}$ .

6) 双曲线  $xy = 1$  绕  $x$  轴旋转得一立体形, 试计算其相当于  $x \geq 1$  那一部分的体积与侧面积.

这立体形相当于变量  $x$  由 1 到  $A (A > 1)$  的有限部分的体积与侧面积为

$$V_A = \pi \int_1^A \frac{dx}{x^2}, \quad S_A = 2\pi \int_1^A \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

立体形之全部 (开展到无穷) 体积  $V$  与侧面积  $S$  自然就以这些量的极限为其值, 这也就无异乎设

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

但是这里虽然第一个积分收敛 [470, 2] 到有限值  $\pi$ , 成为所求的体积, 但是第二个积分却是发散的, 因而表明侧面积的值为无穷.

要证实最后这一点, 只需注意

$$S_A > 2\pi \int_1^A \frac{dx}{x} = 2\pi \ln A,$$

因而  $S_A$  随  $A$  无穷增大而亦趋向无穷.



7) 假定在坐标原点  $O$  有质量  $m$ , 吸引一个在  $x$  轴上距离  $O$  为  $x$  而质量为 1 的质点  $M$ , 其力量 (按照牛顿定律) 为

$$F = \frac{m}{x^2}.$$

试问当质点  $M$  从  $x = r$  这个位置移到无穷远时, 引力  $F$  所作的功  $A$  是多少?

所作的功显然是负的, 因为力的方向与运动的方向相反. 把第 353 目公式 (9) 推广到这种情形, 即得:

$$A = \int_r^\infty -\frac{m}{x^2} dx = \frac{m}{x} \Big|_r^\infty = -\frac{m}{r}.$$

当质点  $M$  从无穷远往回移动到  $x = r$  这个位置, 牛顿引力就作了正的功  $\frac{m}{r}$ . 这个量叫做所讨论的力在  $M$  这一点的位势, 而且就用以测量蓄积在这一点位的能的大小.

8) 对于一定质量的气体从体积  $V_1$  膨胀到体积  $V_2$  ( $V_2 > V_1$ ) 所作的功, 我们已有公式[354,(10)]:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

假设给定质量为某一定值的理想气体, 当压力为  $p_1$  时体积为  $V_1$ . 假设这气体膨胀到无穷而且是绝热的, 也就是说和周围环境间没有热的流通. 在这些条件下, 我们已知 [361,3)] 泊松公式成立:

$$pV^k = c \quad \left(k = \frac{c_p}{c_v} > 1\right).$$

于是这气体膨胀所可能作的功为

$$A_{\max} = \int_{V_1}^\infty cV^{-k} dv = \frac{c}{1-k} \cdot \frac{1}{V^{k-1}} \Big|_{V_1}^\infty = \frac{c}{k-1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}}.$$

注意  $c = p_1 V_1^k$  而且把它代入所得式, 即得结果为

$$A_{\max} = \frac{p_1 V_1}{k-1}.$$

9) 在第 356 目问题 8) 里我们曾求出有限线段上的电流作用在单位磁极上的力  $F$ :

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}} ds.$$

我们现在要看导体 (两端伸展) 为无穷的情形, 即设  $s_1 = -\infty, s_2 = +\infty$ . 于是

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{I}{a} \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{a}.$$

当然, 无穷的导体只是一种假想; 不过所得结果却能成为有用的: 在导体非常长的情形下, 我们很可以把它看成近似于无穷, 因为由此可以得到十分简单的公式!

10) 若在  $t = 0$  这瞬间把电流强度为  $I_0$  而有自感的电路断开, 则引起一种断开余电, 服从这个规律:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

[参看 359,4)(a); 这里我们仍旧用以前的记号]. 现在我们要算出这电流所给出的全部焦耳热  $Q$ .



在时间  $[t, t + dt]$  这一段的热的元素量显然为

$$dQ = I^2 R \cdot dt.$$

在无穷区间上求和即得:

$$Q = \int_0^\infty I^2 R \cdot dt = RI_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

我们要注意, 虽然电流经过有限长的一段时间就已觉察不出来, 但是要确定转变为热的电流全部能量, 就仍然必须在无穷区间上求积分.

**473. 与级数类比 · 最简单的定理** 以下我们仅限于讨论类型 (1) 的积分: 对它所论的一切容易搬到 (2) 与 (3) 类型的情形去. 同时, 总是假设, 函数  $f(x)$  在常义下在积分限  $a$  与  $A > a$  之间可积, 因而问题仅归结为从  $a$  到  $\infty$  的反常积分.

在反常积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  与数值级数  $\sum_1^\infty a_n$  之间有着深刻的类比, 指出这一点是有益的.

若用对  $x$  的积分过程代替对  $n$  的求和过程, 则类比为

级数的通项	被积函数
$a_n;$	$f(x);$
级数的部分和	常义积分
$\sum_1^N a_n;$	$\int_a^A f(x)dx;$
级数的和	反常积分
$\sum_1^\infty a_n$	$\int_a^\infty f(x)$
作为当 $N \rightarrow \infty$ 时部分和的极限;	作为上面的积分当 $A \rightarrow \infty$ 时的极限;
级数的余式	积分
$\sum_{N+1}^\infty a_n.$	$\int_A^\infty f(x)dx.$

我们来列举与 364 目有关级数的定理相似的有关反常积分的定理. 其证明——借助于上述类比——留给读者.

1° 若积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  收敛, 则积分  $\int_A^\infty f(x)dx (A > a)$  同样收敛, 反之亦然, 同时

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^\infty f(x)dx.$$

2° 在积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  收敛的情形, 有

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^\infty f(x)dx = 0.$$



3° 由积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  收敛可得出积分  $\int_a^\infty c \cdot f(x)dx$  ( $c = \text{常数}$ ) 的收敛性, 并且

$$\int_a^\infty c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^\infty f(x)dx.$$

最后:

4° 若两个积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  与  $\int_a^\infty g(x)dx$  收敛, 则积分  $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx$  收敛, 且

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx.$$

474. 在正函数情形下积分的收敛性 若函数  $f(x)$  是正的(非负的) 则积分

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx \quad (4)$$

是变量  $A$  的单调增函数, 对此函数当  $A \rightarrow \infty$  时, 有限极限的存在问题, 很简单地就解决了——根据有关单调函数极限的定理 [57]:

在  $f(x)$  为正函数的情形下, 为使反常积分 (1) 收敛, 必须且只需当  $A$  增加时积分 (4) 保持上有界:

$$\int_a^A f(x)dx \leq L \quad (L = \text{常数}).$$

若这个条件不成立, 则积分 (1) 有  $\infty$  值 [与 365 目比较.]

下述的对正函数积分的“比较定理”以此为基础:

**定理 1** 若至少当  $x \geq A$  ( $A \geq a$ ) 时成立不等式  $f(x) \leq g(x)$ , 则由积分  $\int_a^\infty g(x)dx$  的收敛性得出  $\int_a^\infty f(x)dx$  的收敛性, 或者同样, 由积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  发散得出  $\int_a^\infty g(x)dx$  发散.

**证明** 可以照搬 [366] 定理 1 的证明.

作为上述定理的推论, 下述定理常常有用:

**定理 2** 若极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leq K < +\infty)$$

存在, 则当  $K < +\infty$  时, 由积分  $\int_a^\infty g(x)dx$  的收敛性推出积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  的收敛性, 而当  $K > 0$ , 由第一个积分发散推出第二个积分发散.[这样一来, 当  $0 < K < +\infty$  时两个积分同时收敛或同时发散.]

**证明** 与 366 目定理 2 的证明相似 [参看 473 目, 3°].



选定具体的函数来比较,即可由上面的定理得出积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的收敛或发散的特殊判别法. 用函数  $\frac{1}{x^\lambda}$  来比较是有实用意义的, 这函数在  $\lambda > 1$  时由  $a$  至  $+\infty$  是可积的, 在  $\lambda \leq 1$  时则否 [470,2)]. 由此得出的判断法都叫柯西判别法. 这些判别法就是:

假定对于充分大的  $x$ , 函数  $f(x)$  具有如下形式:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

那么, 1) 若  $\lambda > 1$  而  $\varphi(x) \leq c < +\infty$  则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 2) 若  $\lambda \leq 1$  而  $\varphi(x) \geq c > 0$  则这积分发散.

这是由于上面的定理; 比较函数为  $\frac{c}{x^\lambda}$  [473,3°].

若当  $x \rightarrow \infty$  时函数  $f(x)$  (与  $\frac{1}{x}$  比较) 成为  $\lambda$  阶无穷小,  $\lambda > 0$ , 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛或发散随  $\lambda > 1$  或  $\leq 1$  而定.

这是由于上面的定理 2;  $g(x)$  取为  $\frac{1}{x^\lambda}$ .

例题 1)  $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

被积函数当  $x \rightarrow +\infty$  时各为  $1/2$  阶与  $2$  阶无穷小. 所以第一个积分发散, 而第二个积分收敛.

2)  $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , 其中  $P(x)$  为  $m$  次整多项式,  $Q(x)$  为  $n$  次整多项式,  $n > m$ , 而且  $Q(x)$  在区间  $(a, +\infty)$  上没有根.

对于充分大的  $x$  被积函数保持有一定的符号. 于是 (提出这符号因子之后) 可以运用上面的判断法. 被积式为  $n-m$  阶无穷小. 所以  $n = m+1$  时积分发散,  $n \geq m+2$  时积分收敛. (显然,  $n \leq m$  时积分发散.)

**475. 一般情形的积分收敛性** 反常积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  的存在问题, 按照定义 (1) 就归结到  $A$  的函数

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx \quad (4)$$

当  $A \rightarrow +\infty$  时是否有有限极限存在的问题.

运用布尔查诺与柯西的判别法 [58] 到这个函数, 即可把反常积分存在的条件叙述成下列形式:

要反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  ① 存在, 必须也仅需对于每一数  $\varepsilon > 0$  都有一数  $A_0 > a$  使得只要  $A > A_0$  而且  $A' > A_0$  就有不等式

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^A f(x)dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

① 这里假定函数  $f(x)$  在每一区间  $[a, A]$  ( $A > a$ ) 上都 (在通常意义下) 为可积的.



根据这个判别法很容易证明下面这个命题:

若积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛, 则 ① 积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  更加收敛.

其实, 运用上述判别法到积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ , 即可看出, 由于该积分收敛, 就对于任意  $\varepsilon > 0$  都存在一个  $A_0 > a$ , 使

$$\int_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

只要  $A' > A > A_0$ . 但是显然  $\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x)|dx$ , 所以对于这些  $A, A'$  更加有不等式

$$\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon;$$

由此引用上述判别法即知积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

我们要注意, 由积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的收敛, 一般说并不能推出积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  也收敛. 基于这个事实我们就从一般的收敛情形里特别地划分出下述这个情形来: 若积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  同时收敛, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  就说是**绝对收敛**, 而函数  $f(x)$  则说是在区间  $[a, +\infty)$  上**绝对可积**. 不绝对收敛的积分的例子将在下一目中举出.

至于变号函数  $f(x)$ , 则 474 目所述判别法不能直接引用. 但是可以先试行应用上述判别法以求证正函数  $|f(x)|$  收敛; 若这函数已证得为可积, 则函数  $f(x)$  也一定可积, 而且是绝对地可积.

由上面的比较定理还可推出下面这一常常有用的定理:

若函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty]$  上绝对可积, 而函数  $g(x)$  有界, 则二者的积为一函数, 在区间  $[a, +\infty]$  上绝对可积.

为要证明, 只需引用不等式

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq L \cdot |f(x)|.$$

假定给定积分  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx$ . 这里函数  $f(x) = \frac{1}{k^2 + x^2}$  为(绝对)可积, 同时  $g(x) = \cos ax$  显然有界. 于是由上述定理即知所设积分绝对收敛.

显然, 这里对于变号函数所讲的办法自然只能 —— 在碰巧的情形下 —— 推出绝对收敛性来. 若所给函数的积分根本不收敛, 或虽收敛而不绝对收敛, 则这些情形就不能用刚才所讲的办法来辨别了.

**476. 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法** 我们现在给出其他类型的判别法, 它们是基于第二中值定理的应用 [306], 这两个判别法与无穷级数收敛性的阿贝尔判别法及狄利克雷判别法类似 [384], 所以把它们和同样的名字连在一起较为方便. 当不存在绝对收敛性时, 在一系列情况下, 这两个判别法可判明反常积分的收敛性.

①参看上一脚注.



**阿贝尔判别法** 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  定义在区间  $[a, +\infty]$ , 并且

- 1) 函数  $f(x)$  在这个区间可积, 因此积分 (1) 收敛 (哪怕不是绝对收敛);
- 2) 函数  $g(x)$  单调有界:

$$|g(x)| \leq L \quad (L = \text{常数}, a \leq x < \infty),$$

那么积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \quad (5)$$

收敛.

**证明** 根据第二中值定理, 对任意  $A' > A > a$  有

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A) \int_A^\xi f(x)dx + g(A') \int_\xi^{A'} f(x)dx, \quad (6)$$

其中  $A \leq \xi \leq A'$ . 由于假设 1), 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在这样的  $A_0 > 0$ , 使得当  $A > A_0$  时有

$$\left| \int_A^\xi f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left| \int_\xi^{A'} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

由于假设 2), 当  $A' > A > A_0$  时便有

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x)g(x)dx \right| &\leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x)dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x)dx \right| \\ &< L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon, \end{aligned}$$

结果导致积分 (5) 的收敛性 [475].

可以对积分中  $f(x)$  与  $g(x)$  加以另一种条件的组合, 在此条件下, 二者乘积的积分收敛:

**狄利克雷判别法** 设

- 1) 函数  $f(x)$  在任何有限区间  $[a, A]$  ( $A > 0$ ) 可积, 且积分 (4) 有界:

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K \quad (K = \text{常数}, a \leq A < +\infty);$$

- 2) 函数  $g(x)$  单调地趋于 0 (当  $x \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

那么积分 (5) 收敛.

[正如读者所看到的, 前一条件 1) 有所减弱, 因为此处没有要求积分 (1) 收敛; 但是条件 2) 变得更强了!]



**证明** 像前面一样, 从等式 (6) 出发, 但在这次, 第一个因子  $g(A)$  与  $g(A')$ , 只要  $A$  与  $A'$  足够大, 它们便可变得任意小, 而第二个因子以数  $2K$  为界.

**附注** 这里阿贝尔判别法可由狄利克雷判别法推出. 事实上, 对有界单调函数  $g(x)$  必然存在有限极限

$$g(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

把  $f(x) \cdot g(x)$  写成如下形式:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(\infty) + f(x) \cdot [g(x) - g(\infty)],$$

可以看出, 对于第二个乘积来说, 它已经适合狄利克雷判别法的条件了 [参看 473 目的 3° 与 4°].

容易认定, 比如说, 当  $\lambda > 0$  时积分

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \quad \text{与} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda} dx \quad (a > 0)$$

收敛. 应用狄利克雷判别法, 我们假定  $f(x) = \sin x$  或者  $\cos x$ , 而  $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ , 条件 1) 与 2) 都成立, 因为

$$\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |\cos a - \cos A| \leq 2, \quad \text{同样} \quad \left| \int_a^A \cos x dx \right| \leq 2,$$

而函数  $\frac{1}{x^\lambda}$  单调递减, 当  $x \rightarrow \infty$  时它趋于 0.

特别地, 当  $\lambda = 1$  时由此推出积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛 (这里我们能取  $a = 0$ , 因为被积函数当  $x \rightarrow 0$  时有有限极限). 可以证明, 这个积分非绝对收敛, 即积分

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

发散. 事实上, 若这个积分收敛, 则根据 474 目定理 1, 积分

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx \quad (a > 0)$$

收敛, 因为  $\sin^2 x \leq |\sin x|$ . 换句话说积分

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$$

收敛, 将它加上显然收敛的积分

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

便得出结论: 积分

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

收敛, 但事实上它不收敛 [470, 2)].



附注 现在, 当我们证明了积分

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{与} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

的收敛性, 最终我们能说明非初等函数  $\text{si}x$  (“积分正弦”) 与  $\text{ci}x$  (“积分余弦”) 的定义, 关于它们我们曾在 289 目提到过. 即是令

$$\text{si}x = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \geq 0); \quad \text{ci}x = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0).$$

例如, 若把此二式中第二个写成

$$\text{ci}x = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

的形式, 则根据定积分的已知性质 [305, 12°]——显然  $\text{ci}x$  的导数实际上等于  $\frac{\cos x}{x}$ .

**477. 把反常积分化为无穷级数** 我们知道函数的极限这一概念可以用两种方法来表达, 即“用  $\varepsilon - \delta$  说法”与“用整序变量说法”[52, 53]. 若把极限的第二种定义法用到函数  $F(A)$  [见 (4)], 则反常积分的定义 (1) 可以解释成这样: 无论如何选取一列上升到无穷的数  $\{A_n\}$  ( $A_n > a$ ), 相应的积分整序变量  $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$  都应趋向同一个有限的极限<sup>①</sup>, 这也就是反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  的值.

但是就另一方面来说, 整序变量  $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$  的极限问题也就是级数

$$\int_a^{A_1} + \left\{ \int_a^{A_2} - \int_a^{A_1} \right\} + \left\{ \int_a^{A_3} - \int_a^{A_2} \right\} + \cdots = \int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A_3} + \cdots$$

的和问题 [362].

于是可以断言: 要反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  存在, 必须也只需对于任一系列数  $A_n \rightarrow +\infty$ , 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) dx \quad (A_0 = a)$$

都收敛到同一个和; 这也就是反常积分的值.

我们要注意, 在函数  $f(x)$  是正的(或非负的)这种情形, 要反常积分收敛就只要它对于特别选定的一列数,  $A_n \rightarrow +\infty$  为收敛就够了. 因为这时 (4) 是  $A$  的上升函数, 而且以这个级数的和为界, 所以当  $A \rightarrow +\infty$  时它有有限的极限 [474].

把积分的收敛问题化成级数的收敛问题, 往往很有用处, 因为这样就有可能运用级数的收敛与发散的许多判别法.

当作例题, 我们来看下面这个重要的积分:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx,$$

<sup>①</sup>只要假设所有整序变量  $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$  都收敛, 就已经可以推出它们的极限一定是相同的 [53].



在上一目我们已谈到过它了.

因  $\sin x$  当  $x$  增加时轮流取正值与负值, 变号的地点在  $n\pi (n = 1, 2, \dots)$ , 所以我们很自然地就拿这些数作为  $A_n$  来考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (7)$$

对通项  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  施行变数替换  $x = n\pi + t$  即得

$$v_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$

由此可见, 级数的项是正负相间而绝对值单调递减的. 还有, 当  $n > 0$  时

$$|v_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt < \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} dt = \frac{1}{n},$$

所以级数的项的绝对值随附标无限增大而趋于零. 于是级数 (5) 为莱布尼茨型, 而由已知定理 [381] 知其为收敛. 今以  $I$  表其和. 这样就对于任意  $\varepsilon > 0$  都有一数  $N$ , 使  $n \geq N$  时有不等式

$$\left| \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx - I \right| < \varepsilon. \quad (8)$$

现在单“用  $\varepsilon - \delta$  说法”就可完成反常积分存在的证明. 假定  $A > N\pi$ ; 则有一自然数  $n_0$  使  $n_0\pi \leq A < (n_0 + 1)\pi$ , 因而显然  $n_0 \geq N$ . 因函数  $\sin x$  在区间  $n_0\pi$  到  $(n_0 + 1)\pi$  不变号, 所以积分  $\int_0^A$  介于积分  $\int_0^{n_0\pi}$  与  $\int_0^{(n_0+1)\pi}$  之间. 但是后面这两个积分则根据 (6) 又都介于  $I - \varepsilon$  与  $I + \varepsilon$  之间, 所以积分  $\int_0^A$  也必定如此. 于是终于对于所有的  $A > N\pi$  都有

$$\left| \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx - I \right| < \varepsilon.$$

因而存在积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = I^{\text{①}}.$$

这里我们要顺便注意到一事实, 即这个积分不绝对收敛, 也就是积分  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  发散. 这件事很容易把积分表成级数来证实. 其实, 假如积分收敛, 我们就会和刚才一样, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$

但是  $n\pi + t < (n+1)\pi$ , 所以

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt > \frac{1}{(n+1)\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

然而级数  $\frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{n+1}$  却是发散的! [365, 1)].

①这里我们只谈积分的收敛问题. 以后我们会看见  $I = \frac{\pi}{2}$ .



478. 例题 1) 讨论下列积分的收敛性:

$$(a) \int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad (b) \int_{z_0}^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}} \quad (z_0 > a > b > 0),$$

$$(B) \int_0^\infty \left( e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx, \quad (r) \int_0^\infty \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

解答 (a) 被积函数当  $x \rightarrow +\infty$  时为一阶无穷小: 积分发散.

(b) 被积函数为  $3/2$  阶无穷小: 积分收敛.

(B) 被积函数当  $x \rightarrow 0$  时趋于 0. 展成级数即见表达式

$$e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} = \frac{b^2 - a^2}{x^2} + \dots$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时为二阶无穷小: 积分收敛.

(r) 展开  $e^{\pm x}$  成级数, 易得

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{12} + \dots$$

所以当  $x \rightarrow 0$  时被积函数趋于  $-\frac{1}{12}$ . 当  $x \rightarrow +\infty$  时它便是二阶无穷小. 积分收敛.

2) 讨论下列积分的收敛性:

$$(a) \int_a^\infty x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0), \quad (b) \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}, \quad (B) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

解答 (a) 取任意一个  $\lambda > 1$ , 有

$$\frac{x^\mu e^{-ax}}{1/x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{e^{ax}} \rightarrow 0;$$

积分收敛.

(b) 首先注意, 当  $x \rightarrow 0$  时被积函数趋于 0, 今仍取任意一数  $\lambda > 1$ , 得

$$\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} \rightarrow 0 \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时};$$

积分收敛.

(B) 当  $x \rightarrow 1$  时被积函数趋于 0. 令  $1 < \lambda < 2$ , 则被积函数与  $1/x^\lambda$  之比可以写成这样:

$$\frac{x^\lambda \ln x}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\ln x}{x^{2-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 0 \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时};$$

积分收敛.

3) 讨论下列积分的收敛性:

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} \quad (a > 0), \quad (b) \int_0^\infty x^\mu e^{-ax} \cos x dx \quad (\mu, a > 0).$$

提示 两个被积函数都是有界函数与 (绝对) 可积函数之积.



4) 讨论下面积分的收敛性 ( $a > 0$ ):

$$\int_1^\infty dx \int_0^a \sin(\beta^2 x^3) d\beta = \int_1^\infty \left\{ \int_0^a \sin(\beta^2 x^3) d\beta \right\} dx^{①}.$$

今试求“内层”积分当  $x \rightarrow \infty$  变小的阶. 在其中令  $\beta^2 x^3 = z$ ; 有

$$\int_0^a \sin(\beta^2 x^3) d\beta = \frac{1}{2x^{3/2}} \int_0^{a^2 x^3} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz.$$

因积分  $\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$  收敛 [476], 有一常数  $L$  存在, 使对于所有  $A > 0$  都是

$$\left| \int_0^A \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz \right| \leq 2L.$$

于是积分  $\int_0^a \sin(\beta^2 x^3) d\beta$  的绝对值不超过  $\frac{L}{x^{3/2}}$ . 由此推知所设积分绝对收敛.

5) 求证下列积分收敛 ( $a, k, \lambda > 0$ ):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^\infty \frac{x \cdot \sin ax}{k^2 + x^2} dx, & \text{(б)} \quad & \int_0^\infty e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^\lambda} dx, \\ \text{(B)} \quad & \int_a^\infty |\ln x|^\lambda \frac{\sin x}{x} dx, & \text{(r)} \quad & \int_0^\infty \frac{\sin(x + x^2)}{x^\lambda} dx. \end{aligned}$$

解答 这几个积分都可用狄利克雷判别法.

(a) 函数  $g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$ , 对于充分大的  $x$  单调递减而且当  $x \rightarrow \infty$  时趋于零; 积分  $\int_0^A \sin ax dx$  显然有界.

(б) 函数  $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ , 单调递减而且随  $x \rightarrow \infty$  而趋于零;  $f(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$ , 所以 (若令  $\sin x = t$ )

$$\left| \int_0^A f(x) dx \right| = 2 \left| \int_0^{\sin A} t e^t dt \right| < 2e.$$

(B) 函数  $g(x) = |\ln x|^\lambda \cdot \frac{1}{x}$ , 对于  $x$  的充分大的值

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{\lambda-1}}{x^2} (\lambda - \ln x) < 0,$$

所以  $g(x)$  递减, 显然  $g(x)$  趋向零; 等等.

(r) 函数  $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ ;  $f(x) = \sin(x + x^2)$ , 所以 (令  $z = x + x^2$ )

$$\int_a^A \sin(x + x^2) dx = \int_{a+a^2}^{A+A^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}} dz.$$

这一表达式为有界的, 因为积分  $\int_{a+a^2}^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}} dz$  是收敛的 (可用狄利克雷判别法验证之).

6) 证明如下断言:

①这里假定“内层”积分为  $x$  的连续函数而不加证明.



设函数  $f(x)$  给定在区间  $[a, +\infty)$ , 其周期  $\omega > 0$ , 而函数  $g(x)$  在同一区间单调, 当  $x \rightarrow +\infty$  时趋于 0, 若 (常义) 积分

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = 0 \quad (9)$$

则 (反常) 积分

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx \quad (5)$$

收敛. 反之, 若

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = K \neq 0, \quad (9^*)$$

则积分 (5) 收敛或发散决定于积分

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \quad (10)$$

的收敛或发散.

(a) 首先假设条件 (9) 成立, 来证明积分

$$\int_a^A f(x) dx$$

在这种情况下, 对所有  $A > a$  保持有界.

根据 314 目 10) 及 316 目的附注, 显然有

$$\int_a^{a+k\omega} f(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

那么, 对无论怎样的  $A > a$ , 若取  $k = E\left(\frac{A-a}{\omega}\right)$ , 将有

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_{a+k\omega}^A f(x) dx \right| = \left| \int_a^{A-k\omega} f(x) dx \right| \leq \int_a^{a+\omega} |f(x)| dx = L,$$

所要的结论可从狄利克雷判别法直接推出.

(6) 在假设 (9\*) 中, 把  $f(x)$  替换为  $f(x) - \frac{K}{\omega}$ . 因为后者适合 (9) 类型的条件, 则积分

$$\int_a^{\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{\omega} K \right] g(x) dx \quad (5^*)$$

根据所证的是收敛的. 由此已明白: 积分 (5) 与 (10) 同时收敛 (或发散).

7) 例如, 若在区间  $[0, +\infty)$  内令  $f(x) = \sin^2 x, \omega = \pi$  则可看出, 积分

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

因此, 积分

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x \cdot g(x) dx$$

(在对  $g$  的前述假设下) 与积分 (10) 同时收敛或发散.

反之, 积分

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \sin^2 x \right) g(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos 2x \cdot g(x) dx$$

由前例有界可证.



在任何情况下收敛, 而与积分 (10) 的性态无关!

8) 讨论下列积分的收敛性:

$$(a) \int_0^{\infty} e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x) \frac{dx}{x}, \quad (6) \int_0^{\infty} e^{\sin x} \cdot \sin(\sin x) \frac{dx}{x}.$$

(a) 我们有

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x) dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 0,$$

因为末后这两个积分 (以  $z = 2\pi - x$  代入后一个) 只差一个符号.

根据 6), 积分 (a) 收敛.

(6) 这一次

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \sin(\sin x) dx > 0,$$

因此 [参看 6)], 由于积分

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} \quad (a > 0)$$

发散, 积分 (6) 发散.

9) 研究积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\mu} + \sin x} dx$$

依赖于参数值  $\mu > 0$  的收敛性.

我们有等式

$$\frac{\sin x}{x^{\mu} + \sin x} = \frac{\sin x}{x^{\mu}} - \frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu} + \sin x)}.$$

右端第一项的积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\mu}} dx$$

如我们所知 [476], 总是收敛的, 转而研究右端第二项的积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu} + \sin x)} dx. \quad (11)$$

因为

$$\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu} + 1)} < \frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu} + \sin x)} < \frac{1}{x^{\mu}(x^{\mu} - 1)}^{68)},$$

则当  $\mu > \frac{1}{2}$  时, 右端表达式的积分收敛, 且积分 (11) 和它一起收敛. 当  $\mu \leq \frac{1}{2}$  时, 考虑左边表达式的积分, 根据 7), 与由此得出的积分

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}(x^{\mu} + 1)} \quad (a > 0)$$

同样是发散的, 从而积分 (11) 与它们一起发散.

结果, 所说的积分当  $\mu > \frac{1}{2}$  收敛, 当  $\mu \leq \frac{1}{2}$  发散.

<sup>68)</sup>不降低一般性, 可以假定  $x > 1$ , 因为对于所考虑的同一直数的积分  $\int_0^{\infty}$  收敛的充分条件是积分  $\int_2^{\infty}$  收敛.



这个例子, 在  $\mu \leq \frac{1}{2}$  的情形, 与狄利克雷收敛判别法作一比较是有教益的. 第一个因子  $\sin x$  的积分有界, 可是第二个因子

$$\frac{1}{x^\mu + \sin x}$$

当  $x \rightarrow \infty$  时趋于 0, 被破坏的仅仅是这个因子的单调性的要求, 所论的积分就是发散的!

10) 研究积分

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + x^\beta \sin^2 x}$$

与参数值  $\alpha, \beta > 0$  有关的收敛性.

用  $f(x)$  表示被积函数, 当  $x$  在  $n\pi$  与  $(n+1)\pi$  之间变化时有

$$\frac{(n\pi)^\alpha}{1 + [(n+1)\pi]^\beta \sin^2 x} \leq f(x) \leq \frac{[(n+1)\pi]^\alpha}{1 + (n\pi)^\beta \sin^2 x}.$$

积分这个不等式, 考虑到

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} \text{ ①}; \quad (12)$$

便得

$$\frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (n+1)^\beta \pi^\beta}} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx \leq \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + n^\beta \pi^\beta}}.$$

现在对  $n$  从 0 到  $\infty$  求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (n+1)^\beta \pi^\beta}} \leq \int_0^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + n^\beta \pi^\beta}}.$$

因为两端的级数与级数  $\sum_0^\infty n^{\alpha-\frac{1}{2}\beta}$  同时收敛或发散, 所以对中间的积分也与级数  $\sum_0^\infty n^{\alpha-\frac{1}{2}\beta}$  同时收敛或发散.

于是所论的积分当  $\beta > 2(\alpha+1)$  时收敛, 当  $\beta \leq 2(\alpha+1)$  时发散.

11) 对积分

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + x^\beta |\sin x|} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

也进行如同上题的讨论.

论证的方法如同上例. 这里代替积分 (12) 的, 是研究积分 [参考 288,14)]:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + A \sin x} = 2 \frac{\ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (A > 1).$$

因为当  $A \rightarrow \infty$  时

$$\frac{\ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}{\sqrt{A^2 - 1}} : \frac{\ln A}{A} \rightarrow 1,$$

则只需把所论积分与级数

$$\sum_1^\infty n^\alpha \cdot \frac{\ln(n+1)^\beta}{(n+1)^\beta} \quad \text{与} \quad \sum_1^\infty (n+1)^\alpha \frac{\ln n^\beta}{n^\beta}$$

①这容易由 288,10) 或 309,9) 推出.



作比较, 即归根结底同级数

$$\sum_2^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$$

作比较.

**答案** 当  $\beta > \alpha + 1$  时积分收敛, 而当  $\beta \leq \alpha + 1$  时积分发散.

例 6), 7), 9), 10), 11) 属于哈代 (Hardy).

12) 试完全确定依赖于参变数  $\alpha$  与  $\beta$  的积分

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{\alpha} \cdot |\sin x|^{\beta}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

何时收敛与何时发散.

(a) 假定  $\alpha \leq 1$ . 则由于

$$\frac{1}{1 + x^{\alpha} \cdot |\sin x|^{\beta}} \geq \frac{1}{1 + x^{\alpha}},$$

所以这时积分发散 [474].

(b) 假定  $\alpha \leq \beta$ . 这时把积分拆成级数 [477] 即有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^{\alpha} \cdot |\sin x|^{\beta}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z}. \end{aligned}$$

但在  $0 < z < \frac{1}{(n+1)\pi}$  时

$$(n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z < (n+1)^{\alpha} \pi^{\alpha} z^{\beta} < (n+1)^{\beta} \pi^{\beta} \cdot \left( \frac{1}{(n+1)\pi} \right)^{\beta} = 1,$$

所以最后一个级数的各项大于发散级数

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

的相应项. 可见积分也发散.

(B) 假定  $\alpha > \beta > 1$ . 这时我们把积分  $J$  表成和  $J_1 + J_2$ , 其中

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z}, \quad J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1 + (n\pi - z)^{\alpha} \sin^{\beta} z}.$$

于是, 注意  $0 < z < \frac{\pi}{2}$  与  $n \geq 1$  时

$$(n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z \geq (n\pi)^{\alpha} \left( \frac{2}{\pi} z \right)^{\beta} = n^{\alpha} c^{\beta} z^{\beta}, \quad \text{其中 } c = 2\pi^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.$$

由此

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z} &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1 + n^{\alpha} c^{\beta} z^{\beta}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot c} \int_0^{n^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot c \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + t^{\beta}} \leq \frac{c^*}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}, \\ \text{其中 } c^* &= \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^{\beta}}. \end{aligned}$$



所以

$$J_1 \leq \frac{\pi}{2} + c^* \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} < +\infty.$$

同理也有  $J_2 < +\infty$ . 可见积分收敛.

(r) 普遍情形  $\alpha > 1$ , 同时  $\alpha > \beta$ , 可以化归  $\alpha > \beta > 1$  的情形. 因为这时我们可以任取一数  $\beta' \geq \beta$  使  $\alpha > \beta' > 1$ . 因改小  $\beta$  的值只有使得积分更收敛, 所以在这普遍情形下所设积分收敛.

总结以上的讨论, 可见积分  $J$  在  $\alpha > 1$  同时  $\alpha > \beta$  的情形下收敛, 在其他情形都发散. 也可以简短些说: 积分  $J$  在  $\alpha > \max(1, \beta)$  时收敛, 在  $\alpha \leq \max(1, \beta)$  时发散.

## §2. 无界函数的反常积分

**479. 无界函数的积分的定义** 今看一函数  $f(x)$ , 给定在有限区间  $[a, b]$  上, 但在该区间上为无界的. 更确定一些, 假设这函数在任一区间  $[a, b - \eta]$  ( $0 < \eta < b - a$ ) 上都为有界而且可积, 但在  $b$  点左边的每一区间  $[b - \eta, b]$  上都是无界的. 在这种情形, 点  $b$  称为奇点.

当  $\eta \rightarrow 0$  时积分  $\int_a^{b-\eta} f(x)dx$  的 (有限或无穷的) 极限, 称为函数  $f(x)$  从  $a$  到  $b$  的 (反常) 积分, 而且像通常那样记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx. \quad (1)$$

这时若这个极限是有限的, 则说积分 (1) 收敛, 而函数  $f(x)$  则说是在这区间  $[a, b]$  上为可积. 若极限 (1) 为无穷或完全不存在, 则说积分发散.

**例题** 1) 函数  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  在任一区间  $[0, 1-\eta]$  ( $0 < \eta < 1$ ) 上都有界而且可积, 并且

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta).$$

函数在  $x=1$  这点成为无穷: 当  $x \rightarrow 1$  时  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty$ . 显然在任一区间  $(1-\eta, 1)$  内函数都无界, 即  $x=1$  这一点为奇点. 在实用上常常遇着的正是这种奇点.

因为算出来的积分当  $\eta \rightarrow 0$  时趋于极限  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ , 所以存在反常积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

现在假定函数  $f(x)$  在任一区间  $[a+\eta', b]$  ( $0 < \eta' < b-a$ ) 上都为有界而且可积, 但在  $a$  这一点 (奇点) 的右边每一区间  $[a, a+\eta']$  上为无界. 则函数  $f(x)$  从  $a$  到  $b$  的 (反常) 积分用等式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta' \rightarrow 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)dx, \quad (2)$$



(在右边的极限存在而且有限的假设之下) 来定义.

在普遍情形下, 区间  $[a, b]$  上可有若干个奇点  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m$ , 在这些点附近函数  $f(x)$  为无界, 但在不包含这些奇点的每一闭区间上, 函数都为有界而且可积.

假定 (为了简单起见) 只有三个这样的点, 而且其中有两个就是区间的端点  $a$  与  $b$ , 第三点则介于二者之间. 则函数  $f(x)$  从  $a$  到  $b$  的积分由等式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \eta_4 \rightarrow 0}} \left\{ \int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} + \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} \right\} \quad (3)$$

给定, 只要这极限是存在而且有限的.

在区间  $[a, c], [c, b]$  内各取  $d, e$  点, 则有

$$\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int_{a+\eta_1}^d + \int_d^{c-\eta_2}, \quad \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} = \int_{c+\eta_3}^e + \int_e^{b-\eta_4}.$$

很容易看出, 极限 (3) 的存在就等于后面这四个新积分的极限同时存在, 所以定义 (3) 可以改写成

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx + \int_c^e f(x)dx + \int_e^b f(x)dx,$$

假设右边的反常积分都存在<sup>①</sup>. 这定义与  $d, e$  点的选择无关.

对于反常积分 (2) 与 (3), 照样有前面用过的那些术语.

2)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , 奇点为  $-1$ ,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \rightarrow 0} \int_{-1+\eta'}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \rightarrow 0} [-\arcsin(-1+\eta')] = \frac{\pi}{2};$$

3)  $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , 奇点为  $-1$  与  $1$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4) 判断反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad (b > a) \quad (4)$$

对于指数  $\lambda > 0$  的那些值存在.

若  $\lambda \neq 1$ , 则积分

$$\int_{a+\eta}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} [(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}]$$

<sup>①</sup>除去这些积分中有两个等于有无穷大的情形.



当  $\eta \rightarrow 0$  时, 其极限为  $\infty$  或为有限数  $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$ , 要看  $\lambda > 1$  或  $\lambda < 1$  而定. 若  $\lambda = 1$ , 则

$$\int_{a+\eta}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln \eta \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } \eta \rightarrow 0).$$

所以积分 (4) 在  $\lambda < 1$  时收敛而以  $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$  为其值, 但在  $\lambda \geq 1$  时则发散 [比较 470, 2].

5) 对于与积分 (4) 没有多大差别的积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (b > a, \lambda > 0)$$

也有相同的结果.

**附注** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上就通常意义而言为可积 (因而积分  $\int_a^b f(x)dx$  已有定义), 则极限等式 (1)[或 (2) 或 (3)] 仍然成立. 这可由积分对于变动上 (下) 限的连续性 [305, 11°] 直接推知. 这样看来, 我们是把通常积分本来就适合的一个等式当成了反常积分的定义.

最后, 我们来看函数  $f(x)$  给定在无穷区间上的情形, 譬如说在区间  $[a, +\infty]$  上, 其中有有限个奇点<sup>①</sup>, 在这些点附近  $f(x)$  是无界的. 假设在每一有限区间  $[a, A]$  上积分  $\int_a^A f(x)dx$  都存在, 为一通常积分或按照上面定义的反常积分. 那么, 再令  $A \rightarrow +\infty$  即可用第 470 目等式 (1) 定义出区间  $[a, +\infty]$  上的反常积分.

在无穷区间的情形, 点  $\pm\infty$  很像以前对于有限区间所讲的奇点, 必需附带取极限的步骤. 为了这个缘故, 我们也把  $\pm\infty$  叫做奇点, 不管  $f(x)$  当  $x$  无限增大时为有界与否.

**480. 关于奇点的附注** 我们来看定义在有限区间  $[a, b]$  上的一个函数  $f(x)$ , 假定它在这区间上就通常意义而言为不可积的. 则在区间  $[a, b]$  上必有一点  $c$ , 在它的每一邻域内函数都 (在通常意义下) 为不可积的.

其实, 假如根本没有这样的一点存在, 则区间  $[a, b]$  上的每一点  $x$  都可用一个邻域  $\sigma$  围起来, 使函数在它范围内为可积的. 运用博雷尔引理 [88] 到覆盖着区间  $[a, b]$  的这组邻域  $\sum = \{\sigma\}$ , 很容易把区间  $[a, b]$  分成有限个部分, 在每部分内函数都为可积的. 然而这样看来, 函数必然要在整个区间  $[a, b]$  上为可积, 因而要与假定相反了.

所说的  $c$  点自然也叫做奇点: 在它这里“凝结”着函数的不可积性! 奇点可以有若干个甚至无穷个; 例如狄利克雷函数 [300, 2)] 的情形, 奇点就毫无例外地充满了整个区间  $[0, 1]$ .

我们现在只讨论有限个奇点  $c_1, c_2, \dots, c_m$  的情形. 在这种情形, 出现于这些点的“奇”性是很容易发觉的: 在这些点的每一个邻域中函数根本就是不界的 (所以无界性就成为于通常意义下不可积的原因). 要证明这件事只需看仅有一个奇点而且就是  $b$  的情形就够了.

所以假定对任意  $\eta > 0$  ( $\eta < b - a$ ) 函数  $f(x)$  都在区间  $[a, b - \eta]$  上为可积 (因而就为有界), 但在区间  $[b - \eta, b]$  上为不可积的. 要证明的是, 在这些条件下函数  $f(x)$  不可能在  $b$  点附近为有界.

<sup>①</sup> 奇点的个数也可以是无穷多个, 只需在每一有限区间  $[a, A]$  ( $A > a$ ) 上仅有有限个 (这个数随  $A$  而无限增大).



我们且假定这事的反面: 对于  $[a, b]$  上的所有  $x$  都有

$$|f(x)| \leq L \quad (L = \text{常数}).$$

任意给定一数  $\varepsilon > 0$  后, 我们取  $\eta = \frac{\varepsilon}{6L}$ . 因函数  $f(x)$  在区间  $[a, b - \eta]$  上为可积, 对于  $\frac{\varepsilon}{3}$  这个正数必可得一数  $\delta > 0$ , 使这区间分成长度  $\Delta x_{i'} < \delta$  的若干段时就有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

其中  $\omega_{i'}$  像通常一样表示函数的相应振幅 [297]. 我们还可以假定  $\delta < \eta$ . 现在把整个区间  $[a, b]$  分成长度  $\Delta x_i < \delta$  的若干部分, 在区间  $[a, b - \eta]$  之内的那些部分记作  $\Delta x_{i'}$ , 其余的部分记作  $\Delta x_{i''}$ ; 在后面这些部分中至多 (当  $b - \eta$  不是分点时) 有一个超出  $[a, b - \eta]$  的界限. 于是, 像刚才一样, 有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

而另一方面又有

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < 2L \cdot \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 2L(\eta + \delta) < 4L\eta = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

故得

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} + \sum_{i''} < \varepsilon.$$

然而这正是函数  $f(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上可积的条件 [297], 因而  $b$  并不是奇点, 而与关于它的假定不符合, 这就完成了证明.

这样看来, 在奇点个数为有限的情形, 奇点的特征就在于函数在它们的附近不为有界. 这正是我们在前目中定义奇点时所采用的.

**481. 积分学基本公式的用法 · 例题** 假设函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上而且 (就通常意义而言) 于每一个区间  $[a, b - \eta]$  上可积, 但以  $b$  为一奇点. 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b)$  内也就是对于  $a \leq x < b$ , 具有一原函数  $F(x)$ , 则

$$\int_a^{b-\eta} f(x) dx = F(b - \eta) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b-\eta},$$

因而反常积分 (1) 的存在就等于有限极限  $\lim_{\eta \rightarrow 0} F(b - \eta)$  的存在. 若这个极限真的存在而为有限, 我们自然就把它当作原函数  $F(x)$  在  $x = b$  时的值  $F(b)$ , 以使  $F(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上连续. 于是积分 (1) 的计算公式呈通常形状:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (5)$$

若奇点发生在区间  $[a, b]$  之内, 或在积分区间上同时有若干个奇点出现, 这个公式也同样成立; 但是 (必须牢牢地记住) 要有一定的条件, 就是要原函数  $F(x)$  在奇点以外各处都以  $f(x)$  为其导数, 而且处处连续, 即使在奇点的地方也不要例外. 这样的原函数的存在自然保证了反常积分存在.



**附注** 关于“原函数” $F(x)$ , 我们可以把它的意义了解得更广泛一些: 函数  $F(x)$  应该处处以  $f(x)$  为其导数, 这不仅在  $f(x)$  的奇点处可以例外, 在某些有限个点处也可以例外, 只要在这些点以及奇点处函数  $F(x)$  保持连续即可[参看 310].

把基本公式 (5) 里的  $b$  换成  $x$ ,  $f(x)$  换成  $F'(x)$ , 我们就可以像在第 310 目里一样, 把这公式写成

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)dx.$$

这样就把任意给定的导数  $F'(x)$  还原成原函数  $F(x)$ , 只要这导数可积就行, 即使是就反常积分的意义下也罢.

现在来讲一些例题.

1)  $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ , 奇点  $x = 0$ ; 因原函数  $\frac{3}{2}x^{2/3}$  在这点也连续, 所以积分存在:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3} \Big|_{-1}^8 = \frac{9}{2}.$$

2)  $\int_{-2}^2 \frac{2xdx}{x^2-1}$  不存在, 因原函数  $\ln|x^2-1|$  在奇点  $x = \pm 1$  成为  $\infty$ .

3)  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , 奇点  $x = 1$ ; 这里原函数  $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$  在  $x = 1$  处连续; 所以积分存在 ( $= \frac{1}{8}\pi^2$ ).

4)  $\int_0^1 \ln x dx$ , 奇点  $x = 0$ ; 这里原函数  $x \ln x - x$  当  $x \rightarrow 0$  时以 0 为极限. 把这极限值当作原函数在  $x = 0$  的值, 即有

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1.$$

5)  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ , 奇点  $x = 1$ ; 我们有

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\arcsin \frac{x+1}{2x} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}.$$

6)  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ , 奇点  $x = 1$ ; 积分不存在, 因原函数  $\ln \ln x$  在  $x = 1$  处成为  $\infty$ .

**482. 积分存在的条件和判断法** 我们只要讨论与定义 (1) 有关的情形, 因为别的情形可以仿照, 并无困难. 因与无穷区间  $[a, +\infty)$  上的反常积分完全相仿, 我们仅限于叙述一些基本命题. 证明都与以前的相似.

在  $f(x)$  是正函数的情形下, 为使反常积分 (1) 收敛, 必须且只需当任何  $\eta > 0$  时成立不等式

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx \leq L \quad (L = \text{常数}).$$

**474 目的比较定理的陈述与证明**, 在所考虑的情况下几乎是不变的. 我们不加证明地引入由此推出的柯西判别法.



设对于充分靠近  $b$  的  $x$  值, 函数  $f(x)$  具有如下形式:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

那么, 1) 若  $\lambda < 1$ , 且  $g(x) \leq c < +\infty$ , 则积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛, 2) 若  $\lambda \geq 1$ , 且  $g(x) \geq c > 0$ , 则这个积分发散.

在实用上方便的更为特殊的形式:

若当  $x \rightarrow b$  时  $f(x)$  (与  $\frac{1}{b-x}$  比较) 是  $\lambda > 0$  阶无穷大, 则积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛与发散依  $\lambda < 1$  或  $\lambda \geq 1$  而定.

例题

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ . 被积函数当  $x \rightarrow 1$  时是  $\frac{1}{4}$  阶无穷大:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad (\text{当 } x \rightarrow 1).$$

因此, 积分收敛.

2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$ , 无穷大为  $\frac{1}{2}$  阶, 积分收敛.

3)  $\int_0^1 x^\mu \ln x dx$ , 若  $\mu > 0$ ,  $f(x) = x^\mu \ln x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ , 积分是作为常义积分而存在. 当  $\mu \leq 0$ , 被积函数在  $x=0$  变为无穷大.

若  $\mu > -1$ , 则取  $\lambda$  符合条件  $1 > \lambda > |\mu| = -\mu$ , 于是有

$$\frac{x^\mu \ln x}{\frac{1}{x^\lambda}} = x^{\lambda+\mu} \ln x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0);$$

因为积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$  收敛, 则所论积分收敛 [根据与 474 目定理 2 类似的定理]①.

最后, 若  $\mu \leq -1$ , 则积分  $\int_0^1 x^\mu dx$  发散, 所论的积分则更加是发散的, 因为

$$\frac{x^\mu \ln x}{x^\mu} = \ln x \rightarrow \infty \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty)$$

[根据同一定理].

许多更深入的例子, 读者可在下一目找到.

其次引用布尔查诺与柯西的判别法, 即有这样一个关于收敛的普遍条件:

要反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  (以  $b$  为奇点) 存在, 必须且只需对于每一数  $\varepsilon > 0$  都对应地有这样一个数  $\delta > 0$ , 使在  $0 < \eta < \delta$  与  $0 < \eta' < \delta$  时总有不等式

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

由此可以像以前一样推出:

若积分  $\int_a^b |f(x)|dx$  收敛, 则②积分,  $\int_a^b f(x)dx$  必然收敛.

①我们对函数  $x^\mu \ln x$  应用适合于正函数的判别法, 因为这个函数迳直变号, 就归结为正函数.

②在  $f(x)$  (就通常意义而言) 可积于每一区间  $[a, b-\eta]$  ( $\eta > 0$ ) 上的假设之下.



反之则一般不正确. 所以我们在这里特别分辨出积分  $\int_a^b f(x)dx$  与  $\int_a^b |f(x)|dx$  一同收敛的情形; 这时候就说第一个积分是**绝对收敛**, 而函数于区间  $[a, b]$  上**绝对可积**.

在这里, 类似于 476 目最后一个定理, 容易证明:

若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上绝对可积, 而函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上在通常意义下可积, 则函数  $f(x) \cdot g(x)$  在上述区间上绝对可积.

与级数的联系由下述定理给出:

要反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  (以  $b$  为奇点) 存在, 必须且只需对于任何一系列数  $a_n \rightarrow b$ , 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx \quad (a_0 = a, a \leq a_n < b).$$

都收敛到同一个和数; 这 $\cdot$ 和数也就是反常积分的值.

我们现在给一个例, 表明一个积分可以收敛而不绝对收敛. 设在  $0 < x \leq 2$  时

$$f(x) = 2x \cdot \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cdot \cos \frac{\pi}{x^2}.$$

这函数在  $x > 0$  时连续, 在区间  $[0, 2]$  上的唯一奇点为  $x = 0$ . 另一方面不难验知  $f(x)$  的原函数为

$$F(x) = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x^2},$$

当  $x \rightarrow 0$  时有极限  $F(+0) = 0$ . 所以存在积分

$$\int_0^2 f(x)dx = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x^2} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}.$$

为要看出积分  $\int_0^2 |f(x)|dx$  确实发散, 我们把它表成级数. 取一系列数  $a_n \rightarrow 0$ :

$$a_0 = 2, a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}}, a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|dx.$$

在区间  $[a_{2k}, a_{2k-1}]$  上, 即在  $k\pi \geq \frac{\pi}{x^2} \geq k\pi - \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin \frac{\pi}{x^2}$  与  $\cos \frac{\pi}{x^2}$  符号相反, 所以  $f(x)$  保持确定的符号, 因而

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|dx = \left| \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x)dx \right| = |F(a_{2k-1}) - F(a_{2k})| = \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}.$$

由于调和级数  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$  的发散, 推知所考虑的积分级数发散, 因而所设积分也是发散的.



483. 例题 讨论下列各积分的收敛性.

$$1) (a) \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}}, \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}, \quad (B) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x},$$

$$(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx, \quad (d) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)^p d\theta.$$

解答 (a) 奇点  $\varphi = \theta$ . 因存在导数

$$\lim_{\varphi \rightarrow \theta} \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{\varphi - \theta} = -\sin \theta,$$

被积函数 (当  $\varphi \rightarrow \theta$  时就  $\frac{1}{\theta - \varphi}$  而言) 为  $1/2$  阶无穷大. 积分收敛.

(b) 奇点  $x = 0$ . 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2,$$

被积函数的阶 (就  $\frac{1}{x}$  而言) 为  $2/3$ . 积分收敛.

(B) 这里

$$\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1 \quad \text{当 } x \rightarrow 1,$$

被积函数的阶 (就  $\frac{1}{1-x}$  而言) 等于 1. 积分发散.

(r) 若  $p > 0$  则奇点为  $\frac{1}{2}\pi$ , 若  $p < 0$  则奇点为 0. 在这两种情形被积函数的阶都是  $|p|$ . 所以积分在  $|p| < 1$  时收敛, 在  $|p| \geq 1$  时发散.

(d) 若  $p > 0$ , 奇点为  $-\frac{\pi}{4}$ ; 若  $p < 0$ , 奇点为  $\frac{\pi}{4}$ . 答案与刚才相同.

$$2) (a) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx \quad (a, b > 0),$$

$$(B) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx, \quad (r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin^2 \theta - k^2| d\theta \quad (k^2 \leq 1).$$

解答 (a) 当  $x \rightarrow 1$  时被积函数趋向 0. 奇点  $x = 0$ . 取  $0 < \lambda < 1$ , 则

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{当 } x \rightarrow 0.$$

积分收敛.

(b) 当  $x \rightarrow 1$  时, 被积函数成为不定式, 但有有限极限 ( $= b - a$ ). 奇点  $x = 0$  (假定  $a, b$  二数中至少有一个小于 1, 但我们要假定的正是这样). 被积函数与其分子的比值等于  $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$  (当  $x \rightarrow 0$ ), 而分子的积分  $\int_0^1 (x^{b-1} - x^{a-1}) dx$  收敛; 故所设积分收敛.

(B) 奇点  $x = 0$ . 取  $0 < \lambda < 1$ , 就有

$$\frac{\ln \sin x}{1/x^\lambda} = \left( \frac{x}{\sin x} \right)^\lambda \cdot \sin^\lambda x \cdot \ln \sin x \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0);$$

故所设积分收敛.

(r) 令  $k = \sin \omega$  ( $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ), 则奇点  $\theta = \omega$ . 仍取  $0 < \lambda < 1$ , 则

$$\frac{\ln |\sin^2 \theta - \sin^2 \omega|}{1/|\theta - \omega|^\lambda} = \left| \frac{\theta - \omega}{\sin \theta - \sin \omega} \right|^\lambda \cdot |\sin \theta - \sin \omega|^\lambda \cdot \{\ln |\sin \theta - \sin \omega| + \ln(\sin \theta + \sin \omega)\}$$

当  $\theta \rightarrow \omega$  时趋向零; 故积分收敛.



$$3) (a) \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \quad (5) \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx.$$

**解答** (a) 当  $a < 1$  时 0 为一奇点, 当  $b < 1$  时 1 为一奇点. 我们分所设积分为二, 譬如分成:  $\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$ . 因被积函数当  $x \rightarrow 0$  时 (只要  $a < 1$ ) 就成为  $1-a$  阶无穷大, 所以第一个积分仅在条件  $1-a < 1$  之下存在, 即仅在  $a > 0$  这条件之下收敛. 相似地, 第二个积分仅在  $b > 0$  的条件之下收敛. 这样看来, 所设积分在而且只在  $a > 0$  并且同时  $b > 0$  这种情形才收敛.

(5) 关于点  $x = 0$  的情形与前相同. 只需把积分  $\int_0^{\frac{1}{2}}$  就  $a \leq 1$  的情形加以考虑 (当  $a > 1$  时, 积分成为一个常义积分而存在). 推理与 482 目例题 3) 相同. 如像情形 (a) 里一样, 积分在  $a > 0$  时收敛.

至于点  $x = 1$ , 则这里的情形有所不同, 因为当  $x \rightarrow 1$  时  $\ln x$  成为一阶无穷小. 积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1$  当  $b > -1$  时存在.

总结起来说, 所设积分的收敛条件为:  $a > 0, b > -1$ .

$$4) \int_0^\pi \frac{\sin^{n-1} \varphi d\varphi}{|1 + k \cos \varphi|^n}.$$

**解答** 因为  $k < 0$  的情形可以用变换  $\varphi = \pi - \varphi_1$  化成  $k > 0$  这种情形, 所以我们可以只假定  $k \geq 0$ . 不但如此, 为了要积分在所有的情形都收敛, 还必需:  $n > 0$  —— 否则被积函数当  $\varphi \rightarrow 0$  (或  $\varphi \rightarrow \pi$ ) 时就至少是一阶无穷大.

若  $k < 1$ , 则  $n > 0$  这个条件也是充分的.

当  $k = 1$  时, 积分不可能存在, 因为  $\varphi \rightarrow \pi$  时被积函数成为 1 阶无穷大.

最后, 设  $k > 1$ . 于是就出现一个奇点  $a = \arccos\left(-\frac{1}{k}\right)$ , 当  $\varphi \rightarrow a$  时被积式变成  $n$  阶的无穷大, 这意思是说, 要想积分存在就要求  $n < 1$ .

所以积分在两个情形收敛, 即 1)  $0 \leq k < 1$  而  $n > 0$ , 2)  $k > 1$  而  $0 < n < 1$ ; 在别的情形都发散.

$$5) (a) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad (5) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad (B) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

**解答** (a) 奇点为  $\infty$ , 而 (当  $a < 1$  时) 0 也是一个. 若把积分这样拆成两段:  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ , 则第一段积分当  $a > 0$  时收敛 (对于  $x$  而言无穷大的阶为  $1-a < 1$ ), 而第二段积分当  $a < 1$  时收敛 (对于  $\frac{1}{x}$  而言无穷小的阶为  $2-a > 1$ ). 所以积分在  $0 < a < 1$  时收敛.

(5) 奇点为  $\infty$  和 0,  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ . 取  $0 < \lambda < 1$ , 即有

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{1+x^2} \rightarrow 0, \quad \text{当 } x \rightarrow 0,$$

故  $\int_0^1$  收敛. 今取  $1 < \mu < 2$ , 则

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\mu} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2-\mu}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty,$$

这就表明  $\int_1^\infty$  也收敛. 于是推知  $\int_0^\infty$  收敛.

(B) 奇点为  $\infty$  与 0 (后者出现于  $p < 1$  的时候). 仅当  $p > 0$  时  $\int_0^1$  存在 (就  $\frac{1}{x}$  而言为  $1-p$  阶无穷大). 至于  $\int_1^\infty$  则对于任何  $p$  都存在; 因为, 取  $\lambda > 1$ , 即有

$$\frac{x^{p-1} e^{-x}}{1/x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} \rightarrow 0, \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty.$$

故  $\int_0^\infty$  当  $p > 0$  时存在.



6) 在这个与后面的两个习题中, 所考虑的函数  $f(x)$  与  $g(x)$  都假定是定义在有穷区间  $[a, b]$  上, 不过也许有有穷个奇点.

求证:

(a) 若函数  $f^2$  可积, 则函数  $f$  本身必定是绝对可积 (这样的函数  $f$  就说是“平方可积”的)<sup>69)</sup>;

(6) 若二函数  $f$  与  $g$  是平方可积, 则它们的和  $f + g$  也是平方可积;

(B) 在同一假设之下, 乘积  $fg$  也是 (绝对) 可积的函数.

这些都可根据比较定理从下列不等式很简单地推演出来:

$$|f| \leq \frac{1+f^2}{2}, \quad (f+g)^2 \leq 2(f^2+g^2), \quad |fg| \leq \frac{f^2+g^2}{2}.$$

7) 对上述一类的函数可以建立如同在 321 目中那样建立过的积分不等式, 而在那里假定所考虑函数在通常意义下是可积的. 例如, 若在任何情况下  $b$  是唯一的奇点 (它可能是  $\infty$ ), 则仅需对区间  $[a, x_0]$  写出某个不等式, 其中  $a < x_0 < b$ , 然后当  $x_0 \rightarrow b$  取极限, 以证明对反常积分来说不等式成立. 同时由不等式右端的积分的收敛性推出左端积分的收敛性, 这与我们在 375 目 8) 中对无穷级数所作的一样.

**484. 反常积分的主值** 假设函数  $f(x)$  给定在区间  $[a, b]$  上, 只有一个奇点  $c$  在这区间内, 在不包含  $c$  的任一部分区间上都是 (常义) 可积的. 从  $a$  到  $b$  的反常积分是用等式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^b \right\}$$

来下定义的, 其中极限当  $\eta$  和  $\eta'$  独立无关地取极限时应该存在. 在有些情形里, 这个极限不存在, 但若令  $\eta$  与  $\eta'$  保持相等而趋于零:  $\eta' = \eta \rightarrow 0$ , 这样来考察以上表达式的极限, 往往是很有益处的. 如果这个极限存在, 就 (按照柯西的先例) 称为反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  的主值而记作

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b \right\}.$$

[V.p. 是 “Valeur principale” 一词的两个字头, 按法文的意思就是“主值”]. 在这种情形下, 通常便说积分  $\int_a^b f(x)dx$  在主值的意义之下存在. 若一个积分  $\int_a^b f(x)dx$  作为一个反常积分而存在, 则显然也在主值的意义之下存在; 但反过来, 一般地说, 却是不对的. 我们来看一些例题.

1) 积分  $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$  ( $a < c < b$ ) 当作一个反常积分来看是不存在的, 因为表达式

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\eta}{\eta'}$$

当  $\eta$  与  $\eta'$  互相独立无关地趋于 0 时没有确定的极限. 然而若把  $\eta$  和  $\eta'$  用条件  $\eta' = \eta$  联系起来, 就得到表达式

$$\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b = \ln \frac{b-c}{c-a},$$

<sup>69)</sup> 在这里, 区间  $[a, b]$  假设是有限的.



事实上是与  $\eta$  无关的, 所以存在有积分的主值:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

2) 积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} \quad (a < c < b, n \geq 2).$$

当  $n$  为偶数时有无穷大值, 而当  $n$  为奇数时, 作为反常积分, 全然不存在. 我们现在考虑表达式:

$$\begin{aligned} & \int_a^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{(x-c)^n} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{\eta^{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数时, 这表达式成为一个常数; 所以在这个情形是有主值:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right] \quad (n \text{ 为奇数}).$$

3) 再看发散的积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{k - \sin \theta}$  ( $0 < k < 1$ ). 奇点为  $a = \arcsin k$ , 而且当  $\theta \rightarrow a$  时被积函数变为一阶无穷大. 我们有

$$\int \frac{d\theta}{k - \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{k - \sin \theta}{1 - k \sin \theta - \sqrt{1-k^2} \cos \theta} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{\sin a - \sin \theta}{1 - \cos(a-\theta)} \right|.$$

所以

$$\int_0^{a-\eta} + \int_{a+\eta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ \ln \frac{\sin a - \sin(a-\eta)}{\sin(a+\eta) - \sin a} + \ln \frac{1 - \cos a}{\sin a} \right\}.$$

当  $\eta \rightarrow 0$  时第一项里对数符号后面的表达式趋于 1 (这是不难用洛必达法则验证的). 于是

$$\text{V.p.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{k - \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k} \quad (0 < k < 1).$$

在有一些情形能够预先判断积分主值的存在性. 我们现在要讲一个这样的情形. 假设给定一个积分

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)},$$

其中函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续而且仅在区间内的  $c$  这一点变为 0. 假设在  $c$  点邻域内有一阶导数  $f'(x)$  存在, 当  $x = c$  时不为 0, 并且在这一点还有二阶导数  $f''(c)$  存在.

因为  $\frac{1}{f(x)}$  当  $x \rightarrow c$  时成为一阶无穷大, 且当  $x$  通过  $c$  点时变号, 所以所论的积分是发散的. 我们要证明的是它在主值的意义之下存在.

今令

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f'(c)(x-c)} + \varphi(x),$$

则  $\varphi(x)$  对于  $x \neq c$  为连续. 在  $x = c$  附近, 我们根据带有佩亚诺形式余项的泰勒公式 [124] 有

$$f(x) = f'(c)(x-c) + [f''(c) + \alpha(x)] \cdot \frac{(x-c)^2}{2},$$



其中  $\alpha(x)$  当  $x \rightarrow c$  时趋于 0. 于是显然

$$\varphi(x) = -\frac{\frac{1}{2}[f''(c) + \alpha(x)]}{f'(c) \left[ f'(c) + \frac{f''(c) + \alpha(x)}{2}(x - c) \right]},$$

所以  $\varphi(x)$  在  $x = c$  附近保持有界, 因而  $\varphi(x)$  就在通常意义之下也是可积的. 因为函数  $\frac{1}{f'(c)(x-c)}$  的积分在主值意义之下存在 [参看 1)], 所以对所论的积分也是这样.

例如, 用这个判别法就很容易确定例题 3) 里的主值存在. 再举一个例, 就是一个很重要的非初等函数, 即所谓“积分对数”的定义:

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{dx}{\ln x}.$$

这积分只当  $0 < a < 1$  时收敛; 当  $a > 1$  时可以取它的主值.

主值的概念并不难推广到所考虑的区间的内部有任意有限个奇点的情形.

到现在为止我们一直撇开区间的端点为奇点这一可能性; 这是可以不讲的, 因若只要建立主值时这种奇点根本是谈不上的.

4) 例如假设提出一显然发散的积分 ( $a > 0$ )

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx.$$

这里奇点为  $x = 1$  与 (当  $a < 1$  时) 区间的端点  $x = 0$ . 很容易证明, 在这一情形, 主值

$$\text{V.p.} \int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^2 \right\}$$

可以简单地化成积分

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1} - (1+t)^{a-1}}{t} dt.$$

(当  $a < 1$  时为一反常积分).

最后我们再讲一种变相的“主值”, 这也是常用到的. 这就是要讲展布于两边都延伸到无穷的区间上的积分的主值, 不过我们不假定在这区间内有奇点. 我们都知道这种积分可用极限等式来下定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^A f(x) dx,$$

其中极限的取法是按照  $A$  与  $A'$  互相独立无关的假定来作. 可是在这个意义下极限不存在的时候, 对于  $A' = -A$  这一特殊假定来说, 极限仍往往可能存在. 这特殊的极限称为积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  的主值而且用符号记作

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

例如假若  $f(x)$  是奇函数, 那么它在对于 0 为对称的区间  $(-A, A)$  上的积分总等于 0, 因之也就

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0,$$



纵然是反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  不存在也是这样 (譬如说对于函数  $\sin x$  就是这样).

假若  $f(x)$  是偶函数, 则

$$\int_{-A}^A f(x)dx = 2 \int_0^A f(x)dx,$$

左边的积分有有限极限存在的情形也就是积分  $\int_0^A f(x)dx$  有有限极限存在的情形, 所以反常积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  要是收敛的话, 积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  也就一同收敛了. 由此看来, 对于偶函数而言, 积分的主值只能与反常积分同时存在 (并且自然也就等于它.)

任意一个 (在任何有限区间上都为可积的) 函数  $f(x)$  都能表成一个偶函数与一个奇函数的和, 这二函数为

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{与} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

(也还保持有可积性).

现在由以上所讲的, 显然

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx,$$

只要后面这一反常积分收敛就是如此. 例如只要注意函数  $\frac{1+x}{1+x^2}$  是由偶函数  $\frac{1}{1+x^2}$  与奇函数  $\frac{x}{1+x^2}$  合成的, 就立刻可以写出

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

#### 485. 关于发散积分广义值的附注

在第十一章 §9, 我们讲了发散级数的求和, 按照某种规则, 把“广义和”赋予这样的级数, 与此类似, 存在着这样的方法, 允许在某些情况下把“广义值”发散积分. 其实我们在上一目这样做过, 即在极限过程中提出某些简化的特殊约定, 这种极限过程导致普通的反常积分 (在主值的意义下). 在这里我们考虑本质上全然不同的过程, 这些过程与我们对发散级数所应用的那些是相似的. 我们只举这样一些过程的两个例子, 它们与对级数的切萨罗法及泊松-阿贝尔法类似.

I. 设函数  $f(x)$  对  $x \geq 0$  有定义, 并在每一个有限区间  $[0, x]$  上在通常的意义下可积, 但在区间  $[0, \infty]$  不可积, 定义函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

并取其平均值

$$\frac{1}{x} \int_0^x F(u)du.$$

若对它存在有限极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u)du = I,$$

则这个数被看成是积分的“广义值”.

作为例子把这个过程应用到我们已知的发散积分

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \tag{6}$$



[472,4)]. 这儿  $f(x) = \sin x$ ,  $F(x) = 1 - \cos x$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

于是数 1 就被作为发散积分 (6) 的“广义值”而得到了.

自然地, 这儿出现所述方法的正则性问题: 对按照 470 目定义, 具有有限值  $I$  的收敛积分

$$\int_0^\infty f(x) dx, \quad (7)$$

这个方法赋予它的“广义值”是否同样也是  $I$ ? 我们来证明情况正是这样.

对任意的数  $\varepsilon > 0$ , 由于积分 (7) 收敛, 可以找到这样的  $x_0 > 0$ , 使得对  $x \geq x_0$  有

$$|F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{其中 } F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

假设  $x > x_0$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I &= \frac{1}{x} \int_0^x [F(u) - I] du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{x_0} [F(u) - I] du + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [F(u) - I] du, \end{aligned}$$

因此

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I \right| < \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} [F(u) - I] \right| + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |F(u) - I| du.$$

左端第二项  $< \frac{\varepsilon}{2}$  (按照数  $x_0$  本身的选择); 当  $x$  充分大时, 第一项同样也可变得小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 于是同时有

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I \right| < \varepsilon.$$

这样一来, 实际上

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = I.$$

这就是所要证明的.

II. 这一次, 对于给定的函数  $f(x)$ , 积分 (7) 不存在, 按此函数引入另一积分

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx.$$

若上述积分当  $k > 0$  时收敛并存在有限极限

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx = I,$$

则这个极限可被取作发散积分 (7) 的“广义值”.

为了给出例子, 重新考虑积分 (6), 因为

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin x dx = \frac{1}{k^2 + 1}$$

[472,1)] 当  $k \rightarrow +0$  时趋于 1, 那么这儿 1 可作为积分 (6) 的“广义值”.

关于第二个方法的正则性问题, 我们后面再回过头来谈 [520].



### §3. 反常积分的性质与变形

**486. 最简单的一些性质** 我们将要讨论在有限或无穷区间  $[a, b]$  上的 (就通常意义而言或反常积分的意义而言的) 可积函数. 这样,  $a$  与  $b$  就不但可以是有限的数, 而且还可以是  $\pm\infty$ . 反常积分的最简单的一些性质, 我们只加以列举, 这些都与通常积分的性质完全相似 [302 ~ 306] 而且可以用同样方法从它们推出来. 因为反常积分都是通常积分的极限, 所以通常只需把表达我们要求的性质的等式与不等式先对通常积分写出来, 然后再取极限.

首先, 这里也可以引进按定向区间积分的概念而且证明:

1° 若  $f(x)$  在区间  $[b, a]$  上为可积, 则在区间  $[a, b]$  上也为可积, 而且还有

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

[这可以直接地当作是积分  $\int_a^b$  当  $a > b$  时的定义].

其次:

2° 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  和  $[a, c], [c, b]$  这三个区间中的最大的一个<sup>①</sup> 上为可积. 那么在其余两个区间上也为可积, 而且等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

成立.

3° 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上为可积而且  $c =$  常数, 则  $c \cdot f(x)$  也为可积, 而且

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

4° 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  都在区间  $[a, b]$  上可积; 则函数  $f(x) \pm g(x)$  也可积, 而且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

上面 (及下面) 这一性质的证明<sup>②</sup> 只要留心 479 目附注即可直接得出. 譬如说, 假设  $b$  为对于函数  $f(x)$  与  $g(x)$  中任何一个而言的唯一的奇点. 那么只要写出等式

$$\int_a^{x_0} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{x_0} f(x)dx \pm \int_a^{x_0} g(x)dx \quad (a < x_0 < b),$$

再对于  $x_0 \rightarrow b$  取极限, 即可得出前面那个公式, 无论所有从  $a$  到  $b$  的积分都是反常积分或者只有一个反常积分, 都是一样.

<sup>①</sup>更准确地说: 是把其他两个区间包含在其内的一个区间.

<sup>②</sup>对于积分限为无穷的积分, 性质 3° 与 4°, 在 473 目已提到过, 甚至在随后的一目中还应应用过. 这里对此二性质作了更一般的表述.



5° 若两个在区间  $[a, b]$  上可积的函数  $f(x)$  与  $g(x)$  适合不等式  $f(x) \leq g(x)$ , 则当  $a < b$  时

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6° 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上绝对可积, 则当  $a < b$  时

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7° 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 则对于这区间上的任何一个  $x$ , 积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (1)$$

都存在而且还是  $x$  的连续函数.

设  $a < x_0 \leq b$ , 要证的譬如说就是  $\Phi(x)$  在  $x = x_0$  的左连续. 在  $a$  到  $x_0$  之间取  $c$  使区间  $[c, x_0]$  上除去  $x_0$  可能为奇点而外, 绝无奇点, 就对于  $c < x \leq x_0$  有

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt, \quad (2)$$

因而只需证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} \int_c^x f(t)dt = \int_c^{x_0} f(t)dt.$$

然而这个等式无论当右端为常义积分或反常积分时都是成立的 [参看 479 目附注].

若  $x_0 = b = +\infty$ , 则函数  $\Phi(x)$  在  $x = +\infty$  的连续性的意思就是说

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty) = \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

8° 在同一假设之下, 若函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续, 则 (1) 中的函数  $\Phi(x)$  在这点有导数存在, 而且

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

证明只需利用分解式 (2), 并引用常义积分的相似的性质.

很容易对于积分下限为变量的情形相仿地叙述出性质 7° 与 8°.

**487. 中值定理** 第一中值定理在最初一个形式 [304, 9°] 中, 本质上要假定函数  $f(x)$  为有界而区间为有限, 因之不能转移到反常积分的情形. 但是推广了的形式 [304, 10°] 却可以搬将过来:

**第一中值定理** 假设二函数  $f(x)$  与  $g(x)$  都在区间  $[a, b]$  上可积, 又假设  $f(x)$  有界:

$$m \leq f(x) \leq M,$$



而  $g(x)$  不改变正负号; 那么函数  $f(x) \cdot g(x)$  也就可积, 而且

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx,$$

其中  $m \leq \mu \leq M$ .

积分的存在性是从 475 目末尾的定理以及 482 目中与它类似的定理出来的. 而等式本身则可形式上像对于常义积分一样去证明.

若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则可取  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值与最大值作为  $m$  与  $M$ , 而因子  $\mu$  则与函数  $f(x)$  的一个值相等:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx,$$

其中  $c$  在  $[a, b]$  上. 这在区间  $[a, b]$  为无穷的情形也对, 因为魏尔斯特拉斯定理与柯西定理 [85, 82] 对于这种情形也是正确的, 这一点请读者自行验证.

也还有 [比较 306, 14°]:

**第二中值定理** 假设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上单调而有界, 而函数  $g(x)$  则在这区间上可积. 那么函数  $f(x) \cdot g(x)$  也就可积, 而且

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

( $a \leq \xi \leq b$ )

我们为了明确起见专讨论一个情形, 就是  $a$  为有限,  $b = +\infty$ , 而  $g(x)$  没有  $+\infty$  以外的奇点这一情形. 积分的存在性可从阿贝尔判别法推出.

函数  $f(x)$  可以看作是递减的而无损于普遍性. 由于它的有界性, 就存在一个有限的极限

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

于是  $f^*(x) = f(x) - f(+\infty) \geq 0$ . 对于有限区间  $[a, A]$  总有 [306, 13°]

$$\int_a^A f^*(x) g(x) dx = f^*(a) \int_a^\eta g(x) dx \quad (a \leq \eta \leq A). \quad (3)$$

函数  $\int_a^A g(x) dx$  既在区间  $[a, +\infty]$ <sup>70)</sup> 上为  $A$  的连续函数, 就有有限的上下界  $M$  与  $m$ , 于是 [参看 (3)]

$$m \cdot f^*(a) \leq \int_a^A f^*(x) g(x) dx \leq M \cdot f^*(a),$$

因而, 就  $A \rightarrow +\infty$  而取极限, 得到

$$m \cdot f^*(a) \leq \int_a^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \leq M \cdot f^*(a).$$

<sup>70)</sup> 在形如  $[a, \infty]$ ,  $[-\infty, a]$  及  $[-\infty, \infty]$  的无穷闭区间上连续的函数的性质, 同读者已很好地了解的在有限闭区间上连续的函数性质完全类似.



由此推知

$$\int_a^{+\infty} f^*(x)g(x)dx = \mu \cdot f^*(a) \quad (m \leq \mu \leq M). \quad (4)$$

但是连续函数  $\int_a^A g(x)dx$  达到它自己的上下界  $M$  与  $m$  以及介于  $M$  与  $m$  之间的任何值, 这就是说  $\mu = \int_a^\xi g(x)dx$ , 其中  $a \leq \xi \leq +\infty$ .

把所得到的  $\mu$  的表达式以及  $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$  代入 (4) 里去, 即得所要证的公式.

**488. 反常积分的分部积分法** 假设函数  $u = u(x)$  与  $v = v(x)$  连同它们的一阶导数在区间  $[a, b]$  上除掉  $b$  点 (可能  $b = +\infty$ ) 以外的全部点上皆有定义而且连续. 于是等式

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

成立, 只需把式中二重替换看成是差数

$$\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

这里假定了一点, 就是从整个等式所含三件东西 (两个积分和一个二重替换) 之中的两件有意义可以推出第三件也存在.

其实, 取  $a < x_0 < b$ , 即可写出对于区间  $[a, x_0]$  的通常的分部积分公式, 其中积分全是常义积分:

$$\int_a^{x_0} u dv = [u(x_0)v(x_0) - u(a)v(a)] - \int_a^{x_0} v du.$$

今使等式中的  $x_0$  趋于  $b$ . 则整个等式中的三件东西之中的任何两件若有有限的极限<sup>①</sup>, 其余一个也就有有限的极限, 因而所求证的等式利用取极限的办法就可以证明了.

**489. 例题** 1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$ ——在这里分部积分法把反常积分化成了常义积分, 因而也同时证明了反常积分的存在性. 下面几个例题也有同样的特点.

2)

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \ln x d \operatorname{arctg} x = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

(5) 同样,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

<sup>①</sup>参看 477 目附注.



3)

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx = - \int_a^\infty \frac{d \cos x}{x} = - \frac{\cos x}{x} \Big|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx \quad (a > 0).$$

因为二重替换和右端的积分都有意义, 所以这也证明了左端积分的存在性 [比较 476, 477].

可以完全照样来证明积分

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\lambda} dx \quad (a > 0, \lambda > 0)$$

的存在性, 只要对于所有  $x > a$  函数  $f(x)$  都连续而且它的积分  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  又有界. [这可从狄利克雷判别法推出].

用分部积分的方法有时可得出递推公式, 而后用这些递推公式就可以很容易地计算所设积分. 这一点我们用下面各例 (其中  $n$  与  $k$  为自然数) 来阐明.

$$4) I_n = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^n dt.$$

我们有

$$I_n = -e^{-t} \cdot t^n \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{n-1} dt = n I_{n-1},$$

故得  $I_n = n!$

在这里 (同后面各例中) 二重替换为零, 这就产生了分部积分法用在定积分上 (而非不定积分上) 的优点.

$$5) E_n = \int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x dx \quad (a > 0).$$

首先, 我们用分部积分法得到

$$E_n = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin^n x \Big|_0^\infty + \frac{n}{a} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x dx.$$

因二重替换等于零, 所以再引用分部积分法就更进一步得着

$$\begin{aligned} E_n = & -\frac{n}{a^2} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^\infty + \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ & - \frac{n}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

若把这里的  $\cos^2 x$  换成  $1 - \sin^2 x$ , 则很容易得到循环公式:

$$E_n = \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} \cdot E_{n-2}.$$

因为  $E_0 = \frac{1}{a}$ ,  $E_1 = \frac{1}{1+a^2}$ , 所以最后要看  $n$  为奇数或偶数而相应地得到

$$\begin{aligned} E_{2k-1} &= \frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2)\cdots(2k-1^2+a^2)}, \\ E_{2k} &= \frac{(2k)!}{a(2^2+a^2)(4^2+a^2)\cdots(2k^2+a^2)}. \end{aligned}$$

6) 分部积分法的推广公式 [311(7)] 也很容易推广到反常积分的情形.

例如假设要讨论积分

$$K = \int_0^\infty e^{-(p+1)x} \cdot L_n(x) dx,$$



其中  $p > 0$  而  $L_n(x)$  为所谓第  $n$  个切比雪夫-拉盖尔(Laguerre) 多项式.

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

利用所说公式就有

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx \\ &= \left\{ e^{-px} \cdot \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}e^{-px}}{dx^{n-1}} \cdot x^n e^{-x} \right\} \Big|_0^\infty \\ &\quad + (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} \cdot \frac{d^n e^{-px}}{dx^n} dx = p^n \int_0^\infty x^n e^{-(p+1)x} dx, \end{aligned}$$

因而终于得到 [参看 4)]:

$$K = \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}} \cdot n!$$

同样可证得下列结果:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) \cdot L_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \neq n, \\ (n!)^2, & \text{当 } k = n. \end{cases}$$

**490. 反常积分里的变量变换** 假设函数  $f(x)$  在  $[a, b)$  这一有限的或无穷的区间上有定义而且连续, 因之在这区间的每一不包含  $b$  点的部分上都是就通常意义而言为可积的, 而  $b$  这一点则可能是  $+\infty$ ; 按假设,  $b$  这一点仍是  $f(x)$  的唯一的奇点.

我们现在要考虑的是一个单调上升函数  $x = \varphi(t)$ , 它同它的导数  $\varphi'(t)$  在区间  $[\alpha, \beta)$  上是连续的, 而  $\beta$  又可以是  $+\infty$ ; 我们还假定  $\varphi(\alpha) = a$  而且  $\varphi(\beta) = b$ . 最后这个等式的意义应当了解成  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$ .

在这些条件之下就有等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (5)$$

成立, 不过要假定这两个积分中有一个存在 (因而另一个也就可以推知其存在). 后面这个积分也许是常义积分, 也许是以  $\beta$  为唯一奇点的反常积分.

按照反函数的定理 [83] 显然可以把  $t$  看成是  $x$  在  $[a, b)$  上的单调上升而且连续的函数:  $t = \theta(x)$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow b} \theta(x) = \beta$ .

现设  $x_0$  与  $t_0$  为  $x$  与  $t$  在区间  $(a, b)$  与  $(\alpha, \beta)$  上任意一对互相对应的值. 于是引用常义积分中的变量变换即有

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

假若 (5) 里的两个积分, 譬如说, 是第二个存在, 那么我们就令  $x_0$  按照任意方式变动去接近  $b$ ; 这时  $t_0 = \theta(x_0)$  就趋于  $\beta$ , 而我们也证明了公式 (5) 成立, 同时又用这证明确立了它左边的积分的存在性.



以上的讨论同样可以用到  $\alpha > \beta$  而函数  $\varphi(t)$  单调下降的情形. 这就把奇点分布的别种可能情形都解决了. 关于变换积分时积分限的位置, 应当随时记住的是, 积分下限  $\alpha$  应当对应到积分下限  $a$ , 而积分上限  $\beta$  应当对应到积分上限  $b$ , 不管是  $\alpha < \beta$  或者是  $\alpha > \beta$  都一样.

#### 491. 例题 1) 积分

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} \quad (k^2 < 1 < x_0)$$

可用变换  $x = \frac{1}{t^2}, dx = -\frac{2}{t^3}dt$  化成

$$-2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}^0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x_0}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

这里  $a = x_0, b = \infty, \alpha = \frac{1}{\sqrt{x_0}}, \beta = 0$ . 反常积分变化成了常义积分.

2) 试用变换  $x = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$

计算积分

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

提示 这里  $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ , 而所求积分可化成通常积分

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi.$$

3) 为了证实积分  $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$  的收敛性, 我们在它里面实行变数替换:  $x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ ,  $a = \alpha = 0, b = \beta = \infty$ . 我们得到已知的收敛的 [476 或 489, 3)] 积分  $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ , 因之所设积分也收敛. 有趣的一点是, 被积函数当  $x \rightarrow \infty$  时并不趋向任何极限, 而振动于  $+1$  与  $-1$  之间.

照样可以解决积分  $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$  的收敛问题.

下面的例子证明了更为一般的结果.

4) 证明: 若  $f'(x)$  单调上升且当  $x \rightarrow \infty$  时趋于  $\infty$ , 则积分

$$\int_0^{\infty} \sin(f(x)) dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(f(x)) dx$$

收敛.

首先, 对于充分大的  $x, f'(x) > 0$ , 且  $f(x)$  单调上升, 我们假定从  $x = a$  开始, 上述就成立. 借助于有限增量公式, 得

$$f(x+1) = f(x) + f'(x+\theta) \geq f(a) + f'(x),$$

因此, 函数  $f(x)$  本身当  $x \rightarrow \infty$  趋于  $\infty$ . 引入新的变量  $t = f(x)$ , 因此若以  $g$  表示  $f$  的反函数, 则

$$x = g(t), \quad dx = g'(t)dt \quad (\alpha = f(a), \beta = \infty).$$



但导数  $g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$  单调下降, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 它趋于 0. 所以根据狄利克雷判别法变换后的积分

$$\int_{f(a)}^{\infty} \sin t \cdot g'(t) dt, \quad \int_{f(a)}^{\infty} \cos t \cdot g'(t) dt$$

是收敛的, 而所论的两个积分和它们一起, 都是收敛的.

5) 要算出积分  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  的值 [其收敛性已在 483,5)(6) 里证实了] 可以把它分开成两个:  $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ . 在第二个里面作变换  $x = \frac{1}{t}$  ( $a=1, b=\infty, \alpha=1, \beta=0$ ) 就得到结果

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

于是推知所设积分等于 0.

6) 设所给反常积分为

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

则用变换  $x = \sin t$  ( $a=0, b=1, \alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}$ ) 即可化成通常积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t} dt.$$

7) 积分  $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$  的计算 [比较 472,2)] 可以用适当的变换作得很简单.

首先它可以用变换  $x = \frac{1}{t}$  ( $a=0, b=\infty, \alpha=\infty, \beta=0$ ) 化成积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4},$$

所以可以写成

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

现在只要引用变换  $x - \frac{1}{x} = z$  ( $a=0, b=+\infty, \alpha=-\infty, \beta=+\infty$ ), 就立即得到

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

8) 要算出积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg} \theta}}$  的值, 很自然地要令  $t = \sqrt{\operatorname{tg} \theta}$ , 即  $\theta = \operatorname{arctg} t^2$  ( $a=0, b=\frac{\pi}{2}, \alpha=0, \beta=\infty$ ); 于是归结到刚才计算过的积分:  $2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$



9) 试验证下列公式:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\alpha^2 - x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \quad (\alpha > 1);$$

$$(б) \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\arcsin \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$(B) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha > 0);$$

$$(\Gamma) \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha > 0);$$

$$(\Delta) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \frac{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} & (\alpha > 1); \\ 1 & (\alpha = 1); \\ \frac{\arccos \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

提示 所有情形中都运用阿贝尔替换 [284].

10) 关于下列这两个积分

$$\int_\alpha^\infty \frac{dx}{x \ln^\lambda x}, \quad \int_A^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\lambda(\ln x)} \quad (\lambda > 0, \alpha > 1, A > e),$$

收敛问题都可立即解决, 只要利用变换

$$t = \ln x, \quad u = \ln(\ln x)$$

把它们化成积分

$$\int_{\ln \alpha}^\infty \frac{dt}{t^\lambda}, \quad \int_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{du}{u^\lambda}$$

——两个都在  $\lambda > 1$  时收敛, 在  $\lambda \leq 1$  时发散.

在以下各题中的  $f(u)$ , 不用声明, 都是对于  $u \geq 0$  为连续的某个函数.

11) 求证

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \ln x \frac{dx}{x} = \ln a \cdot \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x} \quad (a > 0),$$

只要两个积分都收敛就成立.

提示 引用变换  $x = ae^u$  ( $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ ).

12) 求证 (当  $p > 0$  时)

$$(a) \int_0^\infty f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{x} = 0,$$

$$(б) \int_0^\infty f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

只要这些积分收敛就成立.

譬如对于 (a) 我们有  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ , 但  $\int_1^\infty = -\int_0^1$  是很容易用变换  $x = \frac{1}{t}$  验证的, 等等.



13) 试在右边的积分收敛这一假定之下来证明公式

$$\int_0^{\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} f(y^2) dy \quad (A > 0, B > 0).$$

变换  $y = Ax - \frac{B}{x}$  ( $a = -\infty, b = +\infty, \alpha = 0, \beta = +\infty$ ) 给出

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2) dy &= \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \cdot \left(A + \frac{B}{x^2}\right) dx \\ &= A \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx + B \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \cdot \frac{dx}{x^2}. \end{aligned}$$

但是最后这个积分可用变换  $x = -\frac{B}{At}$  ( $a = 0, b = +\infty, \alpha = -\infty, \beta = 0$ ) 化成

$$A \int_{-\infty}^0 f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right] dt,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx.$$

由此 (因为被积函数都是偶函数) 就推出所要证的公式.

14) 作为结尾, 在掌握了反常积分的变量变换后, 我们回到前面还未完成的一个问题. 在 439,1) 曾研究了连续函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 \cdot n^q},$$

但未弄清当  $0 \leq p < 1, q > 1$  及  $p + q \leq 2$  时, 它在点  $x = 0$  的性状.

应用 234 页脚注中的公式 (10a), 可以借助于积分

$$f(x) \geq \int_1^{\infty} \frac{x dt}{t^p + t^q \cdot x^2}$$

从下方来估计级数的和. 假设  $t = x^{-\frac{2}{q-p}} \cdot v$ , 这样来对不等式作变换:

$$f(x) \geq x^{\frac{p+q-2}{q-p}} \int_{x^{\frac{2}{q-p}}}^{\infty} \frac{dv}{v^p + v^q}.$$

当  $x \rightarrow +0$  时, 积分趋于有限的正极限

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{v^p + v^q},$$

而积分前的因子当  $x \rightarrow +0$  时或者等于 1 (若  $p + q = 2$ ), 或者就趋于  $\infty$  (若  $p + q < 2$ ). 因为  $f(0) = 0$ , 则在点  $x = 0$  的右边在任何情况下都有间断, 在点  $x = 0$  左边也是如此.

附注 带有无穷限的积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  总是可以用适当的替换化成只带有穷限的积分 (常义的或反常的). 例如, 若  $a > 0$  即可令  $x = \frac{1}{t}$ :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}.$$



反之, 以  $b$  为唯一奇点的反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  也总是可以化成带有无穷限的积分 (无别的奇点). 例如, 令  $x = b - \frac{1}{t}$  即得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

#### §4. 反常积分的特别算法

**492. 几个有名的积分** 我们先讲几个重要积分的特意创造的计算法.

1° 欧拉 (L.Euler) 积分:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

它的存在性我们已经证明过 [489,1)]. 欧拉积分的计算法主要地是利用变量变换. 令  $x = 2t$ , 即有

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt.$$

最后这个积分中代入  $t = \frac{\pi}{2} - u$ , 即化成这样

$$2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u du,$$

所以结果得到一个确定  $I$  的方程

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + 2I,$$

于是得知

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

下列这两个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx, \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx,$$

都可以化成欧拉积分, 只相差一个正负号 [比较 489,1) 与 2)(6)].

2° 我们现在要来计算见于概率论中的欧拉-泊松积分

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

为了这个目的我们要预先建立几个不等式.

以微分学中常用的方法不难验证, 函数  $(1+t)e^{-t}$  在  $t=0$  时达到它的最大值 1. 因之对于  $t \geq 0$  都有

$$(1+t)e^{-t} < 1.$$



令这里的  $t = \pm x^2$ , 即得

$$(1 - x^2)e^{x^2} < 1 \quad \text{与} \quad (1 + x^2)e^{-x^2} < 1,$$

由此推知  $1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2} \quad (x > 0).$

假若限定这里的第一个不等式中的  $x$  在区间  $(0, 1)$  内变动 (因而  $1 - x^2 > 0$ ), 而第二个不等式中的  $x$  则看作是任意的, 我们就可以把上列各式同升任意自然数  $n$  次方<sup>①</sup>; 这样即得

$$(1 - x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1)$$

与

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1 + x^2)^n} \quad (x > 0).$$

取积分, 第一个不等式从 0 到 1, 第二个不等式从 0 到  $+\infty$ , 即得

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

但是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot K \quad (\text{用变换 } u = \sqrt{n}x), \\ \int_0^1 (1 - x^2)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{用变换 } x = \cos t). \end{aligned}$$

而且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{用变换 } x = \operatorname{ctgt}).$$

[这里我们用了积份值  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$  的已知表达式, 312, (8)]. 这样一来, 对于我们还是未知其值的  $K$  就被限于下列两个表达式之间:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

所以, 取平方即变成:

$$\begin{aligned} &\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)} < K^2 \\ &< \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{[(2n-3)!!]^2 (2n-1)}{[(2n-2)!!]^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

现在从沃利斯公式 [317]:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)}$$

<sup>①</sup> 两边都是正的不等式是可以把两边同升一个自然数次方的。



容易看出来, 不等式两端的表达式当  $n \rightarrow \infty$  时都趋于同一个极限  $\frac{\pi}{4}$ . 于是推知

$$K^2 = \frac{\pi}{4}, \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{因 } K > 0).$$

3° 最后我们来看积分

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

我们已经知道它是收敛的 [476;477;489,3)]. 我们把积分表成级数形状:

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(\nu+1) \cdot \frac{\pi}{2}}$$

令  $\nu = 2\mu$  或  $2\mu - 1$ , 并相应地采用一下变换  $x = \mu\pi + t$  或  $x = \mu\pi - t$ , 就有

$$\int_{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1) \cdot \frac{\pi}{2}} = (-1)^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi + t} dt$$

与

$$\int_{(2\mu-1) \cdot \frac{\pi}{2}}^{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi - t} dt.$$

由此推知

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^\mu \left( \frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi} \right) \sin t dt.$$

但因级数

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \left( \frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi} \right) \sin t$$

在区间  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  上由于有优级数  $\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - \frac{1}{4}}$  而一致收敛, 所以它可以逐项积分.

这就使我们可以把  $J$  的表达式写成这样:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \left[ \frac{1}{t} + \sum_1^{\infty} (-1)^\mu \left( \frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi} \right) \right] dt.$$

但是方括符内的表达式就是函数  $\frac{1}{\sin t}$  的部分分式的展开式 [441,9)]. 所以终于得到

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$



**493. 用积分和计算反常积分 · 积分限都为有限的情形** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上无界, 自然不能用任意(黎曼) 积分和来计算它在这区间上的积分. 可是总可以选取一些和数, 使它们 —— 在细分区间时 —— 趋于反常积分的值. 我们现在要就单调函数这一简单情形来证明这一点.

于是假定函数  $f(x)$  在区间  $[0, a](a > 0)$  上是正的, 单调下降的, 而且当  $x \rightarrow 0$  时趋向无穷; 同时还假定它从 0 到  $a$  的反常积分存在. 把区间  $[0, a]$  分成  $n$  等分即有

$$\int_0^a f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\frac{\nu}{n}a}^{\frac{\nu+1}{n}a} f(x)dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)dx + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n},$$

因而更有

$$\int_0^a f(x)dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)dx + \sum_{\nu=1}^n f\left(\frac{\nu}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n}.$$

同时又显然有

$$\int_0^a f(x)dx > \sum_{\nu=1}^n f\left(\frac{\nu}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n},$$

所以, 总计起来就有

$$0 < \int_0^a f(x)dx - \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^n f\left(\frac{\nu}{n}a\right) < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)dx.$$

但因最后这个积分当  $n \rightarrow \infty$  时趋于零<sup>①</sup>, 故终有

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^n f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

对于正的上升函数  $f(x)$ , 当  $x \rightarrow a$  时趋向  $+\infty$ , 这一情形同样可得

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

最后, 改变  $f$  的正负号, 容易得到关于单调负函数的相似公式.

**例题** 1) 对于积分值  $\int_0^1 \ln x dx$  (以 0 为奇点) 的计算, 我们有

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \ln \frac{\nu}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

但因 [77, 4)]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ , 所以上列最后一极限值等于  $-1$ ; 而这也就是所设积分的值.

<sup>①</sup> 因为这积分可以表成反常积分  $\int_0^a$  与趋于该反常积分的常义积分  $\int_{\frac{a}{n}}^a$  两者之差.



2) 我们取这个较为复杂一些的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

作为第二个例题. 在这个情形,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \ln \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \ln \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n}.$$

要想得到最后这个乘积的简单的表达式, 我们来看用  $z^2 - 1$  除  $z^{2n} - 1$  所得的整多项式, 并且把它分解成线性因子, 再合并相当于共轭根的因子. 这样我们就得到 (对于任何不等于  $\pm 1$  的实数  $z$  而言):

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[ \left( z - \cos \frac{\nu\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} \right] \textcircled{1}.$$

由此令  $z \rightarrow 1$  即得

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[ \left( 1 - \cos \frac{\nu\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} \right] = 4^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n},$$

故终于有

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

于是所求积分就知其等于:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \ln n - (n-1) \ln 2}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

[比较 492, 1°.]

**494. 积分带无穷限的情形** 假设函数  $f(x)$  定义在由 0 到  $+\infty$  的区间上而且是可积的. 我们把这区间分成无穷个长度都是  $h > 0$  的区间, 作和数  $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) \cdot h$ , 就它的结构来说, 很像黎曼和数. 这个级数是否收敛, 它的和是否当  $h \rightarrow 0$  时会趋于反常积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ ——这些问题我们将在  $f(x)$  适合某些特殊假定之下来讨论.

首先, 我们假定  $f(x)$  是正的, 而且当  $x \rightarrow +\infty$  时单调下降趋于 0. 于是

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(x) dx < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h),$$

而在另一方面, 显然

$$\int_0^{\infty} f(x) dx > h \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu h) = h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - h \cdot f(0),$$

<sup>①</sup>参看99页脚注①.



所以

$$0 < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - \int_0^{\infty} f(x) dx < h \cdot f(0),$$

因而

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h). \quad (1)$$

例题 1) 设  $f(x) = e^{-x}$ . 则

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 - e^{-h}} = 1.$$

2) 拿别处的讨论中的积分值

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

来看, 我们仍然可以引用推得的公式 (1), 如此即得

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^2 h^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

假若令  $e^{-h^2} = t$ , 则  $h = \sqrt{\ln \frac{1}{t}} \sim \sqrt{1-t}$  当  $t \rightarrow 1$ . 由此推得有趣的极限关系式:

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \cdot (1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \cdots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

可能会出现函数  $f(x)$  单调下降的要求仅对  $x \geq A > 0$  成立. 这种情况不妨碍对单调函数应用上述方法; 只是需要设法使比值  $\frac{A}{h}$  为整数. 于是根据常义积分定义本身有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1} f(\nu h) \cdot h = \int_0^A f(x) dx, \quad (2)$$

而按照前面所证明的

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h) \cdot h = \int_A^{\infty} f(x) dx.$$

例

3) 设  $f(x) = xe^{-x}$ ; 这个函数从  $x = 1$  起单调减少. 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 (e^{-h} + 2e^{-2h} + 3e^{-3h} + \cdots) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 e^{-h} (1 - e^{-h})^{-2} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h \left( \frac{h}{e^h - 1} \right)^2 = 1, \end{aligned}$$

容易用分部积分验证.



现在我们来讨论更普遍的情形, 对于  $f(x)$  除可积性而外, 暂时不要求任何别的条件. 我们有

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^A f(x)dx + \int_A^{\infty} f(x)dx.$$

最后一个积分的绝对值对于充分大的  $A$  是会任意小的<sup>①</sup>. 不管  $A$  怎样, 我们今后都选取  $h$  使  $A/h$  成为整数. 于是, 当  $A$  为常数时, 如同刚才一样, (2) 式成立.

现在已很明白, 若要等式 (1) 成立, 只要条件

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h) \cdot h = 0 \quad (3)$$

成立就够了. 其实, 等式

$$\int_0^{\infty} - \sum_{\nu=0}^{\infty} = \left[ \int_0^A - \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1} \right] + \int_A^{\infty} - \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}$$

右边的三项当  $A$  充分大而  $h$  充分小时都将任意小.

条件 (3) 在本目开头处对  $f(x)$  所作过的假定之下当然是成立的, 因为

$$0 < \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h) \cdot h < \int_A^{\infty} f(x)dx.$$

又假若  $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  适合本目开头处对于  $f(x)$  所作的那些条件 (纵然只是对于  $x \geq x_0 > 0$  而言也可以), 而  $\psi(x)$  则为有界:  $|\psi(x)| \leq L$ ; 那么条件 (3) 也是适合的. 在这情形下,

$$\left| \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} \varphi(\nu h) \cdot \psi(\nu h) \right| \leq L \cdot \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} \varphi(\nu h) \cdot h < L \cdot \int_A^{\infty} \varphi(x)dx,$$

等等照推.

4) 我们把积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  当作一个例题来看; 在这里  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $\psi(x) = \sin^2 x$ . 我们有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{(\nu h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}.$$

为了要算出最后这个和数, 我们先从这件事情着想:

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2} \right\}'_h = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu h}{\nu} = \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2} - h$$

<sup>①</sup>因为它可以表成反常积分  $\int_0^{\infty}$  与趋于这反常积分的常义积分  $\int_0^A$  两者之差.



[461,6)(5)]. 这里对于  $h \neq 0$  逐项取导数, 根据 435 目定理 7, 是可以的, 因为那些导数所作成的级数 [按照狄利克雷判断法, 430] 是一致收敛的. 取积分, 即得我们所要求的那个和数的表达式:  $\frac{\pi - h}{2} \cdot h$ . 由此可知

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

在别种情形, 要看条件 (3) 适合与否, 需直接去验证.

5) 例如, 假设要讨论的积分就是  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . 我们显然可以只讨论  $h = \frac{\pi}{k}$  与  $A = m\pi$  这些值, 其中  $k$  和  $m$  都是自然数.

把我们要考虑的和数表成这样:

$$\sum_{n=km}^\infty \frac{\sin nh}{nh} \cdot h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1} + \cdots.$$

不难验知, 右边每一有限和数之内的各项有相同的正负号, 而与其次一个有限和数之内的各项的正负号相反. 若就总体而言, 则右边这些有限和数所作成的级数是莱布尼茨型的. 因之它的和数的绝对值小于第一项的绝对值. 但这第一项的绝对值, 则由于  $kmh = m\pi = A$ , 而有下列估值:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| &= \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh} \cdot h \\ &< \frac{1}{A} \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh| \cdot h = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{k-1} \sin ih \cdot h. \end{aligned}$$

但这最后一个和数则可看作是积分  $\int_0^\pi \sin x dx = 2$  的积分和数, 故当  $h$  充分小时就会小于某一常数  $C > 2$ . 于是

$$\left| \sum_{n=km}^\infty \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| < \frac{C}{A},$$

而由此推知条件 (3) 是适合的.

至于所设积分的计算, 则根据所阐明的道理知其可以这样很简单的作出来 [参看 461,6)(6)]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

这结果是在我们以前 [492,3°] 曾用别的方法得到过的.

**495. 伏汝兰尼积分** 我们现在要讨论一类特殊形状的反常积分的存在和计算的问题, 这类反常积分通常称为伏汝兰尼(Froullani)积分, 形状如下:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

I. 我们对于函数  $f(x)$  作下列的假定: 1° 函数  $f(x)$  对于  $x \geq 0$  有定义而且连续, 并且 2° 当  $x \rightarrow +\infty$  时具有有限的极限:

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$



从 1° 看来很明白, (当  $0 < \delta < \Delta < +\infty$  时) 存在有积分

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.\end{aligned}$$

因之所设积分就可以由下面这个等式来确定:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.$$

分别引用推广了的中值定理到最后两个积分上, 即得

$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dz}{z} = f(\xi) \cdot \ln \frac{b}{a} \quad (\text{其中 } a\delta \leq \xi \leq b\delta),$$

类似地有

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz = f(\eta) \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{dz}{z} = f(\eta) \cdot \ln \frac{b}{a} \quad (\text{其中 } a\Delta \leq \eta \leq b\Delta).$$

因为显然  $\xi \rightarrow 0$  (当  $\delta \rightarrow 0$ ), 而  $\eta \rightarrow +\infty$  (当  $\Delta \rightarrow +\infty$ ), 所以由此推知

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \cdot \ln \frac{b}{a}. \quad (4)$$

**例题** 1) 在积分  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$  这一情形, 我们有

$$f(x) = e^{-x}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0,$$

故积分值就是  $\ln \frac{b}{a}$ .

2) 设要讨论的积分为

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x} \quad (p > 0, q > 0).$$

把其中分数的对数分成分子与分母的对数之差, 即可令这里的  $f(x) = \ln(p + qe^{-x})$ , 因而  $f(0) = \ln(p + q)$ ,  $f(+\infty) = \ln p$ .

**答案**  $\ln \left(1 + \frac{q}{p}\right) \cdot \ln \frac{b}{a}$ .

3) 试计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx.$$

在这一情形,

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(0) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

**答案**  $\frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{a}{b}$ .



II. 有时函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时没有有限的极限, 但却存在积分

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz.$$

在推证公式 (4) 的讨论中直接令  $\Delta$  变成  $+\infty$ , 则此时所得结果不是 (4) 而是

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}. \quad (4a)$$

例题 4)  $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$

(因积分  $\int_A^\infty \frac{\cos z}{z} dz$  我们知道它是存在的).

III. 同一个道理, 假若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  这一点的连续性被破坏, 不过还存在积分

$$\int_0^A \frac{f(z)}{z} dz \quad (A < +\infty),$$

那么

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \cdot \ln \frac{a}{b}. \quad (4b)$$

然而这一情形可用变换  $x = \frac{1}{t}$  化成前一情形.

**496. 有理函数在正负无穷之间的积分** 最后, 我们再讲一类上下积分限都是无穷的特殊类型的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

其中  $P(x)$  与  $Q(x)$  都是整多项式. 我们要假定的是, 多项式  $Q(x)$  没有任何实根, 而且  $P(x)$  的次数至少要比  $Q(x)$  的次数低二次. 在这些条件下, 积分是存在的 [474, 2]; 问题只在于如何计算它.

假令  $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$  ( $\beta_\lambda \geq 0; \lambda = 1, 2, \dots$ ) 是多项式  $Q(x)$  所有不同的根, 则分式  $P(x)/Q(x)$  可以按照下面这个方式展开成简单分式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_\lambda \left[ \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + \frac{A'_\lambda}{(x - x_\lambda)^2} + \dots \right], \quad (5)$$

而每一个方括符内的分数的个数即等于所对应的根的重数<sup>①</sup>.

把积分演算的初等方法推广到实变复函数的情形, 即可立刻看出来, 当  $m > 0$  时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - x_\lambda)^{m+1}} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(x - x_\lambda)^m} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

<sup>①</sup> 在第八章 [274] 内我们曾有相似的展开式, 但在那里我们曾设法避免引用虚数, 而在虚根的情形都是考虑一些分式, 其分母都是实系数的二次三项式的方幂. 在这里我们却把虚根, 仿照着那里对实根的讲法, 同样地来讲.



于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda} \frac{A_{\lambda}}{x - x_{\lambda}} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^h \sum_{\lambda} \frac{A_{\lambda}}{x - x_{\lambda}} dx.$$

但是

$$\frac{1}{x - x_{\lambda}} = \frac{1}{x - \alpha_{\lambda} - \beta_{\lambda}i} = \frac{x - \alpha_{\lambda}}{(x - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2} + i \frac{\beta_{\lambda}}{(x - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2},$$

因而

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \frac{dx}{x - x_{\lambda}} &= \left\{ \frac{1}{2} \ln[(x - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2] + i \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}} \right\} \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(h - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2}{(h + \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2} + i \left[ \operatorname{arctg} \frac{h - \alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}} + \operatorname{arctg} \frac{h + \alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}} \right]. \end{aligned}$$

当  $h \rightarrow +\infty$  时, 最后这个等号后面的第一项趋于 0, 而第二项则趋于  $+\pi i$  或  $-\pi i$ , 随  $\beta_{\lambda} > 0$  或  $\beta_{\lambda} < 0$  而定.

这样一来, 我们就得到结果:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \pi i \cdot \sum_{\lambda} (\pm A_{\lambda}),$$

其中  $A_{\lambda}$  取正号或负号就看所对应的  $\beta_{\lambda}$  是正的或负的而定. 这个公式还可以根据下面的考虑来改变一下形状. 试把恒等式 (5) 的两边遍乘以  $x$ . 于是左边就当  $x \rightarrow \infty$  时趋于 0, 因为  $x \cdot P(x)$  的次数仍然是低于  $Q(x)$  的. 右边则在取极限时, 所有分母次数高于一次的分式都成为零, 所以其余那些分式的和的极限也是 0. 由此推知  $\sum_{\lambda} A_{\lambda} = 0$  因之  $\sum^{(+)} A_{\lambda} = -\sum^{(-)} A_{\lambda}$ , 记号 (+) 与 (-) 是用来表明对应于  $\beta_{\lambda} > 0$  的  $A_{\lambda}$  的和与对应于  $\beta_{\lambda} < 0$  的  $A_{\lambda}$  的和. 现在可把所得公式写成:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \cdot \sum^{(+)} A_{\lambda}. \quad (6)$$

至于  $A_{\lambda}$  这些系数的计算, 我们只讲所对应的  $x_{\lambda}$  为单根的情形, 即  $Q(x_{\lambda}) = 0$ , 但  $Q'(x_{\lambda}) \neq 0$  的情形; 展开式 (4) 中所对应的只有一个项  $\frac{A_{\lambda}}{x - x_{\lambda}}$ . 若把等式 (4) 两边同乘以  $(x - x_{\lambda})$ , 则可写成这样:

$$\frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(x_{\lambda})}{x - x_{\lambda}}} = A_{\lambda} + (x - x_{\lambda}) \cdot R(x),$$

其中  $R(x)$  表示当  $x$  趋近于  $x_{\lambda}$  时保持有界的那些项之和. 使  $x \rightarrow x_{\lambda}$  而取极限, 即得

$$A_{\lambda} = \frac{P(x_{\lambda})}{Q'(x_{\lambda})}. \quad (7)$$



现在我们讲一些运用公式 (5) 和 (6) 的例题.

1) 首先来看积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx,$$

其中  $m$  与  $n$  都是自然数, 而  $m < n$ . 至于运用建立起来的两个公式, 这里已经具备了一切条件.

分母所有的根就是这些数:

$$x_\lambda = \cos \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n},$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1; n, \dots, 2n-1),$$

只有开头  $n$  个根的虚数部才是正的. 显然

$$x_\lambda = x_0^{2\lambda+1}, \quad x_0 = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}.$$

按照公式 (7), 当  $\lambda = 0, 1, \dots, n-1$  时,

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m}}{2n \cdot x_\lambda^{2n-1}} = -\frac{1}{2n} x_\lambda^{2m+1} = -\frac{1}{2n} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

(式中用到  $x_\lambda^{2n} = -1$ ). 按等比级数求和法即得

$$\sum^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{2n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}},$$

或者再用  $x_0^{2n} = -1$  来化简, 就得到

$$\sum^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{n} \cdot \frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}}.$$

将

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos \frac{2m+1}{2n} \pi \pm i \sin \frac{2m+1}{2n} \pi$$

代入上式即把我们所需要的和数最后表示成

$$\frac{1}{2ni} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}.$$

由此, 按照公式 (6), 就得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad (m < n).$$



2) 较为普遍一点的例题是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}} dx,$$

其中  $m, m', n$  都是自然数, 而且  $m, m' < n$ .

所应适合的条件, 在这里除去分母有实根  $\pm 1$  而外, 都是适合的. 但这一点在这里并不要紧, 因为这些根在分子里也有, 所以分式上下可以约去  $x^2 - 1$ . 以下我们就不再考虑这些根.

分母的其余的根是

$$x_\lambda = \cos \frac{\lambda\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\lambda\pi}{n} = x_1^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1; n+1, \dots, 2n-1).$$

这些根里面只有开头  $n-1$  个的虚数部是正的. 按照公式 (7),

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m} - x_\lambda^{2m'}}{-2n \cdot x_\lambda^{2n-1}} = \frac{1}{2n} (x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}).$$

所以

$$\sum^{(+)} A_\lambda = \frac{1}{2n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} (x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}) = \frac{1}{2n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} (x_1^{\lambda(2m'+1)} - x_1^{\lambda(2m+1)}).$$

所得式可以改写如下<sup>①</sup>:

$$\begin{aligned} \sum^{(+)} A_\lambda &= \frac{1}{2n} \left[ \frac{x_1^{n(2m'+1)} - x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1} - 1} - \frac{x_1^{n(2m+1)} - x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[ \frac{1 + x_1^{2m'+1}}{1 - x_1^{2m'+1}} - \frac{1 + x_1^{2m+1}}{1 - x_1^{2m+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[ \frac{x_1^{\frac{1}{2}(2m'+1)} + x_1^{-\frac{1}{2}(2m'+1)}}{x_1^{\frac{1}{2}(2m'+1)} - x_1^{-\frac{1}{2}(2m'+1)}} - \frac{x_1^{\frac{1}{2}(2m+1)} + x_1^{-\frac{1}{2}(2m+1)}}{x_1^{\frac{1}{2}(2m+1)} - x_1^{-\frac{1}{2}(2m+1)}} \right] \\ &= \frac{1}{2ni} \left[ \operatorname{ctg} \frac{2m+1}{2n} \pi - \operatorname{ctg} \frac{2m'+1}{2n} \pi \right]. \end{aligned}$$

结果,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \left[ \operatorname{ctg} \frac{2m+1}{2n} \pi - \operatorname{ctg} \frac{2m'+1}{2n} \pi \right] \quad (m, m' < n).$$

注意, 从这个公式很容易地就可以得着前一个公式, 只要把  $n$  换成  $2n$  而且令  $m' = m + n$  (当  $m < n$ ).

3) 最后来看积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n} \cdot \cos \theta + 1} dx,$$

其中  $m < n$  而且  $-\pi < \theta < \pi$ .

引用角度  $\theta' = \pi - \theta, 0 < \theta' < 2\pi$ , 即可把积分写成:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} - 2x^{2n} \cdot \cos \theta' + 1} dx.$$

<sup>①</sup>考虑到  $x_1^n = -1$ .



为着要算出分母的根, 我们令  $x^{2n} = z$ , 于是  $z$  就由方程  $z^2 - 2z \cdot \cos \theta' + 1 = 0$  来确定, 这就是说,  $z = \cos \theta' \pm i \cdot \sin \theta'$ . 对于  $x$  就得到两串值:

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= x_0 \cdot \varepsilon^\nu, \text{ 其中 } x_0 = \cos \frac{\theta'}{2n} + i \cdot \sin \frac{\theta'}{2n} \\ \varepsilon &= \cos \frac{\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\pi}{n} \\ \text{与 } \bar{x}_\nu &= \bar{x}_0 \cdot \bar{\varepsilon}^\nu, \text{ 其中 } \bar{x}_0 = \cos \frac{\theta'}{2n} - i \cdot \sin \frac{\theta'}{2n} \\ \bar{\varepsilon} &= \cos \frac{\pi}{n} - i \cdot \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned} \right\} (\nu = 0, 1, \dots, n-1; n, \dots, 2n-1).$$

这时虚数部为正的数, 在第一串中是开头  $n$  个, 在第二串中是末尾  $n$  个.

对应于  $x_\nu (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$  这些根的那些系数  $A_\nu$  可以按照公式 (7) 算出:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{x_\nu^{2m}}{4n(x_\nu^{4n-1} - x_\nu^{2n-1} \cos \theta')} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_\nu^{2m+1}}{x_\nu^{2n}(x_\nu^{2n} - \cos \theta')} \\ &= \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_0^{2m+1} \cdot \varepsilon^{(2m+1)\nu}}{(\cos \theta' + i \sin \theta') \cdot i \sin \theta'}. \end{aligned}$$

把这些系数  $A_\nu$  加起来再用  $2\pi i$  乘, 即得<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos \left( \frac{2m+1}{2n} - 1 \right) \theta' + i \cdot \sin \left( \frac{2m+1}{2n} - 1 \right) \theta'}{\sin \theta'} \cdot \frac{1 - (\varepsilon^n)^{2m+1}}{1 - \varepsilon^{2m+1}} \\ &= \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\cos \left( 1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta' - i \cdot \sin \left( 1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta'}{\sin \theta'} \times \frac{1}{\left( 1 - \cos \frac{2m+1}{n} \pi \right) - i \cdot \sin \frac{2m+1}{n} \pi}. \end{aligned}$$

对于第二组根  $\bar{x}_\nu (\nu = n, n+1, \dots, 2n-1)$  同样可以得到一个表达式, 与上面这个成为一对共轭复数; 二者之和即是实数部的二倍. 这个和数经过初等演算即可变化成

$$\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \left[ \left( 1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta' + \frac{2m+1}{2n} \pi \right]}{\sin \theta' \cdot \sin \frac{2m+1}{2n} \pi}.$$

还回到角度  $\theta = \pi - \theta'$ , 结果就得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n} \cdot \cos \theta + 1} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \left( 1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta}{\sin \theta \cdot \sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad (m < n, -\pi < \theta < \pi).$$

#### 497. 杂例和习题 1) 试证存在积分

$$I = \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot (\sin x)^{2/3}}.$$

奇点成一无穷集合:  $x = n\pi (n = 1, 2, \dots)$ . 在任一有限区间上, 奇点只有有限个而且积分是存在的. 问题只在于积分在无穷区间上的收敛性.

<sup>①</sup>考虑到  $\varepsilon^n = -1$ .



我们有

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(x+n\pi)^2 \cdot (\sin x)^{2/3}} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} < +\infty.$$

2) 若在收敛的 [478,5)(B)] 积分

$$\int_0^{\infty} |\ln t|^{\lambda} \frac{\sin t}{t} dt \quad (\lambda > 0)$$

中作变换  $t = e^x, x = \ln t$ , 就得出积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\lambda} \cdot \sin e^x dx;$$

这样看来, 后面这个积分就是收敛的, 虽然它的被积函数当  $|x|$  无限增大时是摇摆于  $-\infty$  与  $+\infty$  之间.

3) 我们刚刚看到了, 为使积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (8)$$

收敛,

$$f(x) = o(1) \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty) \quad (9)$$

全然不是必要的.

然而可证明:

(a) 若存在极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

则在积分 (8) 收敛的情况下, 这个极限必然等于 0; 不但如此,

(b) 若极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$$

存在, 则这个极限必然等于 0, 即

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (10)$$

(B) 若在区间  $[a, \infty]$  可积的函数单调减少, 则条件 (10) 必然成立.

(b) 及 (B) 的证明与对无穷级数的类似断言的证明 [375,3)] 是相似的.

还要注意 (类似于级数), 甚至对单调减少函数  $f(x)$ , 满足条件 (10) 并不能保证积分 (8) 的收敛性: 发散积分

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad (a > 1)$$

可作为一个例子.

4) 函数  $f(x)$  在区间  $[a, a + \omega]$  在反常的意义下可积 (保持其他条件) 的情况下, 推广 [478 目,6)] 中所证明的断言. 借助于此断言, 证明: 假设当  $x \rightarrow \infty$  时  $g(x)$  单调趋于 0, 积分

$$\int_0^{\infty} \ln |\sin x| \cdot g(x) dx$$



与积分

$$\int_0^{\infty} g(x) dx$$

同时收敛或发散, 而积分

$$\int_0^{\infty} \ln 2 |\sin x| \cdot g(x) dx$$

在任何情况下收敛.

5) 计算积分

$$(a) \int_0^{\pi} x \cdot \ln \sin x dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (B) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

提示 (a) 利用变换  $x = \pi - t$  可以看出积分可化成

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt.$$

(b), (B) 积分可用变换  $x = \sin t, \ln \frac{1}{\sin t}$  化成  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$ .

6) 计算积分

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx.$$

我们 (令  $x = \sin \theta$ ) 有

$$J = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta d\theta.$$

于是分部积分即得

$$J = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

7) 试求积分

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin^2 \theta - a^2| d\theta \quad (a^2 \leq 1).$$

设  $a = \sin \omega$  并用恒等式

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \omega = \sin(\theta - \omega) \sin(\theta + \omega),$$

即得

$$K = \int_{\omega - \frac{\pi}{2}}^{\omega + \frac{\pi}{2}} \ln |\sin \theta| d\theta = \int_0^{\pi} \ln \sin \theta d\theta = -\pi \ln 2.$$

8) 计算积分

$$L = \int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx \quad (a, b > 0).$$

解 利用 491, 13) 中的公式即有

$$\begin{aligned} L &= e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$



[参看 492, 2°.]

9) 计算积分

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi, \quad J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi.$$

解 用  $x$  表示  $\cos \theta$  并作变换  $z = \cos \varphi$ ; 则

$$\cos \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad \cos \frac{3}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \cdot (2z-1),$$

因而

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}, \quad J_1 = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{(2z-1)dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}.$$

再按等式  $\sqrt{(z-x)(1-z)} = t(1-z)$  来引进新变量  $t$ , 即得

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 1,$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2+2x-1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} + 2(x-1) \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right\} = x.$$

于是  $J_0 = 1, J_1 = \cos \theta$ . 以后在 511, 3) 中我们还要建立更普遍的结果.

10) 用分部积分法建立下列结果:

$$(a) \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi}(b-a),$$

$$(B) \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2} dx = \pi(a-b).$$

11) 容易看出 [492, 3°; 494, 5)]

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } \alpha > 0, \\ 0, & \text{当 } \alpha = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } \alpha < 0. \end{cases}$$

由此, 又因

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x} dx + \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x} dx \right\},$$

故显然易见 (如果为了简单而认定  $\alpha > 0$  与  $\beta > 0$ )

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } \alpha > \beta, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{当 } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{当 } \alpha < \beta. \end{cases}$$



这个积分狄利克雷曾屡次用过, 因而有狄利克雷间断因子的名称.

许多别的积分可以化成这个积分. 例如 (设  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  而且  $\alpha$  是其中最大的):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{当 } \alpha < \beta + \gamma, \\ \frac{\pi}{8}, & \text{当 } \alpha = \beta + \gamma, \\ 0, & \text{当 } \alpha > \beta + \gamma \end{cases}$$

(把两个正弦的积变成余弦的差即得), 或者 (仍然认定  $\alpha, \beta > 0$ ):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \beta, & \text{当 } \alpha \geq \beta, \\ \frac{\pi}{2} \alpha, & \text{当 } \alpha \leq \beta, \end{cases}$$

(用分部积分即得).

最后这个结果可以推广成下列这个普遍形式. 设  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$  而且  $\alpha > \sum_{i=1}^n \alpha_i$  则

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

12) 计算积分

$$\int_0^{\infty} (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2}$$

提示 分部积分; 应用狄利克雷的间断因子. 答案  $\frac{\pi}{2} \cdot |a - b|$ .

证明可以用数学归纳法来作 (仍然用分部积分!).

13) 计算

$$\text{V.p.} \int_0^{\infty} \frac{2x \cdot \sin \alpha x}{x^2 - r^2} dx \quad (\alpha, r > 0).$$

解 奇点是  $x = r$ . 利用恒等式

$$\frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{1}{x + r} + \frac{1}{x - r}$$

我们就立即从原积分里分解出来一个收敛的积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x + r} dx = \cos \alpha r \cdot \int_r^{\infty} \frac{\sin \alpha y}{y} dy - \sin \alpha r \cdot \int_r^{\infty} \frac{\cos \alpha y}{y} dy.$$

利用一些简单的变换又得到

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^{r-\varepsilon} + \int_{r+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\sin \alpha x}{x - r} dx \\ &= \cos \alpha r \cdot \int_r^{\infty} \frac{\sin \alpha y}{y} dy + \sin \alpha r \cdot \int_r^{\infty} \frac{\cos \alpha y}{y} dy + 2 \cos \alpha r \cdot \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin \alpha y}{y} dy, \end{aligned}$$

所以只需在最后一积分中直接令  $\varepsilon = 0$  就可得

$$\text{V.p.} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x - r} dx.$$



最后得到

$$\text{V.p.} \int_0^\infty \frac{2x \sin \alpha x}{x^2 - r^2} dx = 2 \cos \alpha r \cdot \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} dy = \pi \cdot \cos \alpha r.$$

14) 设函数  $f(x)$  ( $0 \leq x < \infty$ ) 适合条件

$$f(x + \pi) = f(x) \quad \text{及} \quad f(\pi - x) = f(x).$$

假设在下式中左端的积分存在, 证明此公式:

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

[此公式属于罗巴切夫斯基 (Lobachevskii), 它可如同 492 目 3° 中  $f(x) \equiv 1$  的特殊情况那样, 借助于把函数  $\frac{1}{\sin x}$  展开成部分分式来加以证明.]

应用这个公式计算如下积分:

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x} dx = \int_0^\infty \sin^{2\nu} x \cdot \frac{\sin x}{x} dx \quad (\nu = 1, 2, \dots);$$

$$(b) \int_0^\infty \operatorname{arctg}(a \cdot \sin x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \quad (a > 0).$$

积分 (a) 可化归已知的积分 [312, (8)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\nu - 1)!!}{(2\nu)!!},$$

而积分 (b) 则可化归积分

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} at}{t\sqrt{1-t^2}} dt$$

(变量变换:  $t = \sin x$ ), 其值

$$\frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2})$$

将在后文 [511, 9)] 中弄清楚.

15) 对函数  $f(x)$  加上与上题同样的条件, 证明公式 (仍然假设公式左端的积分存在):

$$\int_0^\infty f(x) \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

提示 这儿应用罗巴切夫斯基的方法, 只不过引用函数  $\frac{1}{\sin^2 x}$  展成部分分式 [441, 9)]. 当  $f(x) \equiv 1$ , 由此得到为我们所熟知的积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

[参看 494, 4)].

16) 计算积分 ( $a, b > 0$ )

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bx dx, \quad (B) \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx.$$



提示 都可以化归伏汝兰尼积分; 头两个当  $a = b$  时发散.

答案 (a)  $\ln \sqrt{\frac{a+b}{|a-b|}}$ , (b)  $\ln \frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$ , (B)  $\ln \frac{a}{b}$

17) 计算积分 ( $a, b > 0$ )

$$(a) \int_0^\infty \frac{b \cdot \sin ax - a \cdot \sin bx}{x^2} dx; \quad (b) \int_0^\infty \frac{b \cdot \ln(1+ax) - a \cdot \ln(1+bx)}{x^2} dx;$$

$$(B) \int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})^2 \frac{dx}{x^2}.$$

提示 三个都可以用分部积分法化归伏汝兰尼积分.

18) 试求积分 ( $a > 0$ )

$$\int_0^\infty \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

解 我们有恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) &= -\frac{1}{2x} (e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} e^{-x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right). \end{aligned}$$

最后两大项的积分 (容易用变量变换验证) 彼此相消, 因而所设积分可以化成一个伏汝兰尼积分. 答案  $-\frac{1}{2} \ln 2$ .

19) 试求积分 ( $a, b > 0$ )

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2} dx.$$

解 我们 (对于  $\eta > 0$ ) 有

$$\int_\eta^\infty = \int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx + (a-b) \int_\eta^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx^{①}.$$

右边第一个积分可用分部积分法来变换一下:

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx = -\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \Big|_\eta^\infty + \int_\eta^\infty \frac{be^{-bx} - ae^{-ax}}{x} dx,$$

故终于有

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2} dx = \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a \int_\eta^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx.$$

当  $\eta \rightarrow 0$  时右边第一项趋于  $b - a$ , 而第二项则趋于伏汝兰尼积分:

$$a \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = a \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

20) 求证公式

$$\int_0^\infty \frac{A \cos ax + B \cos bx + \cdots + K \cos kx}{x} dx = -\{A \ln a + B \ln b + \cdots + K \ln k\},$$

① 这些积分当  $\eta = 0$  时并不收敛.



假定  $a, b, \dots, k > 0$  而且  $A + B + \dots + K = 0$  (后一条件显然对于积分的存在是必要的).

提示 令  $K = -A - B - \dots$ , 利用公式

$$\int_0^\infty \frac{A \cos ax - A \cos kx}{x} dx = -A \ln a + A \ln k$$

等等.

所述公式很容易推广到适合于 495, II 的条件的任一函数  $f(x)$ .

21) 试求积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m} dx$$

的表达式, 其中  $n$  与  $m$  都是自然数而且  $n \geq m \geq 2$ .

解 把分部积分法的推广公式 [311] 推广到无穷区间的情形上, 立即 (由于双重替换之消掉) 得到:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m} dx = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \sin^n x \cdot \frac{dx}{x}. \quad (11)$$

要计算最后这个积分, 比较方便的是利用我们已知的把  $\sin^n x$  表示成正弦或余弦的倍角展开式 [461, 3], (a) 和 (б).

我们来看这里可能出现的各种情形.

(a)  $n = 2\nu + 1, m = 2\mu + 1$ . 这时

$$\begin{aligned} \frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu+1} x &= \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}} \left[ (2\nu+1)^{2\mu} \sin(2\nu+1)x - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu} \sin(2\nu-1)x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\nu+1) \cdot 2\nu}{1 \cdot 2} (2\nu-3)^{2\mu} \sin(2\nu-3)x - \dots \right] \end{aligned}$$

因而按照公式 (11) 当有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x^{2\mu+1}} dx &= \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu} \cdot (2\mu)!} \cdot \frac{\pi}{2} \left[ (2\nu+1)^{2\mu} - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\nu+1) \cdot 2\nu}{1 \cdot 2} (2\nu-3)^{2\mu} - \dots \right]. \end{aligned}$$

(б)  $n = 2\nu, m = 2\mu + 1$ . 在这一情形

$$\begin{aligned} \frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu} x &= \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu-1}} \left[ (2\nu)^{2\mu} \cos 2\nu x - 2\nu \cdot (2\nu-2)^{2\mu} \cos(2\nu-2)x \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu \cdot (2\nu-1)}{1 \cdot 2} (2\nu-4)^{2\mu} \cos(2\nu-4)x - \dots \right]. \end{aligned}$$

显而易见, 左边 (因  $\nu > \mu$ ) 当  $x = 0$  时成为 0, 所以所有余弦的系数, 其总和等于 0. 于是可以利用前一题 20). 由此即得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} x}{x^{2\mu+1}} dx &= \frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1} \cdot (2\mu)!} \left[ (2\nu)^{2\mu} \ln 2\nu - 2\nu(2\nu-2)^{2\mu} \ln(2\nu-2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu \cdot (2\nu-1)}{1 \cdot 2} (2\nu-4)^{2\mu} \ln(2\nu-4) - \dots \right]. \end{aligned}$$



对于情形:(B) $n = 2\nu + 1, m = 2\mu$  和 (r) $n = 2\nu, m = 2\mu$ , 也照样可以建立公式. 要指出的是, 在特殊情形, 对于任一整数  $n \geq 2$  都有

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n \cdot (n-1)!} \left[ n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-1} - \dots \right].$$

22) 利用同一展式 461,3) (5) 容易求得 (当  $p > 0$  时)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} px}{x} dx = \frac{(-1)^\nu \pi}{2^{2\nu+1}} \left[ 1 - (2\nu+1) + \frac{(2\nu+1) \cdot 2\nu}{1 \cdot 2} - \dots + \frac{(-1)^\nu (2\nu+1) \cdot 2\nu \cdot \dots \cdot (\nu+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu} \right].$$

同时, 借助于初等的考虑, 这个表达式可化得更为简单:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}.$$

积分  $\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px}{x} dx$  是发散的. 伏汝兰尼积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x} dx \quad (p, q > 0)$$

也不适合 495 目那些条件; 但是利用 461,3) (a) 的展式容易证明它能够化成伏汝兰尼积分的情形 II, 只需把  $\sin^{2\nu} x$  换成

$$\sin^{2\nu} x - \frac{1}{2^{2\nu}} \cdot \frac{2\nu \cdot (2\nu-1) \cdot \dots \cdot (\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu}.$$

于是按照公式 (4a) 终于得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x} dx = -\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \ln \frac{q}{p}.$$

积分  $\int_0^\infty \frac{\cos^n x}{x} dx$  对于任何自然数  $n$  都不收敛. 但是当  $n = 2\nu + 1$  时积分  $\int_A^\infty$  收敛, 因而按照伏汝兰尼公式 (4a) 立即得到

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu+1} px - \cos^{2\nu+1} qx}{x} dx = \ln \frac{q}{p}.$$

当  $n = 2\nu$  时, 利用 461,3) (B) 中的展式, 如像对于正弦的情形一样, 即得

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu} px - \cos^{2\nu} qx}{x} dx = \left( 1 - \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right) \ln \frac{q}{p}.$$

23) 求证下列公式<sup>①</sup>:

$$(a) \int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma}, & \text{当 } |\gamma| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{当 } |\gamma| = 1, \\ 0, & \text{当 } |\gamma| < 1. \end{cases}$$

<sup>①</sup> 积分

$$-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{与} \quad -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

也就是函数  $\text{si } x$  与  $\text{ci } x$  (“积分正弦”与“积分余弦”), 这两个函数曾在 289 目里提到过.



$$\begin{aligned}
 (\text{б}) \quad \int_0^\infty \sin \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt &= \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma}, & \text{当 } |\gamma| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{当 } |\gamma| = 1, \\ 0, & \text{当 } |\gamma| < 1. \end{cases} \\
 (\text{в}) \quad \int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} \ln \left| \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right|, & \text{当 } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 1, & \text{当 } \gamma = 0^{①}. \end{cases} \\
 (\text{г}) \quad \int_0^\infty \sin \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt &= \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \ln |1 - \gamma^2|, & \text{当 } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 0, & \text{当 } \gamma = 0^{①}. \end{cases} \\
 (\text{д}) \quad \int_0^\infty e^{-\gamma x} dx \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt &= \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma), & \text{当 } \gamma > 0, \\ 1, & \text{当 } \gamma = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

证明 (a) 暂设  $\gamma \geq 0$ , 即可分部积分:

$$\int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma x \cdot \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{x} \cos x dx.$$

因为

$$\left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \left| \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| + \left| \int_x^1 \frac{dx}{x} \right| = c + |\ln x|,$$

所以上面那个双重替换化为 0, 而积分就成为狄利克雷间断因子 [11]).

现在单来讨论  $\gamma = 0$  的情形. 对于任意  $A > 0$ , 两次分部积分即得

$$\begin{aligned}
 \int_0^A dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt &= x \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_0^A + \int_0^A \cos x dx = A \int_A^\infty \frac{\cos t}{t} dt + \sin A \\
 &= A \frac{\sin t}{t} \Big|_A^\infty + A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt + \sin A = A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt.
 \end{aligned}$$

根据第二中值定理 [487], 最后一式可化成这个形式:  $\int_A^{\bar{A}} \frac{\sin t}{t} dt$  ( $\bar{A} > A$ ), 然而这个积分当  $A \rightarrow \infty$  时趋于 0, 这只需将布尔查诺-柯西条件 [475] 运用到收敛的积分  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  上, 即可明白. 所以得知

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = 0.$$

其余情形的证明都相似.

24) 求证下列公式 ( $\alpha, \beta > 0$ ):

$$(\text{a}) \quad \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha}, & \text{当 } \alpha \geq \beta, \\ \frac{\pi}{2\beta}, & \text{当 } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

①当  $\gamma = \pm 1$  时积分不收敛.



$$(5) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha}, & \text{当 } \alpha \geq \beta, \\ \frac{\pi}{2\beta}, & \text{当 } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

$$(B) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \right\} \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right| + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{|\alpha^2 - \beta^2|}{\alpha^2}, & \text{当 } \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{\alpha} \ln 2, & \text{当 } \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$(r) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} = \ln \frac{(\alpha + \beta)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

证明 (a) 所设积分用分部积分法即可化成 23)(a) 中讨论过的那一类型的积分:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right\} \\ &= x \cdot \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \cos \alpha x dx \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \\ & \quad + \int_0^\infty \cos \beta x dx \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \cos \frac{\alpha}{\beta} x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \cos \frac{\beta}{\alpha} x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\pi}{2\alpha} \text{ 或 } \frac{\pi}{2\beta}. \end{aligned}$$

要看  $\alpha \geq \beta$  或  $\alpha < \beta$  而定.

还要说明的就是双重替换化为 0. 从我们已知的估计式

$$\left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| < c + |\ln x|$$

可以明白看出来, 替换号下的表达式随  $x$  而趋于 0. 但是另一方面,

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin t}{t} \Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt, \quad \left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| < \frac{2}{x},$$

由此又知道所说表达式当  $x \rightarrow \infty$  时也趋于 0.

其余那些公式的证明可以引用 23)(5),(B) 和 (r),(d) 中所建立的那些公式来照样进行.

## §5. 反常积分的近似计算

498. 有限区间上的积分 · 奇点分出法 以上在 322—328 目中, 我们研究了通常意义下的定积分的各种近似算法. 这些方法和专对它们而讲的误差估计都是不能直接运用到反常积分上来的. 有时候用变量变换法或分部积分法是可以把反常积分变成常义积分的. 这时候反常积分的近似计算就化成了我们业已通晓的问题.



在很多情形下, (积分限为有穷的) 反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  的近似计算可以使用奇点分出法而变得容易些<sup>①</sup>. 这个方法在于找到一个形状简单的函数  $g(x)$ , 吸收函数  $f(x)$  所有的奇点, 使差函数  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$  不再有任何奇点, 也就是说, 就普通意义而言为可积的. 这时函数  $g(x)$  的选择是要想法作得使  $g(x)$  的积分可表成有尽形状, 而函数  $\varphi(x)$  具有充分高阶的导数, 以便在做  $\varphi(x)$  的积分的近似计算时能够利用已有的那些误差公式.

函数  $g(x)$  的选择有各种方法, 要看情形而定. 作为是一个实例, 我们对于一类常见的积分来指出函数  $g(x)$  的一般的作法.

设被积函数有这样的形状:

$$f(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot h(x) \quad (a \leq x \leq b, 0 < \alpha < 1),$$

其中  $h(x)$  对于  $a \leq x \leq b$  可以展成幂级数

$$h(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots$$

我们就令

$$g(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot [c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)^n],$$

$$\varphi(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot [c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots]$$

$$= (x - x_0)^{n+(1-\alpha)} \cdot [c_{n+1} + \cdots].$$

函数  $g(x)$  的积分既容易作, 而函数  $\varphi(x)$  又显然在区间  $[a, b]$  上, 连  $x_0$  这一点在内, 具有  $n$  个连续导数.

#### 499. 例题 1) 设要计算积分

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx;$$

后面这个积分只有一个奇点, 就是 0.

按  $x$  的幂展开  $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$  到含  $x^4$  那一项为止, 而且令

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right),$$

$$\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[ (1-x)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \cdots + \frac{35}{128}x^4 \right) \right] = \frac{63}{256}x^{\frac{9}{2}} + \cdots$$

于是就有

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx = I_1 + I_2.$$

其中  $I_1$  的值是很容易算出来的:

$$I_1 = \frac{715}{645} \frac{801}{120} \sqrt{2} = 1.569\ 158\ 5 \cdots$$

<sup>①</sup>这个方法是康托洛维奇提出的.



$$\begin{array}{rcl}
y_0 = y_{1/2} = 0 & 2y_1 = 0.000\ 018 & \\
& 4y_{3/2} = 0.000\ 225 & \\
& 2y_2 = 0.000\ 431 & \\
4y_{5/2} = 0.002\ 496 & I_1 \doteq 1.569\ 158\ 5 & \\
2y_3 = 0.003\ 017 & I_2 \doteq 0.001\ 638\ 5 & \\
4y_{7/2} = 0.012\ 901 & \hline I \doteq 1.570\ 797\ 0 & \\
2y_4 = 0.012\ 632 & & \\
4y_{9/2} = 0.046\ 350 & & \\
y_5 = 0.020\ 239 & & \\
\hline 0.098\ 309 & 60 & \\
& \hline 0.001\ 638\ 5 & 
\end{array}$$
$$\frac{\pi}{2} = 1.570\,796\,3\dots$$
$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{63}{256} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \dots > 0,$$
$$R < 0, |R| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4} \cdot \frac{288}{180} = \frac{5}{10^6},$$

但在另一方面, 计算  $I_2$  时取末位小数所引起的误差其绝对值小于  $\frac{5 \cdot 10^{-5}}{60} < 10^{-7}$ . 而对于  $I_1$  的值的绝对误差也是  $< 10^{-7}$ . 可见总误差介于  $-\frac{5.2}{10^6}$  与  $\frac{0.2}{10^6}$  之间, 所以

$$1.570\,791\,8 < I < 1.570\,797\,2$$

或

$$1.570\,791 < I < 1.570\,798.$$

于是最后得到

$$I = 1.570\,79_{+0.000\,01}.$$



2) 对于积分  $I = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx$  来说, 0 与 1 这两点都是奇点; 我们相应地把积分分成两个:  $I = \int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 = I_1 + I_2$ . 为要计算  $I_1$  我们令

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{3}{4}x + \frac{31}{32}x^2 + \frac{77}{128}x^3 + \frac{1155}{2048}x^4 \right),$$

$$\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[ (1-x)^{-\frac{3}{4}} - \left( 1 + \cdots + \frac{1155}{2048}x^4 \right) \right],$$

因之

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx = I_{11} + I_{12}.$$

我们直接得到

$$I_{11} = \frac{576}{491} \frac{293}{520} \sqrt{2} \doteq 1.658\ 124\ 8.$$

积分  $I_{12}$  可按辛普森公式, 取  $2n = 10$  来计算到小数六位:  $I_{12} \doteq 0.003\ 813$ . 于是推知  $I_1 \doteq 1.661\ 938$ . 误差的估计则像刚才一样, 我们得到

$$I_1 = 1.661\ 93_{+0.000\ 01}.$$

同样,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}} \left( 1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{35}{128}x^4 \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}} \left[ (1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1 + \cdots) \right] dx \\ &= I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

我们求得

$$I_{21} \doteq 3.580\ 291, \quad I_{22} \doteq 0.002\ 033, \quad I_2 \doteq 3.582\ 324.$$

若照以上一样来估计误差即得

$$I_2 = 3.582\ 32_{+0.000\ 005}.$$

于是得到

$$I = 5.244\ 25_{+0.000\ 015}$$

或

$$I = 5.244\ 26_{\pm 0.000\ 01}.$$

3) 设要计算的积分为  $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ ; 奇点在  $x = 0$ .

要分出这一奇点, 我们可以采用类似于上面已经用过的方法. 令

$$I = \int_0^1 (1+x+x^2+x^3+x^4) \ln x dx + \int_0^1 \frac{x^5 \ln x}{1-x} dx = I_1 + I_2.$$

很容易 (用分部积分法) 求得:  $I_1 = -1.463\ 61 \cdots$ . 至于  $I_2$  则可按照辛普森公式 (取  $2n = 10$ , 计算到小数五位) 来算出; 其结果为:  $I_2 \doteq -0.181\ 35$ . 于是  $I \doteq -1.644\ 96$ . 所计算的积分, 其真值 [519,1)(6)] 为  $-\frac{\pi^2}{6} = -1.644\ 934 \cdots$ .



要估计误差, 需按莱布尼茨公式 [117] 算出导数  $\varphi^{(4)}(x)$ . 这时还可以方便一点的是利用容易证明的公式:

$$\left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]^{(k)} = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(c)$$

(其中  $c$  在  $a$  与  $x$  之间), 取  $f(x) = \ln x, a = 1$ . 粗略地估计即有  $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$ , 于是推知

$$|R| < \frac{1}{10^4} \cdot \frac{200}{180} \doteq 0.000\ 11.$$

总误差为  $\pm 0.000\ 13$ . 结果,

$$|I| = 1.645 \pm 0.0002.$$

4) 最后我们来看另一类型的例:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin x dx,$$

其奇点为 0.

我们很自然会把被积函数和  $g(x) = \lg x$  这个函数比较起来看, 这个函数的积分是很容易算出来的<sup>①</sup>:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg x dx = M \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x dx = Mx(\ln x - 1) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left( \lg \frac{\pi}{2} - M \right) \doteq -0.374\ 123. \end{aligned}$$

至于函数  $\varphi(x) = \lg \frac{\sin x}{x}$  的积分  $I_2$  则可照辛普森公式, 取  $2n = 18$ , 算到六位小数. 我们有

$$I_2 = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\lg x - \lg \sin x] dx \doteq -0.098\ 733.$$

于是

$$I = I_1 + I_2 \doteq -0.472\ 856.$$

其实积分  $I$  与我们已知的 [492, 1°] 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

之间只差一个因子  $M$ , 因之

$$I = -\frac{\pi}{2} \cdot \lg 2 = -0.472\ 856\ 8 \cdots;$$

可见上面所得的数值六位小数都是正确的.

我们若不知道这个真值, 就需要引用辛普森公式来估计误差. 这里

$$\varphi(x) = M(\ln x - \ln \sin x), \quad \varphi^{(4)}(x) = M \frac{6(x^4 - \sin^4 x) - 4x^4 \sin^2 x}{x^4 \sin^4 x}.$$

可以证明  $0 < \varphi^{(4)}(x) < \frac{\pi^4}{12} M < 3.6$ ; 因之  $R < 0$  而且  $|R| < 0.000\ 002$ . 再考虑到取末位小数时的误差, 我们就只能确定

$$|I| \doteq 0.472\ 85_{+0.000\ 01}.$$

<sup>①</sup>以下用字母  $M$  代表换自然对数为常用对数的“兑换率”(通称为模).



**500. 关于常义积分的近似计算的附注** 奇点分出法对于常义积分的近似计算也往往是适用的, 这在被积函数虽然连续却无足够多阶的连续导数的情形 (因而误差估计发生困难的时候) 就是如此. 我们举例来说明这点.

试看积分

$$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x) dx.$$

显而易见, 当  $x \rightarrow 0$  时被积函数趋于 0, 所以该函数可以认为在整个积分区间上是连续的. 但是被积函数的一阶导数就已经在  $x=0$  处成为无穷了. 我们利用对数展开式把被积函数表成下列二函数的和:

$$g(x) = \ln x \cdot \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right),$$

$$\varphi(x) = \ln x \cdot \left[ \ln(1+x) - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right].$$

第一个函数的积分容易算出其值为  $-0.205\ 28\dots$ . 而第二个函数 (已有四阶连续的导数了!) 其积分的计算可以引用辛普森公式, 取  $2n=10$ , 算到小数五位. 我们得到  $-0.003\ 48$ , 因之总结结果为  $-0.20876$ .

因为  $|\varphi^{(4)}(x)| < 36$ , 所以  $|R| < 0.000\ 02$ . 结果有

$$|I| = 0.208\ 76_{\pm 0.000\ 03} = 0.208\ 7_{\pm 0.000\ 1}.$$

(其实所得近似值的各位小数都是正确的, 因为  $I$  的真值是  $-0.208\ 761\ 8\dots$ .)

有趣的是, 若不预先利用奇点分出法而把辛普森公式 (同样取  $2n=10$  而且仍旧计算到小数五位) 直接用到被积函数上, 那么得到的结果就是  $I \doteq -0.2080$ , 这就是说, 只精确到三位小数. 这样一来, 若不使用奇点分出法, 不但误差的估计也发生很大的困难, 而且结果的准确性实际上被减小.

**501. 带有无穷限的反常积分的近似计算** 假若要根据积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的定义, 把它当作常义积分  $\int_a^A f(x)dx$  的极限, 近似地 (对于充分大的  $A$ ) 设  $\int_a^{+\infty} \doteq \int_a^A$ , 再用刚讲过的方法来计算最后这个积分; 这样做起来往往是不行的. 这样做法只有在一种情形才会合用, 那就是被积函数当  $x$  上升时它下降得很快, 以致于 —— 对于并不怎样大的  $A$  —— 上面所写的那个近似等式就有充分的准确性.

1) 例如积分  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  的情形就是这样.

从不等式  $x^2 \geq 2Ax - A^2$  推知

$$e^{-x^2} < e^{A^2} \cdot e^{-2Ax},$$

因而

$$\int_A^\infty e^{-x^2} dx \leq e^{A^2} \cdot \int_A^\infty e^{-2Ax} dx = \frac{1}{2A} e^{-A^2}.$$

在  $A=3$  时:

$$\int_3^\infty e^{-x^2} dx < 0.000\ 02.$$



至于积分  $\int_0^3 e^{-x^2} dx$  则可按照辛普森公式, 取  $2n = 30$ , 算到小数五位; 得到 0.886 21. 不难得出估计式  $|(e^{-x^2})^{(4)}| \leq 12, |R| < 2 \cdot 10^{-5}$ . 可知总误差介于  $-0.000\ 04$  与  $0.000\ 06$  之间. 于是

$$0.886\ 17 < I < 0.886\ 27, \quad I \doteq 0.886\ 2_{\pm 0.000\ 1}.$$

至于  $I$  的真值, 则我们已知 [492, 2°] 其为  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0.886\ 226\dots$

计算积分  $\int_a^\infty$  常用的办法是, 或者把它变形成积分限为有限的, 或者先分为二:  $\int_a^A + \int_A^\infty$ . 再把第二个变形成积分限为有限的.

2) 今仍取积分  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  为例, 而把它表成和的形状:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2.$$

积分值  $I_1$  可按辛普森公式, 取  $2n = 10$ , 计算到小数五位, 得  $|R| < 0.000\ 01, I_1 = 0.746\ 83_{\pm 0.000\ 02}$ . 至于  $I_2$  我们就用变换  $x = \frac{1}{t}$  把它变成这样:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t^2}} dt.$$

用通常的方法即得  $I_2 \doteq 0.139\ 45$ , 因之  $I \doteq 0.886\ 28$ .

这里误差的估计我们就不作了.

如果带无穷限的积分在有限距离内有奇点存在, 那么就要把它分成两个, 使每一个只含有一个奇点.

3) 试看 (当  $0 < a < 1$  时的) 积分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = I_1 + I_2.$$

积分  $I_1$  可用奇点分出法来求它:

$$I_1 = \int_0^1 (x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3}) dx - \int_0^1 \frac{x^{a+4}}{1+x} dx = I_{11} - I_{12}.$$

其中  $I_{11} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4}$ , 而  $I_{12}$  则可按照辛普森公式来计算.

例如假定  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ 106\ 8\dots$ ; 则  $I_{11} = 1.140\ 52\dots$ . 对于  $I_{12}$  则 (取  $2n = 10$  而算到小数五位) 得值为 0.095 18. 于是  $I_1 \doteq 1.045\ 34$ .

积分  $I_2$  经过变换  $x = \frac{1}{t}$  即化成这样

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t} dt,$$

其中  $b = 1 - a = 0.292\ 893\ 1\dots$ . 像计算  $I_1$  一样可得:  $I_2 \doteq 2.902\ 89$ . 于是终于得到  $I \doteq 3.948\ 23$ . 以后 [522, 1°] 我们会知道  $I$  的真值为  $\frac{\pi}{\sin \pi a} = 3.948\ 246\dots$ .

有时候在“缓慢地收敛的积分”  $\int_a^\infty f(x) dx$  的情形, 还是能够由它 (譬如接连利用分部积分法) 分出一些容易计算出来的部分, 而使剩下的积分的值却又是很小的.



4) 设给定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

我们把它写成两个积分的和的样子:  $\int_0^A + \int_A^{\infty}$ , 但并不一定要第二个积分的值很小. 于是分部积分即有

$$\begin{aligned} \int_A^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = & \left\{ -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\frac{\sin x}{x^4} - 24\frac{\cos x}{x^5} - 120\frac{\sin x}{x^6} \right\} \Big|_A^{\infty} \\ & + 720 \int_A^{\infty} \frac{\sin x}{x^7} dx. \end{aligned}$$

譬如取  $A = 2\pi$  罢, 就得到

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^7} dx.$$

积出来的各项之和等于  $0.153\ 54\dots$ . 还有

$$0 < 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^7} dx < 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^7} = \frac{120}{(2\pi)^6} < 0.002.$$

照辛普森公式 (取  $2n = 40$  算到小数四位) 来计算积分  $\int_0^{2\pi}$  即得近似值:  $1.418\ 2$ . 误差的估计则如下:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}, \quad f^{(4)}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!(2m+5)}, \\ |f^{(4)}(x)| &< \frac{1}{5} \operatorname{ch} 2\pi < 54, \quad |R| < 0.001\ 2. \end{aligned}$$

因此, 考虑上全部误差, 即得结果:

$$1.570\ 2 < I < 1.575\ 2, \quad I = 1.57_{+0.01}.$$

其实, 如我们在  $492,3^\circ$  中所知的, 真值  $I = \frac{\pi}{2} = 1.570\ 7\dots$ .

**502. 渐近展开的应用** 在对形如

$$\int_x^{\infty} f(t) dt$$

的积分进行近似计算时, 应用积分的渐近展开常常是有益的. 我们以例子来说明这一点.

1° 积分对数 若  $0 < a < 1$ , 积分对数  $\operatorname{li} a$  是这样定义的:

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{du}{\ln u}; \quad (12)$$

在  $a > 1$  的情况下, 这个积分发散, 在主值意义下来理解它:

$$\operatorname{li} a = \text{V.p.} \int_0^a \frac{du}{\ln u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^a \right) \frac{du}{\ln u} \quad (12^*)$$



[参看 484].

首先设  $a < 1$ . 当  $x > 0$  时令  $a = e^{-x}$ , 并在积分 (12) 中作代换  $u = e^{-t}$ :

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (13)$$

设  $t = x + v$ , 得到积分

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-v} dv}{x+v}. \quad (14)$$

因为

$$\frac{1}{x+v} = \frac{1}{x} - \frac{v}{x^2} + \frac{v^2}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{v^{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{v^n}{x^n(x+v)},$$

则由此 [489,4)]

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + r_n(x) \right], \quad (15)$$

其中余式由积分

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{v^n \cdot e^{-v} dv}{x^n(x+v)} \quad (15a)$$

表示, 若丢掉余式, 使展开继续到无穷项:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) \sim -e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots \right\}, \quad (16)$$

则所得到的级数明显是发散的, 因为后项与前项的比

$$\frac{n}{x} \rightarrow \infty \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

但由表示余式的 (15a) 式看出, 它具有被丢掉的级数的第一项的符号, 并且按绝对值小于这样的项

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^{n-1}} \int_0^\infty e^{-v} \cdot v^n dv = \frac{n!}{x^{n+1}}. \textcircled{1}$$

这样一来, 级数 (16) 包络函数  $\operatorname{li}(e^{-x})$  并且同时也是对这个函数的渐进表示 [463]. 由上一章 §6, 读者已知道类似的级数如何被用于近似计算, 若  $n = E(x)$ , 就得到最好的结果.

若  $a > 1$  且  $x < 0$ , 则事情变得相当复杂. 在这种情况下同样可以建立公式 (13) – (16), 但这里所有的积分只能理解为主值意义下的. 展开式 (16) 在这种情况下是常号的 (要知道  $x < 0$ ); 余式的估计的表示更为困难. 借助于详细而精致的研究, 斯蒂尔切斯 (Stieltjes) 得以证明. 在所给  $x < 0$  时, 为了得到对于数  $\operatorname{li}(e^{-x})$  最好的逼近同样应取  $n = E(|x|)$ , 同时逼近的阶可用表达式  $\sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}$  来估计.

可以对函数  $\operatorname{li}(e^{-x})$  得到对于所有实值  $x$  的按  $x$  的整升幂的实展开. 为此把 (13) 式改写成如下形状:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t}.$$

<sup>①</sup> 在所考虑的  $a < 1$  的情况下可对积分 (13) 逐次地应用分部积分法来得到渐进展开 (16) 与对余式的表示, 但这个方法对  $a > 1$  的情况行不通.



当  $x < 0$  积分  $\int_1^x \frac{dt}{t}$  发散, 需要取它的主值; 主值等于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_1^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^x \right) \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \ln \varepsilon + \ln \frac{-x}{\varepsilon} \right] \\ = \ln(-x) = \ln |x|.$$

前两个积分的和是不依赖于  $x$  的常数  $C^{①}$ . 余下的只是最后一个积分按  $x$  的幂次展开, 以便得到所要的结果:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = C + \ln |x| - x + \frac{x^2}{2! \cdot 2} - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^4}{4! \cdot 4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n! \cdot n} + \cdots \quad (17)$$

然而这个展开对大的  $|x|$  值, 用起来不怎么好, 此前的发散展开 (16) 有本质上的优点. 斯蒂尔切斯取了 (16) 式的 23 项, 求出

$$\operatorname{li} 10^{10} = 455\,055\,614.586;$$

为了达到同样的精确度, 在级数 (17) 中需要取超过  $10^{10}$  项才行!

2° 积分余弦与积分正弦:

$$P = \operatorname{ci} x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad Q = \operatorname{si} x = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

为了简化计算, 在研究中我们引入实变量的复函数的积分:

$$P + Qi = - \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt = i \int_x^{\infty} \frac{de^{it}}{t}.$$

逐次地应用分部积分得到公式

$$P + Qi = \frac{e^{ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{(ix)^2} + 2! \frac{e^{ix}}{(ix)^3} + \cdots + (n-1)! \frac{e^{ix}}{(ix)^n} + r_n(x),$$

其中

$$r_n(x) = (-1)^{n-1} i^n \cdot n! \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^{n+1}} dt$$

若把所得公式逐项除以  $-e^{ix}$ , 并使等式两端的实部和虚部分别相等, 则得到对计算更为方便的公式:

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos(t-x)}{t} dt = -P \cos x - Q \sin x \\ = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{(2m-1)!}{x^{2m-1}} \right\} + r'_{2m-1}(x) \quad (18)$$

及

$$\int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = P \sin x - Q \cos x \\ = \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{2!}{x^2} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{x^{2m-2}} \right\} + r''_{2m-2}, \quad (19)$$

① 正如以后所看到的, 这个和实际上恒等于欧拉常数 [538,3)].

② 注意, 有趣的是, 在  $\{\cdots\}$  中的各项刚好是对于我们所熟知的正弦与余弦的幂级数的各项的倒数 [404,(12) 与 (13)].



其中, 相应地,

$$r'_{2m-1}(x) = (-1)^m (2m+1)! \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+2}} dt$$

与

$$r''_{2m-2}(x) = (-1)^m (2m)! \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+1}} dt.$$

容易证明 [例如借助于波内公式, 306 目, (3)]

$$\left| \int_x^X \frac{\sin(t-x)}{t^n} dt \right| \leq \frac{2}{x^n}.$$

当  $X \rightarrow \infty$  而取极限, 我们得出: 公式 (18) 与 (19) 中的余式, 按绝对值不超过 (相应展开式的) 已列出各项随后的那一项的两倍. 由此可看清把展开 (18) 与 (19) 延续到无穷, 我们便达到左端积分的渐进表示.

例如, 特别地, 当设  $x = k\pi (k = 1, 2, 3, \dots)$  时从 (19) 式可求出

$$\rho_k = \text{si}(k\pi) = - \int_{k\pi}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \sim (-1)^{k+1} \left\{ \frac{1}{k\pi} - \frac{2!}{(k\pi)^3} + \frac{4!}{(k\pi)^5} - \frac{6!}{(k\pi)^7} + \dots \right\}.$$

当  $k > 2$  由此容易求出  $\rho_k$  的近似值:

$$\rho_3 = 0.104 \ 0, \quad \rho_4 = -0.078 \ 6, \quad \rho_5 = 0.063 \ 1, \quad \rho_6 = -0.052 \ 8, \dots$$

例如, 为了计算  $\rho_4$  只需在括号内的三项:

$$0.079 \ 58 - 0.001 \ 01 + 0.000 \ 08 = 0.078 \ 65;$$

因为误差绝对小于  $2 \times 0.000 \ 015 = 0.000 \ 03$ , 那么  $|\rho_4|$  包含在 0.078 62 与 0.078 68 之间, 最后有

$$\rho_4 = -0.078 \ 6 \dots$$



# 第十四章 依赖于参数的积分

## §1. 基本理论

**503. 问题的提出** 试考虑一个二元函数  $f(x, y)$ , 设其对于  $x$  在某一区间  $[a, b]$  上的所有的值与  $y$  在集合  $\mathcal{Y} = \{y\}$  中的所有的值都有定义. 假设对于  $\mathcal{Y}$  中的每一常数值  $y, f(x, y)$  在区间  $[a, b]$  上无论在常义积分或反常积分意义下都是可积的. 则积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

显然是辅助变量或参数  $y$  的函数.

在第 436 目中讲到函数序列  $\{f_n(x)\}$  时, 我们考虑了积分

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx,$$

上式表示出积分 (1) 式的特殊情形: 这里自然数附标  $n$  做了参数.

关于函数  $I(y)$ , 很自然的引出了一系列的问题——在规定的取极限过程中,  $I(y)$  的极限的存在及其表达式, 特别是关于它对  $y$  的连续性, 关于它的可微性及其导数的表达式; 最后是关于它的积分. 本章中将专门来说明这一切问题.

对于用积分 (1) 式所表示的, 依赖于参数的函数  $I(y)$ , 它的性质是富有独特的趣味 (这一方面例如可参看 §5), 但除此以外, 这些性质, 读者今后会看到也有多式多样的应用, 特别是关于反常积分的计算问题.

**504. 一致趋于极限函数** 标题中所指示的概念将在以后的研究中起着决定性的作用. 设函数  $f(x, y)$ , 在一般情形下, 定义在两维的集合  $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  中, 这里  $\mathcal{X}$



与  $\mathcal{Y}$  表示数值的集合, 变量  $x$  与  $y$  各在其中取值; 并且  $\mathcal{Y}$  中有一个聚点, 例如有限的数值  $y_0$ .

若 1) 对于函数  $f(x, y)$  当  $y \rightarrow y_0$  时, 有一个有限的极限函数

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (x \text{ 是在 } \mathcal{X} \text{ 中的数值}) \quad (2)$$

存在, 及 2) 对于任意一个数  $\varepsilon > 0$ , 可以找出一个不依赖于  $x$  的数  $\delta > 0$ , 当  $|y - y_0| < \delta$  时, 对于  $\mathcal{X}$  中所有的  $x$  值, 使

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad (3)$$

则我们说这个函数  $f(x, y)$  对于  $\mathcal{X}$  区域中的  $x$  值, 为一致趋向于极限函数  $\varphi(x)$ .

当  $y_0$  不是通常的数值, 例如  $+\infty$  的情形下, 我们也不难用另外的方法来叙述这个定义: 这儿只要把不等式  $|y - y_0| < \delta$  换成不等式  $y > \Delta$  就够了. 在第十二章 [428] 中我们已经讨论过关于一致逼近于极限函数的特殊情形; 那儿, 我们讲到函数  $f_n(x)$ , 其中所含的自然数指标  $n$  就算为参数.

在第 429 目中讨论到函数序列时, 我们提出过一种说法: 一致收敛的必要与充分条件是收敛原理一致适合. 在一般情形下那样说法也是可以的, 就是 (倘使限制在  $y_0$  为有限的数值这一假定之下):

1° 当  $y \rightarrow y_0$  时要使函数  $f(x, y)$  有一极限函数, 且对于  $\mathcal{X}$  区域中的  $x$  值一致趋向于这个极限函数, 其必要与充分条件是: 对任意一个数  $\varepsilon > 0$ , 有这样一个不依赖于  $x$  的数  $\delta > 0$  存在, 对于  $\mathcal{X}$  中的一切  $x$  值, 使下列不等式成立

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \quad (4)$$

其中只要

$$|y - y_0| < \delta, \quad |y' - y_0| < \delta \quad (y, y' \text{ 是在 } \mathcal{Y} \text{ 中的数值}). \quad (5)$$

[在  $y_0 = +\infty$  的情形下, 把最后的不等式换成不等式  $y > \Delta, y' > \Delta$ .]

必要性 设是一致收敛. 用  $\frac{\varepsilon}{2}$  代换定义中的  $\varepsilon$ , 并相应地选择  $\delta$  之后, 我们即可从  $\mathcal{Y}$  中取两个数值  $y$  与  $y'$  使满足条件 (5), 则无论  $x$  为何值可得到

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由此就得到 (4) 式.

充分性 倘使以上所提的条件适合, 则首先显然极限函数 (2) 存在. 其次, 当  $y' \rightarrow y_0$  时, 在不等式 (4) 中取极限 (并且固定  $y$  使  $|y - y_0| < \delta$ ), 可得到

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon,$$

由此建立了函数  $f(x, y)$  一致趋于极限函数  $\varphi(x)$ .



以上所考虑的问题可能化为函数序列的一致收敛问题, 现在讨论如下:

2° 当  $y \rightarrow y_0$  时要使函数  $f(x, y)$  一致趋向于函数  $\varphi(x)$  (对于  $\mathcal{X}$  区域中的  $x$  值) 其必要与充分的条件是: 当  $y_n$  (在  $\mathcal{Y}$  中的值) 按照任何变化的规律趋向于  $y_0$  时, 每一序列  $\{f(x, y_n)\}$  一致收敛于  $\varphi(x)$ .

证明只限于有限的  $y_0$  值的情形.

**必要性** 假定  $f(x, y)$  一致趋于  $\varphi(x)$ , 对于任意选取的一个  $\varepsilon > 0$ , 按照定义可以找到一个数  $\delta > 0$ , [参看 (3)]. 无论  $y_n$  怎么样变化而  $\rightarrow y_0$ , 对于它总有这样一个数  $N$ , 只要在  $n > N$  时  $|y_n - y_0| < \delta$ . 但是对于同样的那些值  $n$ , 由于式 (3), 不等式

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

对于所有的  $x$  值得以适合. 这样, 序列  $\{f(x, y_n)\}$  的一致收敛性也就证明了.

**充分性** 今设每一个这样的序列一致收敛于  $\varphi(x)$ .

为了要证明函数  $f(x, y)$  一致趋于  $\varphi(x)$ , 我们假定相反的结论, 则对于某一个  $\varepsilon > 0$  无论怎样取  $\delta = \delta' > 0$ , 可以从  $\mathcal{Y}$  中找出这样的  $y = y'$  值, 虽然  $|y' - y_0| < \delta'$ , 但至少存在  $\mathcal{X}$  中有一值  $x = x'$  使满足不等式

$$|f(x', y') - \varphi(x')| \geq \varepsilon.$$

现在取一正数的序列  $\{\delta_n\}$ , 它收敛于零. 按以上所说的, 对于每一个  $\delta_n$  可以找到两个值  $y_n$  与  $x_n$  使

$$|y_n - y_0| < \delta_n \quad \text{但} \quad |f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon. \quad (6)$$

显然  $y_n \rightarrow y_0$  (因为  $\delta_n \rightarrow 0$ ), 但是序列  $\{f(x, y_n)\}$  由于式 (6) 不能一致收敛于  $\varphi(x)$ . 对于所给定的条件我们得到了一个矛盾.

今设集合  $\mathcal{X}$  代表有限的区间  $[a, b]$ . 我们知道 [436] (如果函数序列  $\{f_n(x)\}$  一致收敛于极限函数, 其中  $f_n(x)$  是连续的 (或在常义积分意义下为可积的), 则后面的极限函数也一定是连续的 (可积的).) 由于 2°, 很显然地这所有的结果可以推广到一般情形.

3° 若对于  $\mathcal{Y}$  中的任意  $y$  值, 就区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上的  $x$  来说, 函数  $f(x, y)$  是连续的 (可积的), 并当  $y \rightarrow y_0$  时一致趋于极限函数  $\varphi(x)$ , 则后面的极限函数也是连续的 (可积的).

为了以后解释的便利, 我们再建立下面的命题即广义的迪尼定理 [431]. 这儿我们考虑所有的  $y < y_0$ .

4° 假设对于  $\mathcal{Y}$  中的任意  $y$  值, 就区间  $\mathcal{X} = [a, b]$  上的  $x$  来说, 函数  $f(x, y)$  是连续的, 并且当  $y$  值上升时, 它也单调上升而趋于连续的极限函数  $\varphi(x)$ , 则对于  $\mathcal{X}$  区间上的  $x$  值, 这个趋向一定是一致的.



为了证明, 从  $\mathcal{Y}$  中挑选一个单调上升的  $y$  值的序列  $\{y_n\}$ , 它趋向于  $y_0$ , 然后考虑相应的函数序列  $\{f(x, y_n)\}$ , 显然它也随着  $n$  单调上升. 因为级数

$$f(x, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] = \varphi(x)$$

的项都是正的 (可能除去第一项外), 所以迪尼定理使我们能这样地断定: 这个级数对于在区间  $\mathcal{X}$  上的  $x$  值是一致收敛的. 因此, 给定  $\varepsilon > 0$ , 可以找出这样一个数  $n_0$ , 对于  $\mathcal{X}$  中的所有  $x$  值使不等式

$$|\varphi(x) - f(x, y_{n_0})| < \varepsilon$$

得以适合. 由于函数  $f$  跟着  $y$  单调上升, 所以只要  $y > y_{n_0}$ , 不等式

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon$$

也适合; 因此我们的断语得以证明.

虽然以上所建立的一致逼近的特殊判断法, 似乎是很狭隘的, 但是除了一些必须用其他方法来说明一致逼近的存在外, 这法则常是很有用的.

**505. 两个极限过程的互换** 有几种类型的两个极限步骤的互换问题, 将要很显然地贯彻在本章所有的叙述中. 这个问题的最简单形式, 我们初次在第 168 目中碰到过, 当时在二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

存在的假定下, 讲述了累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \quad (7)$$

的存在与相等. 其后在第 436 目中我们看见了关于在一致收敛的函数级数中, 逐项取极限过程的定理也可以用相似的形式来表达:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x),$$

这儿假定当  $n \rightarrow \infty$  时函数  $f_n(x)$  一致收敛于极限函数.

利用上目中所引入的概念, 现在我们建立一个同一类型的一般性的定理. 假定函数  $f(x, y)$  定义在二维集合  $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  中, 这里集合  $\mathcal{X} = \{x\}$  及  $\mathcal{Y} = \{y\}$  各有聚点  $x_0$  及  $y_0$  (有限的或无穷的).

设对于  $\mathcal{X}$  中每一个  $x$  值对应一个简单的极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x),$$



且对于  $\mathcal{Y}$  中每一个  $y$  值对应一个简单的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y),$$

若当  $y \rightarrow y_0$  时函数  $f(x, y)$  对于  $\mathcal{X}$  区域中的  $x$  值一致趋向于极限函数  $\varphi(x)$ , 则 (7) 式中的两个累次极限都存在而且相等.

很容易把这个定理化成前面所提及的定理的特殊情形, 但是——为了明晰起见——我们宁可在这儿给出一个独立的证明 (为了确定的缘故, 假定  $x_0$  及  $y_0$  为两个有限的数值).

给定任意一数  $\varepsilon > 0$ , 由于定理 1°[504] 我们可以找出与它相应的数  $\delta > 0$ , 使不等式 (5) 能对于无论  $\mathcal{X}$  中的任何  $x$  值, 都推出不等式 (4). 今固定  $y$  与  $y'$  值适合条件 (5), 但假定  $x$  趋于  $x_0$ , 让  $f(x, y)$  在式 (4) 中趋于极限, 则得

$$|\psi(y') - \psi(y)| \leq \varepsilon. \quad (8)$$

可见函数  $\psi(y)$  在  $y \rightarrow y_0$  的过程中, 它适合经典的布尔查诺 - 柯西的条件 [58], 所以有一个有限的极限存在

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = A.$$

现在很明显, 只要  $|y - y_0| < \delta$  就有 (对于  $\mathcal{X}$  中的任意  $x$  值)

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon, \text{ 同时 } |\psi(y) - A| \leq \varepsilon;$$

上式是很容易说明的, 当  $y' \rightarrow y_0$  时, 且固定  $x$  及  $y$ , 让函数  $f(x, y')$  及  $\psi(y')$  在不等式 (4) 及 (8) 中趋向极限就得了. 其次, 保留所选定的  $y$  值, 我们可以找到一数  $\delta' > 0$ , 在  $|x - x_0| < \delta'$  时使  $|f(x, y) - \psi(y)| < \varepsilon$ . 然后从所有这些不等式, 推得不等式

$$|\varphi(x) - A| < 3\varepsilon,$$

它在  $|x - x_0| < \delta'$  时总是适合的. 因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A,$$

定理得以证明.

**附注** 还可以证明, 对于并进的极限过程  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  而言, 这个刚讲到的数  $A$  也是函数  $f(x, y)$  的二重极限. 这个情形把已证得了的定理联系到第 168 目中的定理.



**506. 在积分号下的极限过程** 现在回到所考虑的依赖于参数  $y$  的积分 (1), 并首先限制在有限区间  $[a, b]$  上, 及函数在通常的意义下为可积的这一情形.

假定参变数的区域  $\mathcal{Y}$  有一个聚点  $y_0$ , 我们提出对于  $y \rightarrow y_0$  有关函数 (1) 的极限问题.

**定理 1** 若函数  $f(x, y)$  当  $y$  为常量时对于  $[a, b]$  上的  $x$  值为可积, 并且在  $y \rightarrow y_0$  时对于  $x$  一致趋于极限函数 (2) 则等式

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (9)$$

得以成立.

**证明**<sup>①</sup> 极限函数  $\varphi(x)$  的可积性是已知的 [504, 3°]. 给定任意数  $\varepsilon > 0$ , 可以找出一数  $\delta > 0$  使式 (3) 成立. 然后在  $|y - y_0| < \delta$  中得出

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

亦即公式 (9) 得证.

公式 (9) 可以写成以下的形式

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

在这个情形下, 我们说对于参数容许在积分号下取极限.

假定所有的  $y < y_0$ , 则得

**推论** 若函数  $f(x, y)$  在  $y$  不变时对于在  $[a, b]$  上的  $x$  值为连续而在  $y$  值上升时单调上升地趋于连续的极限函数, 则公式 (9) 是正确的.

参考广义的迪尼定理 [504, 4°]

假定区域  $\mathcal{Y}$  自身代表一个有限区间  $[c, d]$ , 我们考虑在结论中关于函数 (1) 的连续性的问题.

**定理 2** 若二元函数  $f(x, y)$  在矩形  $[a, b; c, d]$  上是确定, 且连续的, 则积分 (1) 在区间  $[c, d]$  上是参数  $y$  的连续函数.

**证明** 由于函数  $f(x, y)$  的一致连续性 [174], 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 可以找出  $\delta > 0$ , 从不等式  $|x'' - x'| < \delta, |y'' - y'| < \delta$  推出不等式

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon.$$

<sup>①</sup>为了明确起见我们假定  $y_0$  为有限的.



特别设  $x'' = x' = x, y' = y_0, y'' = y$ ; 则当  $|y - y_0| < \delta$  时, 无论  $x$  为何值得到

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

这样, 函数  $f(x, y)$  当  $y$  趋于任意的特殊值  $y_0$  时, 对于  $x$  一致趋于  $f(x, y_0)$ . 在这条件下按照定理 1

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

或

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0).$$

这就证明了我们的断言.

例如, 不用计算积分

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \quad \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx,$$

我们便可以立刻看到它们对于任意正的  $y$  值是参数  $y$  的连续函数.

**507. 在积分号下的微分法** 在用含有参数  $y$  的积分所给定的函数 (1) 的性质的研究中, 关于这个函数对参数的导数的问题具有重要的意义.

假定偏导数  $f'_y(x, y)$  存在, 莱布尼茨给出了一个法则. 这个法则在拉格朗日的记法下可以写成

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (10)$$

或 —— 倘使利用柯西的更能表达的记法 ——

$$D_y \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b D_y f(x, y) dx.$$

倘使 (对  $y$  的) 导数符号与 (对  $x$  的) 积分符号的互换是容许的话, 则我们叫函数 (1) 可以对参数在积分号下取导数.

按照所指示的公式取导数的算法称为 “莱布尼茨法则”.

为了这个法则的应用, 下面的定理给出简单的充分条件.

**定理 3** 设函数  $f(x, y)$  定义在矩形  $[a, b; c, d]$  上, 当  $y$  在  $[c, d]$  上为任意常量时, 它对于  $x$  是连续的. 其次假定在矩形区域上偏导数  $f'_y(x, y)$  存在, 同时把  $f'_y(x, y)$  看成二元函数, 它是连续的<sup>①</sup>, 则当  $y$  在  $[c, d]$  上为任意值时, 公式 (10) 得以成立.

函数  $f(x, y)$  对  $x$  的连续性保证了积分 (1) 的存在.

固定任意的  $y = y_0$  值. 给它加上改变量  $\Delta y = k$ , 则

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx, \quad I(y_0 + k) = \int_a^b f(x, y_0 + k) dx,$$

<sup>①</sup>严格说来, 从这些条件, 函数  $f(x, y)$  对两个变量的连续性是可以推出的, 但是我们没有利用这个推论.



因此

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx. \quad (11)$$

右面的积分依赖于参数  $k$ . 我们将证明当  $k \rightarrow 0$  时, 这儿容许在积分号下取极限. 由此建立导数

$$I'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k},$$

的存在与所需求的等式

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx \\ &= \int_a^b \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

为了这个目的我们首先按照拉格朗日公式写出

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \quad (12)$$

利用函数  $f'_y(x, y)$  的一致连续性, 对于任意  $\varepsilon > 0$  可以找出  $\delta > 0$ , 当

$$|x'' - x'| < \delta, \quad |y'' - y'| < \delta,$$

使满足不等式

$$|f'_y(x'', y'') - f'_y(x', y')| < \varepsilon.$$

今假定  $x' = x'' = x, y' = y_0, y'' = y_0 + \theta k$  且假定  $|k| < \delta$ , 则由 (12) 我们立刻得到对于所有的  $x$  值

$$\left| \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} - f'_y(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

由此很清楚地知道被积函数 (12) 当  $k \rightarrow 0$  时一致 (对于  $x$ ) 趋向于极限函数  $f'_y(x, y_0)$ . 因此按照定理 1 证实了极限过程可放在 (11) 的积分号下.

今举例来说明. 我们重新考虑上目中所讲到的积分. 显然对于  $y > 0$ ,

$$\begin{aligned} D_y \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx &= \int_0^1 D_y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx = - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2}, \\ D_y \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx &= \int_0^1 D_y \ln(x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

很容易来证实所得到的结果; 我们可以直接计算出这些积分到最后的样式

$$\begin{aligned} I_1(y) &= \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1 + y^2}, \\ I_2(y) &= \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx = \ln(1 + y^2) - 2 + 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

然后对  $y$  取导数.



当  $y = 0$  时定理 3 的条件破坏了. 我们考虑当  $y = 0$  时函数  $I_1(y)$  及  $I_2(y)$  的导数情形怎样, 倘使在第一积分中当  $y = 0$  及  $x > 0$  时, 被积表达式保持它的连续性, 而写成  $\frac{\pi}{2}$ , 则得到  $I_1(0) = \frac{\pi}{2}$ , 因此函数  $I_1(y)$  对于  $y > 0$  及当  $y \rightarrow 0$  时都连续. 但是当  $y \rightarrow 0$  时

$$\frac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2} - \frac{\operatorname{arctg} y}{y} \rightarrow -\infty.$$

所以在  $y = 0$  有限的导数不存在. 对于函数  $I_2(y)$ , 我们得出当  $y \rightarrow 0$  时

$$I_2(0) = -2, \quad \frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + 2\operatorname{arctg} \frac{1}{y} \rightarrow \pi.$$

这儿  $I_2'(0) = \pi$ . 但被积函数在  $y = 0$  时对  $y$  的导数等于零, 所以它的积分也等于零: 莱布尼茨法则不能运用.

**508. 在积分号下的积分法** 最后提出关于函数 (1) 在  $[c, d]$  区间上对  $y$  的积分问题.

我们特别有兴趣的情形, 就是这个积分可以表成公式

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

平常不用括号写成

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (13)$$

在这种情形下, 我们说函数 (1) 可以对参数  $y$  在 (对  $x$  的) 积分号下求积分.

关于两个累次积分 (13) 的相等, 下面的定理给出最简单的充分条件:

**定理 4** 若函数  $f(x, y)$  (对于两个变量) 在矩形  $[a, b; c, d]$  上连续, 则公式 (13) 可以成立.

我们证明更普遍一些的等式

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy, \quad (13^*)$$

这里  $c \leq \eta \leq d$ .

上式的左方和右方我们有含参数  $\eta$  的两个函数, 我们现在要计算它们对于  $\eta$  的导数.

在左方的外层积分具有被积函数 (1), 由于定理 2, 它对于  $y$  是连续的. 所以它对上限变量的导数就是被积函数, 以  $y = \eta$  来计算, 亦即积分

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx.$$



在右方 (13\*) 有积分

$$\int_a^b \varphi(x, \eta) dx \text{ 这里 } \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

函数  $\varphi(x, \eta)$  适合定理 3 的条件. 事实上由于定理 2  $\varphi(x, \eta)$  对  $x$ <sup>①</sup> 是连续的. 再取导数, 得

$$\varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta).$$

把  $\varphi'_\eta(x, \eta)$  看成二元函数, 它是连续的, 所以可以运用莱布尼茨法则到以上提及的积分:

$$D_\eta \int_a^b \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b \varphi'_\eta(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx = I(\eta).$$

这样, 等式 (13\*) 的左方和右方看成  $\eta$  的函数具有相等的导数, 因此, 只能相差一个常数. 但当  $\eta = c$  时以上提及的两个表达式显然变成零; 因此它们对于所有的  $\eta$  值是恒等的; 所以等式 (13\*) 得证.

由此, 特别当  $\eta = d$  时我们可得等式 (13).

例 1) 设  $f(x, y) = x^y$  在矩形  $[0, 1; a, b]$  上, 这儿  $0 < a < b$ . 定理的条件是适合的. 我们有

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

从左方容易得出最后的结果.

$$\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

从右方我们也引得了积分  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ . 这样, 由于积分的互换我们找到这个积分的数值 [参看 497, 16), (B)].

2) 在函数  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$  于矩形  $[0, 1; 0, 1]$  上的情形下, 定理的条件并不适合: 在  $(0, 0)$  点是间断的, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f dx &= \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2} \quad (y > 0), \\ \int_0^1 dy \int_0^1 f dx &= \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

同时

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy = -\frac{\pi}{4}.$$

<sup>①</sup>这儿把  $x$  当作参数.



**509. 积分限依赖于参数的情形** 我们现在来讨论更复杂的情形, 就是不仅被积表达式含有参数, 而且其积分限也依赖于参数.

在这种情形下积分的形式是

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (14)$$

我们仅限于研究这类积分中对于参数的连续性及可微性问题.

**定理 5** 设函数  $f(x, y)$  在矩形  $[a, b; c, d]$  上是确定而且连续的, 并设曲线

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad [c \leq y \leq d]$$

是连续的; 而且它没有落在矩形的界限以外, 则积分 (14) 代表  $[c, d]$  上的  $y$  的连续函数.

倘使  $y_0$  是  $y$  的任一特殊值, 则积分 (14) 可以写成

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx. \quad (15)$$

第一个积分, 因为它的积分限是常量, 当  $y \rightarrow y_0$  时按定理 2 趋于

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx;$$

其余两个积分可以作以下的估计

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right| \leq M \cdot |\beta(y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \right| \leq M \cdot |\alpha(y) - \alpha(y_0)|.$$

这里  $M = \max |f(x, y)|$ , 是  $|f(x, y)|$  的最大值; 由于函数  $\alpha(y)$  与  $\beta(y)$  的连续性, 当  $y \rightarrow y_0$  时, 两个积分趋于零.

这样, 最后得到

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0),$$

所以定理得证.

**定理 6** 若  $f(x, y)$  像以上所说的一样, 且在矩形  $[a, b; c, d]$  上具有连续的偏导数  $f'_y(x, y)$ , 同时导数  $\alpha'(y)$  与  $\beta'(y)$  都存在, 则积分 (14) 对于参数有导数可以用下面公式表出:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y). \quad (16)$$



这儿我们将从等式 (15) 讲起. 当  $y = y_0$  时第一个积分按定理 3 是有导数, 可用以下取偏导数后的积分来表示

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx.$$

对于第二个积分 (当  $y = y_0$  时它的值是零), 按中值定理我们有

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \cdot f(\bar{x}, y),$$

这里  $\bar{x}$  是在  $\beta(y_0)$  及  $\beta(y)$  中间的值. 因此当  $y = y_0$  时第二个积分的导数就是当  $y \rightarrow y_0$  时以上表达式的极限, 也就是

$$\beta'(y_0) \cdot f(\beta(y_0), y_0),$$

同样, 当  $y = y_0$  时对于第三个积分的导数我们得到

$$-\alpha'(y_0) \cdot f(\alpha(y_0), y_0).$$

合并这一切结果, 我们知道导数  $I'(y_0)$  存在, 并且给出了以上所提出的公式.

**附注** 如果函数  $f(x, y)$  (具有所提出的性质) 只规定在曲线

$$x = \alpha(y) \text{ 及 } x = \beta(y)$$

之间的范围内, 以上两个定理的结论还是有效的. 但为了推理简单起见, 用到了把函数考虑在这个范围以外的可能性.

值得注意的是用以下的观点来看一看这个结果的建立. 积分  $I(y)$  可以从下列积分得出:

$$I(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx$$

依赖于三个参数  $y, u, v$ ; 以  $u, v$  代替了  $u = \alpha(y), v = \beta(y)$  应用关于复合函数的连续性及可微性的一般定理, 问题就得以解决. 特别, 公式 (16) 可以按经典的样式写成

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u} \alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v} \beta'(y).$$

**510. 仅依赖于  $x$  的因子的引入** 我们容易求得以上所建立的一些结果的推广, —— 用不到引进新的概念. 事实上代替式 (1) 我们可以考虑积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \cdot g(x) dx, \quad (1^*)$$

这里  $g(x)$  是  $x$  的函数, 它在区间  $[a, b]$  上是绝对可积的, (可能在反常积分的意义之下). 用以上同样的方法还可以部分地把前述的基本理论推广到反常积分.

我们叙述以下与定理 1, 2, 3 及 4 相似的命题:



**定理1\*** 在定理 1 的假定下我们有以下公式

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) \cdot g(x) dx.$$

首先我们注意, 在这公式中所写出的积分都是存在的. 极限函数  $\varphi(x)$  的可积性是已经证明过的.  $f \cdot g$  及  $\varphi \cdot g$  的积分 (一般说来是反常积分) 的存在可从第 482 目推得.

现在, 给定数  $\varepsilon > 0$ , 由于  $f(x, y)$  一致趋于  $\varphi(x)$ , 我们可以找出这样的数  $\delta > 0$ , 使有式 (3)<sup>①</sup> 的结果. 当  $|y - y_0| < \delta$  时以下的估计是正确的.

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x, y) g(x) dx - \int_a^b \varphi(x) g(x) dx \right| \\ & \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| \cdot |g(x)| dx < \varepsilon \cdot \int_a^b |g(x)| dx, \end{aligned}$$

这样已经证明了我们的公式, 因为右面的式子是一个任意小量乘上一个有限常量  $\int_a^b |g(x)| dx$ .

特别, 对于以  $n$  为参数的函数序列  $\{f_n(x)\}$  也有相似的定理. 我们用“无穷级数的说法”来叙述这个结果, 因为它是常常在这样的形式中被应用的.

**推论** 倘使 1) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

的各项在  $[a, b]$  上是可积的函数 (在通常意义下), 并且级数为一致收敛, 2)  $g(x)$  是在  $[a, b]$  上绝对可积的函数 (甚至于在反常积分的意义下), 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) g(x)$$

可以逐项积分.

完全同定理 2 及 3 一样 (但只参考定理 1\*, 而不是定理 1) 我们可以证明:

**定理 2\*** 在定理 2 的假定下, 积分 (1\*) 是  $y$  在区间  $[c, d]$  上的连续函数.

**定理 3\*** 在定理 3 的假定下, 函数 (1\*) 对于参数是可微的并且有公式:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) \cdot g(x) dx,$$

最后:

<sup>①</sup>我们只考虑有限值  $y_0$  的情形不过是为了举例而已; 将它推广到  $y_0 = +\infty$  的情形也没有什么困难.



**定理 4\*** 在定理 4 的假定下, 以下二重积分的等式是正确的

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)g(x)dx = \int_a^b g(x)dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

证明可以逐字地重复定理 4 的证明 (但只参考定理 2\* 及 3\*, 而不是定理 2 及 3).

在下一目中读者可以找到很多的应用这些定理 (以及从前的定理) 的例题.

### 511. 例题

1) 利用函数  $e^x$  的级数的展开式, 把以下的积分:

$$(a) \int_0^1 e^x \ln x dx \quad (b) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx$$

表示成级数和的形式.

由定理 1\* 的推论, 我们有

$$\begin{aligned} (a) \int_0^1 e^x \ln x dx &= \int_0^1 \ln x \cdot \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right\} dx \\ &= \int_0^1 \ln x dx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^m \ln x dx \\ &= - \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!(m+1)} \right\}. \\ (b) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx &= \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{m-\frac{3}{2}} dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \cdot m!}. \end{aligned}$$

2) 用级数的展开式计算积分

$$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x) dx.$$

按第 437 目中 5° 的定理, 以下级数

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

在区间  $[0, 1]$  上一致收敛. 因为  $\ln x$  在这区间上是绝对可积, 所以由定理 1\* 的推论, 得

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^n \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}.$$

由于恒等式

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2},$$



于是考虑到已知的展开式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \ln 2, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12} \textcircled{1}$$

$I$  的表达式可以写成以下形式

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = 2 - 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

这里, 对于  $I$  我们得到了“有限形式”的数值. 自然, 这并不是常常可能的.

3) 用  $P_n(x)$  表示勒让德的  $n$  次多项式, 证明

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}}.$$

如果回想到勒让德多项式的起源是从表达式  $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}}$  按  $\alpha$  的次数展开式中所得出的系数, 则只考虑以下级数

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}}, \quad (17)$$

且建立它的和就等于刚提及的 (当  $x = \cos \theta$  时的) 表达式, 那就够了.

因为 [参看 461, 2)] 当  $|\alpha| < 1$  时

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = (1 - \alpha) \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2}$$

并且这级数对于  $\varphi$  是一致收敛 (因为它以等比级数  $\sum_0^\infty |\alpha|^n$  为优级数) 所以再由以上的推论, 级数 (17) 可以写成

$$2 \frac{1 - \alpha}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} \cdot \frac{d\varphi}{1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2}.$$

采用像在 497 目问题 9) 中所用的替换法一样 (那儿, 严格地说, 就是在建立特殊的结果, 即  $n = 0$  及  $n = 1$  的情形) 我们逐步地得到

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(z - x)(1 - z)}} \cdot \frac{dz}{1 - 2\alpha z + \alpha^2} \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - \alpha) \int_0^\infty \frac{dt}{(1 - \alpha)^2 t^2 + (1 - 2\alpha x + \alpha^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}. \end{aligned}$$

这样就完成了证明.

<sup>①</sup> 参考第 405, (18); 440, 8).



4) 我们来转述欧拉用以得出其结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

的方法之一.

利用已知的反正弦展开

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(它在区间  $[0, 1]$  上一致收敛) 我们来计算积分

$$E = \int_0^1 \arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \arcsin x d\arcsin x = \frac{\pi^2}{8}.$$

我们有

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

那么得到

$$E = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

由此已容易得到开始所提到的公式.

5) 曾借助罗巴切夫斯基方法在 **497** 目 14) 与 15) 中推出公式

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx,$$

罗巴切夫斯基方法可以应用于下述情况: 函数  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上在反常积分意义下可积 (其他条件保持不变).

例如, 借助这些公式得到如下积分:

$$(a) \int_0^{\infty} \ln |\sin x| \cdot \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2;$$

$$(6) \int_0^{\infty} \frac{\ln |\cos x|}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln |\cos x|}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

$$(B) \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 |\cos x|}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln^2 \cos x}{\sin^2 x} dx = \pi \ln 2.$$



6) 对于以下积分 (此处  $y > 0$ )

$$(a) \int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dx,$$

直接建立当  $y \rightarrow 0$  时的极限过程不能在积分符号下运算. 证明这是违背了定理 2 的条件.

7) 应用莱布尼茨法则计算以下积分对于参数的导数

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta) d\theta \quad (a > 1).$$

容易证实定理 3 的条件在这儿是遵守的, 我们得到

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ad\theta}{a^2 - \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

由此, 对  $a$  积分, 还原到  $I(a)$  的数值:

$$I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C.$$

为了决定常量  $C$ , 把积分表成以下形式

$$I(a) = \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) d\theta,$$

如果利用已经求出的  $I(a)$  的表达式, 则

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) d\theta - \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}.$$

这儿当  $a \rightarrow +\infty$  求其极限; 因为

$$\left| \ln \left( 1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) \right| \leq \left| \ln \left( 1 - \frac{1}{a^2} \right) \right|,$$

所以积分趋于零, 并且求出:  $C = -\pi \ln 2$ . 最后, 对于  $a > 1$  [参看 497, 7]):

$$I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}.$$

应该注意的就是按莱布尼茨法则的微分法, 我们可以援用它来找出所要求的积分的有限表达式. 这个方法往往引导我们达到这样的目的.

8) 更简单地来计算以下积分 [这积分对我们是已知的, 307, 4); 314, 14); 440, 11)]:

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx \quad (|r| < 1).$$

按照莱布尼茨法则:

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx.$$

借助于代换  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , 容易建立所获得的积分等于零. 在这情形下.

$$I(r) = C = \text{常量}.$$



但  $I(0) = 0$ , 即  $C = 0$ . 所以当  $|r| < 1$  积分  $I(r) = 0$ .

9) 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

引进参数  $y$ , 我们考虑更普遍的积分

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (y \geq 0),$$

由这积分当  $y = 1$  时即得原来所设的积分. 设

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x}, \quad \text{及} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

定理 3\* 的条件是满足的. 对  $y$  (在积分号下) 取微分, 得到

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}};$$

这个积分是容易计算的, 例如借助于代换  $x = \cos \theta$ ,

$$I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+y^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

由此取积分得到

$$I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + C.$$

因  $I(0) = 0$ , 所以  $C = 0$ ; 当  $y = 1$  我们得到最后所需求的积分

$$I = I(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

10) 证明下列表达式 (当整数  $n \geq 0$ )

$$(a) \quad u = x^n \cdot \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad \text{及} \quad (b) \quad u = \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

适合所谓贝塞尔微分方程

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

这儿取  $x$  为参数. 在积分号下微分两次 (定理 3), 我们得到方程的左边的和 (把指定的表达式代替  $u$ ) 等于

$$\begin{aligned} (a) \quad & x^{n+1} \int_0^\pi [x \cos(x \cos \theta) \sin^{2n+2} \theta - (2n+1) \sin(x \cos \theta) \cos \theta \sin^{2n} \theta] d\theta \\ & = -\sin^{2n+1} \theta \sin(x \cos \theta) \Big|_0^\pi = 0, \\ (b) \quad & - \int_0^\pi [(x^2 \sin^2 \theta + n^2 - x^2) \cos(n\theta - x \sin \theta) - x \sin \theta \sin(n\theta - x \sin \theta)] d\theta \\ & = - (n + x \cos \theta) \sin(n\theta - x \sin \theta) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$



11) 证明函数  $Au_1 + Bu_2$  ( $A, B$  为任意常数), 此处

$$u_1 = \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} d\theta, \quad u_2 = \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} \ln(r \sin^2 \theta) d\theta,$$

适合 (对于整数  $n$ ) 方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - n^2 u = 0.$$

显然只需证明函数  $u_1, u_2$  分别地适合方程就够了. 像从前一样借助于积分号下的微分法, 这是适合的, 但对于函数  $u_1$  应用定理 3, 而对于函数

$$u_2 = \ln r \cdot \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} d\theta + 2 \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} \ln \sin \theta d\theta$$

应用定理 3\*.

12) 从下列完全椭圆积分

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

求对于模  $k$  ( $0 < k < 1$ ) 的导数.

我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}}{dk} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin^2 \varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \right\} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{K}}{k}, \end{aligned}$$

相似地

$$\frac{d\mathbf{K}}{dk} = \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \right\}.$$

但

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi = \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi^{①},$$

因此

$$\frac{d\mathbf{K}}{dk} = \frac{\mathbf{E}}{k(1 - k^2)} - \frac{\mathbf{K}}{k}.$$

所得到的公式具有有趣的应用. 例如, 倘使引入共轭模  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ , 和函数

$$\mathbf{E}'(k) = \mathbf{E}(k'), \quad \text{及} \quad \mathbf{K}'(k) = \mathbf{K}(k'),$$

则容易获得

$$\frac{d}{dk} (\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}') = 0,$$

①从下面容易证得的恒等式

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 - k^2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{d}{d\varphi} [\sin \varphi \cos \varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}],$$

上式即可推得.



由此推得

$$\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}' = c = \text{常量}.$$

为了决定这个常量  $c$ , 建立左边当  $k \rightarrow 0 (k' \rightarrow 1)$  的极限: 这个极限显然就是  $c$ . 首先容易得到

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} &= \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}; \\ \lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{E}' &= \lim_{k' \rightarrow 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 1\end{aligned}$$

[506, 定理 2], 然后我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{K}' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2}} = \frac{\pi}{2k}, \\ |\mathbf{E} - \mathbf{K}| = \mathbf{K} - \mathbf{E} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < \frac{\pi}{2} \cdot k^2,\end{aligned}$$

因此

$$|\mathbf{K}'(\mathbf{E} - \mathbf{K})| < \frac{\pi^2}{4} \cdot k \quad \text{及} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K}'(\mathbf{E} - \mathbf{K}) = 0.$$

所要求的极限是  $\frac{\pi}{2}$ ; 最后, 我们得到著名的勒让德的关系式

$$\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2}.$$

13) 证明恒等式

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_1} f(t) dt}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

其中  $f(t)$  是任意函数, 在区间  $[a, b]$  上是连续的; 且  $a \leq x \leq b$ .

**解** 采用数学归纳法, 当  $n=1$  时恒等式是显然的. 现在我们承认它对于任意一个  $n \geq 1$  时是正确的, 我们要证明当  $n+1$  代替  $n$  时也是正确的.

为了简单起见, 设

$$I_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

用定理 6 对于  $x$  取表达式

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt$$

的导数. 因为这儿下限是常量, 但在上限即当  $t=x$  时被积函数是零, 所以公式 (16) 中不含积分的两项消灭了, 我们得到

$$\frac{dI_{n+1}(x)}{dx} = I_n(x).$$

由于  $I_n(a) = 0$ , 因此

$$I_{n+1}(x) = \int_a^x I_n(t_n) dt_n.$$



将  $I_n$  在累次积分的形式下的表达式代替  $I_n$ , 则对于  $I_{n+1}$  也得到同样的表达式.

用完全同样的方法, 可以证明更普遍的结果:

$$\int_a^x \varphi'(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} \varphi'(t_{n-2}) dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_1} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^{n-1} f(t) dt,$$

这儿  $f$  和  $\varphi$  是在区间  $[a, b]$  上连续的, 并且  $\varphi$  具有连续的导数.

14) 求下列积分对参数  $\alpha$  的导数

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha - x}},$$

这儿  $\varphi(x)$  与它的导数  $\varphi'(x)$  在区间  $[0, a]$  上是连续的, 且  $0 < \alpha \leq a$ .

因为被积表达式当  $x = \alpha$  时, 一般说来, 变成无穷, 所以我们不能直接应用公式 (16). 我们采用迂回的办法即代换  $x = \alpha t$ , 将积分变成以下形式

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt;$$

这儿可以应用定理 3\*. 按莱布尼茨法则积分求导数, 我们得到

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt + \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt,$$

如果回到以前的变量  $x$ , 则

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

将这些积分中的第一个用分部积分法来变换即可使公式具有更简单的形式

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

15) 设

$$\begin{cases} f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{当 } 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ f(0, y) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

直接证明: 对于积分  $\int_0^1 f(x, y) dx$ , 当  $y = 0$  时莱布尼茨法则不能应用.

同样, 对于函数

$$\begin{cases} f(x, y) = xe^{-\frac{x^2}{y}}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1, \\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$$

证明此结论.

16) 以下积分

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

的计算, 我们已经在 9) 中用对参数的微分法算出. 试用其他方法以表示之.



被积表达式  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$  用它的积分式

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

来替换, 把  $I$  写成累次积分的形式

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}.$$

应用定理 4\*, 调换积分

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

17) 用积分号下求积分法计算积分

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} \quad (a > b > 0).$$

把被积函数表示为

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x},$$

因此

$$K = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x}.$$

调换积分 (按定理 4) 我们得到

$$K = 2ab \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x}.$$

因

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2 - b^2y^2}},$$

所以结果是

$$K = \pi b \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2 - b^2y^2}} = \pi \cdot \arcsin \frac{b}{a}.$$

18) 再举出以下的例子, 它们具有这样的条件, 两个积分的互换是不容许的:

$$(a) \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy = -\frac{1}{2};$$

$$(b) \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \left( \frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right) e^{-\frac{x^2}{y}} dx = -\frac{1}{e}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \left( \frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right) e^{-\frac{x^2}{y}} dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

自然在这些情形下, 其相对应的定理的条件是违反的: 被积函数在  $(0,0)$ <sup>①</sup> 点遭受到间断.

<sup>①</sup>在 (b) 的情形, 当  $y=0$  但  $x \neq 0$  时, 被积函数, 如果假定它在这儿等于零, 可以认为是连续的.



**512. 代数学基本定理的高斯证明** 运用定理 4, 高斯贡献了一个首创的代数学基本定理的证明.

这个定理说明任意整函数

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

(实系数或复系数) 具有实根或复根.

假定  $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ; 则

不在这里证明.

$$x^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta),$$

使

$$f(x) = P + Qi,$$

这儿

$$P = r^n \cos n\theta + \cdots, \quad Q = r^n \sin n\theta + \cdots,$$

并且没有写出的项只包含低于  $r$  的  $n$  幂的项. 而与  $r$  无关的项就变为常数.

显然, 如果可以建立表达式  $P^2 + Q^2$  对于某一组  $r$  和  $\theta$  的值变成零, 则定理就证明了.

在我们的考虑中, 引入函数:

$$U = \operatorname{arctg} \frac{P}{Q}.$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r} Q - P \frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2},$$

使

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \frac{H(r, \theta)}{(P^2 + Q^2)^2}.$$

这儿  $H(r, \theta)$  是  $r$  和  $\theta$  的连续的函数, 它的准确表达式对于我们的考虑没有什么关系.

最后, 构成累次积分

$$I_1 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta \quad \text{及} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr.$$

这儿  $R$  是一个正的常数, 它的值我们在以后来决定.

如果函数  $P^2 + Q^2$  无论何时永不等于零, 则被积函数是连续的, 且按定理 4 必须是  $I_1 = I_2$ . 然而我们可以证明当  $R$  为充分大时类似的等式是不适合的, 关于这点的证实, 在于取半径为  $R$  绕原点的圆中, 得出  $P^2 + Q^2$  必须取零值, 因而定理得证.

算出  $I_1$  的内层积分, 得到

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0,$$

因为从  $\frac{\partial U}{\partial r}$  的表达式显然可见它是  $\theta$  的函数, 具有周期  $2\pi$ . 所以  $I_1 = 0$ .

回到积分  $I_2$ , 我们有

$$\int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{r=0}^{r=R}.$$



为了今后的便利, 现在考虑分式  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$  的分子和分母中  $r$  的高次项.

因为

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -nr^n \sin n\theta + \dots; \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = nr^n \cos n\theta + \dots.$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -nr^{2n} + \dots.$$

另一方面

$$P^2 + Q^2 = r^{2n} + \dots,$$

以致结果是

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-nr^{2n} + \dots}{r^{2n} + \dots}.$$

因为没有写出的项只包含低于  $r$  的  $2n$  幂的项, 它们的系数是  $\theta$  的有界函数, 所以不只是:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -n,$$

而且对于  $\theta$  是一致趋于极限  $-n$ .

因为当  $r = 0$  时,  $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$  (在这情形下, 因  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$ ),  $I_2$  的内层积分成为  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$  当  $r = R$  时的值. 当  $R \rightarrow \infty$  这个极限值对于  $\theta$  是一致趋于  $-n$ . 按定理 1 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = -2\pi n.$$

这样, 对于足够大的  $R$ , 积分  $I_2$  是负的, 于是等式  $I_1 = I_2$  变为不可能了.

## §2. 积分的一致收敛性

**513. 积分的一致收敛性的定义** 在叙述依赖于参数的积分理论推广到反常积分的情形时, 积分的一致收敛性的概念起着特殊的作用. 对于这个概念我们预先来阐明一下.

设函数  $f(x, y)$  对于  $x$  在所有  $x \geq a$  的值及  $y$  在某  $\mathcal{Y}$  范围上的所有的值都有定义. 并设在这个范围上对于每一个  $y$  值, 以下积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (1)$$

存在.

按照无穷限的反常积分的定义 [470]

$$\int_a^\infty f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x, y) dx.$$

这样, 积分

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx, \quad (2)$$



表示是  $A$  和  $y$  的函数. 当  $y = \text{常量}$  及  $A \rightarrow \infty$  时, 则其极限为  $I(y)$ . 若这个积分对于在  $\mathcal{Y}$  范围上的  $y$  值是一致地趋向于  $I(y)$ , 则叫积分对于参数  $y$  在所说的范围上是一致收敛.

换言之, 即对于任意  $\varepsilon > 0$  可以找到这样一个不依赖于  $y$  的数  $A_0 \geq a$ , 只要  $A > A_0$  便能使不等式

$$\left| \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

对于在  $\mathcal{Y}$  上的所有的  $y$  值同时适合.

试举一例, 考虑积分

$$\int_0^\infty ye^{-xy} dx,$$

这个积分对于每一个定值  $y \geq 0$  是收敛的.

计算反常积分

$$\int_A^\infty ye^{-xy} dx.$$

当  $y = 0$  时无论  $A$  为何值, 它是零. 如果  $y > 0$  则借助于代换  $xy = t$ , 容易得出

$$\int_A^\infty ye^{-xy} dx = \int_{Ay}^\infty e^{-t} dt = e^{-Ay}.$$

当  $y$  为固定值时, 这个表达式在  $A \rightarrow \infty$  时很明显地趋于 0, 并且不管任何  $\varepsilon > 0$ , 不等式

$$e^{-Ay} < \varepsilon \tag{3}$$

对于所有  $A \geq A_0(y)$  是适合的. 这儿  $A_0(y) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}$  依赖于  $y$ .

如果  $y$  的变化限制在区间  $[c, d]$  上, 此处  $c > 0$ , 则可以找到不依赖于  $y$  的数  $A_0$ , 当  $A > A_0$  时, 使不等式 (3) 对于所有  $y$  值都适合: 对于  $A_0$  只需取  $A_0(c)$ , 因为当  $A > A_0$  则

$$e^{-Ay} \leq e^{-Ac} < \varepsilon \quad (c \leq y \leq d).$$

换句话说, 我们的积分对于  $y$  在区间  $[c, d]$  上是一致收敛的.

如果我们取参数  $y$  在区间  $[0, d]$  上 ( $d > 0$ ), 则情形就不一样了. 在这情形下, 这样的  $A_0$  并不存在 (至少在设  $\varepsilon < 1$  时). 这是明显的, 因为不论取  $A$  如何大, 表达式  $e^{-Ay}$  当  $y \rightarrow 0$  时是趋向于 1, 因此对于足够小的  $y$  值, 它比任意一个数  $\varepsilon < 1$  为大, 所以当变量  $y$  在区间  $[0, d]$  上, 积分对  $y$  的收敛是并不一致的.

**514. 一致收敛的条件 · 与级数的联系** 利用函数的一致收敛于极限的一般判别法 [504, 1°], 对于所考虑的情形, 可以相应地构成以下的判别法.

为了要积分 (1) 对于  $y$  在范围  $\mathcal{Y}$  上一致收敛, 它的必要与充分条件是: 当给定任意值  $\varepsilon > 0$  时, 可以找出这样的数  $A_0$  不依赖于  $y$ , 只要  $A' > A > A_0$ , 使不等式

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$



对于所有的  $y$  值在范围  $\mathcal{Y}$  上同时成立.

这里, 像平常一样, 我们也可把它化成这样的事实, 就是对于所有的  $y$  值一致满足于收敛原理 [参看 475].

在 477 目中我们比较了无穷限的反常积分和无穷级数, 积分 (1) 的一致收敛问题与无穷级数也有联系.

像我们从 504, 2° 中所知道的, 为了要近似函数  $F(A, y)$  [参看 (2)] 当  $A \rightarrow \infty$  时 (对  $y$  的) 一致趋于积分 (1), 它的必要与充分条件是对于任何一个函数序列  $\{F(A_n, y)\}$  无论  $A_n$  如何趋向  $+\infty$ , 它是一致收敛于这个积分.

最后, 如果从“序列的说法”转换到“无穷级数的说法”则我们增加一个最后结论, 就是积分 (1) (对于  $y$  的) 一致收敛是完全相等以下级数形状的一致收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y) dx \quad (A_0 = a, A_n \geq a),$$

这儿  $A_n$  是任意的变量, 趋向  $+\infty$ .

**515. 一致收敛的充分判别法** 现在我们建立某些判别法, 按照这些法则在实际常常可用来判断关于积分的一致收敛性.

1° 设函数  $f(x, y)$  对  $x$  在每一个有限区间  $[a, A]$  上 ( $A \geq a$ ) 是可积的. 如果存在这样一个只依赖于  $x$  的函数  $\varphi(x)$ , 它在无穷区间  $[a, +\infty]$  上是可积的, 并使对于  $y$  在  $\mathcal{Y}$  上的所有的值有

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad (\text{对于 } x \geq a),$$

则积分 (1) 对于  $y$  是一致收敛, 这儿  $y$  是在它取值范围上的数值.

倘使利用上目中的判别法, 可以从以下不等式

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \int_A^{A'} \varphi(x) dx$$

直接推得这个结果.

对于以上所说到的条件有时我们说函数  $f(x, y)$  有一个可积的优函数  $\varphi(x)$ , 或则说积分 (1) 以不包含参变量的积分

$$\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$$

为一优积分.

2° 像在 476 目一样, 我们应用第二中值定理, 给出更精确的判别法.

考虑两个函数乘积的积分

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx. \quad (4)$$



这儿假定函数  $f(x, y)$  在任意区间  $[a, A]$  上对  $x$  为可积, 并且函数  $g(x, y)$  对  $x$  为单调的.

若积分

$$\int_a^\infty f(x, y) dx$$

对  $y$  在  $\mathcal{Y}$  范围上是一致收敛; 并且函数  $g(x, y)$  一致有界:

$$|g(x, y)| \leq L \quad (L = \text{常量}, x \geq a, y \text{ 从 } \mathcal{Y} \text{ 上取值})$$

则积分 (4) 对  $y$  在  $\mathcal{Y}$  范围上是一致收敛.

代替 476 目的 (6) 式, 这次我们有

$$\int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx = g(A, y) \int_A^\xi f(x, y) dx + g(A', y) \int_\xi^{A'} f(x, y) dx.$$

若根据 514 目, 取  $A_0$  这样大, 使得当  $A' > A > 0$  时对所有的  $y$  一致地有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

则 (如同在 476 目) 不难得到估计

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

[514] 这样就证明了我们的断言.

3° 像在 476 目一样, 也可以指出其他加在函数  $f$  与  $g$  上的条件的组合.

若积分

$$\int_a^A f(x, y) dx$$

作为  $A$  与  $y$  的函数是一致有界的:

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| \leq K \quad (K = \text{常量}, A > a, y \text{ 从 } \mathcal{Y} \text{ 上取值})$$

并且当  $x \rightarrow \infty, g(x, y) \rightarrow 0$  对  $y$  (在  $\mathcal{Y}$  范围上) 是一致的, 则积分 (4) 对  $y$  (在  $\mathcal{Y}$  范围上取值) 一致收敛.<sup>71)</sup>

让读者自己给以证明.

4° 最后, 我们注意在实际中常碰到的情形是两个因子  $f$  与  $g$  中, 事实上只有一个包含参数  $y$ . 因此时法则 2°, 3° 中的每一个都给出两个个别的法则 (看这些因子那一个包含  $y$  而定).

<sup>71)</sup> 首先假设对任意固定的  $y$ , 函数  $g(x)$  在  $x$  变化的整个区间上对  $x$  是单调的.



构成这些法则中的一个是从  $2^\circ$  推得的, 而在实际中最常用的法则:

若积分

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

收敛, 并且函数  $g(x, y)$ , 对  $x$  单调, 而且一致有界, 则积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x, y)dx$$

对  $y$  是一致收敛.

作为例题来讲, 在假定积分  $\int_a^\infty f(x)dx$  收敛下, 下列积分

$$\int_a^\infty e^{-xy} f(x)dx, \quad \int_a^\infty e^{-x^2y} f(x)dx \quad (a \geq 0)$$

的收敛性对  $y$ , 而  $y \geq 0$ , 是一致的. 事实上, 这两个函数:  $e^{-xy}, e^{-x^2y}$ , 对  $x$  单调递减, 而且是以 1 为界的.

这一个注解在以后对我们是屡次有用的.

**516. 一致收敛性的其他情形** 现在考虑一个函数  $f(x, y)$  当  $x$  在有限区间  $[a, b]$  上取值, 并且  $y$  在某范围  $\mathcal{Y}$  上取值时都有定义. 设当  $y = \text{常量}$  时它对  $x$  从  $a$  到  $b$  是可积的 (在常义积分或反常积分的意义之下). 则积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx. \quad (5)$$

无论在常义积分或反常积分的意义之下都是下列积分当  $\eta \rightarrow 0$  时的极限:

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)dx. \quad (6)$$

若当  $\eta \rightarrow 0$  时这个积分趋于极限  $I(y)$ , 对于  $y$  在范围  $\mathcal{Y}$  上取值是一致的, 则称积分 (5) 对  $y$  在所说的范围上一致收敛.

这就是说, 给定任意  $\varepsilon > 0$ , 可以找出这样一个不依赖于  $y$  的数  $\delta > 0$ , 只要  $\eta < \delta$  时, 便能使不等式

$$\left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y)dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

对于所有的  $\mathcal{Y}$  上的  $y$  值同时成立.

对于这个情形不难做出关于一致收敛性的必要与充分的条件. 这儿也就引到收敛原理的一致成立: 即对于数  $\varepsilon > 0$ , 可以找出这样一个不依赖于  $y$  的数  $\delta > 0$ , 当  $0 < \eta' < \eta < \delta$  时, 无论  $y$  在范围  $\mathcal{Y}$  上为何值, 使下列不等式

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$



得以成立.

完全同样地可以把积分的一致收敛性的问题归结到无穷级数的一致收敛性的问题:

$$\int_a^b f(x, y) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (a_0 = a, a \leq a_n \leq b),$$

不管这个变量  $a_n$  怎样趋于  $b$  [参看 514].

最后在 515 目中的充分判别法可以转移到现在所考虑的情形, 让读者自己作出.

我们把从  $a$  到  $b$  的积分 (5) 看成了从  $a$  到  $b - \eta$  的积分 (6) 的极限, 并且我们关心后面的积分逼近于它的极限的特性. 这样, 这一点  $b$  (像在 513 目中的一点  $x = \infty$  一样) 在这儿起了特别的作用. 我们必须指出 (看情形而定, 这种情形以后再说明) 区间中其他的点也可能有相似的作用. 例如可以考虑这同一积分 (5) 看成当  $\eta \rightarrow 0$  时积分

$$\int_{a+\eta}^b f(x, y) dx$$

的极限. 倘使当  $\eta \rightarrow 0$  时上面的积分逼近于它的极限的过程中对  $y$  是一致的, 则同样地称积分 (5) 一致收敛. 以上所说的一切都可转移到现在这个情形.

关于说的是哪种一致收敛, 万一发生怀疑时, 则需个别说出积分一致收敛 (对于  $y$  在规定范围上) 是当  $x = +\infty$  或当  $x = b$  或当  $x = a$ , 等等.

须注意的, 就是凡是说积分 (5) 当  $x = b$  时一致收敛, 我们通常关心的只是当点  $x = b$  是积分 (5) 的奇点的情形 [在 479 目的意义下]——当  $y$  取某些或其他的值的时候.

然而当积分 (5) 对所有的  $y$  值为正常时, 这个定义非但在形式上保持有效, 而且还可能在这种情形中真是有用的.

例如, 积分

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

对于每一个在区间  $[0, d] (d > 0)$  的  $y$  值按常义是存在的. 然而在变量  $y$  的所说的区间内, 它的收敛当  $x = 0$  时并不是一致的. 事实上, 不等式

$$\int_0^\eta \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{y} < \varepsilon.$$

只要  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  时就不可能对于所有的  $y > 0$  值, 同时地适合; 因为取  $\eta$  无论怎样小, 不等式的左面当  $y \rightarrow 0$  时趋于  $\frac{\pi}{2}$ , 即对于充分小的  $y$  值, 将一定大于  $\varepsilon$ .

**517. 例题** 1) 直接证明以下积分

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$



对  $y$  的所有值是一致收敛.

我们有

$$\left| \int_A^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right| = \frac{A}{A^2 + y^2} \leq \frac{1}{A},$$

由此推得所要求的结果.

2) 借助于优函数证明以下积分

$$(a) \int_0^\infty e^{-tx^2} dx, \quad (b) \int_0^\infty e^{-tx} x^a \cos x dx \quad (a \geq 0)$$

对  $t$  在  $t \geq t_0 > 0$  时是一致收敛的.

提示 (a) 优函数  $e^{-t_0 x^2}$ , (b) 优函数  $e^{-t_0 x} x^a$ .

3) 直接证明以下积分

$$\int_1^\infty \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx$$

对一切自然数  $n$  不一致收敛.

这是这样推得的: 就是让  $A$  是无论怎样的一个常量,

$$\int_A^\infty \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = e^{-\frac{n}{2A^2}} \Big|_A^\infty = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}} \rightarrow 1 \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

4) 直接证明以下积分  $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$  对  $\alpha$  在范围  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$  内是一致收敛; 并且在范围  $\alpha \geq 0$  内是不一致的.

如果  $A_0$  是这样大, 当  $A > A_0$  时使

$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin x}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

这儿  $\varepsilon > 0$  是任意一个预先给定的数, 则

$$\int_A^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^\infty \frac{\sin z}{z} dz \quad (7)$$

其绝对值在  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$  时是小于  $\varepsilon$ , 只要  $A > \frac{A_0}{\alpha_0}$ , 这样证明了这断言的第一部分.

其第二部分可从以下事实推得, 就是表达式 (7) 在  $A =$  任意常量时趋于极限

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2},$$

当  $\alpha \rightarrow 0$ .

5) 证明以下积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos x dx$$

对  $a$  的一致收敛性, 当  $a$  在任意闭区间上, 不包含  $\pm 1$  点.

提示 变换积分到以下的形状

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} dx.$$



6) 研究关于以下积分

$$\int_0^{\infty} x \sin x^3 \sin tx \, dx$$

对  $t$  的一致收敛性的问题.

提示 借助于两次分部积分, 把  $\int_A^{\infty}$  化为以下的形状

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{3x} + \frac{t}{3} \cdot \frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{3x^3} \Big|_A^{\infty} \\ & -\frac{1}{3} \int_A^{\infty} \frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{x^2} dx + \frac{t}{3} \int_A^{\infty} \frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{x^4} dx + \frac{t^2}{9} \int_A^{\infty} \frac{\sin x^3 \cdot \sin tx}{x^3} dx; \end{aligned}$$

由此, 很明显地看出对  $t$  在任何有限的区间内的一致收敛性.

7) 证明以下积分

$$(a) \int_0^1 x^{p-1} dx, \quad (b) \int_0^1 x^{p-1} \ln^m x dx$$

( $m$  是自然数) 对  $p$  (当  $x=0$ ) 在  $p \geq p_0 > 0$  范围内一致收敛, 并且在  $p > 0$  范围内并不一致收敛.

优函数: (a)  $x^{p_0-1}$ , (b)  $x^{p_0-1} |\ln^m x|$  (对于  $p \geq p_0 > 0$  范围内). 另一方面, 不管怎样取  $\eta =$  常量

$$\int_0^{\eta} x^{p-1} dx = \frac{\eta^p}{p} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } p \rightarrow 0.$$

8) 类似地, 证明以下积分

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

对  $p$  (当  $x=0$ ) 在  $p \geq p_0 > 0$ , 和对  $q$  (当  $x=1$ ) 在  $q \geq q_0 > 0$  是一致收敛.

9) 证明以下积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y} dx$$

(当  $x=0$ ) 对  $y$  在  $y \leq y_0 < 2$  是一致收敛, 并且在  $y < 2$  并不一致收敛.

优函数  $\frac{1}{x^{y_0-1}}$  (在  $y \leq y_0 < 2$  的情形). 其次, 固定了任意的  $\eta > 0$ , 但让它如此小, 当  $x \leq \eta$  时使  $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{2}$ ; 则

$$\int_0^{\eta} \frac{\sin x}{x^y} dx > \frac{1}{2} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2-y} \eta^{2-y} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } y \rightarrow 2.$$

10) 证明以下积分

$$\int_0^1 (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$$

对  $n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 一致收敛 (在  $x=0$  时也在  $x=1$  时).

因为  $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} < \frac{1}{1-x}$ , 所以函数  $\frac{1}{1-x} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}$  可以作优函数, 它在区间  $[0, 1]$  内是可积的.



11) 直接证明以下积分

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

的收敛性 (在  $x = 0$ ) 对变量  $y$  在区间  $[0, 1]$  内并不是一致的.

对于任意一个  $\eta = \text{常量}$ , 我们有

$$\int_0^\eta \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=\eta} = \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} \rightarrow \frac{1}{\eta}, \text{ 倘使 } y \rightarrow 0.$$

12) 同样也对于以下积分

$$\int_0^1 \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

证明其收敛对变量  $y$  的不一致性, 这儿积分

$$\int_0^\eta = -\frac{4\eta^2y}{(\eta^2 + y^2)^2}$$

当  $y = \eta$  时变成  $-\frac{1}{\eta}$ .

13) 证明以下积分

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\cos x}{x^a} dx \quad (0 < a < 1)$$

对  $y$  在  $y \geq 0$  是一致收敛的 (在  $x = 0$  时, 也在  $x = \infty$  时).

对于  $x = 0$ , 由于优函数  $\frac{1}{x^a}$  的存在这是明显的; 而对于  $x = \infty$  则可从以下积分 [476]

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx$$

的收敛性, 连系到 515 目中最后的注意而推得

14) 设函数  $f(t)$  在  $t > 0$  时是连续的. 如果积分

$$\int_0^\infty t^\lambda f(t) dt$$

在  $\lambda = \alpha$  与  $\lambda = \beta (\alpha < \beta)$  时是收敛的, 则它在介于  $\alpha$  与  $\beta$  间所有的  $\lambda$  值时也是收敛的, 而且对  $\lambda$  (在  $t = 0$  时, 亦在  $t = \infty$  时) 一致收敛.

证明 积分  $\int_0^1 t^\alpha f(t) dt$  是收敛的, 而  $t^{\lambda-\alpha}$  对于  $\lambda \geq \alpha$  的值是  $t$  的单调函数, 并以 1 为界. 因此积分

$$\int_0^1 t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^{\lambda-\alpha} \cdot t^\alpha f(t) dt$$

对于所说及的  $\lambda$  值一致收敛 (当  $t = 0$ ). 类似的可以看出以下的积分

$$\int_1^\infty t^\lambda f(t) dt = \int_1^\infty t^{\lambda-\beta} \cdot t^\beta f(t) dt,$$

对于  $\lambda$  在  $\lambda \leq \beta$  时一致收敛 (当  $t = \infty$ ).

15) 证明以下积分

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^a} dx \quad (0 < a < 1)$$



对  $y$  在  $y \geq y_0 > 0$  是一致收敛的, 但在以下情形它的一致性破坏了, 如果变量  $y$  仅由不等式  $y > 0$  来限定.

关于所言的第一部分可以利用 515 目 3° 中 (参看 4°) 的法则, 因为对于任意的  $A \geq 0$  与  $y \geq y_0$

$$\left| \int_0^A \cos xy \, dx \right| = \left| \frac{\sin Ay}{y} \right| \leq \frac{1}{y_0},$$

并且函数  $\frac{1}{x^a}$  单调递减; 当  $x \rightarrow \infty$  它趋于零.

应该注意的, 也可直接考虑以下表达式

$$\int_A^\infty \frac{\cos xy}{x^a} dx = y^{a-1} \int_{Ay}^\infty \frac{\cos z}{z^a} dz.$$

断言的第二部分是可这样推得的, 就是这个表达式当  $A = \frac{1}{y}$  与  $y \rightarrow 0$  成为无穷的上增.

[容易看出当  $x = 0$  时, 积分对  $y$  在变量  $y$  的任意范围内是一致收敛的.]

16) 证明积分

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad (\alpha, \beta > 0)$$

对  $\beta$  在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  时是一致收敛的.

这可从 515 目 3° 推得. 事实上, 对于  $\beta \geq \beta_0$ ,

$$\left| \int_0^A \sin \beta x \, dx \right| = \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} \leq \frac{2}{\beta_0}.$$

另一方面表达式

$$\frac{x}{\alpha^2 + x^2},$$

并不包含  $\beta$ , 跟着  $x$  的增加而递减 (至少对于  $x \geq \alpha$ ), 并且当  $x \rightarrow +\infty$  时趋于 0.

### §3. 积分一致收敛性的应用

**518. 在积分号下的极限过程** 现在让我们主要的来研究关于无穷区间上的积分在积分号下取极限的问题. 第 506 目中的定理 1 不能推展到现在这个情形; 纵使在完全的无穷区间内, 当  $y \rightarrow y_0$  时函数  $f(x, y)$  一致趋向于极限函数  $\varphi(x)$ , 积分号下的极限过程仍是不容许的.

试举例来说, 考虑函数 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} & (x > 0), \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

用寻常微分法容易弄清这函数当  $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$  时达到最大值, 并且等于  $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-\frac{3}{2}}$ . 因为当  $n \rightarrow \infty$  时, 这个值趋于零, 因此很明显函数  $f_n(x)$  当  $n \rightarrow \infty$  时在完全区间



$[0, +\infty)$  内一致趋于  $\varphi(x) = 0$ , 然而积分

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 并不趋于零.

关于容许极限过程的充分条件给出以下的定理:

**定理 1** 设函数  $f(x, y)$  当  $y$  在  $\mathcal{Y}$  范围上时, 对于任一个  $A > a$  它都是在区间  $[a, A]$  上对  $x$  为可积的 (在通常意义下), 并且在每一个这样的区间上, 当  $y \rightarrow y_0$  时, 函数  $f(x, y)$  对  $x$  一致趋于极限函数  $\varphi(x)$ . 再若积分

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

对  $y$  (在  $\mathcal{Y}$  上) 一致收敛, 则有公式

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2)$$

像从前一样, 设

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx. \quad (3)$$

因为这个积分适合第 506 目中定理 1 的条件, 所以

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(A, y) = \int_a^A \varphi(x) dx. \quad (4)$$

另一方面显然

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A, y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad (5)$$

而且按照假定, 这儿函数  $F(A, y)$  的趋于它的极限对  $y$  是一致的. 在这个情形下, 我们有权利援引 505 目中关于极限过程互换的一般定理, 并且断定累次极限的存在和相等; 这样, 就直接引到了公式 (2).

由此运用广义迪尼定理 [504, 4°] 可以得到这样的

**推论<sup>①</sup>** 设非负的函数  $f(x, y)$  对  $x$  在区间  $[a, +\infty)$  内是连续的, 并且跟着  $y$  的增加而增加, 趋于极限函数  $\varphi(x)$ , 而  $\varphi(x)$  也在所说的区间内是连续的, 则从积分

$$\int_a^{\infty} \varphi(x) dx \quad (6)$$

<sup>①</sup>我们这里假定所有的  $y < y_0$ .



的存在, 可推得积分 (1) 的存在 (当所有的  $y$  在  $\mathcal{Y}$  上), 也可得出公式 (2) 的成立.

按所提及的定理, 在所提到的条件下, 函数  $f(x, y)$  的趋于  $\varphi(x)$  对  $x$  在任意的有限区间内将是一致的. 再由第 474 目的定理, 因为

$$f(x, y) \leq \varphi(x),$$

所以积分 (1) 存在, 函数  $\varphi(x)$  同时也起了优函数的作用 [515], 保证了积分 (1) 对  $y$  的一致收敛性. 这样对于要应用以上定理的所有的条件都遵守了.

读者容易证实关于极限函数的积分 (6) 的存在的假定可以在这儿被有限的极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx$$

的存在的假定来代替. 由此可以推得积分 (6) 的存在, 以及公式 (2) 的成立.

在同样一系列的想法中, 可以得到 510 目中对于有限区间的定理 1\* 的一些推广.

**定理 1'** 设函数  $f(x, y)$  ( $y$  在  $\mathcal{Y}$  上) 在区间  $[a, b - \eta]$  上是可积的 (在通常意义下), 对任意  $\eta > 0$  (但  $< b - a$ ), 并在每一个这样的区间上当  $y \rightarrow y_0$  时对  $x$  一致趋于极限函数  $\varphi(x)$ , 再若积分

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

(当  $x = b$ ) 对  $y$  在  $\mathcal{Y}$  上一致收敛, 则有公式

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

证明是与从前所叙述的没有什么不同的地方, 在这个情形下也容易把推论推广.

最后, 区间上任意其他的点也可能起  $b$  点所起的作用, 并且区间上这样相似的点可以有几个.

像以上一样, 在积分号下取极限过程常常是适合于函数序列  $\{f_n(x)\}$ . 从序列变为无穷级数, 这样可以得到关于函数级数逐项积分的新的定理.

例如, 试看推论可以取得出什么形状.

设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

的项是正的, 在  $x \geq a$  (或在  $a \leq x < b$ ) 中是连续的函数, 且对于这些  $x$  值这级数有一个连续的和函数  $\varphi(x)$ . 如果函数  $\varphi(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  (或  $[a, b]$ ) 上是可积的, 则在这个区间上这个级数可以逐项积分. 这里同以上一样, 代替级数和的可积性, 可以假定积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^\infty u_n(x) dx \left[ \text{或} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right]$$



的收敛性.

很显然这样的断言在以下的情形中仍是有效的, 就是当级数的所有项都是负的: 这里只需变号就可把它引到以上的结论.

519. 例题 1) 借助于级数的展开, 计算积分

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx.$$

解 a) 把被积函数展开为级数

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \cdots,$$

其中所有的项都是负的. 在  $x=1$  附近, 一致收敛性是破坏了. 对于级数的和, 这一点  $x=1$  是奇点, 然而在区间  $[0, 1]$  上, 这个和是可积的. 应用上目中最后的命题, 逐项积分, 得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

[440, (4)]

b) 用代换  $x=1-z$  可以把第二个积分引到第一式, 然而为了作练习计, 重新用  $\frac{1}{1-x}$  展开为级数来计算:

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x;$$

这儿所有的项都是负的. 这次在附近  $x=0$  及  $x=1$  两点, 一致收敛性是破坏了, 但是分别来取区间, 例如,  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  及  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 则以前所提到的命题还是可用的. 最后

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n \ln x dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2) a) 由

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n} dx, \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

计算级数的和

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

解 我们有

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2}) dx \\ &= \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} (1+x^2) = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

虽然这个级数和没有什么特别, 但是在附近  $x=1$  点时一致收敛性是破坏了, 然而因为对于级数的部分和有

$$0 \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} x^{4\nu} (1+x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1+x^4} (1+x^2) \leq 2 \frac{1+x^2}{1+x^4} \leq 4.$$



所以这个常量就起了优函数的作用. 并且这个和的积分是 (在  $x = 1$  时) 对  $n$  一致收敛的. 这些事实证明了可以引用逐项积分法 (定理 1').

(6) 同样地, 证明

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

3) 由以下公式

$$\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+n)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx,$$

计算级数的和:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots, \\ \text{(б)} \quad & \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots, \\ \text{(B)} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots. \end{aligned}$$

答案:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}, \\ \text{(б)} \quad & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2} dx = \frac{3}{4} - \ln 2, \\ \text{(B)} \quad & \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3} dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

4) 计算欧拉积分:

$$\text{(a)} \quad I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1), \quad \text{(б)} \quad K = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx \quad (a, b > 0)$$

解 a) 分开积分为两部分

$$I = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2,$$

把它们分别计算.

在  $0 < x < 1$  我们有级数的展开式

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{a+\nu-1},$$

它只在  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon' < 1$  内一致收敛. 但部分和有优函数

$$0 \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu x^{a+\nu-1} = \frac{x^{a-1}[1 - (-x)^n]}{1+x} < x^{a-1},$$

在  $[0, 1]$  中是可积的, 所以它的积分是一致收敛 (在  $x = 0$  亦在  $x = 1$ ), 按定理 1' 逐项积分得到

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^\nu x^{a+\nu-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a+\nu}.$$



由  $x = \frac{1}{z}$  的代换, 积分  $I_2$  化到以下的形状

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x} dx.$$

应用以上所得到的展开式, 求得

$$I_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{a-\nu}.$$

这样

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left( \frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu} \right).$$

我们知道这个表达式 [参看 441,9)] 是函数  $\frac{\pi}{\sin \pi a}$  展开的部分分式. 因此

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(6) 像以上一样分开积分为两部分, 并在第二部分用同样的代换, 我们得到

$$K = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{-b}}{1-x} dx = K_1 - K_2^{①}$$

很显然, 只需找出  $K_1$  就够了. 如像刚讲过的一样, 把被积函数展开为级数我们得到

$$K_1 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu} \right),$$

但 [441,9)] 我们知道这是函数  $\pi \operatorname{ctg} \pi a$  的部分分式展开式. 所以

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx = \pi (\operatorname{ctg} \pi a - \operatorname{ctg} \pi b).$$

5) 求以下积分的值 ( $|r| < 1$ )

$$(a) I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 - r \cos \beta x}{(1+x^2)(1-2r \cos \beta x + r^2)} dx,$$

$$(b) I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1-2r \cos \beta x + r^2)}{1+x^2} dx,$$

这儿在两个情形中都把积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-k} \quad (k > 0)$$

当作已知的 [参看 522,4°, 也参看 523,9)].

解 (a) 由展开式

$$\frac{1 - r \cos \beta x}{1 - 2r \cos \beta x + r^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} \cos \nu \beta x^{②};$$

①在  $x=1$  时两个积分都没有奇点, 奇点是在  $x=0$ ; 但积分存在.

②它从 440 目中 10) 及 11) 的展开式很容易得到.



乘上  $\frac{1}{1+x^2}$ , 再求逐项积分, 得

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu \beta x}{1+x^2} dx.$$

因为开始的级数 —— 乘上分式因子  $\frac{1}{1+x^2}$  —— 甚至于在整个无穷区间上对  $x$  是一致收敛的, 它的部分和有优函数的形状如  $\frac{c}{1+x^2}$ , 所以逐项积分法是可用的 (定理 1).

倘使现在利用所说的积分数值, 则最后得到

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^{\infty} r^{\nu} e^{-\nu \beta} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - r e^{-\beta}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - r}.$$

(6) 提示 从以下展开式 [461,6)(5)] 开始:

$$\ln(1 - 2r \cos \beta x + r^2) = -2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^{\nu}}{\nu} \cos \nu \beta x.$$

解答  $I_2 = \pi \ln(1 - r e^{-\beta})$ .

6) 展开积分 (拉普拉斯)

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx, \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{ch} 2bx \, dx, \quad (B) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2bx \, dx$$

成为  $b(b > 0)$  的幂级数. 这儿在所有的情形中把以下的积分视为已知的 [492,2°]:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(a) 解 利用余弦函数的已知展开式, 并由逐项积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (2bx)^{2\nu}}{(2\nu)!} dx \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (2b)^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2\nu} dx. \end{aligned}$$

以上级数在任意区间  $[0, A]$  上的一致收敛性是很显然的; 他的部分和有一优函数

$$e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2bx)^{\nu}}{(2\nu)!} = e^{-x^2} \operatorname{ch} 2bx$$

它在 0 到  $\infty$  是可积的. 这就证明了可以逐项积分.

剩下还须确定积分  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2\nu} dx = I_{\nu}$ . 由分部积分, 很容易推得以下的递推公式

$$I_{\nu} = \frac{2\nu-1}{2} I_{\nu-1}, \quad \text{由此} \quad I_{\nu} = \frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu+1}} \sqrt{\pi}.$$



将这个结果代入以前所获得的展开式中, 最后得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu (2b)^{2\nu}}{(2\nu)!} \cdot \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-b^2)^\nu}{\nu!} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \textcircled{1}.\end{aligned}$$

(6) 解答  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{b^2}$

(B) 相似的可得出展开式

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx = b \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{(2\nu-1)!!} (-2b^2)^{\nu-1},$$

但是这次它并不变成“有限型”的公式. 此后, 用另外的方法我们将阐明一个新的(非初等的)函数的性质, 这个函数对于我们的积分的表达式是必需的 [523, 5)(6)].

7) 求积分

$$I_k = \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x} - 1} dx$$

( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 之值.

解 展开

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}$$

为级数, 我们得到正项级数

$$\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{n=1}^\infty x^{2k-1} \cdot e^{-2n\pi x},$$

这个级数在任意区间  $[\eta, A]$  ( $0 < \eta < A < +\infty$ ) 上是一致收敛的. 因为级数的和在区间  $[0, \infty]$  内为可积的, 所以逐项积分是容许的<sup>②</sup>.

$$I_k = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{2k-1} e^{-2n\pi x} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k}} = \frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k}}.$$

回想到第  $k$  个伯努里数  $B_k$  有以下的表达式

$$B_k = \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k}},$$

[449]最后, 得出

$$I_k = \frac{B_k}{4k}.$$

<sup>①</sup> 我们利用以下很明显的变换:

$$(2\nu)! = (2\nu)!!(2\nu-1)!! = 2^\nu \nu! (2\nu-1)!!$$

<sup>②</sup> 我们在这儿 (也在以后的问题中) 由于分别取区间, 例如  $[1, +\infty]$  及  $[0, 1]$ , 直接利用了上目中的定理 1 与定理 1'.



8) 求以下积分 (勒让德) 的表达式

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} + 1} dx. \quad (m > 0)$$

解 (a) 展开式

$$\frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu\pi x} \sin mx$$

也在任意区间  $[\eta, A]$  上一致收敛, 它的部分和有优函数  $\frac{|\sin mx|}{e^{2\pi x} - 1}$ , 所以容许逐项积分.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} dx &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-2\nu\pi x} \sin mx dx \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + 4\nu^2\pi^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{1}{2m} \textcircled{1}. \end{aligned}$$

(b) 相似的得出 (利用同样的优函数)

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} + 1} dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{m}{m^2 + 4\nu^2\pi^2} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{m}{2}} - e^{-\frac{m}{2}}} \textcircled{1}.$$

附注 这是很自然的也可用  $\sin mx$  展开为级数的方法来寻求所论的积分的值. 例如, 在 (a) 的情形下, 我们得到一个积分, 曾在 7) 内考虑过的, 但是为了要求结果成为“有限形状”, 所以利用已知展开式:

$$\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k!} m^{2k-1}.$$

[449]等等. 但是这个方法有一个主要的缺点——它需要假定  $m < 2\pi$ , 可是结果却是对于任意一个  $m$  都是正确的.

9) 如果在以下初等公式中 [参看 492, 2°]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

设  $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$ , 则获得

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

函数  $\frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n}$ , 随  $n$  的增加而单调减少, 趋于极限  $e^{-z^2}$ . 应用第 518 目的推论 (它对于

单调递减函数是有效的) 这儿当  $n \rightarrow \infty$  在积分号下可以取其极限. 如果为了确定右部的极限, 利用沃利斯公式 [317] 则最后得到结果如下:

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

① 这些结果可以从函数  $\operatorname{cth} x$  与  $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$  [441, 10)] 的展开为部分分式得出.



[参看 492, 2°].

10) 已知费耶积分 [309, 5)(6)]

$$\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin nz}{\sin z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2}.$$

如果设  $z = \frac{x}{n}$ , 它可以写成以下的形状

$$\int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{\left( \frac{x}{n} \right)^2}{\left( \sin \frac{x}{n} \right)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 这儿极限的过程由于以下的情况稍有困难, 就是非但被积函数而且积分的上限都依赖于参数  $n$ .

但设

$$f_n(x) = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \left( \frac{\frac{x}{n}}{\sin \frac{x}{n}} \right)^2, \text{ 对于 } 0 \leq x \leq n \cdot \frac{\pi}{2}$$

并

$$f_n(x) = 0, \text{ 对于其他 } x \text{ 的值,}$$

则积分可以写成:

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

很明显, 对于任何  $x > 0$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2,$$

这儿在任意的有限的区间  $[0, A]$  上, 函数  $f_n(x)$  的趋于极限是一致的. 另一方面已知对于  $0 < z \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$$\frac{\sin z}{z} \geq \frac{2}{\pi},$$

所以对于  $0 < x \leq n \cdot \frac{\pi}{2}$ ,

$$f_n(x) \leq \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4};$$

这个不等式在  $x > n \cdot \frac{\pi}{2}$  时更加成立. 因为这时  $f_n(x) = 0$ .

应用 518 目中的定理 1, 在等式 (7) 内当  $n \rightarrow \infty$  可以在积分号下取极限, 我们得到以下的结果

$$\int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

[参看 494, 4); 497, 15)].

11) 同样的其他例子, 已知 [参看 440, 10)] 积分

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \pi \frac{r^m}{1 - r^2},$$



此处  $m$  是自然数;  $|r| < 1$ , 设  $x = \frac{z}{m}$ , 且  $r = 1 - \frac{h}{m}$  (这儿  $h > 0$ ); 假定  $m > h$  则得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{m\pi} \frac{\cos z dz}{h^2 + 2m^2 \left(1 - \cos \frac{z}{m}\right) \left(1 - \frac{h}{m}\right)} \\ &= \int_0^{m\pi} \frac{\cos z dz}{h^2 + z^2 \left(\frac{\sin \frac{z}{2m}}{\frac{z}{2m}}\right)^2 \left(1 - \frac{h}{m}\right)} = \frac{\pi}{2} \frac{\left(1 - \frac{h}{m}\right)^m}{2 - \frac{h}{m}} \end{aligned}$$

若取“积分号下”当  $m \rightarrow \infty$  时的极限, 而不管积分上限跟着  $m$  无限地增加这一事实, 我们就得到:

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{h^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2h} e^{-h}.$$

但这样做对不对呢? 需设法来证实其适合极限过程的根据.

这儿引进函数

$$f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2 + z^2 \left(\frac{\sin \frac{z}{2m}}{\frac{z}{2m}}\right)^2 \left(1 - \frac{h}{m}\right)}, \quad \text{当 } 0 \leq z \leq m\pi, \quad f_m(z) = 0, \quad \text{当 } z > m\pi.$$

于是我们所讨论的等式的左部可以写成

$$\int_0^\infty f_m(z) dz.$$

很显然

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2 + z^2},$$

这里在有限的区间内这个趋向是一致的. 最后, 如果  $m_0 > h$ , 并只考虑  $m \geq m_0$  的值, 则下列函数

$$\frac{1}{h^2 + \frac{4}{\pi^2} z^2 \left(1 - \frac{h}{m_0}\right)}$$

可用为优函数, 剩下只需引证 518 目中定理 1 的叙述.

12) 在例 10) 与 11) 中强调了给出取极限根据的必要性, 下述与此类似的例子也强调了这点, 在这个例子中不能给出这样的根据; 无法支持取极限的根据的结果是靠不住的.

考虑积分

$$I_n = \int_0^n \frac{n}{n^2 + x^2} dx;$$

若由此着手, 如前述各例那样令  $n \rightarrow \infty$  则得

$$\lim I_n = \int_0^\infty 0 \cdot dx = 0.$$

实际上 (借助于变量变换容易证实) 积分为常值  $\frac{\pi}{4}$ !

以下再引进两个并不是陈旧的例子, 并且在其他方面像我们所看到的, 它们还是有趣味的.



13) 试由已知积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

[参看 492, 3°; 494, 5)] 计算以下积分 (这儿  $a$  是任意的数)

$$I = \int_0^{\infty} e^{a \cos x} \sin(a \sin x) \frac{dx}{x},$$

[参看 478, 8)(a)].

很方便的引进复变数

$$z = a(\cos x + i \sin x);$$

则 [457(6)]

$$e^z = e^{a \cos x} [\cos(a \sin x) + i \sin(a \sin x)]$$

展开级数得

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (\cos nx + i \sin nx)}{n!}.$$

使虚数部分相等, 我们得出积分号下的第一个因子的展开式:

$$e^{a \cos x} \sin(a \sin x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sin nx,$$

由此得出

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} dx.$$

如果这儿可以运用逐项积分, 我们立刻得到

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\pi}{2} (e^a - 1).$$

但在给定条件下要证实这是可以的, 那就需要特别考虑.

因为在积分号下的级数是以常数项级数

$$a \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{\nu!}$$

为它的优函数, 所以在有限的区间  $[0, A]$  上可以逐项积分

$$\int_0^A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^A \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{nA} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (8)$$

还需在  $A \rightarrow \infty$  时取极限. 但不难看出, 由于积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  的存在, 积分  $\int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t} dt$  在所有的值  $t_0 \geq 0$  是一致有界的:

$$\left| \int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq L.$$

所以级数 (8) 它的各项依赖于变量  $A$ , 是以常数级数

$$L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$$



为它的优函数, 因此对于  $A$  是一致收敛的. 在这情形下, 按已知定理 [433] 可以在  $A \rightarrow \infty$  时取其极限, 这样得以完成证.

14) 同类的其他的例子. 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

是收敛的, 且对于  $x \geq 0$ , 令

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!};$$

这个级数也是收敛的, 而且在有限的区间  $[0, A]$  上对于  $x$  是一致收敛的 [按照阿贝尔-狄利克雷判别法, 参看 430], 因为这个因子  $\frac{x^n}{n!}$  至少对于  $n > A$  时跟着  $n$  的增加而减少.

然后证明

$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x) dx = s. \quad (9)$$

如果逐项积分, 我们立刻得出这个结果

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

因为  $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n dx = n!$  [489, 4)], 现在回来证实这是对的.

只在有限的区间上, 逐项积分是容许的:

$$\int_0^A e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} x^n \cdot dx. \quad (10)$$

用分部积分, 容易证明

$$\frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} \cdot x^n dx < \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A e^{-x} \cdot x^{n-1} dx < 1,$$

所以这个因子

$$\frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} \cdot x^n dx,$$

依赖于  $A$  及  $n$ , 是随着  $n$  的增加 (在  $A = \text{常量}$ ) 而单调的减少; 以致保持了一致的有界. 在这样条件下 (只按刚提出的判别法) 在 (10) 式右边的级数对于  $A$  一致收敛的, 也就是在  $A \rightarrow \infty$  时可以逐项取其极限等等.

以下我们证明两个应用的例子, 他们是从漂亮的公式 (9) 得来的.

(a) 考虑所谓积分正弦

$$-\text{si } x = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3!3} - \frac{x^5}{5!5} + \dots, \quad \textcircled{1}$$

<sup>①</sup> 以上的展开式是容易导出的, 只需写

$$-\text{si } x = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

而且在第二个积分内把正弦用它的级数展开式去代替, 然后再逐项积分.



这级数是从级数

$$\frac{\pi}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \cdots$$

按照  $g(x)$  的方式组成的.

照公式 (9) 即得

$$-\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(6) 另外一个有趣的函数 —— 零附标的贝塞尔函数  $J_0(x)$  有它的展开式 [441, 4), 5)]:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2 \cdot 2^{2\nu}},$$

它的组成是按照  $g(x)$  型的, 如果令

$$a_0 = 1, \quad a_{2\nu} = (-1)^{\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu}!!}, \quad a_{2\nu-1} = 0.$$

然后由 (9)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot J_0(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu}!!} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

最后的结果是这样得到的, 就是借助于函数  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  展开为二项式级数 [407, (24)], 且令  $x = 1$ .

附注 我们来弄清楚末后这两个例子里所应用的推论方法的特殊性是有益处的 —— 同其他的关于在无穷区间内级数的逐项积分的例子相比较.

如果回到关于无穷限的积分号下 [518] 极限过程的一般问题, 则它就相等于对某二元函数  $F(A, y)$  的两个累次极限的存在与相等问题 [参看 (3)]. 按照 505 目中的一般定理, 在这情形下其充分条件是 —— 在两个简单极限存在时 —— 函数的一致趋向于 (4) 式或 (5) 式中的一个, 而其趋向于那一个反正是一样的. 寻常我们假设这样的一致性是对极限 (5) 而说的, 这个就对应着无穷限 “积分的一致收敛性”. 但是如果替代以函数  $F$  的一致近似于极限 (4), 这样的结论也是完全有效的!

在级数  $\sum_1^{\infty} u_n(x)$  具有部分和  $f_n(x)$  的情形下, 或者可以证明函数

$$F_n(A) = \int_a^A f_n(x) dx$$

(对  $n$ ) 当  $A \rightarrow \infty$  时一致近似于极限  $\int_a^{\infty} f_n(x) dx$ , 也就是这个积分的一致收敛性, 那是我们常常这样做的; 或者也可以证实所说的函数 (对  $A$ ) 当  $n \rightarrow \infty$  时一致近似于极限  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ , 也就是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^A u_n(x) dx = \int_0^A \varphi(x) dx,$$

(对  $A$ ) 的一致收敛性, 那对我们于在 13) 和 14) 两例内更为方便.



**520. 含参数的积分的连续性与可微性** 让我们首先把 506 目定理 2 与 507 目中的定理 3 转移到在无穷区间的情形.

**定理 2** 设函数  $f(x, y)$  定义于  $x$  的值在  $x \geq a$ ,  $y$  的值在区间  $[c, d]$  上, 并在此定义范围里 (作为一个二元函数) 是连续的. 若积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (1)$$

对  $y$  在区间  $[a, b]$  上是一致收敛, 则它在这区间上表示着一个参数  $y$  的连续函数.

这是定理 1 的推论. 事实上像我们在 506 目中所看到的, 当变量  $x$  在任意有限区间  $[a, A]$  上, 则函数  $f(x, y)$  当  $y \rightarrow y_0$  时 (此处  $y_0$  是  $y$  的任意一个特殊值) 对  $x$  一致趋于极限函数  $f(x, y_0)$ , 于是按照定理 1, 在积分 (1) 内可以在积分号下取极限:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty f(x, y_0) dx = I(y_0),$$

这就证明了我们的断言.

在 485 目我们叙述把“广义值”赋予发散积分的两个方法时, 留下了这样一个问题: 即第二个方法的正则性. 借助于刚才证明的定理, 现在我们有能力来解决这个问题, 若积分  $\int_0^\infty f(x) dx$  收敛, 则积分  $\int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx$  对于参数  $k \geq 0$  是一致收敛的 [参看 515 目末尾的附注], 因此 —— 至少在  $f(x)$  连续的情形下 —— 积分对  $k \geq 0$  是参数  $k$  的连续函数. 特别地, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

于是收敛积分的值与其“广义值”重合, 这就是所提到的正则性.

**附注** 如果函数  $f(x, y)$  是非负的, 即在  $f(x, y) \geq 0$  的情形下, 则我们得出一个在某种意义上的逆定理: 把积分 (1) 作为参数的函数, 可以从它的连续性推出它的收敛性是一致的.

在这情形下, 当  $A$  增加时,  $y$  的连续函数

$$F(A, y) = \int_0^A f(x, y) dx \quad (3)$$

也在增加, 所以 (按照 504, 4° 中迪尼推广定理) 它对  $y$  一致趋向于极限 (1). 定理得以证明.

**定理 3** 设函数  $f(x, y)$  定义于  $x$  的值在  $x \geq a$ ;  $y$  的值在区间  $[c, d]$  上, 并在此定义范围里是连续的; 而且设导数函数  $f'_y(x, y)$  对于两个变数在所说的范围内是连续的, 再假定积分 (1) 对于  $[c, d]$  上所有的  $y$  值存在, 并且积分

$$\int_a^\infty f'_y(x, y) dx \quad (11)$$



非但存在, 而且对于  $y$  在这个区间上是一致收敛, 则对于  $[c, d]$  中的任意一个  $y$  得出公式<sup>①</sup>

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y) dx.$$

取一个特殊值  $y = y_0$ , 考虑比数

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^\infty \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx \quad (12)$$

我们要证明对于参数  $k \rightarrow 0$  的极限过程在这儿可容许在积分号下进行.

在 507 目中我们已经看到, 如果  $x$  在任意的有限的区间  $[a, A]$  上变化, 则被积函数  $\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$  在  $k \rightarrow 0$  时对于  $x$  一致趋向于极限函数  $f'_y(x, y_0)$ . 为了要能够应用定理 1, 我们必须说明积分 (12) 对  $k$  是一致收敛.

由于积分 (11) 一致收敛的假定, 对于任何  $\varepsilon > 0$  可找出这样一个  $A_0 \geq a$ , 只要  $A' > A > A_0$ , 可使

$$\left| \int_A^{A'} f'_y(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (13)$$

对于所有的  $y$  值都适合 [514]. 我们要证明, 同时可使

$$\left| \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} \cdot dx \right| < \varepsilon \quad (14)$$

对于所有可能的  $k$  值都适合.

为了这个目的 (固定  $A$  及  $A'$ ) 我们考虑函数

$$\Phi(y) = \int_A^{A'} f(x, y) dx.$$

按 507 目定理 3, 它的导数可照莱布尼茨法则来计算

$$\Phi'(y) = \int_A^{A'} f'_y(x, y) dx,$$

且由 (13)  $\Phi'(y)$  的绝对值永小于  $\varepsilon$ . 但下列比值

$$\frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} = \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx,$$

照拉格朗日公式等于  $\Phi'(y_0 + \theta k)$ , 其绝对值也小于  $\varepsilon$ , 就是说式 (14) 是适合的. 因此, 根据 514 目中的法则, 可以推出积分 (12) 是一致收敛性, 定理得证.

容易得出关于有限区间  $[a, b]$  的定理 2\* 与 3\* [510] 的推广, 那只需用点  $x = b$  代换点  $x = \infty$  来叙述在这里的公式和考虑.(这种做法好像从定理 1 推到定理 1' 的过程.)

<sup>①</sup>此处按这个公式计算导数, 称为莱布尼茨法则.



**附注** 在陈述这里的理论时我们没有利用积分和级数的联系, 而宁可每处陈述一个观念, 这个观念——一致趋于极限函数的观念, 事实上是一切结论的根据. 然而在另外情形中根据已经发展的级数理论能够在论据上创立出形式上的简化. 今试给出定理 3 的新的证明来作解释 (这里以上所提到的简化是相当多的).

用以下级数 [477]

$$I(y) = \sum_1^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \quad (A_n \rightarrow \infty)$$

来替换积分  $I(y)$ . 这级数中的每项

$$u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx,$$

由于 506 及 507 目的定理 2 及 3, 是连续的而且有连续的导数

$$u'_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f'_y(x, y) dx.$$

由这些导数所组成的级数对  $y$  在区间  $[c, d]$  上是一致收敛的. 这可从积分 (11)[514] 的一致收敛性推得. 因此根据级数的逐项微分法定理 [435] 以下的导数  $I'(y)$  存在,

$$I'(y) = \sum_1^{\infty} u'_n(y) = \sum_1^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f'_y(x, y) dx = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx,$$

这就是所要求证的.

用同样的方法并联系到函数级数理论中相应的定理, 我们可得出定理 1[518] 及 2[520] 的证明 (并同样得出下一目的定理 4 的证明). 至于怎样实现这些证明, 让读者自己作出.

### 521. 含参数的积分的积分法 首先证明以下定理:

**定理 4** 照定理 2 中的假定, 我们有以下积分公式

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (15)$$

事实上, 按 508 目定理 4 对于任意有限的  $A \geq a$ , 以下等式

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy$$

是正确的. 根据假定, 函数 (3) 对  $y$  是连续的, 并当  $A \rightarrow \infty$  时它对  $y$  一致趋向于极限 (1). 因此, 根据 506 目定理 1, 左面的积分可以与极限过程  $A \rightarrow \infty$ , 在积分号下互换, 这就是

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx.$$



而在这种情形下右面的积分当  $A \rightarrow \infty$  时其极限存在, 这也就是说它与积分

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy$$

有同一数值. 这正是所要求证的.

如果利用关于定理 2[520] 中的附注, 则不难由此推出以下的

**推论** 在非负函数  $f(x, y)$  情形下, 一个对  $y$  连续的积分, (1) 蕴含着公式 (15).

这样 —— 在已知的条件下 —— 我们建立了两个积分互换的法则, 其中只有一个积分推广到无穷区间, 另一个仍是有限的.

在许多情形下需要按照公式

$$\int_0^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy \quad (16)$$

作两次无穷限积分的互换. 要证实这样的互换常常是复杂而费力的事情. 读者在以下可遇到许多这样的例题.

只就狭窄的一类情形, 按一般考虑来推证公式 (16):

**定理 5** 若函数  $f(x, y)$  定义在  $x \geq a$  及  $y \geq c$  上并且在那里是连续的. 再假设积分

$$\int_a^\infty f(x, y) dx \quad \text{及} \quad \int_c^\infty f(x, y) dy \quad (17)$$

在任意有限区间上一致收敛 —— 第一个积分对于  $y$ , 而第二个积分对于  $x$ . 于是如果在两个二重积分

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)| dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)| dy \quad (18)$$

中至少有一个积分存在, 则 (16) 中的二重积分都存在而且相等.

假设积分 (18) 中的第二个存在. 由于积分  $\int_a^\infty f dx$  的一致收敛性, 根据以上定理, 对于任何有限的  $C > c$ , 我们有

$$\int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy.$$

还需证明右面的积分当  $C \rightarrow \infty$  时容许在积分号下取极限, 因而将有

$$\begin{aligned} \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx &= \lim_{C \rightarrow \infty} \int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y) dx \\ &= \lim_{C \rightarrow \infty} \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy = \int_a^\infty dx \lim_{C \rightarrow \infty} \int_c^C f(x, y) dy \\ &= \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy. \end{aligned}$$



要证实以上所说的极限过程, 需根据 518 目中的定理 1.  $x$  与  $C$  的函数

$$\int_c^C f(x, y) dy,$$

对于  $x$  是连续的 [506 目, 定理 2], 当  $C \rightarrow \infty$  时它对于  $x$  在任何有限区间上一致趋于极限函数

$$\int_c^\infty f(x, y) dy.$$

这函数的积分

$$\int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy$$

对于  $C$  是一致收敛, 因为由于

$$\left| \int_c^C f(x, y) dy \right| \leq \int_c^\infty |f(x, y)| dy,$$

它以积分 (18) 中的第二式为一个优积分. 这样定理 1 的所有的条件在这儿都满足, 所以我们的断言也证实了.

在函数不变号的情形下, 事情比较简单, 例如. 对于非负函数 (限于这种情形就够了) 我们有

**推论** 设对于非负连续函数  $f(x, y)$ , 式 (17) 中的两个积分是连续函数, —— 第一个积分是  $y$  的连续函数, 第二个积分是  $x$  的连续函数 —— 那么只要式 (16) 中的二重积分中有一个存在, 则其他一个也存在, 而且与第一个相等.

按照定理 2 及其附注, 很显然关于式 (17) 中积分的连续性的假定相当于要求它们的一致收敛性. 剩下的只需应用以上的应理, 并注意给定的条件  $|f(x, y)| = f(x, y)$ .

本节的命题也可在有限区间的情形下逐句地描述: 这儿只需把有限的奇点  $x = b$  替换奇点  $x = \infty$ ; (如果必须的话) 并以奇点  $y = d$  代换奇点  $y = \infty$ .

**522. 对于一些积分计算的应用** 我们应用以上所陈述的理论来计算一些重要的积分.

1° 欧拉积分

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1}.$$

$$(0 < a < 1)$$

$$(0 < a, b < 1)$$

$$(0 < a < 1, -\pi < \theta < \pi)$$

由 496 目, 1) 的结果, 立刻得出

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad (m < n).$$



若令  $z = x^{\frac{1}{2n}}$ , 我们可求得当  $a = \frac{2m+1}{2n}$  时的欧拉积分中的第一个:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}. \quad (19)$$

要由此对于任意满足不等式  $0 < a < 1$  的  $a$  值, 得出所要求的积分值, 须要验证这积分对于给定的参数值是  $a$  的连续函数.

当  $0 < x < +\infty$  及  $0 < a < 1$  时, 被积函数对于这两个变量保持其连续性, 并且当  $x = 0$  时所考虑的积分对  $a \geq a_0 > 0$  一致收敛, 并当  $x = \infty$  时对  $a < a_1 < 1$  也是一致收敛. 实际上分开积分  $\int_0^\infty$  为两部:  $\int_0^1 + \int_1^\infty$ , 不难看出积分

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x} dx \quad \text{及} \quad \int_1^\infty \frac{x^{a_1-1}}{1+x} dx$$

分别是优积分.

应用定理 2 于积分  $\int_1^\infty$ , 也应用对于有限区间的相似定理于积分  $\int_0^1$ , 即可看出这两个积分在看作参数的函数时是连续的.

对于任意值  $a, 0 < a < 1$ , 可以借助于  $\frac{2m+1}{2n}$  ( $m$  及  $n$  为自然数,  $m < n$ ) 形式的值来任意接近它. 当  $\frac{2m+1}{2n} \rightarrow a$ , 在式 (19) 取极限过程, 并利用已证得的积分的连续性, 最后我们求得

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad [\text{参看 519, 4)].}$$

完全相似地从 496 目 2) 及 3) 得出

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx = \pi(\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi)$$

及

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{x^2 + 2x \cdot \cos \theta + 1} = \pi \frac{\sin(1-a)\theta}{\sin \theta \cdot \sin \alpha\pi}.$$

2° 积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

[参看 492, 3°].

考虑积分

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a > 0).$$

借助于对参数  $a$  的导数来计算积分的值. 然而若直接应用莱布尼茨法则, 这里就引到一个发散的积分

$$\int_0^\infty \cos ax \, dx.$$



因此我们引入一个“收敛因子”  $e^{-kx} (k > 0)$ , 然后开始求下列积分

$$I = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a \geq 0)$$

的值.

对于  $I$  在积分号下对  $a$  取导数是容许的, 因为定理 3 的条件是满足的: 被积函数及其对  $a$  的偏导数在  $x \geq 0$  及  $a \geq 0$  连续, 且由导数结果而得出的积分

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos ax dx = \frac{k}{a^2 + k^2},$$

对  $a$  一致收敛, 因为优积分  $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$  并不包含  $a$ .

所以对于  $a \geq 0$

$$\frac{dI}{da} = \frac{k}{a^2 + k^2}.$$

再对  $a$  求积分, 得到

$$I = \operatorname{arctg} \frac{a}{k}.$$

(这里引进积分的常数项是不必要的, 因为这个表达式的左右两面, 当  $a = 0$  时, 都变为零.)

这个公式是在假定  $k > 0$  之下导得的. 但当  $a =$  常量时积分  $I$  是  $k$  的函数, 且在  $k = 0$  连续; 这是根据定理 2 从积分对  $k$  当  $k \geq 0$  时的一致收敛性推得的 [参看 515, 4°]. 换句话说:

$$I_0 = \lim_{k \rightarrow +0} I.$$

若  $a > 0$  则

$$I_0 = \lim_{k \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{a}{k} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

特别是 (当  $a = 1$ )

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3° 欧拉-泊松积分

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

[参看 492, 2°].

令  $x = ut$ , 其中  $u$  为任意正数, 我们得出

$$J = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

现在用  $e^{-u^2} du$  乘等式的左右两面, 再对  $u$  从 0 到  $\infty$ , 作积分:

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$



不难看出, 积分的互换在这里很快的就可以引出所要求的结果, 事实上在互换以后, 得到

$$J^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

由此 (显然因为  $J > 0$ )

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

为了说明所实行的交换积分次序是合理的, 我们试着使用 521 目定理 5 的推论. 然而积分

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

对所有  $t \geq 0$  是  $t$  的连续函数, 而积分

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u dt = e^{-u^2} \cdot J$$

仅对  $u > 0$  连续, 而当  $u = 0$  变为 0, 在这一点产生间断. 所以直接对矩形  $[0, \infty; 0, \infty]$  应用上述推论是不行的! 我们对矩形  $[u_0, \infty; 0, \infty]$  可应用推论, 其中  $u_0 > 0$ , 因为积分

$$\int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot e^{-(1+t^2)u_0}$$

对所有  $t \geq 0$  乃是  $t$  的连续函数, 由此证明了等式

$$\int_{u_0}^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u dt = \int_0^\infty dt \int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u dt$$

是合理的, 余下的仅仅是: 使  $u_0$  减小, 当  $u_0 \rightarrow 0$  时取极限, 根据 518 目的推论, 在等式右边可在积分号下实行.

4° 拉普拉斯(Laplace) 积分:

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad z = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$$

在其中第一个积分, 令

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt.$$

我们得到

$$y = \int_0^\infty \cos \beta x dx \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt.$$

这里根据定理 5 把对  $x$  的积分和对  $t$  的积分互换

$$y = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t} dt \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x dx.$$



但内层积分是已知的 [519,6)(a)]

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

所以

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2 - \frac{\beta^2}{4z^2}} dz \quad (t = z^2).$$

回忆 497 目,8), 最后求出

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta},$$

拉普拉斯第二个积分可从第一个对参数  $\beta$  导数得到

$$z = -\frac{dy}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

莱布尼茨法则的应用是合理的, 因为积分对于  $\beta$  在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  时是一致收敛的 [517,16)].

5° 菲涅尔(Fresnel) 积分:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx, \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx.$$

令  $x^2 = t$ , 我们得到

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt;$$

先求在改变形式的两个积分中的第一个积分.

用下列等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tu^2} du$$

的右方来替换 (在积分号下) 表达式  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ , 将所求的积分化成下列形状:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t \, dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du.$$

积分的互换在这里可立刻化成最后的结果:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-tu^2} \sin t \, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \textcircled{1}. \end{aligned}$$

因为这样互换的合理性的直接证实需要艰难的变换和估计, 我们宁可在这里 (参看 2°) 引用“收敛因子”  $e^{-kt} (k > 0)$ .

①参看 472,2) 或 491,7).



我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} \sin t dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.\end{aligned}$$

这里可借助于定理 5 建立积分互换的可能性. 最后, 当  $k \rightarrow 0$  时还需取极限的过程, 这个极限——不难证明——可以在积分号下进行.

因此, 最后

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

对于积分  $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$  我们得出同一数值. 由此

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### 523. 在积分号下取导数的例题

1) 从已知的积分 (当  $a > 0$ )

$$(a) \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad (B) \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}.$$

累次对参数微分以推得新的积分.

(a) 解 按照莱布尼茨法则, 经  $n$  次微分后, 我们得出

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

因为在这里所得到的积分都是对  $a$  当  $a \geq a_0 > 0$  时一致收敛 (例如, 所写出的积分的优积分是  $\int_0^\infty e^{-a_0 x^2} x^{2n} dx$ ) 所以莱布尼茨法则的引用是合理的.

(b) 解答

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

(B) 解答

$$\int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

2) 用对参数的微分法计算下列积分 ( $\alpha, \beta, k > 0$ ):

$$(a) J = \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx.$$

$$(b) H = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} e^{-kx} dx.$$

(a) 解  $J$  对  $\alpha$  的导数可用以下积分来表达, 这个积分对  $\alpha$  是一致收敛的:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2},$$



由此

$$J = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + k^2) + C.$$

因为当  $\alpha = 0$  时积分  $J$  变为 0, 所以  $C = -\frac{1}{2} \ln k^2$ , 故最后

$$J = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\alpha^2}{k^2} \right).$$

(5) 用  $H$  对  $\alpha$  在积分号下求微分, 我们得出

$$\frac{dH}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \beta x \cos \alpha x}{x} dx.$$

莱布尼茨法则的应用是合理的, 因为在这里不难说明定理 3 的条件成立.

把正弦与余弦的乘积化成两个正弦的差, 即可将所得到的积分化为已知积分的形状 [522, 2°];

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\alpha} &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx - \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{k} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{k} \right). \end{aligned}$$

对  $\alpha$  求积分:

$$H = \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{k} - \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{k} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha - \beta)^2}{k^2 + (\alpha + \beta)^2} + C,$$

其中常数  $C = 0$  (因为当  $\alpha = 0$  时,  $H = 0$ ).

3) 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t dt$$

提示 考虑更普遍的带有参数的积分

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} \cos t dt,$$

借助于微分法计算以上积分, 然后令  $\alpha = 1$ .

答  $\ln \sqrt{2}$ .

4) 计算积分

$$(a) J_1 = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{b^2 + x^2} dx \quad (a, b > 0);$$

$$(b) J_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} r x}{x(1 + x^2)} dx \quad (r \geq 0);$$

$$(B) J_3 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} a x \cdot \operatorname{arctg} b x}{x^2} dx \quad (a, b > 0).$$

(a) 提示 当  $a \geq 0$ ,  $J_1$  对  $a$  是连续的; 对于  $0 \leq a \leq a_1$ ,  $\frac{\ln(1 + a_1^2 x^2)}{b^2 + x^2}$  是优函数. 对于  $a > 0$  取导数

$$\frac{dJ_1}{da} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2 + x^2)(1 + a^2 x^2)} dx = \frac{\pi}{ab + 1};$$



对于  $0 < a_0 \leq a \leq a_1$ ,  $\frac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2x^2)}$  是优函数.

答  $J_1 = \frac{\pi}{b} \ln(ab+1)$ .

(6) 提示 当  $r \geq 0$ , 取导数

$$\frac{dJ_2}{dr} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+r};$$

$\frac{1}{1+x^2}$  是优函数. 答  $J_2 = \frac{\pi}{2} \ln(1+r)$ .

(B) 提示 对  $a$  取导数引到积分  $J_2$  的形状:

$$\frac{dJ_3}{da} = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}t}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a+b}{a} \quad (a > 0).$$

答  $J_3 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a \cdot b^b}$ .

附注 当  $r=1$ , 并变换  $x = \operatorname{tg} t$ , 从  $J_2$  得出以下积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\operatorname{tg} t} dt = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

由此用分部积分法, 重新求得 [参看 492, 1°]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

5) (a) 计算积分

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx.$$

解 我们有

$$\frac{dJ}{db} = - \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot 2x \cdot \sin 2bxdx.$$

用分部积分法, 然后得到

$$\frac{dJ}{db} = -2b \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bxdx = -2bJ.$$

这样对于  $J$  的确定, 我们得到了一个可分离变量的简单的微分方程 [358]. 求积分, 得出

$$J = Ce^{-b^2}$$

因为当  $b=0$  时, 我们应有  $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 所以  $C$  就等于这个数值. 最后

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

[参看 519, 6)(a)].

(6) 如果用同一方法计算积分  $H = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx$ , 则我们得到下列的微分方程

$$\frac{dH}{db} + 2bH = 1.$$



两面乘以  $e^{b^2}$ , 在左方显然得到乘积  $e^{b^2} \cdot H$  对  $b$  的导数, 从 0 到  $b$  求积分, 得出

$$e^{b^2} \cdot H = \int_0^b e^{b^2} db$$

(因为当  $b=0, H=0$ ). 这样,

$$H = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt.$$

这里为要表达这个积分, 就必须引进一个新的“非初等”函数:

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

[参看 519,6)(B)]

6) 计算积分 ( $a, b > 0$ )

$$\int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx.$$

解 所要求的积分与下列积分

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy,$$

只差一个因子  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ , 其中  $c^2 = ab$ (用代换  $y = \sqrt{ax}$ ).

我们有

$$\frac{dJ}{dc} = -2c \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} = -2 \int_0^\infty e^{-z^2 - \frac{c^2}{z^2}} dz = -2J$$

(用代换  $y = \frac{c}{z}$ ). 由此

$$J = Ae^{-2c}, \quad A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

答  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$  [参看 497,8)].

7) 计算积分

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-a_1 t} \cos b_1 t}{t} dt \quad (a, a_1 > 0).$$

解 分别对  $a$  及对  $b$  取导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= - \int_0^\infty e^{-at} \cos bt dt = - \frac{a}{a^2 + b^2}, \\ \frac{\partial J}{\partial b} &= - \int_0^\infty e^{-at} \sin bt dt = - \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

根据这两偏导数不难还原到原来的函数<sup>①</sup>

$$J = -\frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + C,$$

其中  $C$  与  $a$  及  $b$  无关. 因为当  $a = a_1$  及  $b = b_1$  时  $J = 0$ , 所以

$$C = \frac{1}{2} \ln(a_1^2 + b_1^2),$$

<sup>①</sup>以后我们将系统地来讲解这个问题, 这里只从观察来建立这个“原函数”.



于是

$$J = \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}.$$

8) 计算积分 ( $a > 0, b \geq 0$ ):

$$u = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2 dx, \quad v = \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx.$$

解 利用莱布尼茨法则我们得到这两积分对参数  $b$  的导数:

$$\frac{du}{db} = - \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \sin bx^2 dx, \quad \frac{dv}{db} = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos bx^2 dx.$$

由此分部积分容易得出

$$\frac{du}{db} = -\frac{1}{2a}v - \frac{b}{a}\frac{dv}{db}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{1}{2a}u + \frac{b}{a}\frac{du}{db}.$$

或 —— 对导数解这方程组 ——

$$\frac{du}{db} = -\frac{bu + av}{2(a^2 + b^2)}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{au - bv}{2(a^2 + b^2)}. \quad (20)$$

这样对于未知的  $b$  的函数  $u, v$  的定义, 我们得出了微分方程组.

引进实变量  $b$  的复函数  $w = u + iv$ , 容易把问题化为一个方程 (有可分离的变量). 也就是把  $i$  乘方程 (20) 的第二式, 与第一式按项相加则得到方程

$$\frac{dw}{db} = \frac{-b + ai}{2(a^2 + b^2)}w = \frac{i}{2} \cdot \frac{w}{a - bi}.$$

用寻常的可分离变量的方法可求积分. 为了避免利用复数的对数, 可以直接验证上式, 就是

$$\frac{d}{db}(w \cdot \sqrt{a - bi}) = 0.$$

根据微分方程, 得出

$$w \cdot \sqrt{a - bi} = c = \text{常量}.$$

令  $b = 0$  容易得到  $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 因此

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a - bi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{a + bi}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

至于符号  $\sqrt{a \pm bi}$  我们了解为这个根的一个分支, 它当  $b = 0$  时成为算术根  $+\sqrt{a}$ .

大家都知道

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad ①$$

① 令  $\sqrt{a + bi} = x + yi$ , 我们有  $a = x^2 - y^2, b = 2xy$ , 由此得出

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

这里我们取两根都是正号, 因为这才符合刚才所同意的约定, 而且使得  $xy = \frac{1}{2}b > 0$ .



这样,

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}} \right).$$

分别使实数与虚数部分相等, 我们最后得到

$$\begin{aligned} u &= \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}}, \\ v &= \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

这些公式的得来是在主要的假定  $a > 0$  下的. 但借助于定理 2[参看 515, 4°] 容易看出这两积分是  $a$  的连续函数, 并当  $a = 0$  时, 它们也是连续. 所以当  $a \rightarrow 0$  时把所得的等式趋于极限, 我们得出 (若  $b > 0$ )

$$\int_0^\infty \cos bx^2 dx = \int_0^\infty \sin bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

这就是菲涅尔积分 [参看 522, 5°].

9) 证明借助于微分方程可以简单地来计算拉普拉斯积分 [参看 522, 4°]

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad \text{及} \quad z = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$$

我们已经看到

$$\frac{dy}{d\beta} = -z$$

再次对  $\beta$  的微分不能在积分号下进行, 因为这样微分所得的结果已经是发散的积分.

但是如果将所写出的等式按项加上以下的等式

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

[522, 2°]<sup>①</sup>, 则得到

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx.$$

这里在积分号下取微分, 又重新是可能的, 用这样的做法, 我们得到

$$\frac{d^2 y}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$$

这就是

$$\frac{d^2 y}{d\beta^2} = \alpha^2 y.$$

对于这个常系数二阶的简单微分方程, 按照其“特征方程”的根  $\pm \alpha$ , 很容易作出方程的一般解:

$$y = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta},$$

<sup>①</sup>然而在以后我们完全不需要有这积分的数值, 我们只需知道对于所有  $\beta > 0$  这积分保持一个常量数值. 关于这一点只用代换  $t = \beta x$  容易来说明的.



其中  $C_1$  及  $C_2$  是常数. 但对于所有  $\beta$  值, 量  $y$  是有界的:

$$|y| \leq \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

因此知道  $C_1$  必须等于 0 (因为如果不然, 当  $\beta \rightarrow \infty$ , 量  $y$  将无限制地增加).

为了确定常数  $C_2$ , 令  $\beta = 0$ , 显然

$$C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

最后

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

由此取微分, 得出  $z$ .

10) 计算积分:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \frac{\alpha^2}{x^2} dx, \quad v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx.$$

对于所有的  $\alpha$  值, 由于有优函数  $e^{-x^2}$  保证了积分的存在性及连续性. 照莱布尼茨法则

$$\frac{du}{d\alpha} = - \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} \cdot \frac{2\alpha}{x^2} dx = -2 \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}} \sin y^2 dy \quad \left(y = \frac{\alpha}{x}\right).$$

第二个积分 —— 在  $y = 0$ , 也在  $y = \infty$  —— 对于所有的  $\alpha$  值, 是一致收敛, 所以第一个积分 —— 在  $x = 0$ , 也在  $x = \infty$  —— 对于适合不等式  $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq A < +\infty$  的  $\alpha$  值也一致收敛<sup>72)</sup>. 这样, 对于  $\alpha > 0$  用莱布尼茨法则是合理的.

再次对  $\alpha$  微分 (它的合理性可以类似地证实) 给出

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = -2 \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}} \sin y^2 \cdot \frac{-2\alpha}{y^2} dy = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx = 4v.$$

完全同样地, 得到

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} = -4u.$$

令  $w = u + iv$ . 对于  $w$  的定义我们有以下微分方程

$$\frac{d^2 w}{d\alpha^2} = -4iw.$$

组成“特征”方程  $\lambda^2 + 4i = 0$ , 其根为  $\lambda = \pm\sqrt{2} \mp \sqrt{2}i$ . 我们写出微分方程的一般解:

$$w = u + iv = Ae^{-\alpha\sqrt{2}}(\cos \alpha\sqrt{2} + i \sin \alpha\sqrt{2}) + Be^{\alpha\sqrt{2}}(\cos \alpha\sqrt{2} - i \sin \alpha\sqrt{2}).$$

<sup>72)</sup> 请读者注意: 第二个积分的一致收敛性是对所有的  $\alpha \in [0, \infty)$  成立的, 而对第一个积分却不能这样断言: 仅能说当  $\alpha \in [\alpha_0, A]$  时的一致收敛性. 不难证明, 第一个积分对  $\alpha \in [0, \infty)$  的一致收敛性事实上不成立.

本例是对如下重要情况的一个很好的说明: 在作变量变换时, 积分的一致收敛性不一定保持, 在变换下, 它可能消失, 也可能呈现 (为了检验第一个积分当  $\alpha \in [\alpha_0, A]$  时的一致收敛性, 读者可能要以一致收敛的定义为出发点估计同一个函数的积分  $\int_0^\delta$  与  $\int_\Delta^\infty$ , 为此目的, 例如可以在每一个积分中作变量变换  $y = \frac{\alpha}{x}$ ).



因为函数  $w$  对于一切  $\alpha$  是有界的, 所以必须  $B = 0$ ; 并且当  $\alpha = 0$  应得  $w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 因此  $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 最后

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos \alpha\sqrt{2}, \quad v = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin \alpha\sqrt{2}.$$

11) 证明恒等式

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0).$$

用  $u$  记第一个积分,  $v$  记第二个积分. 在  $u$  中令  $x^2 + a^2 = y^2$ ,  $u$  改变为

$$u = e^{a^2} \int_a^\infty e^{-y^2} dy.$$

在  $v$  中引进新的变量  $x = az$ , 得出

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 z^2} dz}{z^2 + 1}$$

取对  $a$  的微分 (按照莱布尼茨法则) 把导数  $\frac{dv}{da}$  表达成以下形式

$$\frac{dv}{da} = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{-a^2 z^2} dz - \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 z^2}}{z^2 + 1} dz \right\}.$$

由此求得了确定  $v$  的线性微分方程:

$$\frac{dv}{da} - 2av = -1.$$

以“积分”因子  $e^{-a^2}$  乘上式的左右两面得出以下等式

$$\frac{d}{da} [ve^{-a^2}] = -e^{-a^2};$$

如果对  $a$  从 0 到  $a$  求积分, 则得到

$$v \cdot e^{-a^2} = v_0 - \int_0^a e^{-t^2} dt.$$

这里  $v_0$  自然是  $v$  的极限值

$$v_0 = \lim_{a \rightarrow 0} v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

因为这同一数是积分  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$  的值, 所以对于  $v$  最后得出

$$v = e^{a^2} \int_a^\infty e^{-t^2} dt$$

这就是与  $u$  是同一表达式.

12) 证明等式 (当  $k > 0$  时)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2} dx = \int_k^\infty \frac{\sin(x-k)}{x} dx.$$



两个积分作为  $k$  的函数适合微分方程

$$y'' + y = \frac{1}{k}.$$

对第一个积分, 按莱布尼茨法则对它微分两次便可证明这一点, 对第二个积分, 可表为

$$\cos k \cdot \int_k^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \sin k \cdot \int_k^\infty \frac{\cos t}{t} dt,$$

由此来求其导数更为简单.

因上述两个所论积分的差  $z = z(k)$  适合齐次方程  $z'' + z = 0$ , 那么此差具有如下形式:

$$z = c_1 \cdot \sin(k + c_2),$$

其中  $c_1$  与  $c_2$  是常数, 但是两个积分, 以及随之它们的差, 当  $k \rightarrow \infty$  时趋于 0, 由此  $c_1 = 0$ ,  $z(k) \equiv 0$ . 所求等式证毕.

#### 524. 在积分号下求积分的例题

1) 用积分号下求积分法求下列积分的值:

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx; \quad (b) \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0).$$

解 (a) 积分

$$\int_0^\infty e^{-yx} dx = \frac{1}{y} \quad (y > 0)$$

对于  $y$  在  $y \geq y_0 > 0$  一致收敛. 对  $y$  从  $a$  到  $b$  求这等式的积分, 其中左面的积分可以在积分号下进行, 我们得到

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln \frac{b}{a}$$

[参看 495, 1)].

(b) 相似的从以下的积分出发:

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (y > 0).$$

它对于  $y$  在  $y \geq y_0 > 0$  也一致收敛, 我们得出

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_a^b \sin yx dy = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

[参看 497, 10)(a)].

2) 将第一型完全椭圆积分

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

看作模  $k$  的函数, 试求这函数在区间  $[0, 1]$  上的积分.



我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{K}(k) dk &= \int_0^1 dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi,\end{aligned}$$

上式经代换  $x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  引到了以下的积分值的两倍:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = G = 0.915965 \dots$$

[ $G$  为“卡塔兰”常数, 参看 328, 6) 及 440, 6)(a)].

由于定理 5 的推论 (修改的), 积分的互换是可以进行的. 被积函数在矩形  $[0, \pi/2; 0, 1]$  中处处是正的, 并且连续; 只除开  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  这一点, 在这点上, 它成为  $\infty$ , 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

在  $k < 1$  时是  $k$  的连续函数, 而积分

$$\int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

在  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  时是  $\varphi$  的连续函数. 最后, 二重积分中的第二个显然存在. 这样, 推论中所指定的条件都适合.

在以下紧跟着的例中, 我们将重新讨论已经知道的零附标的贝塞尔函数 [440, 12); 441, 4)].

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

但是要假定  $J_0(x)$  的“渐近”公式作为我们结论的基础, 这个公式我们用而不证. 这公式就是

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}, \quad (21)$$

其中  $\varphi_0(x)$  对于无限增大的  $x$  是有界的:

$$|\varphi_0(x)| \leq L.$$

### 3) 计算积分

$$A = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(x) dx \quad (a > 0).$$

我们有

$$\begin{aligned}A &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.\end{aligned}$$



由于以下积分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx$$

(优函数:  $e^{-ax}$ ) 的一致收敛性, 积分的互换是容许的.

因为从 (21) 就知道积分

$$\int_0^{\infty} J_0(x) dx$$

收敛<sup>①</sup>, 所以积分  $A$  是  $a$  的连续函数, 且当  $a = 0$  时它也是连续的 [515, 4°, 定理 2], 因此以上积分的值可以从  $A$  的表达式当  $a \rightarrow 0$  时取极限得来, 这样

$$\int_0^{\infty} J_0(x) dx = 1.$$

4) 计算积分

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(x) dx, \quad (a > 0).$$

我们有

$$B = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx.$$

但内层积分是狄利克雷的“间断因子”[497, 11]):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{若 } \sin \theta < a, \\ 0, & \text{若 } \sin \theta > a. \end{cases}$$

因此

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } a \geq 1, \\ \arcsin a, & \text{当 } a < 1. \end{cases}$$

我们要建立积分互换的容许性. 我们有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^A \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx.$$

但内层积分可以写成以下的形状:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^A \frac{\sin(a + \sin \theta)x}{x} dx + \int_0^A \frac{\sin(a - \sin \theta)x}{x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{A(a + \sin \theta)} \frac{\sin z}{z} dz + \int_0^{A(a - \sin \theta)} \frac{\sin z}{z} dz \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

若  $a > 1$ , 因而  $a - \sin \theta > a - 1 > 0$ , 则这表达式当  $A \rightarrow \infty$  时对  $\theta$  是一致趋于极限; 换言之, 积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx$  一致收敛, 所以积分互换是合理的. 当  $a \leq 1$  时, 在  $\theta = \arcsin a$  的

<sup>①</sup>这是立刻可以了解的, 如果把 (21) 式右面的和的第一项写成以下形状:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right).$$



附近一致性是违反了. 但因表达式 (22) 对于所有的  $A$  和  $\theta$  值还是一致有界的 (优函数是常量!), 所以外层积分当  $\theta = \arcsin a$  时对  $A$  一致收敛, 因此当  $A \rightarrow \infty$  时在积分号下取极限仍是容许的, 所以积分的互换是合理的.

5) 由积分  $B$ , 对参数  $a$  取微分可以得出另一个有趣的积分:

$$C = \int_0^\infty J_0(x) \cos ax \, dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } a > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, & \text{当 } a < 1. \end{cases}$$

为了在积分号下取微分的正确根据, 我们注意, 积分  $C$  对于  $a$  在任何不包含  $a = 1$  的闭区间, 都是一致收敛的, 这个结论是可从渐近公式 (21) 推得. 把公式写成以下形状<sup>①</sup>

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}},$$

两面乘以  $\cos ax$ :

$$J_0(x) \cos ax = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(1+a)x + \cos(1-a)x + \sin(1+a)x + \sin(1-a)x}{\sqrt{x}} + \frac{\varphi_0(x) \cos ax}{x^{3/2}},$$

和的第二部分有优函数  $\frac{L}{x^{3/2}}$ . 至于和的第一部分的积分, 则当  $|1-a| \geq \delta > 0$ , 它是一致收敛的. 上一个公式也证明了当  $a = 1$  时积分  $C$  是发散的.

6) 计算积分

$$D = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} J_0(x) dx \quad (a > 0).$$

我们有

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln \sqrt{a^2 - \sin^2 \theta} - \ln \sin \theta] d\theta. \end{aligned}$$

[参看 497 16), (6)]. 这样 [497, 7) 及 511, 7)]:

$$D = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} J_0(x) dx = \begin{cases} \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}), & \text{当 } a \geq 1, \\ 0, & \text{当 } a < 1. \end{cases}$$

为了积分互换的理由, 我们首先对于有限量  $A$  写出

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{1 - \cos ax}{x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^A \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx. \end{aligned}$$

现在问题是可不可以从等号右面式子当  $A \rightarrow \infty$  时在积分号下取极限.

<sup>①</sup>参看前一脚注.



为要研究内层积分趋于极限的性质, 我们考虑积分

$$\begin{aligned} & \int_A^{A'} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_A^{A'} \frac{dx}{x} [2 \cos(x \sin \theta) - \cos(a + \sin \theta)x - \cos |a - \sin \theta|x] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2 \int_{A \sin \theta}^{A' \sin \theta} - \int_{A(a + \sin \theta)}^{A'(a + \sin \theta)} - \int_{A|a - \sin \theta|}^{A'|a - \sin \theta|} \right] \frac{\cos z}{z} dz \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{A \sin \theta}^{A(a + \sin \theta)} - \int_{A' \sin \theta}^{A'(a + \sin \theta)} + \int_{A \sin \theta}^{A|a - \sin \theta|} - \int_{A' \sin \theta}^{A'|a - \sin \theta|} \right] \frac{\cos z}{z} dz. \end{aligned}$$

由于积分  $\int_{z_0}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz (z_0 > 0)$  存在, 很清楚地知道, 对于所有的  $\theta$  值在任何闭区间上不包含 0 或  $\arcsin a$  (若  $a \leq 1$ ), 就是取  $A$  和  $A'$  充分大, 可使这和数随意小. 这样, 内层积分当  $A \rightarrow \infty$  时一致趋向于极限, 只在一个或两个所提及的值附近是违反的.

但是, 在另一方面, 这个内层积分有优函数  $|\ln \sqrt{a + \sin \theta}| + |\ln \sqrt{a - \sin \theta}| + |\ln \sin \theta| + C$ , 它在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是可积的, 其中  $C = C(a)$  是不依赖于  $\theta$  的常数<sup>73)</sup>; 这意味着无论在  $\theta = 0$ , 还是  $\theta = \arcsin a$  (若  $a \leq 1$ ), 外层积分是一致收敛的. 因此, 照 518 目定理 1', 以上提及的极限过程终究是容许的.

7) 由于对参数的微分得出积分

$$E = \int_0^{\infty} J_0(x) \sin ax dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}, & \text{当 } a > 1, \\ 0, & \text{当 } a < 1. \end{cases}$$

运用公式 (21), 同例 5) 一样可引出我们的论据, 当  $a = 1$  时, 这积分是发散的.

8) (a) 在

$$J = \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

的情形中, 试直接验证积分互换的容许性.

我们有

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = -\frac{1}{1 + y^2},$$

所以

$$J = - \int_1^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = -\operatorname{arctg} y \Big|_1^{\infty} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

<sup>73)</sup> 我们来说明积分的估计, 为了简明, 用  $\int_0^A g(x) dx$  表示这个积分. 因为  $\int_0^A = \int_0^1 + \int_1^A$  且显然积分  $\int_0^1 |g(x)| dx$  被某个常数  $C_1 = C_1(a)$  所界限, 只需在  $A > 1$  时估计  $\int_1^A g(x) dx$ . 应用在正文中所得积分  $\int_A^{A'} g(x) dx$  的表示, 我们可以把  $\int_1^A g(x) dx$  记为三个形如  $\int_p^{p'} \frac{\cos z}{z} dz$  的积分 (其积分下限相应地等于  $\sin \theta, a + \sin \theta, |a - \sin \theta|$ ) 之和. 因为  $\int_1^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz$  收敛, 当  $p' \geq p > 1$  时积分  $\int_p^{p'} \frac{\cos z}{z} dz$  按其模被某个常数  $C_2$  所界限. 由此, 对于  $p' \geq p > 0$  有  $\left| \int_p^{p'} \frac{\cos z}{z} dz \right| \leq \left| \int_p^1 \frac{\cos z}{z} dz \right| + C_2 \leq |\ln p| + C_2$ . 因此  $\left| \int_1^A g \right| \leq \frac{1}{2} (2 \cdot |\ln \sin \theta| + |\ln(a + \sin \theta)| + |\ln |a - \sin \theta|| + 4C_2)$ , 这就导致具有常数  $C = C_1 + 2C_2$  的所求积分  $\int_0^A g(x) dx$  的估计.



同时对于另一个二重积分

$$\tilde{J} = - \int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

相似地得出  $\tilde{J} = \frac{\pi}{4}$ ; 互换是不容许的.

特别地注意 [像我们在 517,1) 中所说明的] 以下积分

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

对  $y$  在所有的  $y \geq 1$  是一致收敛; 相似的也可证明积分

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

对  $x$  在所有的  $x \geq 1$  是一致收敛.

在这里定理 5 不能应用, 因为 (容易直接证实) 积分

$$\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

是发散的.

(6) 在

$$\int_1^{\infty} dx \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} dy = -1, \quad \int_0^1 dy \int_1^{\infty} \frac{y - x}{(x + y)^3} dx = -\frac{1}{2}$$

的情形中, 容易证明积分互换是不容许的.

这里, 积分

$$\int_1^{\infty} \frac{y - x}{(x + y)^3} dx$$

——从定理 4 已经可以明白——对于  $y$  在区间  $[0, 1]$  上不能一致收敛 (关于这点是容易直接证明的.)

(B) 再举一个同类型的漂亮的例 [哈代]:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_1^{\infty} (pe^{-pxy} - qe^{-qxy}) dy - \int_1^{\infty} dy \int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy}) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} dx = \ln \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

若取  $p > 0, q > 0, p \neq q$ , 积分并不等于零.

9) 引进两个新的方法来计算拉普拉斯积分:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{1 + x^2} dx$$

[参看 522,4°]

因为

$$\frac{1}{1 + x^2} = \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y dy,$$

<sup>①</sup> 伏汝兰尼积分 [495,1)].



代入即把  $J$  写成以下形状

$$J = \int_0^\infty \cos \beta x dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

积分互换, 得出

$$J = \int_0^\infty \sin y dy \int_0^\infty e^{-xy} \cos \beta x dx = \int_0^\infty \frac{y \sin y}{\beta^2 + y^2} dy = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{1 + x^2} dx.$$

但最后的积分, 除了正负号以外, 表示是  $\frac{dJ}{d\beta}$ , 所以  $J$  满足以下简单的微分方程:

$$\frac{dJ}{d\beta} = -J, \text{ 由此 } J = Ce^{-\beta},$$

因为当  $\beta = 0$  时,  $J = C = \frac{\pi}{2}$ , 所以最后  $J = \frac{\pi}{2}e^{-\beta}$ .

剩下还须说明积分互换的根据. 若  $0 < a < A < \infty$ , 容易说明以下等式是合法的

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\cos \beta x}{1 + x^2} dx &= \int_a^A \cos \beta x dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy \\ &= \int_0^\infty \sin y dy \int_a^A e^{-xy} \cos \beta x dx \\ &= \int_0^\infty \sin y dy \left[ \frac{\beta \sin \beta A - y \cos \beta A}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay} - \frac{\beta \sin \beta a - y \cos \beta a}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} \right] \\ &= \beta \sin \beta A \cdot \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay} dy - \cos \beta A \cdot \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay} dy \\ &\quad - \beta \sin \beta a \cdot \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} dy + \cos \beta a \cdot \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} dy. \end{aligned}$$

所有的积分相应地对于  $a$  及  $A$  的一致收敛性, 容许在积分号下取  $a \rightarrow 0$  及  $A \rightarrow \infty$  的极限过程. 由此可知, 所考虑的表达式, 在所指出的两次极限过程中, 实际上趋于极限  $\int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} dy$ .

10) 利用另一个恒等式

$$\frac{x}{1 + x^2} = \int_0^\infty e^{-y} \sin xy dy,$$

我们可写出

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{x} dx \int_0^\infty e^{-y} \sin xy dy.$$

在这里互换积分:

$$J = \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx,$$

由于内层积分的性质我们得到狄利克雷“间断因子”

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 < y < \beta, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } 0 < \beta < y. \end{cases}$$

这样

$$J = \frac{\pi}{2} \int_\beta^\infty e^{-y} dy = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}.$$



关于积分互换的理由, 我们注意下列积分

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin xy}{x} \cdot \cos \beta x dy$$

对  $x$  是一致收敛 (以  $ye^{-y}$  为优函数). 因此

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx &= \int_0^A \frac{\cos \beta x}{x} dx \int_0^{\infty} e^{-y} \sin xy dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} dy \int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx. \end{aligned}$$

在最后的积分中, 当  $A \rightarrow \infty$  能不能 (对  $y$ ) 在积分号下取极限呢? 被积函数是  $e^{-y}$  乘以

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{\sin(y+\beta)x + \sin(y-\beta)x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{(y+\beta)A} \frac{\sin z}{z} dz + \int_0^{(y-\beta)A} \frac{\sin z}{z} dz \right\}. \end{aligned}$$

当  $A \rightarrow \infty$  时, 它对  $y$  是一致趋于极限, 除了在  $y = \beta$  点的近旁. 因为第二个因子对所有的  $A$  及  $y$  是一致有界, 所以被积表达式有优函数  $Ce^{-y}$ , 因此当  $y = \beta$  及  $y = \infty$  时 (外层的) 积分对  $A$  是一致收敛. 于是在积分号下取极限过程是合法的, 并且积分可以互换.

11) 在结尾, 我们再指出用另一个漂亮的方法导得下列积分值

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

因为

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy,$$

所以

$$K = \int_0^{\infty} \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

转入积分互换的合法问题, 取  $0 < a < A < +\infty$ , 容易证明以下等式:

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_a^A \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} dy \int_a^A e^{-xy} \sin x dx \\ &= \int_0^{\infty} dy \left\{ \frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2} e^{-ay} - \frac{y \sin A + \cos A}{1+y^2} e^{-Ay} \right\} \\ &= \sin a \int_0^{\infty} \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy + \cos a \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} e^{-ay} dy \\ &\quad - \sin A \int_0^{\infty} \frac{y}{1+y^2} e^{-Ay} dy - \cos A \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} e^{-Ay} dy. \end{aligned}$$

因为最后两个积分对  $A (A \geq A_0 > 0)$  是一致收敛, 所以当  $A \rightarrow \infty$  在积分号下取极限, 我们就看到两个都趋于 0. 第二个积分对  $a$  (在  $a \geq 0$ ) 是一致收敛, 当  $a \rightarrow 0$  时它显然趋于  $\frac{\pi}{2}$ . 剩下



还需说明第一个积分在乘以  $\sin a$  而取极限时, 它趋向于 0. 我们有

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy = \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2} e^{-t} dt = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

$$\int_0^1 < \int_0^1 \frac{tdt}{a^2+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+a^2) - \ln a, \int_1^\infty < \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} = C.$$

由此可推出所要求的结论.

## §4. 补充

**525. 阿尔泽拉引理** 虽然专就计算的目的来说, 前三节所讲的材料足够了, 但在理论结构上, 有时还须有一些更细致的定理. 顺便, 根据这些定理即给出了以上所研究的各个运算手续的较简的应用条件.

我们开头先证一个关于区间系的辅助命题; 此命题系由阿尔泽拉 (Arzelà) 所提出.

**引理** 设有限区间  $[a, b]$  含有区间系  $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$ , 其中每一区间系都是由有限个彼此不相覆盖的闭区间所组成<sup>①</sup>. 假若每一系  $D_k (k=1, 2, 3, \dots)$  的区间的长度的总和大于某一固定的正数  $\delta$ , 则至少可以找到一点  $x=c$ , 使其属于无穷多个系  $D_k$ .

**证明** 如果某一系  $D_k (k>1)$  中的一个区间覆盖了前面各系  $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$  中的若干区间, 于是被这些区间的端点分割成好几段, 以后我们便把这些段视为系  $D_k$  中几个不同的区间. 因此, 倘若  $d'$  是系  $D_{k'}$  中的区间而  $d''$  是系  $D_{k''}$  中的区间, 并且  $k' < k''$  则  $d'$  与  $d''$  或者是彼此不相覆盖, 或者是  $d''$  含于  $d'$  之内.

然而系  $D_{k+1}$  未必整个包含在前面的系  $D_k$  之内. 由于这种情况是不方便的, 所以我们根据以下法则做成另外的区间系  $\Delta_k$  来代替系  $D_k$ . 为要得出  $\Delta_k$ , 我们取  $D_k$  为基础, 再加上系  $D_{k+1}$  中不含在  $D_k$  中的那些区间, 其后再加上系  $D_{k+2}$  中不含在  $D_k$  与  $D_{k+1}$  中的那些区间, 以此类推至于无穷.

用这办法所造成的系  $\Delta_k$  就可能已经是由无穷多区间构成的了. 但这时却有: 1) 系  $\Delta_{k+1}$  中的每个区间必定含在系  $\Delta_k$  的某一个区间之内. 抑且 2) 组成  $\Delta_k$  的各区间的长度的和数 (或者更精确些 —— 长度的级数的和) 越发大于  $\delta$ , 因为这对于  $D_k$  就已经成立了.

下一步是这样的: 我们再把这系  $\Delta_k$  用它们的有限部分  $\Delta^{(k)}$  来代替, 不过同时要保留适才对于系  $\Delta_k$  指出的前一条性质. 这件事我们照下面这样来做.

如果系  $\Delta_1$  的区间的个数有限, 那么就简单地命  $\Delta' = \Delta_1$ . 反之, 我们就从  $\Delta_1$  中取出一个由区间  $d'_1, d'_2, \dots, d'_r$  所构成的有限系  $\Delta'$ , 而使得系  $\Delta_1$  中其余区间  $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \dots$  的长度的总和小于  $\delta$ <sup>②</sup>. 系  $\Delta_2$  中的某些区间一定包含在  $\Delta'$  的诸区间之内, 因为倘使  $\Delta_2$  的区间全包含在诸区间  $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \dots$  之内, 那么它们的长度的总和便比  $\delta$  小了, 乃与系  $\Delta_k$  的第二条性质相悖.

如果系  $\Delta_2$  中含在  $\Delta'$  之内的区间只有有限个, 那么就拿这些区间来构成系  $\Delta''$ . 反之, 我们就从其中分出有限系  $\Delta''$  来, 使得  $\Delta_2$  的所有其他区间 (包括那些不被包含在  $\Delta'$  之内的区间)

<sup>①</sup> 译者注: 这里所说的覆盖二字的确切意义是指两个区间有公共区间, 下同.

<sup>②</sup> 根据收敛级数的余数的性质, 这是可以做到的.



的长度的总和小于  $\delta$ . 将此手续延续下去以至于无穷; 顺次由  $\Delta_3$  中分出有限系  $\Delta''', \dots$ , 由  $\Delta_k$  中分出有限系  $\Delta^{(k)}, \dots$ . 此时系  $\Delta^{(k+1)}$  的每个区间包含在系  $\Delta_k^{(k)}$  的某一个区间之内.(系  $\Delta_k$  的第二条性质一般来说是丧失了, 但是以此为代价我们恢复了系的有限性, 犹如  $D_k$  一样.)

最后, 结尾的一步就是从每一系  $\Delta^{(k)}$  中分出一个区间  $d^{(k)}$  来, 使得这些区间中的每一个包含在前面的一个之内.

就是说, 在系  $\Delta'$  的诸区间之中, 至少能找出一个 (我们以  $d'$  来表示它) 是含有以后诸系的无穷多个区间的. 实际上, 假定不是这样, 即在  $\Delta'$  的每一个区间之内仅含以后诸系的有限数个区间; 那么这话就对于整个的系  $\Delta'$  也是正确的 (正是因为  $\Delta'$  是由有限个区间组成的). 换言之, 我们可以找到如此之大的附标  $k_0$ , 使得系  $\Delta^{(k_0)}$  中任何一个区间都不含在  $\Delta'$  里, 而这就与系  $\Delta^{(k)}$  的着重指出的性质 1 相冲突了.

在  $d'$  中必含有系  $\Delta''$  的若干个区间 (因为不然的话,  $\Delta'''$  等的诸区间就全都不在  $d'$  中了). 不仅如此,  $d'$  所含  $\Delta''$  的诸区间里, 至少还要有一个 (以  $d''$  表之) 应该具有以上对于  $d'$  着重指出的性质, 这就是说, 含有以后诸系的无穷多个区间, 因为否则就连  $d'$  也不能具有此性质了 (这里又是系  $\Delta''$  的有限性起了作用). 延续此手续以至于无穷, 我们就顺序地从每一个系  $\Delta^{(k)}$  中分出了一个区间  $d^{(k)}$ , 含于先所分出的区间  $d^{(k-1)}$  之内.

得到了彼此相包含的区间序列  $d^{(k)} = [a_k, b_k] (k = 1, 2, 3, \dots)$  之后, 我们就和在证明熟知的基本引理 [38] 时一样, 可以确定单调变量  $a_k$  与  $b_k$  存在有极限

$$\lim a_k = a \leq \beta = \lim b_k.$$

因为关于区间  $d^{(k)}$  的长度我们一无所知, 所以我们不能在这里断言极限相等. 但是在条件  $a \leq c \leq \beta$  之下所取的任意一点  $c$ , 显然属于所有的各区间  $d^{(k)} (k = 1, 2, 3, \dots)$ . 同时点  $c$  属于每一个系  $\Delta_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ ; 因而, 不论  $k$  是怎样的, 点  $c$  必须还属于 (如果考虑到  $\Delta_k$  的建立法则) 某一系  $D_{k'}$ , 此处  $k' \geq k$ . 由此即明白看出, 点  $c$  属于无穷多个系  $D_k$ , 是即所欲证明.

**526. 积分号下取极限** 现在, 代替第 436 目定理 6\*, 我们来建立以下的定理, 其中函数  $f_n(x)$  一致趋于其极限的要求被换成了较为宽泛的条件:  $f_n(x)$  的有界性.

**定理 1 (阿尔泽拉)** 假设给定函数序列

$$f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

在区间  $[a, b]$  中 (常义) 可积并且为总体有界:

$$|f_n(x)| \leq L \quad (L = \text{常量}; a \leq x \leq b; n = 1, 2, 3, \dots).$$

倘若对于  $[a, b]$  中所有的  $x$ , 存在有极限

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

并且函数  $\varphi(x)$  也可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$



证明 最初我们且局限于一个特殊的前提之下, 即函数  $f_n(x)$  是非负的:

$$f_n(x) \geq 0,$$

并且极限为零,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0. \quad (1)$$

在此假定前提之下, 我们应当证明的是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0. \quad (2)$$

取正数序列  $\eta_n \rightarrow 0$ ; 我们对于每一个  $n$  皆可将区间  $[a, b]$  分为若干部分  $d_i^{(n)} (i = 1, 2, \dots, h_n)$ , 使得相应的达布下和

$$s_n = \sum_{i=1}^{h_n} m_i^{(n)} d_i^{(n)} \textcircled{1}$$

满足不等式

$$0 \leq \int_a^b f_n(x) dx - s_n < \eta_n.$$

此时显而易见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b f_n(x) dx - s_n \right] = 0,$$

而为要证明 (2) 我们只需确定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0 \quad (3)$$

就行了.

为此目的, 取定任意的小数  $\varepsilon > 0$  与  $\delta > 0$ , 我们试肯定以下一点: 可以找出这样的附标  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 第  $n$  次分割的诸区间  $d_i^{(n)}$  中那些对应于下界  $m_i^{(n)} \geq \varepsilon$  的区间的长度的总和  $\leq \delta$ .

实际上, 假定不是这样. 那么对于无穷多个  $n$  的值:

$$n = n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

那些区间  $d_i^{(n_k)} (m_i^{(n_k)} \geq \varepsilon)$  的长度的总和皆大于  $\delta$ . 我们将前目中的引理应用到由这些区间所组成的系  $D_k$  上来. 根据这条引理, 可在  $[a, b]$  中找到这样的点  $c$ , 使其属于无穷多个系  $D_k$ . 因此对于无穷多个  $n$  的值, 不等式

$$f_n(c) \geq \varepsilon$$

皆成立, 而这就和假定 (1) 发生冲突了, 因为 (1) 对于  $x = c$  也是应该成立的.

于是上述的附标  $N$  存在; 设  $n \geq N$ . 以  $i'$  与  $i''$  表示第  $n$  次分割时那些区间的附标, 使对于  $i'$  与  $i''$  分别有

$$m_{i'}^{(n)} < \varepsilon \text{ 或 } m_{i''}^{(n)} \geq \varepsilon.$$

①我们既用  $d_i^{(n)}$  表示部分区间本身, 又用它表示它的长度;  $m_i^{(n)}$  是区间  $d_i^{(n)}$  中的  $\inf f_n(x)$ .



与此相应地将和数也加以分离:

$$s_n = \sum_i m_i^{(n)} d_i^{(n)} = \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} + \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)}.$$

现在, 不难看出,

$$\begin{aligned} \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} &< \varepsilon \cdot \sum_{i'} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \cdot (b-a), \\ \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} &\leq L \cdot \sum_{i''} d_{i''}^{(n)} < L \cdot \delta, \end{aligned}$$

因为显然  $m_i^{(n)} \leq L$  (根据定理的条件). 因此

$$s_n < \varepsilon(b-a) + L \cdot \delta.$$

由于  $\varepsilon$  与  $\delta$  二数之任意性, 这就证明了命题 (3).

一般的情形很容易化到适才所解决的这个特殊情形. 事实上, 借助于不等式

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)| dx,$$

将所证明的命题应用到非负并趋向于零的函数  $|f_n(x) - \varphi(x)|$  上即可.

**推论** 当定理的各项条件, 除掉关于极限函数的可积性的假定以外, 尽皆成立时, 则恒可断言存在有有限极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

为要证明, 只需确定对于任意的  $\varepsilon > 0$  可找到这样的附标  $N$ , 使得当  $n'' > n' \geq N$  时

$$\left| \int_a^b f_{n''}(x) dx - \int_a^b f_{n'}(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_{n''}(x) - f_{n'}(x)] dx \right| < \varepsilon,$$

就足够了 [39].

我们设其不然. 那么就存在有这样的一个数  $\varepsilon_0 > 0$  与这样的两个无限增加的数列  $n'_m$  及  $n''_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n''_m > n'_m$ ), 使得关系式

$$\left| \int_a^b [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] dx \right| \geq \varepsilon_0 \quad (4)$$

恒成立.

另一方面,

$$|f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)| \leq 2L \quad \text{并且} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] = 0.$$

如若将上面的定理应用到函数

$$f_m^*(x) = f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x),$$



则得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m^*(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b [f_{n_m}''(x) - f_{n_m}'(x)] dx = 0,$$

此与关系式 (4) 矛盾. 这一矛盾就证明了我们的断言.

从只取自然数为值的参数  $n$  很容易推到任意的参数  $y$  [参看第 506 目定理 1].

**定理 2** 设函数  $f(x, y)$  对于区间  $[a, b]$  中的  $x$  值及区间  $\mathcal{Y}$  中的  $y$  值有定义, 在  $[a, b]$  上对于  $x$  (当  $y$  固定时) 可积, 并且对于上述的  $x$  与  $y$  诸值一致有界:

$$|f(x, y)| \leq L \quad (L = \text{常量}).$$

如果对于所有的  $x$  存在有也在  $[a, b]$  上可积的极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)^{\textcircled{1}},$$

则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (5)$$

只需将定理 1 应用到函数  $f_n(x) = f(x, y_n)$  上即可, 此处  $\{y_n\}$  是  $\mathcal{Y}$  中  $y$  值的趋于  $y_0$  的任意序列. 用这样的办法所得出的关系式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

与 (5) 是相互等价的.

**527. 积分号下取导数** 根据阿尔泽拉定理不难得出以下结果, 作为是第 507 目定理 3 的类似命题以及推广.

**定理 3** 设函数  $f(x, y)$  在矩形  $[a, b; c, d]$  上有定义, 并且对于  $[c, d]$  上任意一个固定的  $y$ , 函数  $f(x, y)$  在  $[a, b]$  上对于  $x$  可积. 还假定在整个区域上存在有偏导数  $f'_y(x, y)$ , 也对于  $x$  可积. 如果这导数作为二元函数而言是有界的:

$$|f'_y(x, y)| \leq L \quad (L = \text{常量}; a \leq x \leq b; c \leq y \leq d),$$

则函数

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

对于  $[c, d]$  中任意的  $y$  恒有公式

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

**证明** 取定任意一个值  $y = y_0$ , 与在第 507 目中的证明一样 [参看 (11)], 我们有

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx.$$

<sup>①</sup>此时当然是假定能够在区域  $\mathcal{Y}$  里取极限  $y \rightarrow y_0$ .



因为, 根据拉格朗日定理,

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta k),$$

所以依赖于  $x$  与  $k$  的被积函数, 对于这些变量的所有的值, 以常量  $L$  为界 (就绝对值而言). 将定理 2 应用到这个情形中, 我们可以当  $k \rightarrow 0$  时在积分号下取极限, 这就给出了我们所要的结果.

**528. 积分号下取积分** 在这方面有一个定理, 大大地推广了第 508 目定理 4.

**定理 4** 设函数  $f(x, y)$  定义于矩形  $[a, b; c, d]$  之上, 它对  $[a, b]$  的  $x$  ( $y$  固定) 以及在  $[c, d]$  上的  $y$  ( $x$  固定) 都是可积的. 如果此外函数  $f(x, y)$  还对于所有的上述的  $x$  与  $y$  的值有界

$$|f(x, y)| \leq L \quad (L = \text{常量}),$$

则存在有两个累次积分

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

并且它们彼此相等

**证明** 设

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad K(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

我们来研究任意一个分割序列, 其中每一分割将区间  $[c, d]$  分为若干部分, 各具长度

$$\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{h_n}^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

但服从于这样一个条件:  $\max\{\delta_i^{(n)}\}$  随着  $n$  的增加而趋向于 0. 在第  $n$  次分割的任何一个第  $i$  部分中随意选取值  $y = y_i^{(n)}$ , 并组成函数  $I(y)$  的积分和:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=1}^{h_n} I(y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{h_n} \left\{ \int_a^b f(x, y_i^{(n)}) dx \right\} \cdot \delta_i^{(n)} \\ &= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)} \right\} dx. \end{aligned}$$

如果设

$$\sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)} = f_n^*(x),$$

则  $\sigma_n$  可改写为以下形状:

$$\sigma_n = \int_a^b f_n^*(x) dx.$$

因为显而易见, 存在有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x) = \int_c^d f(x, y) dy = K(x) \quad (6)$$



并且对于所有的  $x$  与  $n$  的值还有

$$|f_n^*(x)| \leq L \cdot (d - c),$$

所以, 根据第 526 目推论, 我们便断定极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

存在.

因此, 不管区间是怎样分割的 (只要各部分的长度的最大者趋向于零), 也不管值  $y_i^{(n)}$  是怎样在各部分中选取的, 这个极限总存在. 由此显见, 这个极限在任何情形下都应该是同一的, 这就是说, 存在有积分

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^*(x) dx.$$

但是应用类似的方法也可以证明积分  $\int_a^b K(x) dx$  存在, 这就是说,  $f_n^*(x)$  的极限函数可积 [参看 (6)]. 于是将定理 1 应用到  $f_n^*(x)$ , 最后便得

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^*(x) dx = \int_a^b K(x) dx,$$

即

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

是即所欲证明

在本节中我们是局限于常义积分的情形下. 如果把在这个情形下所证得的诸定理作为基础, 则可分别将关于反常积分的诸结果加以推广; 不过我们不来从事于此了.

## §5. 欧拉积分

529. 第一型欧拉积分 (根据勒让德的提议) 具有下列形状 of 积分

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad (1)$$

其中  $a, b > 0$ , 称为第一型欧拉积分. (1) 型的积分确定出两个参变量  $a$  与  $b$  的一个函数:  $\beta$  函数.

我们知道 [483, 3)(a)], 这里所要研究的积分对于正值  $a$  与  $b$  (即使是小于 1 也罢) 是收敛的<sup>①</sup>, 因之的确可以作为  $\beta$  函数的定义的基础. 我们来确定它的一些性质.

1° 首先, 差不多直接地 (利用替换  $x = 1 - t$ ) 即可得出:

$$B(a, b) = B(b, a),$$

<sup>①</sup>反之, 若参数  $a$  与  $b$  中只要有一个是  $\leq 0$ , 则积分发散.



所以  $\beta$  函数对于  $a$  与  $b$  乃是对称的.

2° 公式 (1) 于  $b > 1$  时, 借助于分部积分可得<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\frac{x^a}{a} \\ &= \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-2} dx \\ &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \\ &= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b), \end{aligned}$$

由此

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \quad (2)$$

当  $b$  保持大于 1 而减少整值的时候, 总可应用这个公式; 因此, 总能够达到使  $b \leq 1$  的地步.

不过在  $a$  的方面, 也可达到同样结果, 因为 (由于  $B$  的对称性) 另一个递推化简公式

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b) \quad (a > 1) \quad (2')$$

也成立.

如果  $b$  等于自然数  $n$ , 则顺次地应用公式 (2), 便得:

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} \cdot B(a, 1).$$

但是

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}.$$

因此, 对于  $B(a, n)$ , 同时也就是对于  $B(n, a)$ , 得到了最后的表达式

$$B(n, a) = B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1)}. \quad (3)$$

若  $a$  也等于自然数  $m$ , 则

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

如果将符号  $0!$  了解成 1, 则此公式当  $m=1$  或  $n=1$  时仍可应用.

<sup>①</sup>我们利用以下的恒等式

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x).$$



3° 我们来给出  $\beta$  函数的另外一种解析表示, 这种表示常常是有益的. 即, 若在积分 (1) 中进行替换  $x = \frac{y}{1+y}$ , 其中  $y$  是新的变量, 它从 0 变到  $\infty$ , 则得到

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \quad (4)$$

4° 在公式 (4) 中命  $b = 1 - a$ , 并设  $0 < a < 1$ ; 我们就得到

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy.$$

读者业已认出, 此即以前所计算过的, 亦系有欧拉之名的积分 [参看 519,4)(a) 或 522,1°]. 代入它的值, 即导出公式

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1). \quad (5)$$

假如特别取  $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ , 则得到:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \quad (5a)$$

我们权且只讲  $\beta$  函数这不多的几个性质, 因为马上就会看到,  $\beta$  函数可以很简单的用另一个函数—— $\Gamma$  函数表达出来, 而  $\Gamma$  函数也是本节中我们所研究的主要对象.

### 530. 第二型欧拉积分 勒让德对以下重要积分

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (6)$$

命名为 第二型欧拉积分, 此积分对于任意的  $a > 0$  皆收敛 [483,5,(B)]<sup>①</sup> 并确定出  $\Gamma$  函数.  $\Gamma$  函数是继初等函数之后, 在分析及分析应用中最重要函数之一. 根据  $\Gamma$  函数的积分的定义 (6), 我们详细研究其性质, 同时就可作为以前所讲的依赖于参变量的积分之理论的最好应用实例.

在第十一章及第十二章 [402,10);408;441,11)] 中我们已遇到了  $\Gamma$  函数, 不过是用其他办法来定义的; 首先, 我们来证明两个定义的恒等性 (当然是对于  $a > 0$ ).

在 (6) 中命  $x = \ln \frac{1}{z}$ , 使得

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

如所周知 [77,5)(6)],

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right),$$

<sup>①</sup>当  $a \leq 0$  时, 积分发散.



此处当  $n$  增加时表达式  $n(1 - z^{\frac{1}{n}})$  上升而趋于其极限<sup>①</sup>. 此时, 根据 518 就证明了等式

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz$$

或应用替换  $z = y^n$ ,

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{a-1} dy.$$

但是根据 (3),

$$\int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{a-1} dy = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1)}.$$

因此, 最后我们便导出著名的欧拉-高斯公式:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1)}, \quad (7)$$

这在以前是作为我们的出发点的 [402, (14)]. 关于  $\Gamma$  函数的进一步的性质, 我们将照以前所指出的, 从它的积分表示法 (6) 来推求.

### 531. $\Gamma$ 函数的一些最简单的性质

1° 函数  $\Gamma(a)$  对于  $a > 0$  是连续的并且具有所有各阶连续的导数. 只需证明导数存在就够了. 在积分号下对积分 (1) 求导数便得

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx. \quad (8)$$

因为应用莱布尼茨法则两个积分

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx \quad \text{与} \quad \int_1^\infty x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$$

对  $a$  一致收敛: 第一个 —— 当  $x=0$  时对  $a \geq a_0 > 0$  (优函数为  $x^{a_0-1} |\ln x|$ ), 而第二个 —— 当  $x=\infty$  时对  $a \leq A < \infty$  (优函数为  $x^A e^{-x}$ ).<sup>②</sup>

用这个方法可以证明存在二阶导数

$$\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx \quad (8^*)$$

以及所有更高阶导数的存在。

2° 在 (6) 式中分部积分, 便立即得到:

$$a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = x^a e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a e^{-x} dx,$$

<sup>①</sup>将表达式  $\frac{1-z^a}{a}$  考虑作  $a$  的函数, 再利用微分学中的方法, 就可以肯定这一点.

<sup>②</sup>对于  $x > 0$ , 显而易见  $\ln x < x$ .



这就是说 [参看 402 (15)]

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (9)$$

重复应用这个公式, 就给出

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\Gamma(a). \quad (10)$$

利用这种办法, 无论是对于多么大的  $a$  值来计算  $\Gamma$ , 总可以化为对于  $a < 1$  来计算  $\Gamma$ .

若在 (10) 中取  $a = 1$  并注意

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (11)$$

那么就发现

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (12)$$

$\Gamma$  函数是仅对自然数  $n$  定义的阶乘  $n!$  到任意正值区域的推广.

3°  $\Gamma$ 函数的变化情况 我们现在可以对函数  $\Gamma(a)$  当  $a$  从 0 增长到  $\infty$  时的性态有一般的了解.

由 (11) 与 (12) 式有  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ , 因此根据罗尔定理, 在 1 与 2 之间应有导数  $\Gamma'(a)$  的根  $a_0$ . 因为从 (8\*) 式显然看出二阶导数  $\Gamma''(a)$  总为正, 所以  $\Gamma'(a)$  恒增长. 因此, 当  $0 < a < a_0$ , 导数  $\Gamma'(a) < 0$ , 函数  $\Gamma(a)$  减少, 而当  $a_0 < a < \infty$  时  $\Gamma'(a) > 0$ , 因之  $\Gamma(a)$  增加, 当  $a = a_0$  存在极小值. 我们不作计算而给出

$$a_0 = 1.4616\cdots, \min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0.8856\cdots$$

令人感兴趣的是弄清当令  $a$  趋于 0 或无穷时  $\Gamma(a)$  的极限. 由 (11) 式 [以及由 1°] 显然有: 当  $a \rightarrow +0$

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \rightarrow +\infty.$$

另一方面, 由于 (12) 式, 只要  $a > n+1$  就有

$$\Gamma(a) > n!$$

即当  $a \rightarrow +\infty$  时  $\Gamma(a) \rightarrow +\infty$ .

$\Gamma$  函数的图像见图 64. [现在我们感兴趣的是它位于第一象限的部分.]

4°  $\beta$ 函数与  $\Gamma$ 函数之间的联系 为了弄清楚这种联系, 我们利用替换  $x = ty (t > 0)$  将 (6) 变为以下形状:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy. \quad (13)$$



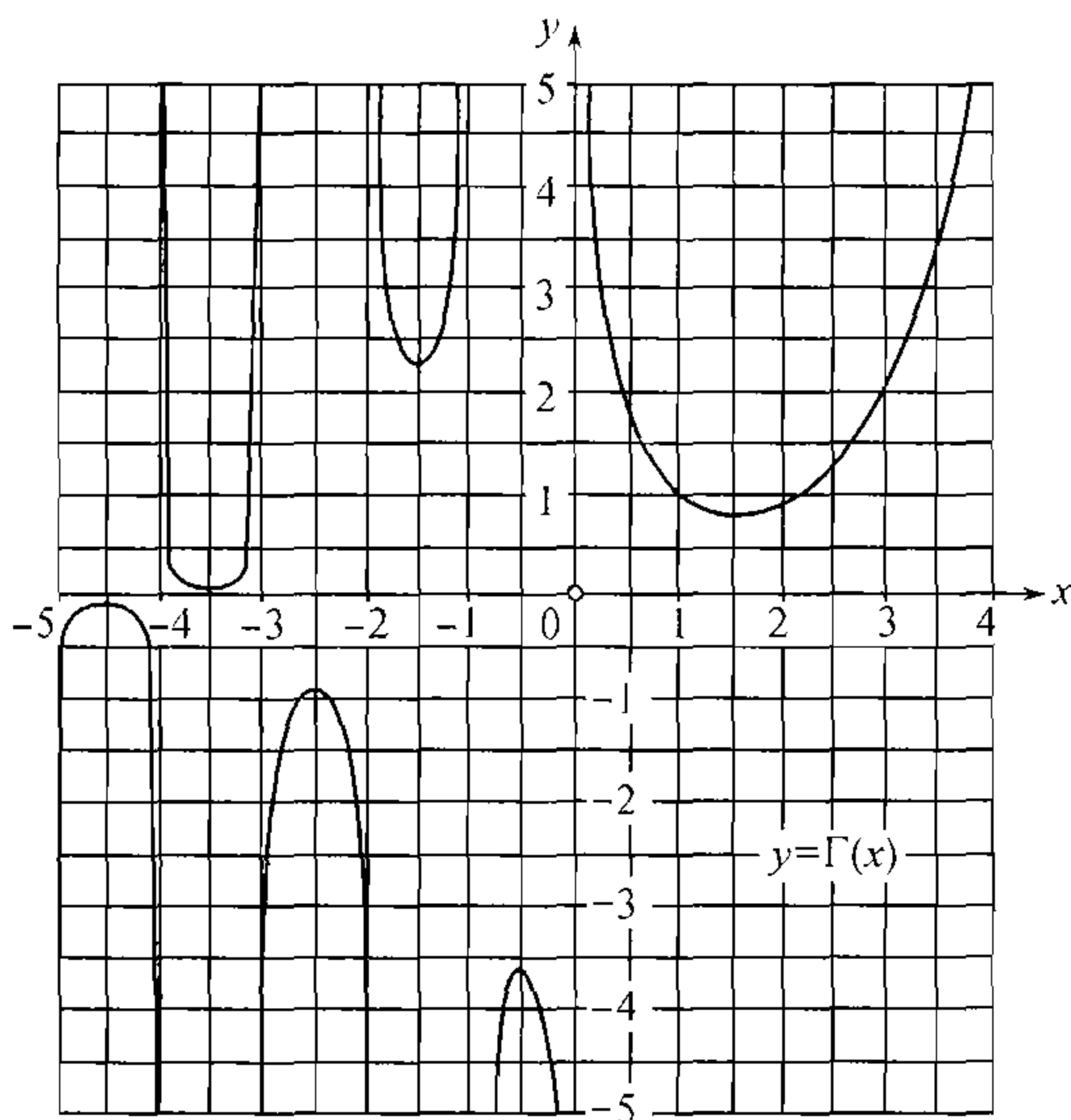


图 64

将这里的  $a$  换成  $a + b$  ( $b > 0$ ) 并同时把  $t$  换成  $1 + t$ , 便得:

$$\frac{\Gamma(a + b)}{(1 + t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

现在把这个等式两边乘上  $t^{a-1}$ , 并从 0 到  $\infty$  对  $t$  取积分:

$$\Gamma(a + b) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1 + t)^{a+b}} dt = \int_0^\infty t^{a-1} dt \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

左边的积分我们认出就是函数  $B(a, b)$  [参看 (4)], 而右边的积分我们来重新加以配置. 结果便得出 [考虑到 (13) 与 (6)]:

$$\begin{aligned} \Gamma(a + b) \cdot B(a, b) &= \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt \\ &= \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a) \int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b), \end{aligned}$$

因而最后便有

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}. \quad (14)$$

关于欧拉积分的这个关系的精彩结论, 系由狄利克雷所导出. 不过为要确立这个关系, 尚须证明重新配置积分是有道理的.

我们就来作这件事, 首先限于假定:  $a > 1, b > 1$ . 那么对函数

$$t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}$$



来说, 521 目的推论的所有条件都成立: 这个函数对  $y \geq 0$  及  $t \geq 0$  连续 (并且是正的), 而积分

$$t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

与

$$y^{a+b-1} e^{-y} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt = \Gamma(a) y^{b-1} e^{-y}$$

本身同样是连续函数, 首先, 对  $t$  当  $t \geq 0$  连续, 其次, 对  $y$  当  $y \geq 0$  连续. 引用所提到的推论就证明了积分替换的合理性, 与一起公式 (14) 对  $a > 1, b > 1$  是正确的.

若仅知道  $a > 0$  及  $b > 0$ , 那么按照所证明的有

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

而由此, 应用  $\beta$  函数的简约公式 (2), (2') 及  $\Gamma$  函数的简约公式 (9). 容易重新得到没有了不必要的限制的公式 (14).

5° 余元公式 如果在公式 (14) 中命  $b = 1 - a$  (假定  $0 < a < 1$ ), 则由于 (5) 及 (11), 我们就得到关系式 [参看 408(30)]

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad (15)$$

这就叫作余元公式

当  $a = \frac{1}{2}$  时, 由此即得 (因为  $\Gamma(a) > 0$ ):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (16)$$

倘若在积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}$$

中作替换  $z = x^2$ , 则重新得到欧拉-泊松积分的值:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6° 作为余元公式的应用, 我们来确定 (欧拉) 乘积

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

(其中  $n$  是任意的自然数) 的大小. 将这个乘积依相反的次序重新写下:

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$



把这两个表达式相乘起来:

$$E^2 = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$$

并对于每一对因子  $\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$  应用余元公式, 我们便得到

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdots \sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

现在为要计算正弦乘积 (参看第 493 目例 2), 我们来考察恒等式

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left( z - \cos \frac{2\nu\pi}{n} - i \sin \frac{2\nu\pi}{n} \right)$$

并在其中使  $z$  趋于 1. 取极限的结果为

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left( 1 - \cos \frac{2\nu\pi}{n} - i \sin \frac{2\nu\pi}{n} \right)$$

或 (令模相等),

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left| 1 - \cos \frac{2\nu\pi}{n} - i \sin \frac{2\nu\pi}{n} \right| = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{n},$$

故

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

将此代入  $E^2$  之表达式内, 我们便最后得到:

$$E = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \quad (17)$$

7° 拉阿伯积分 计算重要的积分

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(a) da$$

时, 也牵涉到余元公式, 显然这个积分存在, 因为 [参看 (9)]

$$\ln \Gamma(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln a.$$

将  $a$  换为  $1-a$ , 则可以写成

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(1-a) da,$$



再相加

$$\begin{aligned} 2R_0 &= \int_0^1 \ln \Gamma(a) \Gamma(1-a) da = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin a\pi} da \\ &= \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin x dx = \ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx. \end{aligned}$$

在这里代入我们所已知的 [492, 1°] 积分值, 便得

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(a) da = \ln \sqrt{2\pi}. \quad (18)$$

拉阿伯研究了积分 (当  $a > 0$  时)

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da = \int_0^{a+1} - \int_0^a.$$

因为显然

$$R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln a$$

[参看 (9)], 故积分之, 便得 (对于  $a > 0$ )

$$R(a) = a(\ln a - 1) + C.$$

但是  $R(a)$  在  $a = 0$  时也保持连续; 在此处使  $a \rightarrow 0$  取极限, 我们便看出  $C = R_0$ . 代入值 (19), 我们便导出拉阿伯公式:

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}. \quad (19)$$

8° 勒让德公式 如果在积分

$$\begin{aligned} B(a, a) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx \end{aligned}$$

中作替换  $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ , 则得

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

在等式两边将  $\beta$  函数代以其通过  $\Gamma$  的表达式 (14):

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}.$$



消去  $\Gamma(a)$  并将  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  代以它的值  $\sqrt{\pi}$  [参看 (16)], 我们就导出勒让德公式:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \Gamma(2a). \quad (20)$$

**532.** 由  $\Gamma$  函数的特性而得的同义定义 我们知道, 函数  $\Gamma(a)$  及其导数对于  $a$  的正值都是连续的. 除此而外 [参看 (9), (20), 与 (15)], 它还满足下列关系:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \Phi(a+1) = a\Phi(a), \\ \text{(II)} \quad & \Phi(a)\Phi\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Phi(2a), \\ \text{(III)} \quad & \Phi(a)\Phi(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \end{aligned}$$

我们来证明, 这些特性完全确定出了  $\Gamma$  函数 (因而任何一个具备了这些特性的函数必与  $\Gamma$  恒等).

单只是特性 (I) 与 (II) 是不够的, 因为函数

$$\Phi(a) = \Gamma(a) \cdot [4 \sin^2 a\pi]^\mu \quad (\mu > 0)$$

和  $\Gamma$  一样, 也具备特性 (I) 与 (II). 而特性 (II) 与 (III) 同样也是不够的, 因为函数

$$\Phi(a) = \Gamma(a) \cdot z^{a-\frac{1}{2}} \quad (z > 0)$$

也具备此二特性. 最后, 特性 (I) 与 (III) 则显然使得当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时函数  $\Phi(a)$  的值可以任意. 但若这三个特性一齐具备, 那么情形就不同了. 不过特性 (III) 可以用一个较弱的条件来代替, 就是只要函数  $\Phi(a)$  当  $a > 0$  时不为 0, 而这一点恰可由 (III) 推得<sup>①</sup>.

总之, 设函数  $\Phi(a)$  及其导数对于  $a > 0$  皆连续, 而且  $\Phi(a)$  异于 0 并满足关系 (I) 与 (II). 我们来证明此时  $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ .

我们设  $\Phi(a) = M(a) \cdot \Gamma(a)$ ; 显而易见, 函数  $M(a)$  及其导数也都是连续的而且  $M(a)$  异于 0. 除此而外, 因为  $\Phi(a)$  与  $\Gamma(a)$  皆满足条件 (I) 与 (II), 故  $M(a)$  满足关系式

$$(I') \quad M(a+1) = M(a) \quad \text{及} \quad (II') \quad M(a)M\left(a + \frac{1}{2}\right) = M(2a).$$

从 (I') 即可明白看出, 当  $a \rightarrow +0$  时  $M(a)$  存在有有限的极限, 如果将此极限取作  $M(0)$  的值, 则  $M(a)$  及其导数就一直到了  $a = 0$  都是连续的.

我们注意, 当  $a = \frac{1}{2}$  时由 (II') 推知  $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ; 这就是说对于所有的  $a \geq 0$  皆有  $M(a) > 0$ . 这样我们就可以来研究函数

$$L(a) = \ln M(a),$$

此函数及其导数对于  $a \geq 0$  也同样是连续的, 不过所满足的关系式乃是:

$$(I'') \quad L(a+1) = L(a) \quad \text{及} \quad (II'') \quad L(a) + L\left(a + \frac{1}{2}\right) = L(2a).$$

<sup>①</sup>这是对于  $0 < a < 1$ ; 而对于其他的  $a$  值; 则由 (I) 即已推知此条件仍得成立.



最后, 我们还引入一个连续函数

$$\Delta(a) = L'(a);$$

它适合关系式

$$(I''') \quad \Delta(a+1) = \Delta(a) \quad \text{及} \quad (II''') \quad \Delta(a) + \Delta\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2a).$$

在  $(II''')$  中将  $a$  换成  $\frac{a}{2}$ , 使得

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta\left(\frac{a}{2}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{2}\right) \right\} = \Delta(a).$$

如若在其中先将  $a$  复换为  $\frac{a}{2}$ , 其次再将  $a$  换为  $\frac{a+1}{2}$ , 并将所得到的两个等式相加, 则得出

$$\frac{1}{4} \left\{ \Delta\left(\frac{a}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+3}{4}\right) \right\} = \Delta(a).$$

利用数学归纳法, 不难建立一般的关系式

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \Delta(a).$$

但是, 不管  $a$  是怎么样的, 左边的和数总可看成是积分

$$\int_0^1 \Delta(x) dx$$

的积分和<sup>①</sup>, 因此

$$\Delta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \int_0^1 \Delta(x) dx = L(1) - L(0) = 0$$

[由于  $(I'')$ ]. 在这种情形下,  $L(a) = \text{常量}$ , 也就是说  $M(a) = \text{常量}$ . 但是我们已经看到了  $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , 故  $M(a) \equiv 1$ , 亦即  $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ , 此即所欲证明.

在最后我们还要注意, 可微分的条件在这里占有极重要的位置而是不可缺少的. 例如若设

$$L(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n \pi a),$$

则由  $L(a)$  的外形上即知其为连续函数, 并满足条件  $(I'')$  与  $(II'')$ . 同时  $L(0) = 0$ , 而  $L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ , 所以,  $L(a)$  不能成为常量!

**533.  $\Gamma$  函数的其他函数特性** 在上一目给出了函数  $\Gamma(a)$  作为函数本身及其导数皆连续, 并适合函数方程 (I) 与 (II) 且 (对  $a > 0$ ) 异于 0 的唯一的函数. 在这里, 我们给出函数  $\Gamma(a)$  更为简单的特征, 只应用一个函数方程 (I), 但假设对函数还有一个要求: “对数凸性”, 其含义我们马上来解释.

<sup>①</sup>此时要利用  $(I''')$  而考虑到函数  $\Delta(a)$  的周期性.



在 141 目曾给出凸函数的定义. 给定在区间  $\mathcal{X}$  上的正函数  $f(x)$  称为在这个区间上是对数凸的, 是指其对数  $\ln f(x)$  是凸函数, 因为

$$f(x) = e^{\ln f(x)},$$

那么, 根据 142 目 3°, 由函数  $f(x)$  的对数凸性可推知函数本身的凸性. 反过来的结论, 一般说来不正确. 于是, 对数凸函数仅仅是整个凸函数类的一部分.

应用 143 目定理 2 可以证明对数凸性的条件: 设正函数  $f(x)$  及其导数在区间  $\mathcal{X}$  上连续, 并在区间内部有有限的二阶导数  $f''(x)$ ; 那么为使函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  是对数凸的, 必须且只需在  $\mathcal{X}$  的内部有

$$f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 \geq 0.$$

其证明是要对函数  $\ln f(x)$  应用上面提到的定理.

现在回到函数  $\Gamma(x)$ . 其一、二阶导数由公式 (8) 及 (8\*) 表出. 按照布尼亚科夫斯基不等式 [321, (13'); 483, 7)]

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [\psi(x)]^2 dx - \left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 \geq 0,$$

若此处令

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad \varphi(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}}, \quad \psi(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}} \cdot \ln x,$$

便得

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma''(a) - [\Gamma'(a)]^2 \geq 0.$$

由此, 按照刚才引述的条件, 函数  $\Gamma(a)$  在区间  $(0, \infty)$  内是对数凸的. 就是用这个性质, 连同方程 (I), 确定  $\Gamma$  函数准确到常数因子, 换句话说:

若 1) 在区间  $(0, \infty)$  内  $\Phi(a)$  适合方程 (I)

$$\Phi(a+1) = a \cdot \Phi(a),$$

2)  $\Phi(a)$  是对数凸的且

3)  $\Phi(1) = 1$ , 则  $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ .

假设对  $\Phi(a)$  所有这三个条件成立.

重复应用方程 (I), 就得到一般等式

$$\Phi(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1) \cdot a \cdot \Phi(a), \quad (21)$$

其中  $n$  是任意一个自然数, 由此, 设  $a = 1$  [参看 3)] 并以  $n-1$  代替  $n$ , 便求得

$$\Phi(n) = (n-1)! \quad (22)$$

注意, 只需证明  $\Phi(a)$  与  $\Gamma(a)$  在区间  $(0, 1]$  重合, 因为由于 (I) 式, 这两个函数处处重合. 设  $0 < a \leq 1$ , 回忆起 143 目的不等式 (6),

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$



对凸函数  $f(x)$  在唯一的条件  $x_1 < x_2$ <sup>①</sup>下成立. 把这个不等式应用两次于凸函数  $\ln \Phi(a)$  (根据 2)), 对任意的  $n \geq 2$ , 得到

$$\frac{\ln \Phi(-1+n) - \ln \Phi(n)}{(-1+n) - n} \leq \frac{\ln \Phi(a+n) - \ln \Phi(n)}{(a+n) - n} \leq \frac{\ln \Phi(1+n) - \ln \Phi(n)}{(1+n) - n}$$

或者 —— 考虑到 (22),

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln \Phi(a+n) - \ln(n-1)!}{a} \leq \ln n.$$

由此推出

$$\ln[(n-1)^a \cdot (n-1)!] \leq \ln \Phi(a+n) \leq \ln[n^a \cdot (n-1)!].$$

这意味着

$$(n-1)^a \cdot (n-1)! \leq \Phi(a+n) \leq n^a \cdot (n-1)!.$$

现在借助 (21) 式, 变到  $\Phi(a)$  的值本身, 便引到不等式

$$\frac{(n-1)^a (n-1)!}{a(a+1) \cdots (a+n-1)} \leq \Phi(a) \leq \frac{n^a (n-1)!}{a(a+1) \cdots (a+n-1)}.$$

最后, 用  $n+1$  代替  $n$ , 把所得不等式表为

$$\Phi(a) \leq n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1) \cdots (a+n-1)} \leq \Phi(a) \cdot \frac{a+n}{n}.$$

由此已很明显有

$$\Phi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1) \cdots (a+n-1)} = \Gamma(a),$$

—— 这是根据欧拉-高斯公式 (7).

### 534. 例题 1) 试求积分

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0).$$

提示 设  $x^m = y$ , 将其化成第一种类型的欧拉积分.

答案

$$\frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right) = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m} + q\right)}.$$

例如根据此结果, 试证对任意自然数  $n$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad (\text{欧拉}).$$

### 2) 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} dx \quad (\alpha, \beta \geq 0; \gamma, p, q > 0).$$

<sup>①</sup>诚然, 在所提到的地方曾假设:  $x_1 < x < x_2$ , 但不难证明, 所说的不等式对任意正的点  $x$ , 只要它不与  $x_1$  及  $x_2$  重合, 就是成立的.



借助于替换

$$\frac{(\alpha + \gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t, \quad \frac{(\beta + \gamma)(1-x)}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = 1-t, \quad \frac{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)dx}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^2} = dt,$$

所给的积分可化为以下形状

$$\frac{1}{(\alpha + \gamma)^p(\beta + \gamma)^q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{B(p, q)}{(\alpha + \gamma)^p(\beta + \gamma)^q}.$$

3) 试求积分

$$(a) \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}} dx \quad (a, b, p > 0);$$

$$(b) \int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx \quad (m, n > 0).$$

提示 (a) 替换  $y = (1+p)\frac{x}{x+p}$ . (b) 替换  $u = \frac{1}{2} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ .

答案 (a)  $\frac{1}{(1+p)^a p^b} B(a, b)$ ; (b)  $2^{m+n-2} B(m, n)$ .

由此可依次得出一系列的有趣的积分来. 例如, 若在后一个积分中取  $n = 1-m$ , 设  $2m-1 = \cos 2\alpha$  并作替换  $x = \operatorname{tg} \varphi$ , 则得出

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \right)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 \alpha)}.$$

4) 试求积分:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi \quad (a, b > 0);$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi \quad (a > 0);$$

$$B) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c \varphi d\varphi \quad (|c| < 1).$$

解 (a) 设  $x = \sin \varphi$ , 就将其化为积分

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x^2)^{\frac{b}{2}-1} dx,$$

所以, 利用 1) 题, 我们便有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

(b) 特别当  $b = 1$  时, 由此便得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \textcircled{1}.$$

① 不难验出, 第 312 目 (8) 的两个公式都作为特殊情形, 而被包含在这个公式里了.



借助于勒让德公式, 此结果可改写为以下形状:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = 2^{a-2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

(B) 最后, 在 (a) 中令  $a = 1 + c$  并  $b = 1 - c$ , 此处  $|c| < 1$ , 便得到 (利用余元公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{c\pi}{2}}.$$

5) 试定曲线

$$r^4 = \sin^3 \theta \cos \theta$$

所界出的图形面积  $P$ .

**解** 曲线有两个环, 在第一象限与第三象限; 只需将其中之一的面积二倍起来就行了. 根据极坐标中面积公式 [338,(9)], 我们有

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3},$$

[参看 4) 题 (a) 及关系式 (9),(12),(15)].

6) 试定 (a) 由曲线

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

的一支所界出的面积  $P$  以及 (6) 这一支的长度  $S$ .

**解** (a)  $P = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{2}{m}} m\theta d\theta = \frac{a^2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi d\varphi$

$$= \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} = \frac{\pi a^2}{m\sqrt{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2}$$

[参看 4) 题 (6) 及关系式 (9),(20)].

(6) 根据极坐标中弧长公式 [329,(46)]:

$$S = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta d\theta = \frac{2a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{m}-1} \varphi d\varphi = \frac{a}{m} \cdot 2^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

[参看 4) 题 (6)].

7) 计算积分

$$(a) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3 - \cos \theta}},$$

$$(b) \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin \varphi}{1 + k \cos \varphi} \right)^{a-1} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi} \quad (a > 0, 0 < k < 1).$$

(a) 提示 替换:  $\cos \theta = 1 - 2\sqrt{x}$ . 答案  $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2$ .



(6) 提示 替换:  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

答案  $\frac{2^{a-1}}{(1-k^2)^{a/2}} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{a}{2})]^2}{\Gamma(a)}$ .

8) 试证

$$\int_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3} \int_1^{\infty} (x^3-1)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

解 设

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx &= I_1, \quad \int_1^{\infty} (x^3-1)^{-\frac{1}{2}} dx = I_2. \\ \int_{-\infty}^0 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_0^{\infty} (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = I_3. \end{aligned}$$

应该证明等式

$$I_1 + I_3 = \sqrt{3} I_2.$$

分别应用替换  $x = t^{\frac{1}{3}}, x = t^{-\frac{1}{3}}, x = (t^{-1} - 1)^{\frac{1}{3}}$  于这几个积分, 我们就将它们化成了第一类型的欧拉积分. 其后则只需再利用几次余元公式即可.

9) 试证 (狄利克雷) 公式

$$\Gamma(r) \int_0^{\infty} \frac{e^{-fx} x^{s-1}}{(g+x)^r} dx = \Gamma(s) \int_0^{\infty} \frac{e^{-gy} y^{r-1}}{(f+y)^s} dy \quad (f, s, g, r > 0).$$

提示 替换

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^r} = \int_0^{\infty} e^{-(g+x)y} y^{r-1} dy, \quad \frac{\Gamma(s)}{(f+y)^s} = \int_0^{\infty} e^{-(f+y)x} x^{s-1} dx,$$

并利用调换对于  $x$  与对于  $y$  积分的次序 (正函数的情形.)

10) 在第 511 目 12) 题中, 我们证明了恒等式

$$\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}' = c = \text{常量}$$

(关于符号请参看所指出的地方). 然后借助于某种极限过程, 就确定出  $c = \frac{\pi}{2}$ . 但对于某一特殊的  $k$  值算出了左边的量, 也可以得到这同一结果.

命  $k = 1/\sqrt{2}$ ; 于是  $k' = k, \mathbf{E}' = \mathbf{E}$  并且  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ , 恒等式就取成了以下形状:

$$2\mathbf{E}\mathbf{K} - \mathbf{K}^2 = (2\mathbf{E} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{K} = c.$$

顺次利用替换  $\cos \varphi = t, t^4 = x$ , 可把积分

$$\mathbf{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}, \quad \mathbf{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

化为第一类型的欧拉积分:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \right\}, \end{aligned}$$



因而

$$2\mathbf{E} - \mathbf{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

由此所求常量

$$c = \frac{1}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

11) 试将积分

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (s > 1), \quad (b) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \quad (s > 0)$$

展为级数.

解

$$\begin{aligned} (a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \Gamma(s) \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \Gamma(s) \cdot \zeta(s), \end{aligned}$$

$\zeta(s)$  [黎曼  $\zeta$  函数] 和通常一样, 表示最后的级数的和. 在这里我们利用了关于正项级数的积分的定理 [518] 以及公式 (13).

$$(b) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \quad \text{优函数: } \frac{2x^{s-1}}{e^x + 1}.$$

若  $s > 1$ , 则此结果可表成  $\Gamma(s)(1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s)$  的形状, 因为

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} (1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

12) 上题稍加推广即得以下各展式:

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx = \Gamma(s) \cdot \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a+n)^s} \quad (s > 1, a > 0)$$

[当  $a = 1$  时, 由此即得 11)(a)];

$$(b) \int_0^\infty \frac{zx^{s-1} dx}{e^x - z} = \Gamma(s) \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \quad (-1 \leq z < 1 \text{ 且 } s > 0, \text{ 或 } z = 1 \text{ 且 } s > 1)$$

[当  $z = 1$  时, 由此得出 11)(a), 而当  $z = -1$  时, 由此即得 11) (b)].

13) 以  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  表示超几何级数 [参看 441, 6]

$$1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n,$$



试证明关系式

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

(高斯).

假定  $\alpha > 0$  并且  $\gamma - \alpha > 0$ , 我们来对  $0 < x < 1$  考察以下积分

$$I(x) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta} dz.$$

因为级数

$$(1-zx)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} x^n z^n$$

(在固定的  $x$  之下) 对于  $z$  而言在区间  $[0, 1]$  内乃是一致收敛的, 所以用一个在此区间上的可积函数  $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}$  来乘, 所得出的级数可以逐项积分. 于是我们就得到了展式

$$I(x) = \sum_0^{\infty} I_n \cdot x^n,$$

其中

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \end{aligned}$$

[参看 (10)].

因此,

$$I(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

为要得出高斯公式, 则需在此处对于  $x \rightarrow 1$  来取极限即可 (假定  $\gamma - \alpha - \beta > 0$ ). 根据亚贝尔定理 [437, 6°], 这个极限过程可以在级数里逐项来做. 而对于积分可在积分号下来取极限, 这是由于存在有优函数:

$$z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} \quad (\text{对于 } \beta \leq 0) \quad \text{或} \quad z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \quad (\text{对于 } \beta > 0).$$

其结果即 [参看 (14)]:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, 1),$$

由此就推得所要证明的关系式.

特别是在  $\gamma = 1, \beta = -\alpha$  时, 从这个关系式便得出 [注意到 (11), (9), (15)] 有趣的展式 ( $0 < \alpha < 1$ )

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} = 1 - \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1\cdot 2)^2} - \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \dots \textcircled{1}$$

①不过, 将我们所熟知的正弦的无穷乘积表达式 [408] 加以变化, 也可得到这个展式.



**535.  $\Gamma$  函数的对数导数** 为要继续研究  $\Gamma$  函数的特性, 我们来考察其对数导数, 即表达式

$$\frac{d \ln \Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

9° 从公式 (8) 即可得出这个表达式的各种积分的表示法. 不过由以下的考虑出发是比较简捷的. 我们有

$$\begin{aligned} \Gamma(b) - B(a, b) &= \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b) \cdot b}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b} \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}, \end{aligned}$$

所以, 如果在这里对于  $b \rightarrow 0$  来取极限, 则

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} [\Gamma(b) - B(a, b)].$$

我们首先取 [参看 (6) 与 (4)]:

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx, \quad B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

于是

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^\infty x^{b-1} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right] dx,$$

并且将极限过程拿到积分号下来进行, 我们便得出柯西公式:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}. \quad (23)$$

为要说明极限过程是合理的, 可注意在  $x=0, b=0$  附近表达式

$$\frac{1}{x} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right]$$

乃是  $x$  与  $b$  的连续函数, 而  $x^b < 1$ . 对于充分大的  $x$  与  $b \leq b_0$  存在有优函数

$$x^{b_0-1} \left[ \frac{1}{(1+x)^a} - e^{-x} \right].$$

倘使在  $B$  的表达式 (1) 中先做替换  $x = e^{-t}$ :

$$B(a, b) = \int_0^\infty e^{-at} (1 - e^{-t})^{b-1} dt,$$

则可重新写成

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^\infty [e^{-x} x^{b-1} - e^{-ax} (1 - e^{-x})^{b-1}] dx.$$



在这里于积分号下取极限 (类似地也可说明这是合理的), 便得到另一公式:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right) dx. \quad (24)$$

反之, 从积分号下函数也很可以作出几个有代表性的表达式来. 为此, 我们在 (23) 中命  $a=1$ :

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[ e^{-x} - \frac{1}{1+x} \right] \frac{dx}{x} = -C,$$

其中  $C$  就是所谓的欧拉常数<sup>①</sup>. 从 (23) 中逐项减去此等式, 便得

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}.$$

最后, 用替换  $t = \frac{1}{1+x}$ , 我们便导出高斯公式:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt. \quad (25)$$

**536.  $\Gamma$  函数之叠乘定理** 10° 现在我们依据对数导数的表达式 (25), 来建立以下的一个也是属于高斯的著名公式:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}} \Gamma(na) \quad (26)$$

( $n$  为任意的自然数). 此即表出  $\Gamma$  函数之叠乘定理.

在 (25) 中设  $t = u^n$ , 便得:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na-1}}{1-u^n} du,$$

由此将  $a$  替换成  $a + \frac{\nu}{n}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ),

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)} + C = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na+\nu-1}}{1-u^n} du$$

并依照  $\nu$  从 0 到  $n-1$  相加,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)} + nC = n \int_0^1 \left[ \frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{na-1}}{1-u} \right] du.$$

<sup>①</sup>我们在第十一章中 [367, 10] 已经有了这个常数的另一定义. 我们将在下文看到, 两个定义是恒等的.



我们将此等式与下列等式

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + C = \int_0^1 \frac{1 - u^{na-1}}{1 - u} du$$

来作比较. 用  $n$  乘后一个等式再从前一个等式中减去之, 就得到

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma' \left( a + \frac{\nu}{n} \right)}{\Gamma \left( a + \frac{\nu}{n} \right)} - n \frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} &= n \int_0^1 \left[ \frac{nu^{n-1}}{1 - u^n} - \frac{1}{1 - u} \right] du \\ &= -n \ln \frac{1 - u^n}{1 - u} \Big|_0^1 = -n \ln n, \end{aligned}$$

这可以改写成下面形状:

$$\frac{d}{da} \ln \frac{\Gamma(a) \Gamma \left( a + \frac{1}{n} \right) \cdots \Gamma \left( a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = -n \ln n.$$

由此积分之, 使得

$$\ln \frac{\Gamma(a) \Gamma \left( a + \frac{1}{n} \right) \cdots \Gamma \left( a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = -an \ln n + \ln C^{①}$$

或

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma \left( a + \frac{1}{n} \right) \cdots \Gamma \left( a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = \frac{C}{n^{na}}.$$

为要确定出常数  $C$ , 在其中令  $a = \frac{1}{n}$ . 显而易见,  $C = nE$ , 此处  $E$  就是我们在第 531 目 6° 所已见过的欧拉乘积. 代入 (17) 中的值, 我们就得出了公式 (26).

以前独立地导出的勒让德公式 (20) 乃是高斯公式之一特殊情形, 实际上, 若在 (26) 中取  $n = 2$ , 则得出公式

$$\Gamma(a) \Gamma \left( a + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-\frac{1}{2}}} \Gamma(2a),$$

这等价于 (20).

**537. 几个级数展式与乘积展式** 11° 这几个展式的根源也还是在于公式 (25). 我们将积分号下表达式展为级数:

$$\frac{1 - t^{a-1}}{1 - t} = (1 - t^{a-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (t^{\nu} - t^{a+\nu-1}),$$

① 由于预见到要取作幂次, 故我们事先将任意常数取成  $\ln C$  形状.



这级数的所有的项皆具同一符号. 逐项积分, 便给出:

$$D \ln \Gamma(a) + C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{a+\nu} \right). \quad (27)$$

此级数对于  $0 < a \leq a_0$  一致收敛, 因存在有优级数  $(a_0 + 1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ .

倘若将其对于  $a$  逐项来微分, 则得到以简单而著称的展式

$$D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(a+\nu)^2}. \quad (28)$$

因为这个级数对于  $a > 0$  也是一致收敛的 (优级数  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ ), 故逐项微分是准许的.

12° 将级数 (27) 对于  $a$  从 1 到  $a > 0$  来逐项积分 (由于级数的一致收敛性, 逐项积分是合理的), 便得到

$$\ln \Gamma(a) + C(a-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{a-1}{\nu+1} - \ln \frac{a+\nu}{\nu+1} \right). \quad (29)$$

将  $a$  换成  $a+1$  (对于  $a > -1$ ), 重新将展式写为以下形状:

$$\ln \Gamma(a+1) + Ca = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{n} - \ln \frac{a+n}{n} \right)$$

或是

$$\ln \frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{n} \right) - \frac{a}{n} \right].$$

由此, 取为幂次, 便导出展  $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$  为无穷乘积的著名的魏尔斯特拉斯公式 [参看 402 (16)]:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) e^{-\frac{a}{n}} \quad (a > -1). \quad (30)$$

13° 我们回到 (29) 上来, 在其中使  $a = 2$ . 因为  $\ln \Gamma(2) = \ln 1 = 0$ , 所以我们得到:

$$C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\nu+1} - \ln \frac{\nu+2}{\nu+1} \right). \quad (31)$$

顺便注意一下, 由此

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right]$$

我们便导出了我们所已知的欧拉常数之定义 [367, 10)].



最后, 以  $a-1$  乘 (31), 并由 (29), 逐项相减, 我们就消去了  $C$ :

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(a) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ (a-1) \ln \frac{\nu+2}{\nu+1} - \ln \frac{a+\nu}{\nu+1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ n^{a-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdots (a+n-2)} \right].\end{aligned}$$

由此, 利用取幂次的办法, 我们便重新得出了以前曾以他法而建立之欧拉 - 高斯公式 (7).

538. 例与补充 1) 试利用

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n,$$

以证明 (对于  $a > 0$ )

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{a-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n dt,$$

并由此导出公式 (7).

提示 这极限等式可依照第 519 目 10 题及 11 题中所做的那样来建立. 应用替换  $r = \frac{t}{n}$  来改变积分的形状:

$$\int_0^n t^{a-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n dt = n^a \int_0^1 \tau^{a-1} (1 - \tau)^n d\tau = n^a \cdot B(a, n+1),$$

并再利用公式 (3)

2) 试从公式 (23)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}$$

直接导出公式 (24)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du.$$

我们注意, 这里的困难之点就在于积分 (24) 不能看作是两个积分的差 (否则应用替换  $x = e^u - 1$  改变第二个积分的形状, 问题就完结了). 因此为要避免这一点, 我们这样写:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^a \cdot x} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u} - \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\infty} \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} du \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du,\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} du = 0.$$

[关于这一点只需用表达式  $\frac{\varepsilon - \ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{a-1}} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^{a-1}}$  来对积分估值, 即可明白看出].



3) 试根据欧拉常数的定义等式

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right),$$

以建立积分公式:

$$(a) \quad C = \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

$$(b) \quad C = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1+u} - e^{-u} \right) \frac{du}{u}.$$

因为

$$\sum_1^n \frac{1}{\nu} = \int_0^1 \sum_1^n t^{\nu-1} dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s} ds,$$

而

$$\ln n = \int_1^n \frac{ds}{s},$$

所以

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s} ds - \int_1^n \frac{ds}{s} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^n \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \frac{dx}{x} \right\}. \end{aligned}$$

关于第二个积分的极限过程, 和在 1) 中同样地来进行. 关于 (a) 变形成为 (b) 则参看 2).

4) 设 (对于  $a > 0$ , 并  $s > 1$ )

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s},$$

试证

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \left[ \zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} \right] = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

我们已经有了 [534, 12)(a)]

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx.$$

因此

$$\begin{aligned} \zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx - \Gamma(s-1) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left[ \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right] dx. \end{aligned}$$

对于  $s \rightarrow 1$  的极限过程可以在积分号下来做, 因为积分号下的表达式在区间  $[0, 1]$  与  $[1, +\infty]$  内分别单调地趋于其极限 [518]. 然后再利用公式 (24).



特别当  $a = 1$  时, 就得到

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \left[ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] = C$$

[参看 375, 1)].

5) 试计算无穷乘积

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

其中

$$u_n = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_k)} \quad (a_i, b_i, > -1).$$

[因为

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) \left(1 + \frac{b_1}{n}\right)^{-1} \cdots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)}{n} + \frac{A_n}{n^2} \\ &\quad (|A_n| \leq A < +\infty), \end{aligned}$$

所以仅只在条件

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$

之下无穷乘积方才收敛; 而我们提出来要计算  $P$  也正是以此为前提的.]

提示 先将  $u_n$  表成以下形状:

$$u_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-\frac{a_1}{n}} \cdots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-\frac{b_1}{n}} \cdots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right) e^{-\frac{b_k}{n}}},$$

再利用魏尔斯特拉斯公式 (30).

答案

$$P = \frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}.$$

6) 设  $0 < |a_i|, |b_i| < 1$ , 从 5) 推出欧拉的另一结果:

$$\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n = \frac{\sin b_1 \pi \cdot \sin b_2 \pi \cdots \sin b_k \pi}{\sin a_1 \pi \cdot \sin a_2 \pi \cdots \sin a_k \pi}.$$

提示 应用公式

$$\Gamma(Hc) \cdot \Gamma(1-c) = \frac{\pi c}{\sin \pi c} \quad (0 < |c| < 1),$$

它是从 (9) 与 (15) 推出来的.

7) 回到高斯公式:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)},$$

此式在 534 目 13) 题中, 是在

$$\alpha > 0, \quad \gamma - \alpha > 0 \quad \text{及} \quad \gamma - \alpha - \beta > 0$$



的假设下证明的. 现在提出用另一方法的证明: 仅在公式右端对  $\Gamma$  函数假设其自变量为正的, 而取消不必要的条件  $\alpha > 0$ .

我们来指出证明的计划. 相应地以  $a_n, b_n, c_n$  表示超几何级数

$$A = F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \quad B = F(\alpha - 1, \beta, \gamma, 1), \quad C = F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1)$$

的通项, 关系式

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) c_n - b_{n+1}$$

$$(\gamma - \alpha)(a_n - b_n) = \beta a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - na_n$$

可直接验证, 且可证明  $na_n \rightarrow 0$ . 对上述关系式, 指标从 1 到  $n$  求和并取极限, 得:

$$\gamma B = (\gamma - \beta)C, \quad (\gamma - \alpha)(A - B) = \beta A,$$

由此

$$A = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} C.$$

现在研究表达式

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}; \quad (32)$$

上述关系式 (由于 (9)) 表明, 当以  $\gamma + 1$  替换  $\gamma$  时, 这个表达式的值不变. 于是

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}$$

$$= F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1) \frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m) \cdot \Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)}.$$

等式右端令  $m \rightarrow \infty$  而取极限. 由级数  $F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1)$  对  $m$  的一致收敛性推出 [433], 其和趋于 1. 因子

$$\frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m) \cdot \Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)}$$

也趋于同样的极限, 因为根据 5) 题, 它是对于收敛乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha + n)(\gamma - \beta + n)}{(\gamma + n)(\gamma - \alpha - \beta + n)}$$

的余乘积. 在这样的情况下表达式 (32) 等于 1, 而这与高斯公式等价.

由此公式, 当  $\gamma = 1, \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  时, 现在可以得到展开式

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{4}{\pi};$$

可以证明更一般的结果: 与指数为  $m$  的二项式对应的二项式系数之和, 当  $m > -\frac{1}{2}$  时, 等于

$$\frac{\Gamma(1 + 2m)}{[\Gamma(1 + m)]^2} \quad (\gamma = 1, \alpha = \beta = -m).$$



先前, 由于  $\alpha > 0$  的限制, 我们不能做到这一点.

8)  $\Gamma(a)$  推广到负  $a$  的情形. 根据公式 (9)

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a},$$

故  $\Gamma(a)$  的值可通过  $\Gamma(a+1)$  的值来确定. 倘若  $-1 < a < 0$ , 则  $a+1 > 0$ ,  $\Gamma(a+1)$  就有意义. 我们就依照上面这个公式来定义  $\Gamma(a)$ ; 这样一来, 函数  $\Gamma(a)$  的定义便推广到了  $-1 < a < 0$  的情形. 一般言之, 倘若  $-n < a < -(n-1)$ , 则为要将公式 (10) 推广到这个情形, 我们就以等式

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \quad (33)$$

来定义  $\Gamma(a)$ .

若要作得更清晰一些, 可于其中使  $a = -n + \alpha$ , 此处  $0 < \alpha < 1$ , 于是这定义即可改写如下:

$$\Gamma(a-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(a)}{(1-a)(2-a)\cdots(n-a)}, \quad (34)$$

由此立刻看出, 对于  $-n < a < -(n-1)$ ,  $\Gamma(a)$  之符号系取决于因子  $(-1)^n$ . 当  $a$  靠近  $-n$  或  $-(n-1)$  时 (也就是说当  $\alpha$  靠近 0 或 1 时)  $\Gamma(a)$  越于  $\infty$  (一阶无穷大!)

9) 建议读者, 试根据 8), 将公式 (7), (9), (15), (20), (26), (30) 推广到变量为任意实值的情形 (只是避开变量的负整数及 0 等各值).

提示 当推广公式 (30) 时, 考虑等式 (33).

10) 试根据公式 (34), 证明当  $\alpha$  由 0 变到 1 时,  $\Gamma'(\alpha-n)$  恰有一次 (比如说, 当  $\alpha = \alpha_n$  时) 通过 0, 符号由  $(-1)^{n+1}$  变为  $(-1)^n$ . 这样一来, 对于相应的值  $\alpha = \alpha_n - n$ , 函数  $\Gamma(a)$  就有正的极小 (当  $n$  为偶数时), 或是负的极大 (当  $n$  为奇数时). 参看图 64 中的  $\Gamma$  函数的图形.

建议再证明 (当  $n$  增加时)  $\alpha_n$  与  $\Gamma_n = |\Gamma(\alpha_n - n)|$  皆单调减少而趋向于 0.

提示 以下各等式 ( $0 < \alpha < 1$ )

$$\begin{aligned} |\Gamma(\alpha - (n+1))| &= \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{n+1-\alpha}, \\ |\Gamma(\alpha - (n+1))|' &= \frac{|\Gamma(\alpha - n)|'}{n+1-\alpha} + \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{(n+1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)} = - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu - \alpha_n},$$

可作为这些断言的根据.

11) 试证, 当  $-n < a < -(n-1)$  时, 函数  $\Gamma(a)$  可表为积分

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \left( e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx.$$

提示 利用分部积分; 参看 8).

12) 在第十一章中 [402, 10)], 我们曾经根据作为函数  $\Gamma(a)$  的定义的欧拉-高斯公式, ——并且就直接地对于变量的任意实值 (除去零与负整数), 建立了  $\Gamma$  函数的某些简单性质 [可再参看 408]. 但这些性质亦可由所研究过的一些其他的性质上面建立出来.



在附加条件  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  之下, 级数

$$D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

即可作为对于任意实值  $a$  (有着同样的那些例外情形) 来研究函数  $\Gamma(a)$  的这样一个出发点.

13) 最后, 我们注意, 函数  $\Gamma(a)$  可以被定义为在整个复平面上的变量  $a$  的单值解析函数<sup>①</sup>. 这可以这样做. 即以其积分定义 (6) 为出发点, 分离

$$\int_0^{\infty} \text{为两部} \int_0^1 + \int_1^{\infty} = P(a) + Q(a).$$

于是函数

$$\begin{aligned} P(a) &= \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{a+n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n} \end{aligned}$$

就自然而然地被推广到了整个复变数平面, 并且乃是一个亚纯函数, 在  $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$  各点处有一阶极点, 分别对应留数  $1, -1, \frac{1}{2!}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n!}, \dots$ . 而函数

$$Q(a) = \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

对于复值  $a$  也有意义, 并且还是整函数.

根据众所周知的关于解析函数的定理, 对于变量的正实值所证的函数  $\Gamma(a)$  的那些特性 (我们指的是那些用解析函数间等式来表达的特性) 自然就推广到了整个平面, 特别言之, 余元公式 (15) 可以改写成这样:

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)} = \frac{1}{\pi} \sin a\pi \cdot \Gamma(a) = \frac{1}{\pi} \sin a\pi [P(a) + Q(a)].<sup>②</sup>$$

由此明白看出,  $1/\Gamma(a)$  在整个平面上是全纯的. 因此,  $\Gamma(a)$  没有根.

最后我们指出, 魏尔斯特拉斯公式 (30) 与欧拉-高斯公式 (7) 一样, 也很可以取作函数  $\Gamma(a)$  (而且是一下子就是在整个平面上) 的定义的基础.

**539. 若干定积分之计算** 我们回头来研究一些利用了函数  $\Gamma(a)$  及其特性来计算的定积分.

1) 在 531, 1° 中, 将公式

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

对于  $a$  来微分, 我们得到了

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx.$$

<sup>①</sup>最后的这一条关于  $\Gamma$  函数的推广的附注, 只能为那些通晓复变函数论基本概念与术语的读者们所了解.

<sup>②</sup>在  $P(a)$  有极点的那些点处,  $\sin a\pi$  为 0.



令此处  $a = 1$ , 因为  $\Gamma'(1) = -C$ , 故得

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -C.$$

作替换  $x = -\ln u$ , 就导出了有趣的积分

$$\int_0^1 \ln(-\ln u) du = -C.$$

倘若取  $a = \frac{1}{2}$ , 并设  $x = t^2$ , 便求得

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \ln t dt = \frac{1}{4} \Gamma' \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} (C + 2 \ln 2),$$

因为这很容易由展式 (27) 以及考虑到对数级数而得出.

再一次对于  $a$  来微分, 就导出等式

$$\Gamma''(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx.$$

令  $a = 1$ , 它就给出

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln^2 x dx = \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

以上的结果可由 (28) 得出, 只要此时利用一下熟知的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

最后, 也在这里令  $a = \frac{1}{2}$ , 借助于替换  $x = t^2$  我们又得到了这样的积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \ln^2 t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[ (C + 2 \ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \right].$$

诸如此类, 不能枚举.

2) 试计算积分

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin^p x}{x} dx.$$

其中  $p$  为具有奇数分子与奇数分母的有理分数.

提示 应用罗巴切夫斯基公式 [497, 14)], 根据这个公式

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx.$$

参看 534, 4, (6). 答案

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = 2^{p-2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p)}.$$



3) 试计算积分 ( $b > 0$ ):

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s} dx \quad (0 < s < 1), \quad B = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s} dx \quad (0 < s < 2).$$

我们有 [参看 (13)]:

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx} dz,$$

所以

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \cos bx dx \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx} dz.$$

重新配置积分, 使得

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} dz \int_0^\infty e^{-zx} \cos bx dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^s dz}{z^2 + b^2}.$$

或命  $b^2 t = z^2$ ,

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t} dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) \\ &= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} - \frac{\pi}{\sin \frac{s+1}{2}\pi} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cdot \cos \frac{s\pi}{2}} \end{aligned}$$

[参看 (4),(5)]. 类似地,

$$B = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}.$$

重新配置积分的理论根据, 与在 524, 11) 中计算积分  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  时是同样的.

4) 试计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x dx.$$

根据 3), 积分 ( $0 < s < 2$ )

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}.$$

对于参数  $s$  来微分它 (利用莱布尼茨法则), 使得:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \ln x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left[\Gamma(s) \cdot \sin \frac{s\pi}{2}\right]^2} \left\{ \Gamma'(s) \cdot \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(s) \cdot \cos \frac{s\pi}{2} \right\}.$$

由于所得到的积分无论是在  $x = \infty$  时 (对于  $s \geq s_0 > 0$ , 参看 515, 4°) 或是在  $x = 0$  时 (对于  $s \leq s_1$ , 优函数为  $|\ln x| : x^{s_1-1}$ ) 对于  $s$  一致收敛, 故应用莱布尼茨法则是合理的.

将所得的等式再微分一次 (其根据与上相类似), 使得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \cdot \ln^2 x dx &= \frac{\pi}{\left[\Gamma(s) \cdot \sin \frac{s\pi}{2}\right]^3} \left\{ \Gamma'(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2} \right\}^2 \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}\right]^2} \left\{ \Gamma''(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \pi \Gamma'(s) \cos \frac{s\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$



在两等式中命  $s = 1$ , 就得出了要求的积分的值:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma'(1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x dx = \pi [\Gamma'(1)]^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma''(1) + \frac{\pi^3}{8}.$$

考虑到 [参阅 1)]

$$\Gamma'(1) = -C, \quad \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

最后便有:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x dx = -\frac{\pi}{2} \cdot C, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot C^2 + \frac{\pi^3}{24}.$$

5) 我们已有 [参看 534,4)(6)] 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \quad (a > 0).$$

对于  $a$  来微分 [应用莱布尼茨法则, 520], 使得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} \varphi \cdot \ln \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \left[ \frac{d \ln \Gamma(a)}{da} - \frac{d \ln \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{da} \right].$$

如果利用高斯公式 (25), 则括弧中的表达式可改写成  $\int_0^1 \frac{t^{a-\frac{1}{2}} - t^{a-1}}{1-t} dt$  的形状. 现在设  $2a-1 = 2n$ , 这里的  $n$  是任意的自然数或是零, 再作替换:  $t = u^2$ . 于是我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u} du.$$

当  $n = 0$  时, 此公式给出已经熟知了的结果

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

当  $n \geq 1$  时, 我们便得出新的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} - \ln^2 \right).$$

6) 试计算积分 ( $a > 0, p > 0$ )

$$u = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bxdx, \quad v = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \sin bxdx.$$

解法与第 523 目 8) 相类似. 和在那里一样, 对于  $b$  的函数  $w = u + vi$  得到一个微分方程式

$$\frac{dw}{db} = -\frac{p}{a^2 + b^2} (b - ai)w,$$



这可以改写成以下形状:

$$\frac{dw}{db} = pw \cdot \frac{i}{a - bi}.$$

很容易验证——借助于此方程,

$$w \cdot (a - bi)^p = c = \text{常量}.^{①}$$

令此处  $b = 0$ , 便得  $c = \Gamma(p)$ . 因而

$$\begin{aligned} w &= \frac{\Gamma(p)}{(a - bi)^p} = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} (a + bi)^p \\ &= \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \left\{ \cos p \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + i \sin p \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right\}. \end{aligned}$$

分别使实部与实部相等, 虚部与虚部相等, 最后便得:

$$u = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \cos p\theta, \quad v = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \sin p\theta.$$

其中为了简短起见, 设  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ .

将  $\sqrt{a^2 + b^2}$  换成  $\frac{b}{\sin \theta}$  或  $\frac{a}{\cos \theta}$ , 就可以把结果改写如以下形状.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \cos p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cos p\theta, \\ v &= \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \sin p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \sin p\theta. \end{aligned}$$

建议令  $p = 1 - s$  并使  $a$  趋向于 0 (当  $b > 0$  时, 角  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  将趋向于  $\frac{\pi}{2}$ ), 由此求得问题 3) 中的积分  $A$  与  $B$ .

将积分  $u$  与  $v$  对于  $p$  来微分, 可以得到新的积分的级数; 这一工作留给读者.

7) 以上所求出的积分  $u$  与  $v$  的值使得我们可以进而计算另外一些有趣的积分. 把等式

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cdot \cos p\theta = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx$$

的两端乘以

$$a^q \cdot \operatorname{tg}^{q-1} \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = b^{q-1} db$$

(假定  $0 < q < p$  以及  $q < 1$ ), 并将左边对于  $\theta$  从 0 到  $\frac{\pi}{2}$  取积分, 而右边则对于  $b$  从 0 到  $\infty$  取积分<sup>②</sup>. 结果我们就得出

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \theta \cdot \sin^{q-1} \theta \cdot \cos p\theta d\theta \\ &= \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty b^{q-1} db \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>在此处以及在下文中, 我们总是把  $(a \pm bi)^p$  了解成为幂指函数的这样一支: 即当  $b = 0$  时它就化为正实数  $a^p$  的那一支.

<sup>②</sup>变量  $b$  与  $\theta$  之间的关系由公式  $b = a \operatorname{tg} \theta$  ( $a = \text{常量}$ ) 给出.



如果重新配置右边的积分, 则立即导出积分  $J_1$  的计算法

$$J_1 = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_0^\infty \frac{\cos bx}{b^{1-q}} db.$$

由 3) 不难确定, 含在内部的这个积分的值是  $\Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2} x^{-q}$ , 所以

$$J_1 = \frac{a^{p-q} \Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1} dx$$

而最后,

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \theta \cdot \sin^{q-1} \theta \cdot \cos p\theta d\theta = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos \frac{q\pi}{2}.$$

类似的可以推出

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \theta \cdot \sin^{q-1} \theta \cdot \sin p\theta d\theta = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin \frac{q\pi}{2}.$$

现在我们来证明重新配置积分之无误, 若少了这一步, 当然就不能肯定所得出的结果是正确的. 因为积分

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} b^{q-1} \cos bxdx$$

对于  $0 < b_0 \leq b \leq B < +\infty$  乃是一致收敛的, 故

$$\begin{aligned} \int_{b_0}^B b^{q-1} db \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos bxdx &= \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_{b_0}^B b^{q-1} \cos bxdx \\ &= \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1} dx \int_{b_0x}^{Bx} u^{q-1} \cos udu. \end{aligned}$$

由于积分  $\int_0^\infty u^{q-1} \cos udu$  存在, 内层积分当  $b_0 \rightarrow 0$  并  $B \rightarrow +\infty$  时趋于它, 因而就成为是有界的:

$$\left| \int_{b_0x}^{Bx} u^{q-1} \cdot \cos udu \right| \leq L,$$

所以整个的积分号下表达式有优函数  $L \cdot e^{-ax} \cdot x^{p-q-1}$ , 于是  $b_0 \rightarrow 0$  与  $B \rightarrow +\infty$  的极限过程就可以在积分号下进行了, 如此等等.

8) 我们来证

$$\psi(t) = D \ln \Gamma(t) = \int_0^1 \frac{1-x^{t-1}}{1-x} dx - C$$

[参看 (25)]. 此时

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{1-x} dx = \psi(q+1) - \psi(p+1)$$

(对于  $p+1 > 0, q+1 > 0$ ).

注意这一点, 我们试来研究积分

$$J = \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x) \ln x} dx \quad (\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \beta > -1).$$



其对于  $\alpha$  的导数为

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\alpha} &= - \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)}{1-x} dx = \psi(\alpha+1) - \psi(\alpha+\beta+1) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

因此

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + C.$$

因为当  $\alpha = 0$  时  $J = 0$ , 故必须  $C = \ln \Gamma(\beta+1)$ , 随之即有

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

类似地, 求得积分

$$\begin{aligned}K &= \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x} dx \\ &= \ln \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}, \quad (\alpha > -1, \alpha+\beta > -1, \alpha+\gamma > -1, \alpha+\beta+\gamma > -1) \\ L &= \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x} dx \\ &= \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}, \quad (\alpha > -1 \text{ 等等})\end{aligned}$$

以及诸如此类.

若在积分  $K$  中取  $\gamma = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{a}{2} - 1, \beta = \frac{b-a}{2}$  并作替换  $x = t^2$ , 则导出以下积分

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{(1+t)\ln t} dt = \ln \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} \quad (a, b > 0),$$

当  $b = 1 - a$  时由此得到有趣的积分

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{(1+t)\ln t} dt = \ln \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} \quad (0 < a < 1).$$

所有以上所引的例子, 充分地表示出依靠援用  $\Gamma$  函数, 使得我们以有限的式子来表达积分的可能性扩张了怎样的地步. 甚而至于在那些有限的式子里除了初等函数外并不包含其他的函数的情形下, 利用  $\Gamma$  函数 (虽然是在中间计算里) 也还是常常使其推求手续大大简化.

**540. 斯特林公式** 现在我们来推求  $\ln \Gamma(a)$  的一些方便的近似公式, 并来研究这个对数 (以及  $\Gamma$  函数本身) 的值的计算问题.

我们是将  $\Gamma$  的对数的导数公式 (24)

$$D \ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right) dx$$

取作我们的出发点.



因为积分号下表达式乃是当  $x \geq 0$  并  $a > 0$  时  $x$  与  $a$  两个变量的连续函数 (对于  $x = 0$  只需展为级数即可确信这一断言), 而当  $x = \infty$  时积分对于  $a$  在  $a \geq a_0 > 0$  一致收敛优函数为

$$\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-a_0 x}}{1 - e^{-x}},$$

故可在积分号下对于  $a$  从 1 到  $a$  取积分:

$$\ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[ (a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x} \quad (a > 0).$$

改变积分变量的符号, 我们就换到了区间  $[-\infty, 0]$  上:

$$\ln \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)e^x \right] \frac{dx}{x}. \quad (35)$$

而这个积分又当  $x = -\infty$  时对于  $0 < a_0 \leq a \leq A < +\infty$  一致收敛: 再在积分号下对于  $a$  从  $a$  到  $a+1$  取积分

$$\begin{aligned} R(a) &= \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - \left(a - \frac{1}{2}\right) e^x \right] \frac{dx}{x}. \end{aligned} \quad (36)$$

为了要化简表达式 (35), 我们利用所得到的积分 (36) 以及初等的伏汝兰尼积分 [495]:

$$\frac{1}{2} \ln a = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^x}{2} \cdot \frac{dx}{x}. \quad (37)$$

这就是说, 从 (35) 里减掉 (36) 并加上 (37), 我们便得出

$$\ln \Gamma(a) - R(a) + \frac{1}{2} \ln a = \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{ax} dx}{x}.$$

为了方便起见, 设

$$\omega(a) = \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{ax} dx}{x} \quad (38)$$

并以我们所已知的拉阿伯积分的表达式 (19) 来代替  $R(a)$ , 便得

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \omega(a). \quad (39)$$

在第十二章 [441, 10)] 中我们已经有了双曲余切的展为简单分式的展式:

$$\operatorname{cthx} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2 \pi^2},$$

对于所有  $x \neq 0$  的值尽皆成立. 将此处  $x$  换为  $x/2$ , 可将其化为以下形状 [参看 449]:

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4k^2 \pi^2}$$



或者最后

$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

从  $f(x)$  的形状上我们就认出这是包含在积分表达式 (38) 内的函数.

我们固定任意一个非负的整数  $m$  并将级数中每一项代以与之恒等的和数

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2} &= \frac{1}{4k^2\pi^2} - \frac{x^2}{(4k^2\pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4k^2\pi^2)^3} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(4k^2\pi^2)^m} \\ &\quad + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(4k^2\pi^2)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}} \end{aligned}$$

分别对以下形状的项

$$(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(4k^2\pi^2)^n} \quad (1 \leq n \leq m)$$

按照  $k = 1, 2, 3, \dots$  来求和. 照常令

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = s_{2n},$$

我们即得出结果

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{2n}} s_{2n} x^{2n-2};$$

如果引用第  $n$  个伯努利数 [449]:

$$B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}, \quad (40)$$

则此结果可改写如下:

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{2 \cdot (2n)!} \cdot x^{2n-2}.$$

至于说到最后面的带有因子  $\frac{1}{1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}}$  (这是一些正的真分数) 的那些项, 则将它们加在一起就得出这样一项

$$(-1)^m \cdot \tilde{\theta} \cdot \frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!} \cdot x^{2m},$$

其中  $\tilde{\theta}$  亦是一个正的真分数.

最后我们便得到了  $f(x)$  这样的表达式:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!} x^2 + \frac{B_3}{6!} x^4 - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m!} x^{2m-2} \\ &\quad + (-1)^m \cdot \tilde{\theta} \cdot \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!} x^{2m} \quad (0 < \tilde{\theta} < 1). \end{aligned}$$

把这代到 (38) 里, 而逐项积分之. 因为

$$\int_{-\infty}^0 e^{ax} x^{2n} dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{2n} dx = \frac{2n!}{a^{2n+1}},$$

并且

$$\int_{-\infty}^0 e^{ax} \cdot \tilde{\theta} \cdot x^{2m} dx = \theta \cdot \int_{-\infty}^0 e^{ax} x^{2m} dx = \theta \cdot \frac{2m!}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1)^{\textcircled{1}},$$

<sup>①</sup>读者要注意,  $\tilde{\theta}$  系依赖于  $x$  而  $\theta$  则否.



所以我们求得

$$\begin{aligned}\omega(a) = & \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{a^5} - \cdots \\ & + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} \\ & + (-1)^m \theta \cdot \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1).\end{aligned}$$

最后, 如若在 (39) 中将  $\omega(a)$  代为所求得的表达式, 则我们得到以下的公式:

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(a) = & \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} \\ & - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} \\ & + (-1)^m \cdot \theta \cdot \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1),\end{aligned}\quad (41)$$

此公式名为**斯特林 (Stirling) 公式**.

在最简单的情形, 对于  $m=0$  公式具有以下形状:

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{\theta}{12a} \quad (0 < \theta < 1),$$

如果取消 (含有因子  $\theta$  的) 余项, 而将公式中项的行列延续以至于无穷, 便得出所谓的**斯特林级数**:

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(a) \sim & \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \cdots \\ & + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1) \cdot 2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} + \cdots.\end{aligned}$$

这个级数乃是发散的. 实际上, 由于 (40), 斯特林级数的通项的绝对值当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\frac{B_n}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}} s_{2n} \rightarrow \infty.$$

然而这个级数对于函数  $\ln \Gamma(a)$  的计算十分有益, 它是这个函数的**渐进表示**, 同时又是这个函数的**包络**. 我们已经遇到过  $\ln(n!)$  的斯特林公式和斯特林级数了 [参看 469, (26) 与 (27)]. 适才得到的展开式具有更为一般的特征. 如果要想由它导出早先的结果, 则应令  $a=n$ , 此外还要加上  $\ln n$ , 因为  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , 而不是  $n!$ , 并且在所研究的一般情形求反对数 [464, 3°] 可得到函数  $\Gamma(a)$  本身的渐近展开 [参看 469].

**541. 欧拉常数之计算** 我们回到公式 (39), 将其对于  $a$  来微分:

$$D \ln \Gamma(a) = \ln a - \frac{1}{2a} + \omega'(a),$$

其中

$$\omega'(a) = \int_{-\infty}^0 x e^{ax} f(x) dx.$$



重复前面的计算, 使得

$$\begin{aligned} \omega'(a) = & -\frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{a^4} - \cdots - (-1)^m \frac{B_m}{2m} \cdot \frac{1}{a^{2m}} \\ & + (-1)^{m+1} \theta' \frac{B_{m+1}}{2m+2} \cdot \frac{1}{a^{2m+2}} \quad (0 < \theta' < 1). \end{aligned} \quad (42)$$

由此即得渐近展式

$$D \ln \Gamma(a) - \ln a + \frac{1}{2a} \sim -\frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{a^4} - \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \cdot \frac{1}{a^{2n}} + \cdots$$

形式上, 它可以由斯特林级数逐项微分而得出<sup>①</sup>.

从所导出的公式 (42) 可以求得欧拉常数  $C$  的一个方便的计算法.

在高斯公式 (25) 中设  $a$  等于自然数  $k$ , 就得出

$$C = \int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t} dt - D \ln \Gamma(k).$$

但是

$$\frac{1-t^{k-1}}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^{k-2},$$

故

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t} dt = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1}.$$

利用当  $a = k$  时的公式 (42), 便最后得到

$$\begin{aligned} C = & 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \ln k + \frac{1}{2k} + \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{120k^4} + \frac{1}{252k^6} - \frac{1}{240k^8} + \cdots \\ & + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \cdot \frac{1}{k^{2n}} + (-1)^{n+1} \theta' \frac{B_{n+1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{k^{2n+2}}. \quad (0 < \theta' < 1) \end{aligned}$$

欧拉根据这个公式, 取  $k = 10$  并计算到含有  $k^{12}$  的项, 求出了具有 15 位小数的  $C$  的值:

$$C = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532 \cdots$$

**542.  $\Gamma$  函数的以 10 为底的对数表的编制** 我们来简略地指出编制此表之方法.

我们回到公式 (27), 将  $a$  换成  $1+a$ , 而写成下面的形状:

$$\frac{d \ln \Gamma(1+a)}{da} = -C + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{a+k} \right).$$

顺序微分之, 即得出  $n$  阶导数的公式

$$\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^n}$$

(所得出的各个级数的一致收敛性使得逐项微分有了根据).

因此, 我们便求得了泰勒级数的诸系数:

$$\frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} \right]_{a=0} = (-1)^n \frac{s_n}{n},$$

<sup>①</sup>因此, 在这个情形下, 渐近展式的逐项微分成为是可以的了 [参看 464 目的附注].



其中

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

于是对于  $|a| < 1$  我们就有

$$\ln \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2}s_2a^2 - \frac{1}{3}s_3a^3 + \frac{1}{4}s_4a^4 - \dots.$$

因为数  $s_k$  (尤其是对于大的  $k$ ) 靠近于 1, 所以逐项地加上展式 (也是对于  $|a| < 1$  成立)

$$\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \dots$$

是有好处的, 这就给出

$$\ln \Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + (1-C)a + \frac{1}{2}(s_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(s_3-1)a^3 + \dots.$$

乘以系数  $M^{74)}$ , 并设

$$M(1-C) = C_1, \quad \frac{1}{2}M(s_2-1) = C_2, \quad \frac{1}{3}M(s_3-1) = C_3, \dots,$$

便得

$$\lg \Gamma(1+a) = -\lg(1+a) + C_1a + C_2a^2 - C_3a^3 + C_4a^4 - \dots. \quad (43)$$

将  $a$  换为  $-a$ , 并将这样得出的展式

$$\lg \Gamma(1-a) = -\lg(1-a) - C_1a + C_2a^2 + C_3a^3 + C_4a^4 + \dots$$

由前一展式中减掉. 因为依照余元公式,

$$\Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

即

$$\lg \Gamma(1-a) = -\lg \Gamma(1+a) + \lg \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

故得

$$\lg \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} \lg \frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2} \lg \frac{1+a}{1-a} + C_1a - C_3a^3 - C_5a^5 - \dots. \quad (44)$$

勒让德给出了  $n \leq 15$  时诸系数  $C_n$  与其对数的值, 并且借助于公式 (43) 与 (44), 计算出了当  $a$  从 1 每次增加 0.001 递升以至于 2 时  $\Gamma(a)$  以 10 为底的对数, 起初是具有 7 位小数, 而后来则是有了 12 位小数.

当我们以本目作为对于  $\Gamma$  函数的研究的结束时, 我们看到, 由其借助于含有参数  $a$  的积分的表示法出发, 我们不仅知晓了它的若干深入的性质, 而且还学会了计算它. 我们对于这新的函数的掌握程度与对于初等函数乃是一样的.

<sup>74)</sup> 参看 499 目中的脚注.







# 索引

- Γ 函数, 300, 625, 626
  - ~ 的递推公式, 627
  - ~ 的对数导数, 641
  - ~ 的高斯公式, 642
  - ~ 的极大极小值, 627, 649
  - ~ 的勒让德公式, 632
  - ~ 的斯特林公式, 656
  - ~ 的图像, 627
  - ~ 的魏尔斯特拉斯公式, 301, 644
  - ~ 拉阿伯积分, 630
  - ~ 余元公式, 315, 629
  - ~ 之叠乘定理, 642
- β 函数, 623
  - ~ 的递推公式, 584
  - ~ 与 Γ 函数的联系, 627
- ζ 函数, 217, 394, 639
  - (级数的) 变换, 322
    - 库默尔 ~, 325
    - 马尔可夫 ~, 328
    - 欧拉 ~, 322
  - (无穷) 级数, 211, 361
    - ~ 的柯西形式的乘积, 266
    - 超几何级数, 231, 395
    - 调和级数, 216
    - 多重级数, 291

- 二重级数, 276
- 二重级数的部分和, 276
- 发散级数, 212
- 非绝对收敛 ~, 244, 437
- 级数的部分和, 211, 276
- 级数的和, 212, 353, 359
- 级数的余式, 239
- 交错级数, 249
- 绝对收敛级数, 260
- 莱布尼茨型级数, 250
- 累级数, 273
- 收敛的条件 ~, 216
- 收敛级数, 215

## A

- 阿贝尔, 300, 446
  - ~ 变换, 252
  - ~ 积分, 64
  - ~ 判别法, 253, 478
  - ~ 替换, 51, 510
- 阿达马, 247
- 阿尔泽拉定理, 621
- 阿尔泽拉引理, 617
- 阿基米德螺线, 143
- 埃尔米特, 118



奥斯特洛格拉得斯基, 30

~ 方法, 30

~ 公式, 31

## B

巴洛, 5

包络, 454, 543

包络级数, 454

贝塞尔函数, 287

贝塞尔微分方程, 394, 563

被积表达式, 2

被积函数, 2

毕奥-萨伐尔定律, 197

波内, 95

波内公式, 95, 545

伯努利, J., 74

伯努利数, 418

泊松, 97

~阿贝尔法, 333

~ 公式, 210

不定积分, 2

不一致收敛, 575

布尼亚科夫斯基, 123

部分分式, 24

部分和, 211

## C

差分, 322

常义积分, 469

超几何级数, 395

超几何微分方程, 395

初始条件, 4

初始值, 4

## D

达布和, 76

上积分和, 76

下积分和, 76

达布下积分和上积分, 78

达朗贝尔判别法, 224

达朗贝尔序列, 224

代数学基本定理, 568

待定系数法, 28, 395

单行曲线, 65

迪尼的定理, 362

笛卡儿叶形线, 164

狄利克雷, 238

~ 函数, 83, 490

~ 级数, 255

~ 间断因子, 529

狄利克雷判别法, 478

棣莫弗公式, 312

定积分的换元公式, 107

定向区间, 86, 502

对数螺线, 143, 150

对数凸的, 634

多边形, 152

多值复变函数, 434

## E

二项式级数, 310

二项式微分, 36

二项式系数, 310

## F

发散 (的), 212

~ 积分, 469

~ 积分的广义值, 500

~ 无穷乘积, 292

反常积分, 469

~ 存在条件, 476

~ 的比较定理, 475

~ 的分部积分法, 505

~ 近似计算, 535

~ 收敛的判别法, 476

~ 与级数的联系, 494

具有无穷积分限的~, 469

无界函数的~, 488

无穷区间的~, 469

范德瓦尔登, 403



菲涅尔, 600

非绝对收敛

~ 乘积, 296

~ 积分, 477

~ 级数, 244, 437

分部积分法则, 19

辐角正弦, 206

弗罗贝尼乌斯, 336

~ 定理, 338

复变函数, 430

复平面, 431

复数的三角式, 431

复数域的对数函数, 440

重整序变量, 432

~ 的极限, 432

## G

高斯公式, 113, 642

哥德巴赫, 281

古尔丹第二定理, 189

古尔丹定理, 187

光滑曲面, 167

光滑曲线, 167

广义的迪尼定理, 548

广义和, 331

广义求和(法), 发散级数求和, 331

博雷尔法, 345

哈代-兰道定理, 339

赫尔德法, 345

欧拉法, 346

切萨罗法, 337

算术平均法, 336

陶伯定理, 334

沃罗诺伊法, 343

## H

函数  $f(x)$  的泰勒级数, 304

函数的奇点, 488, 490

函数级数, 352

~ 的逐项积分, 366

~ 的逐项取极限, 365

~ 的逐项微分, 368

~ 迪尼的定理, 362

弧长, 146

~ 的积分表达式, 138

可求长的 ~, 137

空间曲线的 ~, 151

环面, 188

换元积分法, 12

活力定律, 191

## J

奇点, 488

积分, 1, 97, 597, 599, 600

不能表示成有限形状的 ~, 24

部分分式与它们的 ~, 24

二项式微分的 ~, 36

分部 ~, 19, 103, 472

换元 ~, 12, 107

基本 ~ 表, 6

有限形状的 ~, 24

积分不等式, 122

积分的变量变换, 511

阿贝尔替换, 55

分式线性替换, 52

欧拉替换, 41

三角函数替换, 15

双曲函数替换, 17

积分对数, 63, 542

积分学的基本公式, 99

积分余弦, 63, 480

积分正弦, 63, 480, 590

极限, 224

~ 函数的可积性, 372, 548

~ 函数的可微性, 372

~ 函数的连续性, 548

对级数逐项取 ~, 365, 436

复变函数的 ~, 435

积分号下取 ~, 372

极限过程的互换, 372, 549



极限函数, 352  
 极限函数的可积性, 368, 620  
 极限理论的一般定理, 269  
     特普利茨定理, 270  
 级数, 266  
 级数乘法, 264  
 级数乘法定理的推广, 271  
     阿贝尔定理, 272  
     梅尔滕斯定理, 271  
 级数的比较定理, 218  
 级数的收敛原理, 242  
 级数的项, 211  
 渐近级数, 451  
      $\sim$  的积分, 458  
      $\sim$  的微分法, 659  
      $\sim$  的唯一性, 455  
 渐近展开, 454, 455  
      $\sim$  的相除, 458  
      $\sim$  式的逐项相加或相减, 456  
 渐屈线的内蕴方程, 150  
 解析函数, 424  
 近似计算, 214  
     常义积分的  $\sim$ , 123, 540  
     反常积分的  $\sim$ , 535  
     借助级数作  $\sim$ , 315, 385  
 静力矩, 196  
     平面图形的  $\sim$ , 188  
     曲线的  $\sim$ , 185  
     物体的  $\sim$ , 194  
     旋转曲面的  $\sim$ , 195  
     柱面的  $\sim$ , 195  
 矩形公式, 124  
      $\sim$  的余项, 128  
 具备“可加性”的“区间函数”, 183  
 绝对可积, 477  
 绝对收敛, 244, 477  
**K**  
 卡塔兰常数, 135  
 开普勒方程, 429

康托洛维奇, 536  
 柯西-阿达马定理, 247  
 柯西-赫尔德不等式, 122  
 柯西公式, 641  
 柯西积分判别法, 232  
 柯西判别法, 223, 476, 492  
 可积函数, 75  
      $\sim$  类, 80  
     平方 $\sim$ , 497  
 可加性, 154  
 可交换性, 260  
 可结合性, 259  
 克诺普, 257  
**L**  
 拉阿伯(Raabe)判别法, 224  
 拉阿伯公式, 631  
 拉阿伯序列, 225  
 拉格朗日插值公式, 126  
 拉格朗日级数, 428  
 拉普拉斯, 599  
 莱布尼茨, 74, 249  
      $\sim$  法则, 593  
      $\sim$  定理, 249  
      $\sim$  法则, 552  
 蓝登变换, 114  
 兰伯特级数, 257  
 朗道, 256  
 勒让德, 71, 625  
      $\sim$  公式, 631  
      $\sim$  多项式, 119, 414, 560  
      $\sim$  函数  $\mathbf{K}(k)$ ,  $\mathbf{E}(k)$ , 114, 134, 144, 293, 390, 564  
 勒让德多项式, 120  
 累级数, 273  
 黎曼 $\zeta$ 函数, 639  
 黎曼定理, 262  
 力学上的功, 190  
 连续性, 353



复变函数的  $\sim$ , 435  
 积分对参变量的  $\sim$ , 551  
 极限函数的  $\sim$ , 353, 548  
 级数和的  $\sim$ , 361  
 幂级数和的  $\sim$ , 373

两个极限步骤的互换问题, 549

零附标的贝塞尔函数, 591

刘维尔, 71

罗巴切夫斯基, 530

$\sim$  方法, 561

$\sim$  公式, 530, 651

## M

马尔可夫, 328

梅尔滕斯定理, 271

梅钦(Machin)公式, 317

幂函数的主值, 446

幂级数, 246, 436

$\sim$  的除法, 415

$\sim$  的反演, 424

$\sim$  的积分, 376

$\sim$  的连续性, 373

$\sim$  的收敛半径, 247

$\sim$  的收敛区间, 246, 436

$\sim$  的收敛圆, 436

$\sim$  的微分, 376

$\sim$  的唯一性, 374

$\sim$  的运算, 405

多变量的  $\sim$ , 291

两个变量的  $\sim$ , 287

幂级数法, 331

幂级数恒等的定理, 374

面积, 152

$\sim$  存在的条件, 153, 154

$\sim$  的可加性, 152

$\sim$  看作极限, 154

平面图形的  $\sim$ , 165

曲边梯形的  $\sim$ , 74

旋转曲面的  $\sim$ , 175

柱面的  $\sim$ , 180

闵可夫斯基不等式, 122

母函数, 414

勒让德多项式的  $\sim$ , 414

## N

牛顿, 5, 202, 310

$\sim$ —莱布尼茨定理, 5

$\sim$ —莱布尼茨公式, 99

## O

欧拉, 561

$\sim$  常数, 222, 642

$\sim$  公式, 447

$\sim$  级数, 388

$\sim$  替换, 41

$\sim$ —泊松积分, 512, 598

$\sim$ —高斯公式, 626

$\sim$ —麦克劳林公式, 459, 461

$\sim$ —麦克劳林公式的余式, 461

$\sim$ —麦克劳林级数, 304

$\sim$ —麦克劳林级数的近似计算, 464

第二型  $\sim$  积分, 625

第一型  $\sim$  积分, 623

级数的  $\sim$  变换, 323

级数广义求和的  $\sim$  方法, 346

欧拉变换, 323

欧拉积分, 596

欧拉级数的变换, 322

## P

抛物线, 142

抛物线型插值法, 125

平面曲线的内蕴方程, 146

## Q

切比雪夫, 37

切萨罗, 336

区间上的方向, 86

曲边梯形, 4

曲线的内蕴方程, 147



**S**

赛得尔, 356  
 三角函数的分析定义, 401  
 施勒米希, 311  
 施泰纳, 281  
 实数的根式计算法, 320  
 收敛边界点, 255, 379  
 收敛因子, 598  
 数  $\pi$  的近似计算, 316  
 数  $e$  的超越性, 118  
 数学摆, 204  
 双纽线, 145  
 双曲余切, 657  
     展开  $\sim$  成部分分式, 397  
     展开  $\sim$  成幂级数, 407  
 双曲余弦, 18  
     展开  $\sim$  成幂级数, 306  
     展开  $\sim$  成无穷乘积, 315  
 双曲正弦, 18  
     展开  $\sim$  成幂级数, 306  
     展开  $\sim$  成无穷乘积, 315  
     展开  $\sim$  的倒数成无穷乘积, 397  
 斯蒂尔切斯, 543  
 斯特林公式, 468, 659  
 斯特林级数, 468  
 斯托尔茨, 269

**T**

泰勒公式, 232  
      $\sim$  的余项, 117, 304  
 泰勒级数, 304, 378  
 泰勒系数, 304  
 特解, 198  
 特普利茨, 269  
 梯形公式, 124  
      $\sim$  的余项, 130  
 替换法, 12

通解, 198  
 椭圆, 143  
 椭圆积分, 66  
     第一、第二与第三类  $\sim$ , 71  
     勒让德形式下的第一、第二与第三类  $\sim$ ,  
         72, 93  
     完全  $\sim$ , 114, 134, 390, 564, 609  
     伪  $\sim$ , 66  
 椭圆正弦, 206

**W**

微分方程, 199  
 韦达, 293  
 维维亚尼曲线, 152  
 蜗线, 144  
 沃利斯, 116  
 沃利斯公式, 116, 117, 292  
 无穷乘积收敛的必要充分条件, 295  
 无穷级数收敛性, 477  
     阿贝尔判别法, 253  
     贝特朗判别法, 230  
     达朗贝尔判别法, 222  
     狄利克雷判别法, 253  
     高斯判别法, 230  
     库默尔判别法, 228  
     拉阿伯判别法, 224  
     莱布尼茨判别法, 249  
     麦克劳林-柯西积分判别法, 232  
     萨波果夫判别法, 240  
     叶尔马科夫判别法, 235

**X**

辛卜森, 128  
      $\sim$  公式, 128  
 心脏线, 150  
 星形线, 142  
 悬链线, 141, 145  
 旋轮线, 142, 149



## Y

曳物线, 146

一致收敛, 355, 356

~ 的阿贝尔判别法, 360

~ 的狄利克雷判别法, 360

~ 魏尔斯特拉斯判别法, 358

~ 于极限函数, 546

积分 ~ 的条件, 570, 573

积分的 ~, 569

积分的 ~ 判别法, 571

积分的 ~ 与级数 ~ 的联系, 570

级数的 ~, 356

幂级数的 ~, 372

序列的 ~, 352

隐函数, 398

优积分, 571

优级数, 359

~ 法, 424

有理曲线, 65

余切, 657

展开 ~ 成部分分式, 397

展开 ~ 成幂级数, 407

余弦, 18

展开 ~ 成幂级数, 305

展开 ~ 成无穷乘积, 312

余元公式, 315, 629

原函数, 1

圆的渐伸线, 142, 149

圆内旋轮线, 150

圆外旋轮线, 150

圆锥体, 170

## Z

詹森不等式, 123

詹森积分不等式, 123

展开  $\operatorname{ctg} x, \operatorname{cth} x, \operatorname{tg} x, \frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\operatorname{sh} x}$  为部分分式, 396

展开  $\ln \frac{\sin x}{x}$  成幂级数, 420

真分式, 24

分解 ~ 为部分分式, 25

振幅, 205

整序变量, 631

正函数积分的“比较定理”, 475

正弦, 72

复数域的 ~, 443

展开 ~ 成无穷乘积, 312

展开 ~ 的倒数成无穷乘积, 396

正项级数, 216

正则求和法, 331

指数函数, 295

~ 与三角函数的关系, 440

~ 展开为幂级数, 305, 379, 393, 439

复数域中的 ~, 439

中值定理, 90

第二 ~, 93, 95, 504

第一 ~, 503

推广 ~, 90

微分 ~ 与积分 ~ 的联系, 99

周期函数, 110

~ 的积分, 110

逐次逼近法, 398

转动惯量, 195







# 校订后记

---

Г. М. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》一书, 在我国 20 世纪 50 年代以来的数学教育中曾产生过巨大的影响. 大体说来, 现在 50 岁以上的数学工作者, 鲜有不知此书的, 鲜有未读过 (参考过) 此书的. 它内容丰富而论述深刻 (虽然从今天看来, 处理方法是经典的), 使许多学习过数学类各专业的人受益良多.

本书最早的中译本是根据俄文 1951 年第 4 版 (一、二卷) 和 1949 年版 (第三卷) 译出的, 于 1954 — 1956 年先后由商务印书馆和高等教育出版社出版、印行. 1959 年又根据俄文 1958 年版对其中第一卷作过修订. 中译本是由多所高等学校的多位数学老师分别翻译, 高等教育出版社多位编辑经手的.

这次高等教育出版社在国家自然科学基金委员会天元数学基金的支持下, 根据 2003 年印行的俄文版进行修订. 由于本书的各位译者大多年事已高 (有的已经谢世), 高等教育出版社在得到主要译者的首肯后, 让我来担任全书的校订工作, 这既使我感到荣幸, 又感到诚惶诚恐, 如履薄冰. 在校订过程中, 原书各位译者认真仔细的工作作风和高质量的翻译, 让我深感敬佩, 并得到很多教益. 从 2003 年印行的俄文版中, 我们看到, 担任本书俄文版的校订、编辑工作的圣彼得堡大学的 A. A. 弗洛连斯基教授除改正原先各版中一些印刷错误外, 又从读者的角度出发, 对书中可能产生不便的地方增加了 122 个注释. 他们这种为使经典名著臻于完善的、认真细致的作风值得我们借鉴.

对本书的校订工作主要在两个方面: 一方面是在新版中 (应是 1959 年以前) 作者作了不少的修订与增删, 尤其是第二卷与第三卷中改动较多. 而由于历史的原因, 在 20 世纪 60 年代以后, 高等教育出版社与各位译者一直没有机会按新版修订译本. 因而这次需要作不少补译的工作. 还有就是翻译 122 个编者注的工作. 另一方面是,



涉及数学名词、外国数学家的中译名的规范问题. 由于在 1993 年, 全国自然科学名词委员会 (现改称全国科学技术名词委员会) 已颁布了《数学名词》, 所以校订中首先以此为准, 对数学名词、外国数学家中译名作了统一性的订正. 在此范围之外的则以《中国大百科全书·数学卷》、《数学百科全书》(五卷本) 以及张鸿林、葛显良先生编订的《英汉数学词汇》为准. 此外还参考了齐玉霞、林凤藻、刘远图先生合编的《新俄汉数学词汇》. 还有个别的在上述范围之外的名词以及其他一些难于处理的问题, 则是由张小萍、沈海玉、郭思旭三人经商讨后定下来的.

还应当说明的是, 书中有关物理、力学方面的量和单位, 有少数地方与我国现在执行的国家标准不一致. 但是, 改动它们会导致计算过程和结果中数据的改变, 作为译本, 恐怕反而不妥当, 宜保留原作的用法为好. 还有个别数学符号也与我国目前适用的不一致, 也未作改动.

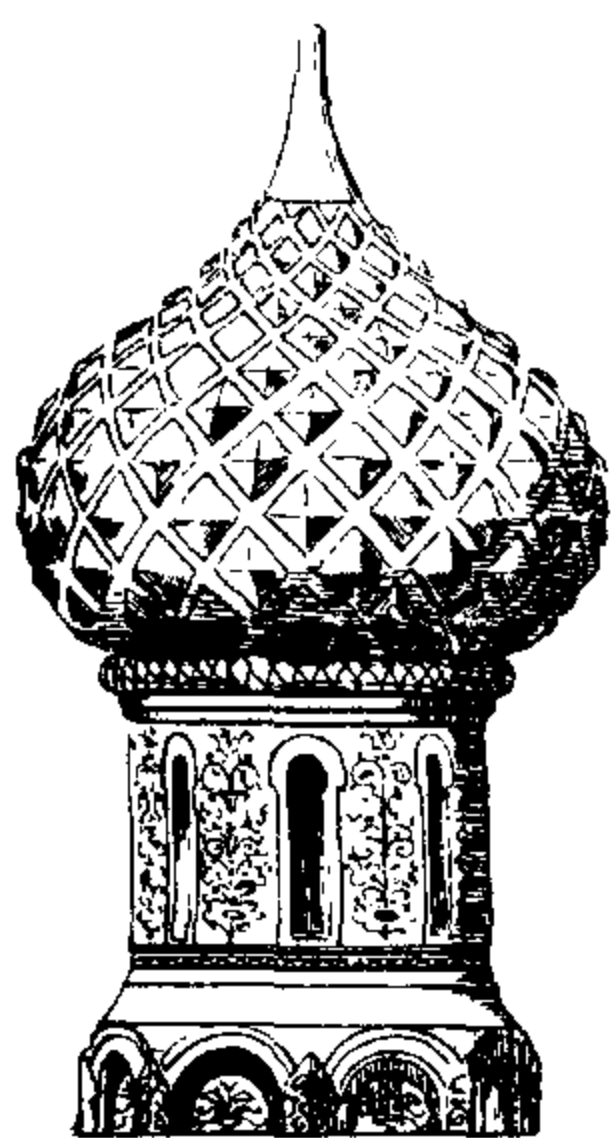
本书的校订过程, 充分体现为一种集体的力量和成果. 首先是本书的策划张小萍编审, 她为本书的修订、出版工作作了周到细致的安排, 并负责一至三卷的终审工作, 作了十分仔细的审阅并提出很多重要意见; 沈海玉先生对一、三卷作了认真的通读加工和校阅. 提出了许多很好的意见; 李植教授和邵常虹老师为本书翻译了俄文版《编者的话》. 在补译过程中, 我经常得到外语分社田文琪编审在俄译中表达方面耐心而宝贵的指教. 对以上各位的指导、合作与帮助, 表示由衷的感谢!

由于个人的水平所限, 虽经努力, 但在新加内容的补译工作方面、在个别译名的确定方面等, 错误和疏漏恐难于避免, 还请读者不吝指正.

郭思旭

2005 年 8 月





俄罗斯数学  
教材选译

● 数学天元基金资助项目

# 微积分学教程

(第三卷) (第8版)

☐ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著  
☐ 路见可 余家荣 吴亲仁 译  
☐ 郭思旭 校



高等教育出版社  
Higher Education Press



图字: 01-2005-5742 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и  
интегрального исчисления, том 3

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2003

ISBN 5-9221-0466-7

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT  
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's  
Republic of China

### 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第3卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥  
尔茨著; 路见可, 余家荣, 吴亲仁译. —2版. —北京:  
高等教育出版社, 2006. 1

ISBN 7-04-018305-6

I.微... II.①菲...②路...③余...④吴...

III.微积分 - 高等学校 - 教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 152527 号

策划编辑 张小萍      责任编辑 赵天夫      封面设计 王凌波  
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
			<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 刷	北京新丰印刷厂		
开 本	787 × 1092 1/16	版 次	1957 年 10 月第 1 版
印 张	35		2006 年 1 月第 2 版
字 数	720 000	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
		定 价	53.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18305-00



# 序

---

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.



经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月



# 编者的话

---

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作,曾多次再版,并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富,诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多,在同类教材中尚无出其右者.很多现代著名数学家都提到,正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱,让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年,其内容却并未过时,现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用.不仅如此,尽管出现了新的一批优秀教材,但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起,其读者群就一直不断扩大,现在还包括许多数理特长中学(译注:在俄罗斯,除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学,还有以数学与物理学为重点培养方向的中学,其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容,学生则要经过特别的选拔.)的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分(不含测度论和一般集合论).数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授,也(全部或大部分)包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用,第二卷研究黎曼积分理论与级数理论,第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例,正如前文所说,通常这些内容非常有趣,其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.



另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基



# 目 录

第十五章	曲线积分 · 斯蒂尔切斯积分	1
§1.	第一型曲线积分	1
	543. 第一型曲线积分的定义 (1) 544. 约化为普通定积分 (3) 545. 例 (5)	
§2.	第二型曲线积分	8
	546. 第二型曲线积分的定义 (8) 547. 第二型曲线积分的存在与计算 (10) 548. 闭路的情形 · 平面的定向 (12) 549. 例 (14) 550. 用取在折线上的积分的逼近法 (17) 551. 用曲线积分计算面积 (18) 552. 例 (20) 553. 两不同型曲线积分间的联系 (23) 554. 物理问题 (25)	
§3.	曲线积分与道路无关的条件	29
	555. 与全微分相关问题的提出 (29) 556. 与道路无关积分的微分法 (30) 557. 用原函数来计算曲线积分 (32) 558. 恰当微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法 (33) 559. 推广到任意区域的情形 (34) 560. 最终结果 (37) 561. 沿闭路的积分 (37) 562. 非单连通区域或有奇点的情形 (38) 563. 高斯积分 (42) 564. 三维的情形 (44) 565. 例 (46) 566. 物理问题的应用 (50)	
§4.	有界变差函数	52
	567. 有界变差函数的定义 (52) 568. 有界变差函数类 (54) 569. 有界变差函数的性质 (56) 570. 有界变差函数的判定法 (59) 571. 连续的有界变差函数 (61) 572. 可求长曲线 (63)	
§5.	斯蒂尔切斯积分	65
	573. 斯蒂尔切斯积分的定义 (65) 574. 斯蒂尔切斯积分存在的一般条件 (66) 575. 斯蒂尔切斯积分存在的若干种情况 (67) 576. 斯蒂尔切斯积分的性质 (70) 577.	



分部积分法 (71) 578. 化斯蒂尔切斯积分为黎曼积分 (72) 579. 斯蒂尔切斯积分的计算 (74) 580. 例 (77) 581. 斯蒂尔切斯积分的几何说明 (82) 582. 中值定理, 估计值 (83) 583. 斯蒂尔切斯积分记号下面的极限过程 (85) 584. 例题及补充 (87) 585. 化第二型曲线积分为斯蒂尔切斯积分 (91)

**第十六章 二重积分 . . . . . 93**

**§1. 二重积分的定义及简单性质 . . . . . 93**

586. 柱形长条体积的问题 (93) 587. 化二重积分为逐次积分 (94) 588. 二重积分的定义 (96) 589. 二重积分存在的条件 (97) 590. 可积函数类 (98) 591. 下积分及上积分作为极限 (100) 592. 可积函数与二重积分的性质 (101) 593. 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法 (103)

**§2. 二重积分的计算 . . . . . 106**

594. 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分 (106) 595. 例 (109) 596. 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分 (116) 597. 例 (118) 598. 力学应用 (129) 599. 例 (131)

**§3. 格林公式 . . . . . 137**

600. 格林公式的推演 (137) 601. 应用格林公式到曲线积分的研究 (140) 602. 例题及补充 (141)

**§4. 二重积分中的变量变换 . . . . . 143**

603. 平面区域的变换 (143) 604. 例 (146) 605. 曲线坐标中面积的表示法 (150) 606. 补充说明 (152) 607. 几何推演 (154) 608. 例 (155) 609. 二重积分中的变量变换 (163) 610. 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分 (164) 611. 例 (165)

**§5. 反常二重积分 . . . . . 171**

612. 展布在无界区域上的积分 (171) 613. 反常二重积分的绝对收敛性定理 (173) 614. 化二重积分为逐次积分 (175) 615. 无界函数的积分 (177) 616. 反常积分中的变量变换 (178) 617. 例 (179)

**第十七章 曲面面积 · 曲面积分 . . . . . 193**

**§1. 双侧曲面 . . . . . 193**

618. 曲面的侧 (193) 619. 例 (194) 620. 曲面和空间的定向 (196) 621. 法线方向余弦公式中符号的选择 (197) 622. 分片光滑曲面的情形 (198)

**§2. 曲面面积 . . . . . 199**

623. 施瓦茨的例子 (199) 624. 曲面面积的定义 (201) 625. 附注 (201) 626. 曲面面积的存在及其计算 (203) 627. 用内接多面形的接近法 (207) 628. 面积定义的特殊情况 (208) 629. 例 (209)

**§3. 第一型曲面积分 . . . . . 222**

630. 第一型曲面积分的定义 (222) 631. 化为寻常的二重积分 (222) 632. 第一型



曲面积分在力学上的应用 (224) 633. 例 (226)	
§4. 第二型曲面积分 . . . . .	231
634. 第二型曲面积分的定义 (231) 635. 最简单的特殊情形 (233) 636. 一般情形 (235) 637. 证明的细节 (237) 638. 用曲面积分表立体体积 (238) 639. 斯托克斯公式 (241) 640. 例 (243) 641. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用 (248)	
<b>第十八章 三重积分及多重积分 . . . . .</b>	<b>250</b>
§1. 三重积分及其计算 . . . . .	250
642. 立体质量计算的问题 (250) 643. 三重积分及其存在的条件 (251) 644. 可积函数与三重积分的性质 (252) 645. 展布在平行六面体上的三重积分的计算 (254) 646. 在任何区域上的三重积分的计算 (255) 647. 反常三重积分 (257) 648. 例 (257) 649. 力学应用 (263) 650. 例 (264)	
§2. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 . . . . .	271
651. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 (271) 652. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式应用于曲面积分的研究 (273) 653. 高斯积分 (274) 654. 例 (276)	
§3. 三重积分中的变量变换 . . . . .	279
655. 空间的变换及曲线坐标 (279) 656. 例 (280) 657. 曲线坐标下的体积表示法 (282) 658. 补充说明 (284) 659. 几何推演 (285) 660. 例 (287) 661. 三重积分中的变量变换 (293) 662. 例 (294) 663. 立体的吸引力及在内点上的位势 (298)	
§4. 场论初步 . . . . .	300
664. 纯量及向量 (300) 665. 纯量场及向量场 (301) 666. 梯度 (302) 667. 向量通过曲面的流量 (303) 668. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 · 散度 (305) 669. 向量的环流量 · 斯托克斯公式 · 旋度 (305) 670. 特殊的场 (307) 671. 向量分析的逆问题 (310) 672. 应用 (311)	
§5. 多重积分 . . . . .	315
673. 两立体间的引力及位势问题 (315) 674. $n$ 维立体的体积 · $n$ 重积分 (317) 675. $n$ 重积分中的变量变换 (318) 676. 例 (321)	
<b>第十九章 傅里叶级数 . . . . .</b>	<b>341</b>
§1. 导言 . . . . .	341
677. 周期量与调和分析 (341) 678. 欧拉-傅里叶确定系数法 (343) 679. 正交函数系 (345) 680. 三角插值法 (349)	
§2. 函数的傅里叶级数展开式 . . . . .	351
681. 问题的提出 · 狄利克雷积分 (351) 682. 第一基本引理 (353) 683. 局部化定理 (355) 684. 迪尼与利普希茨的傅里叶级数收敛性的判别法 (355) 685. 第二基本引理 (358) 686. 狄利克雷-若尔当判别法 (360) 687. 非周期函数的情形 (361) 688. 任意区间的情形 (362) 689. 只含余弦或正弦的展开式 (363) 690. 例 (366)	



691. $\ln \Gamma(x)$ 的展开式 (378)	
§3. 补充 . . . . .	381
692. 系数递减的级数 (381) 693. 三角级数借助于复变量解析函数的求和法 (386)	
694. 例 (388) 695. 傅里叶级数的复数形式 (392) 696. 共轭级数 (395) 697. 多重傅里叶级数 (397)	
§4. 傅里叶级数的收敛特性 . . . . .	399
698. 对于基本引理的几点补充 (399) 699. 傅里叶级数一致收敛性的判别法 (401)	
700. 傅里叶级数在不连续点附近的性质; 特殊情形 (404) 701. 任意函数的情形 (408)	
702. 傅里叶级数的奇异性质 · 预先的说明 (410) 703. 奇异性质的作法 (412)	
§5. 与函数可微分性相关的余项估值 . . . . .	414
704. 函数与其导数的傅里叶系数间之关系 (414) 705. 在有界函数情形时部分和的估值 (415)	
706. 函数有 $k$ 阶有界导数时余项的估值 (416) 707. 函数有有界变差的 $k$ 阶导数的情形 (418)	
708. 函数及其导数的不连续性对于傅里叶系数的无穷小阶的影响 (420) 709. 在区间 $[0, \pi]$ 上给出函数时的情形 (423)	
710. 分离奇异性质法 (425)	
§6. 傅里叶积分 . . . . .	432
711. 傅里叶积分作为傅里叶级数的极限情形 (432) 712. 预先的说明 (434) 713. 充分判别法 (435)	
714. 基本假设的变形 (437) 715. 傅里叶公式的各种形式 (439)	
716. 傅里叶变换 (440) 717. 傅里叶变换的若干性质 (442) 718. 例题与补充 (443)	
719. 二元函数的情形 (449)	
§7. 应用 . . . . .	450
720. 用行星的平均近点角所作出的它的偏近点角的表示式 (450) 721. 弦振动的问题 (452)	
722. 在有限长杆上的热传导问题 (456) 723. 无穷长杆的情形 (459)	
724. 边界条件的变形 (461) 725. 在圆盘上的热传导 (462) 726. 实用调和分析 · 十二个纵坐标的方法 (463)	
727. 例 (466) 728. 二十四纵坐标的方法 (469)	
729. 例 (470) 730. 傅里叶系数的近似值与精确值的比较 (471)	
<b>第二十章 傅里叶级数 (续) . . . . .</b>	<b>474</b>
§1. 傅里叶级数的运算 · 完全性与封闭性 . . . . .	474
731. 傅里叶级数的逐项积分法 (474) 732. 傅里叶级数的逐项微分法 (476) 733. 三角函数系的完全性 (477)	
734. 函数的一致近似法 · 魏尔斯特拉斯定理 (479)	
735. 函数的平均近似法 · 傅里叶级数的部分和的极值性质 (481) 736. 三角函数系的封闭性 · 李雅普诺夫定理 (484)	
737. 广义封闭性方程 (487) 738. 傅里叶级数的乘法 (489) 739. 封闭性方程的若干应用 (490)	
§2. 广义求和法在傅里叶级数上应用 . . . . .	495
740. 基本引理 (495) 741. 傅里叶级数的泊松-阿贝尔求和法 (497) 742. 关于圆的狄利克雷问题的解 (500)	
743. 傅里叶级数的切萨罗-费耶求和法 (502) 744. 傅里叶级数广义求和法的若干应用 (504)	
745. 傅里叶级数的逐项微分法 (506)	



§3. 函数的三角展开式的唯一性 . . . . .	507
746. 关于广义导数的辅助命题 (507) 747. 三角级数的黎曼求和法 (510) 748. 关于收敛级数的系数的引理 (514) 749. 三角展开式的唯一性 (515) 750. 关于傅里叶级数的最后的定理 (516) 751. 推广 (519)	

附录 极限的一般观点 . . . . .	522
752. 在分析中所遇到的极限的各种类型 (522) 753. 有序集合 (狭义的) (523) 754. 有序集合 (广义的) (524) 755. 有序变量及其极限 (526) 756. 例题 (527) 757. 关于函数极限的附注 (529) 758. 极限理论的推广 (530) 759. 同序变量 (532) 760. 借助于参数的排列法 (533) 761. 化简成整序变量 (534) 762. 有序变量的上极限与下极限 (536)	

索 引 . . . . .	539
---------------	-----

校订后记 . . . . .	545
----------------	-----



# 第十五章 曲线积分 · 斯蒂尔切斯积分

## §1. 第一型曲线积分

**543. 第一型曲线积分的定义** 为了很自然地得出这一新的概念, 我们来考察一个能导出它的力学问题.

设在平面上给定一连续的简单可求长曲线<sup>①</sup>  $(K)^{75)}$  (图 1), 在它上面分布有质量, 且在曲线上所有的点  $M$  处其线性密度  $\rho(M)$  为已知, 要求确定整个曲线  $(K)$  的质量  $m$ .

为达此目的, 在曲线端点  $A$  与  $B$  间任意地插入一系列点  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  (为使记号对称, 命  $A_0$  与  $A$  相合,  $A_n$  与  $B$  相合). 为了明确起见, 我们认为这些点是从  $A$  到  $B$  记数的 [参看 246], 但是, 将它们以相反的方向记数也可以.

在曲线的弧  $A_i A_{i+1}$  上任取一点  $M_i$ , 算出这一点处的密度  $\rho(M_i)$ . 近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的, 并以  $\sigma_i$  表弧  $A_i A_{i+1}$  的长, 对这一弧的质量  $m_i$  我们将有近似表示式

$$m_i \doteq \rho(M_i) \sigma_i,$$

<sup>①</sup>为确定, 仅限于非闭的曲线.(以下用带圆圈数字标出的是作者注解.)

<sup>75)</sup>简单曲线与可求长曲线的概念是在 245~247 目中引入和讨论的.(以下用带括号的数字标出的是 2003 年俄文版的编者注解.)

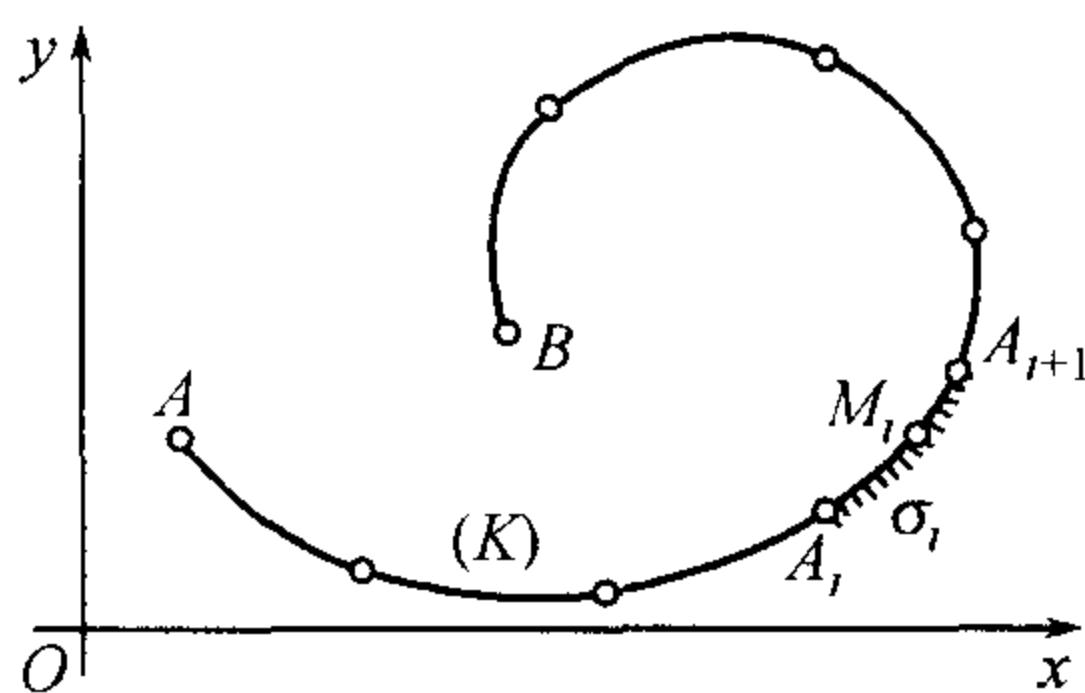


图 1



而对整个所求的质量, 将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \sigma_i.$$

这一式子的误差与上面所作的近似假定是有关的; 如所有小段的长  $\sigma_i$  趋近于零时, 这误差也将趋近于零. 因此, 如以  $\lambda$  表长  $\sigma_i$  中最大的一个, 只要取极限就得到准确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \sigma_i.$$

现在开始一般地来研究这一类型的极限. 丢开上面的问题不谈, 取一任意“点函数”  $f(M) = f(x, y)$ , 它是在一连续的可求长平面曲线  $(K)$  上给出的,<sup>①</sup> 并重复上述手续: 分曲线  $(K)$  为许多弧元  $A_i A_{i+1}$ <sup>76)</sup>, 在它们上面任取点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ , 计算出在这些点处的值  $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ , 并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \sigma_i;$$

它也代表一定类型的“积分和”.

类似的过程可以应用于闭曲线的情形, 只要取其上任意一点为点  $A_0(A_n)$ , 而其余的点则根据曲线的某一方向排列 [246].

当  $\lambda = \max \sigma_i$  趋近于零时, 如这一积分和有一确定的有限极限  $I$ , 既与曲线  $(K)$  细分的方法无关, 又与小段  $A_i A_{i+1}$  上点  $M_i$  的选择无关, 则这一极限称作函数  $f(M) = f(x, y)$  沿曲线或道路  $(K)$  上所取的 (第一型)<sup>②</sup> 曲线积分, 并以记号

$$I = \int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (1)$$

来表示 (其中  $s$  是曲线的弧长,  $ds$  就象征长度元  $\sigma_i$ ). 极限过程的精确说明留给读者.

因此, 上面所得曲线质量的式子可重写为:

$$m = \int_{(K)} \rho(M) ds. \quad (2)$$

<sup>①</sup>这里假定某一直角坐标系取作基础.

<sup>②</sup>以示与下面 [546] 所讨论的第二型曲线积分不同.

<sup>76)</sup>“分为许多弧元”的手续, 对于由参数形式  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  给出的无论是简单闭曲线, 还是自身相交的闭曲线, 今后都将经常施行. 如果分点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  对应于参数  $t$  的严格递增或严格递减序列  $t_0, t_1, \dots, t_n$  (换句话说, 按照曲线  $(K)$  所选取的方向编号), 且分点  $A_0$  与  $A_n$  与曲线  $(K)$  的端点重合, 我们就都说, 点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  分割 (参数表示的) 曲线  $(K)$  为弧元 (或者说“曲线分解成简单部分”).



特别注意, 给道路  $(K)$  所加的方向在所介绍的定义中不起任何作用. 例如, 若这一曲线不是闭的, 且以  $(AB)$  及  $(BA)$  作为不同方向的曲线, 则

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

类似地, 我们可以引导散布在空间曲线  $(K)$  上的积分概念:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y, z)ds. \textcircled{1}$$

由于没有什么新的原则性东西, 没有必要在这里详谈.

**544. 约化为普通定积分** 假定在曲线  $(K)$  上任意取定一方向 (两个可能方向之一), 曲线上点  $M$  的位置可由从一点  $A$  量起的弧长  $s = \widehat{AM}$  来确定. 那么曲线  $(K)$  可表为参数方程的形状:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S),$$

而在曲线上给出的函数  $f(x, y)$  便化成变量  $s$  的复合函数  $f(x(s), y(s))$ .

对应于在  $AB$  弧上所选取的分点  $A_i$ , 其弧的值如表为  $s_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 则显然  $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$ . 以  $\bar{s}_i$  表定点  $M_i$  的  $s$  值 (而且显然,  $s_i \leq \bar{s}_i \leq s_{i+1}$ ), 可以看到曲线积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和, 所以立刻有:

$$\int_{(K)} f(M)ds = (R) \int_0^S f(x(s), y(s))ds, \textcircled{2} \quad (3)$$

且这两积分中只要有一个存在, 另一个就也存在.

当然, 这种直接由第一型曲线积分约化为普通的积分会降低它的理论价值, 但在方法上的价值它仍全部保存着.

我们以后将假定函数  $f(M)$  是连续的,<sup>③</sup> 显然在这种情形下积分是存在的.

令设一曲线  $(K)$  由任意的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

<sup>①</sup>某一直角坐标系将取作基础. 函数  $f$  仅在曲线  $(K)$  的点处有定义.

<sup>②</sup>符号  $(R)$  表示, 积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分.

<sup>③</sup>我们是指曲线  $(K)$  上的点处连续, 也就是指沿着曲线连续. 用“ $\varepsilon - \delta$ ”的说法, 这就是说: 对  $\varepsilon > 0$  能找到这样的  $\delta > 0$ , 使当  $\overline{MM'} < \delta$  时就有  $|f(M') - f(M)| < \varepsilon$  ( $M$  及  $M'$  是曲线上的点). 在这一假定下, 复合函数  $f(x(s), y(s))$  由于  $x(s)$  及  $y(s)$  是连续的缘故, 也同样是  $s$  的连续函数.



所给出, 其中函数  $\varphi$  及  $\psi$  与它们的导数  $\varphi'$  及  $\psi'$  都连续; 此外, 假定曲线上无重点. 那么曲线就是可求长的, 且若弧  $s = \widehat{AM} = s(t)$  的增加对应于参数  $t$  的增加, 则

$$s'_t = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[248,(10)]. 在 (3) 的右端的积分中换变量, 立刻得到:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

因此, 在计算第一型曲线积分时, 在积分号下的函数中, 变量  $x$  及  $y$  应该用坐标的参数表示式来代替, 至于因子  $ds$ , 应该把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替. 特别指出, 定积分 (4) 的下限必须小于上限.

在曲线以显方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出时, 公式 (4) 的形状是:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

这一关系式也可有另一形式. 在函数  $y(x)$  与它的导数  $y'(x)$  连续的假定下, 曲线  $(K)$  在每一点处都有一不平行于  $y$  轴的确切切线. 以  $\alpha$  表切线与  $x$  轴的夹角, 我们得到:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

故

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx. \quad (6)$$

如用  $S$  表示整个曲线  $(AB)$  的长, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特别地有

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (7)$$

**附注** 公式 (7) 是经形式的变换得来的. 如果我们定义曲线弧长为外切(不是内接)折线周长的极限, 则这一定义 —— 在曲线以显式给出时 —— 立即可得出公式 (7). 读者不妨自己来证实这一点.



545. 例 1) 若  $(K)$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限内的部分, 计算积分  $I = \int_{(K)} xy ds$ .  
解 (a) 我们有

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}},$$

所以由公式 (5),

$$I = \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} \cdot x dx.$$

进行积分, 得:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

应该注意, 上面做的计算事实上还要有所说明才行, 因为当  $x = a$  时切线斜率变为无穷大. 下一解法就没有这一缺点.

(6) 如变到椭圆的参数表示  $x = a \cos t, y = b \sin t$ , 故

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

则可按公式 (4) 来进行计算:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt.$$

这里令  $\cos 2t = z$ , 则  $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} dz$ , 且

$$I' = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z} dz$$

$$= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[ \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

2) 计算积分  $I = \int_{(K)} y ds$ , 其中  $(K)$  是抛物线  $y^2 = 2px$  上自坐标原点到点  $(x_0, y_0)$  的一段.

解 由曲线的方程, 我们有  $yy' = p$ , 所以

$$y ds = y \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} dx = \sqrt{p^2 + 2px} dx,$$

且

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2px} dx = \frac{1}{3p} [(p^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$



3) 计算积分  $L = \int_{(A)} (x^2 + y^2) ds$ , 其中  $(A)$  是联结点  $(a, a)$  及  $(b, b)$  的直线段 ( $b > a$ ).

提示 直线方程:  $y = x$ . 答  $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3 - a^3)$ .

4) 计算积分  $K = \int_{(C)} ye^{-x} ds$ , 其中  $(C)$  是曲线

$$x = \ln(1 + t^2), \quad y = 2\arctgt - t + 3$$

在点  $t = 0$  及  $t = 1$  间的一段.

提示  $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 1$ ,

$$K = \int_0^1 \frac{2\arctgt - t + 3}{1 + t^2} dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4}.$$

5) 常见曲线中一大部分 (椭圆、双曲线、正弦曲线、双纽线等) 其弧长不能表作初等函数, 因为它们的  $ds$  不能积分为有限型. 然而, 对这种曲线, 积分  $\int_{(K)} f(x, y) ds$  往往算出来是初等函数 [例如, 参看例 1)], 因为与因子  $f(x, y)$  连在一起时, 积分号下微分式的整个构造改变了. 读者不妨做一些积分  $\int_{(K)} f(x, y) ds$  的例题, 积分取在正弦曲线  $y = \sin x$  或双曲线  $xy = 1$  上但又可表作初等函数者.

6) 计算积分  $I = \int_{(C)} xyz ds$ , 其中  $(C)$  是曲线  $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2$  在点  $t = 0$  及  $t = 1$  间的弧.

解  $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = (1 + t) dt$ ,

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (1 + t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7) 当曲线  $(K)$  用极坐标方程  $r = r(\theta) (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$  给出时, 试求计算积分

$$I = \int_{(K)} f(x, y) ds$$

的一公式.

答  $I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ .

8) 若  $(K)$  是双曲螺线  $r\theta = 1$  自  $\theta = \sqrt{3}$  到  $\theta = 2\sqrt{2}$  的一段, 试计算积分

$$H = \int_{(K)} \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

答  $\frac{19}{3}$ .

9) 试求曲线  $y = \ln x$  在有横坐标  $x_1$  及  $x_2$  的两点间这一段的质量, 设曲线在每点处的 (线性) 密度等于该点横坐标的平方.

解 由公式 (2), 因为在我们的情形下  $\rho = x^2$ , 故有:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} x^2 ds.$$

但  $ds = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ , 所以

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{3} \left[ (1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$



10) 试求悬链线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  在点  $x = 0$  及  $x = a$  间一段的质量, 设曲线在每点的密度与该点的纵坐标成反比.

提示  $\rho = \frac{k}{y}, ds = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{y}{a} dx, m = k.$

与连续地分布在曲线上的质量相关的其它问题, 很自然地也可变成上面所考察类型的曲线积分.

11) 在第十章中 349 我们讨论过平面曲线对坐标轴的静矩的计算, 以及它的重心坐标的计算, 那时假定“线性密度” $\rho = 1$ . 读者不难推广那里所得的公式到质量连续分布的一般情形. 如引用曲线积分概念时, 则结果可写作下面形状:

$$M_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad M_x = \int_{(K)} \rho y ds,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x ds}{\int_{(K)} \rho ds}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y ds}{\int_{(K)} \rho ds},$$

12) 我们还说明第一型曲线积分的一个应用——应用到有质量的曲线对一质点引力的问题.

大家都知道, 按牛顿定律, 质量  $m_0$  的质点  $M_0$  对质量  $m$  的质点  $M$  的吸引力, 方向是从  $M_0$  到  $M$ , 大小等于  $k \cdot \frac{mm_0}{r^2}$ , 其中  $r$  是距离  $M_0M$ , 而  $k$  是与测量的基本单位选择有关的一系数; 并且为了简单起见, 我们常认为它等于 1.

设点  $M_0$  被一质点系  $M_1, M_2, \dots, M_n$  所吸引, 它们的质量是  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 则将各个点对  $M_0$  的吸引力几何地相加, 就得到合力. 同时, 合力在坐标轴上的射影等于各个力射影的代数和.

如以  $X$  及  $Y$  表合力在坐标轴上的射影, 且以  $\theta_i$  表向量  $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$  与  $x$  轴间的夹角, 则显然,

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \theta_i$$

(与通常一样, 其中  $r_i$  表向量  $\vec{r}_i$  的长).

现在设吸引质点的质量连续地分布在一曲线  $(K)$  上. 为要找出吸引力, 我们分曲线为许多小段, 将每一小段的质量集中在它上面任意取定的一点  $M_i$  处后, 我们就求出合力在坐标轴上射影的近似值:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

因为这时各个小段其质量近似地等于  $\rho(M_i) \sigma_i$ . 如令所有的  $\sigma_i$  趋近于零, 则取极限后就得到准确的等式, 且这时和就被积分所代替了:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \cos \theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \sin \theta}{r^2} ds; \quad (8)$$

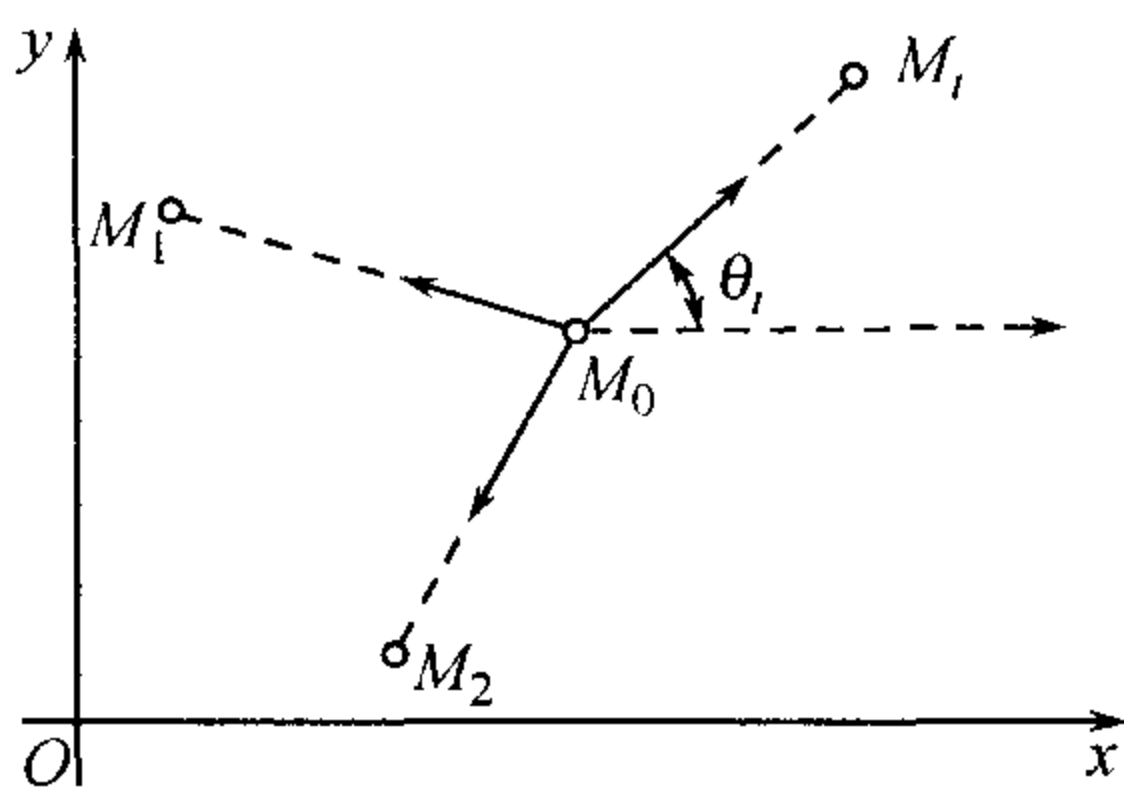


图 2



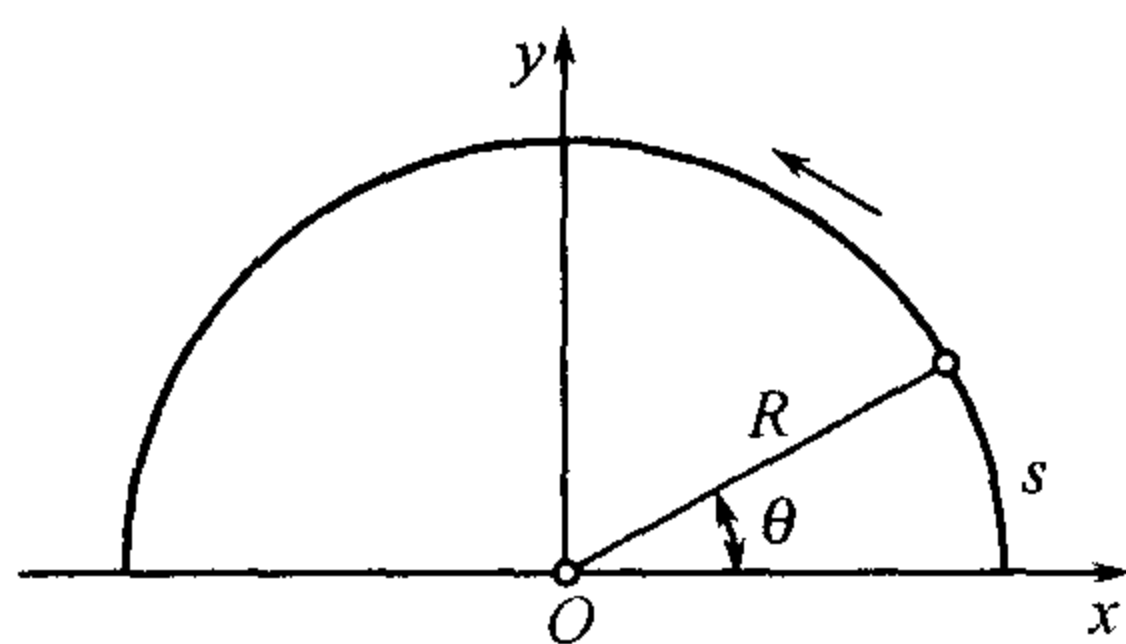


图 3

这里  $r$  表向量  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  的长, 而  $\theta$  表它与  $x$  轴的夹角.

13) 试求一均匀半圆周 ( $\rho = 1$ ) 对位于其中心的一单位质量的吸引力.

解 将坐标原点放在圆心, 通过半圆端点作横轴 (图 3). 由对称性,  $X = 0$ , 所以只要求出射影  $Y$  好了. 由公式 (8),

$$Y = \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds.$$

但在现在的情况下  $r = R$  (半圆的半径) 且  $ds = R d\theta$ . 故

$$Y = \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

14) 一单位质量的点 ( $m_0 = 1$ ) 与一无穷的均匀直线 ( $\rho = 1$ ) 的距离为  $h$ , 求直线对这一点的引力.

解 将所求的引力当作由所述直线上一有限线段所生引力的极限, 假设这一线段的端点两头变到无穷远去. 如将直线本身取作  $x$  轴, 而  $y$  轴通过已知点, 则得 (考虑在所给的情况下  $ds = dx$ )

$$Y = -h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2}{h}.$$

同样,  $X = 0$  (但由对称性这很明显).

15) 试求星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  在第一象限内的弧对位于坐标原点的单位质量所生的引力, 设曲线在每一点的密度等于这一点到坐标原点的距离的立方.

答  $X = Y = \frac{3a^2}{5}.$

## §2. 第二型曲线积分

**546. 第二型曲线积分的定义** 转而讨论在实际中更为重要的第二型曲线积分的概念, 我们直接从定义开始, 而把这一概念的应用放在以后的一些目中 [例如, 参看 554]. 设给定连续曲线  $(AB)$ , 为了简单我们假定它不是闭曲线, 并设沿此曲线还给定了某个函数  $f(x, y)$ .<sup>①</sup> 用点  $A_i$  分曲线为许多部分后,<sup>77)</sup> 在曲线段  $A_i A_{i+1}$  上取一任意点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ , 并计算出函数在这点的值  $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ ; 再作一和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

如当  $\mu = \max \overline{A_i A_{i+1}}$  趋近于零时, 这个和有一有限极限  $I$ , 既与曲线细分的方法无关, 又与点  $M_i$  的选择无关, 则这一极限称为  $\int f(M) dx$  沿曲线或道路  $(AB)$  的

<sup>①</sup> 参看第 2 页脚注 ①.

<sup>77)</sup> 参看第 2 页的脚注 76).



(第二型) 曲线积分, 用记号表为

$$I = \int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y) dx. \quad (1)$$

同样, 将值  $f(M_i)$  不乘上  $\Delta x_i$  而乘上  $\Delta y_i$ , 并作和

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

我们得到它的极限, 即  $f(M) dy$  的(第二型) 曲线积分:

$$I^* = \int_{(AB)} f(M) dy = \int_{(AB)} f(x, y) dy. \quad (2)$$

如沿曲线  $(AB)$  定义有两个函数  $P(M) = P(x, y), Q(M) = Q(x, y)$ , 且积分

$$\int_{(AB)} P(M) dx = \int_{(AB)} P(x, y) dx, \quad \int_{(AB)} Q(M) dy = \int_{(AB)} Q(x, y) dy$$

都存在, 则它们的和就称为 (“一般形状的”) 曲线积分, 并令

$$\int_{(AB)} Q(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(AB)} P(x, y) dx + \int_{(AB)} Q(x, y) dy.$$

现在我们来比较第二型曲线积分 (1)[或 (2)] 的定义与第一型曲线积分的定义 [参看 543(1)]. 除显然的类似地方外这两个定义有实质上的不同: 在第一型积分的情形下, 当形成积分和时, 函数值  $f(M_i)$  乘以曲线段  $\widehat{A_i A_{i+1}}$  的长  $\sigma_i = \Delta s_i$ , 在第二型积分的情形下, 这个值  $f(M_i)$  乘以这一段在  $x$  轴 (或  $y$  轴) 上的射影  $\Delta x_i$  (或  $\Delta y_i$ ).

我们已经看到过, 积分进行所沿道路  $(AB)$  的方向在第一型积分的情形下不起作用, 因为弧  $\widehat{A_i A_{i+1}}$  的长  $\sigma_i$  与这一方向无关. 然而第二型积分的情形就不同了: 所述弧段在任一轴上的射影与弧的方向大有关系, 方向变为反向时, 射影也变号. 因此, 对第二型积分有

$$\int_{(BA)} f(x, y) dx = - \int_{(AB)} f(x, y) dx,$$

同样,

$$\int_{(BA)} f(x, y) dy = - \int_{(AB)} f(x, y) dy,$$

且右端积分的存在就能推出左端积分的存在, 反过来也是如此.

用类似的方法可以引导散布在空间曲线  $(AB)$  上的第二型曲线积分的概念. 即, 如在这一曲线上给出一函数  $f(M) = f(x, y, z)$ , 则与上面一样, 作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$



并当  $\mu = \max A_i A_{i+1}$  趋近于零时考察它的极限. 如这一极限存在, 则它称为  $f(M)dx$  的 (第二型) 曲线积分, 并用记号表为

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x, y, z)dx.$$

同样地定义有下列形状的积分:

$$\begin{aligned}\int_{(AB)} f(M)dy &= \int_{(AB)} f(x, y, z)dy, \\ \int_{(AB)} f(M)dz &= \int_{(AB)} f(x, y, z)dz.\end{aligned}$$

最后, 考察 (“一般形状”) 积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz.$$

这里同样, 积分的方向改变就使积分的符号也改变.

最后注意, 通常定积分的最简单性质 [302, 303] 容易移到所考察的曲线积分上来, 关于这一点这里不讨论了.

**547. 第二型曲线积分的存在与计算** 设已知曲线  $(K) = (AB)$  的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

且函数  $\varphi$  及  $\psi$  连续, 又当参数  $t$  自  $\alpha$  变到  $\beta$  时曲线以自  $A$  到  $B$  的方向描动. 我们也假定函数  $f(x, y)$  沿曲线  $(AB)$  连续.

如谈到积分 (2) 时, 我们还更假定导数  $\varphi'(t)$  存在且连续.

在这些假定下曲线积分 (2) 存在, 且有等式

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt. \quad (4)$$

因此, 在计算曲线积分 (1) 时, 应在积分号下的函数中将变量  $x$  及  $y$  用它们的参数表示式 (3) 代替, 而因子  $dx$  应当把变量  $x$  当作参数的函数而用这函数的微分来代替. 最后一积分中, 积分上下限次序的安排在这里要看曲线方向的选择.

下面我们来证明. 在曲线上取由参数值  $t_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  所决定的点  $A_i$ , 在弧  $\widehat{A_i A_{i+1}}$  上选取一点  $M_i$ , 它的参数值是  $\tau_i$  (显然  $\tau_i$  在  $t_i$  与  $t_{i+1}$  之间). 那么积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

当我们考虑到

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt$$



时, 它就可改写为

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt$$

的样子. 另一方面, (5) 中右端的积分<sup>①</sup>可表作和的形状:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

于是,

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt.$$

在给定一任意的  $\varepsilon > 0$  后, 现在假定所有的  $\Delta t_i$  非常小, 使在区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上连续函数  $f(\varphi(t), \psi(t))$  的振动  $< \varepsilon$ . 因为连续函数  $\varphi'(t)$  是有界的  $|\varphi'(t)| \leq L$ , 所以我们就会有

$$|\sigma - I| < \varepsilon L |\beta - \alpha|.$$

因此, 当量  $\lambda = \max |\Delta t_i|$  趋近于 0 时,<sup>②</sup>

$$\lim \sigma = I,$$

这同时既证明了曲线积分的存在, 又证明了所要求的等式.

容易看到, 这一推理不加什么本质上的变动就可放到函数  $\varphi(t)$  仅有分段连续的导数情形上去.

对于积分 (2), 当导数  $\psi'(t)$  连续(或仅仅分段连续)时, 用同样的方法可得知它的存在, 且可证明公式

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5)$$

最后, 如谈到一般形状的面积

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

而其中  $P$  及  $Q$  为连续函数时, 则对曲线  $(AB)$  我们就加一条件, 就是两函数 (3) 有连续或至少有分段连续的导数. 在这一假定下公式

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt \quad (6)$$

<sup>①</sup>因为积分号下的函数连续, 积分显然存在.

<sup>②</sup>这就相当于各小段弧的直径中最大者趋近于 0 或 (在非闭曲线的情况下) 最大的弦趋近于 0 [245].



就成立.

曲线积分的定义与这里所示的化它为普通定积分的方法也可直接推广到曲线 (3) 自身相交的情形, 只要它上面的方向与前面一样由参数  $t$  单调地自  $\alpha$  变到  $\beta$  而确定.

末了我们来说明曲线积分计算起来特别简单的若干情形. 设积分 (1) 取在一曲线上, 这曲线是用显方程

$$y = y(x)$$

给出的, 且当  $x$  自  $a$  变到  $b$  时点自  $A$  位移到  $B$ . 那么, 对曲线除连续外不加任何假定, 就有

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = (R) \int_a^b f(x, y(x)) dx. \quad (7)$$

同样, 如果积分 (2) 散布在一连续曲线上, 这曲线仍由显方程给出, 但是另一种样子:

$$x = x(y)$$

(其中  $y$  由  $c$  变到  $d$ ), 则

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = (R) \int_c^d f(x(y), y) dy. \quad (8)$$

最后, 如果积分 (1) 散布在平行于  $y$  轴的一直线段上, 则它等于 0 (因为在这种情形下, 所有的  $\Delta x_i$  因此同时所有的和  $\sigma$  都等于 0). 同样, 积分 (2) 取在平行于  $x$  轴的一直线段上时也等于零.

如积分道路 ( $K$ ) 可分成有限段彼此相接的曲线, 沿每一曲线各个曲线积分存在且可以用上面所示公式之一来计算, 则很容易证明, 沿整个曲线 ( $K$ ) 的积分存在, 且等于沿它各部分积分的和.

**548. 闭路的情形 · 平面的定向** 转而讨论闭路 ( $K$ ), 即积分道路的起点  $A$  与终点  $B$  重合的情况, 在曲线上取异于  $A$  的一点  $C$ , 假设按照定义, 考虑在曲线上选定的方向 (在图 4 中已用箭头指明):

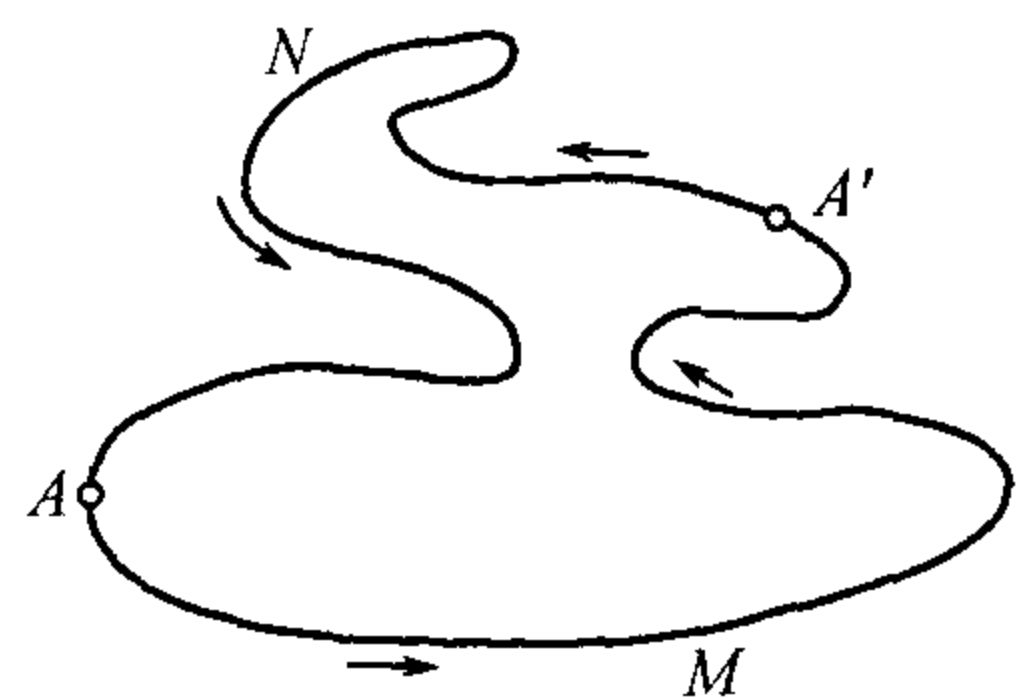


图 4

$$\int_{(K)} = \int_{(AMC)} + \int_{(CNA)},$$

假定右边的积分存在.

容易证明, 积分的存在及数值与点  $A$  和  $C$  的选择无关. 此外, 对闭路 ( $K$ ), 上一目中的公式 (4), (5) 和 (6) 是可以应用的.

**附注** 其实此处曲线积分 (与非闭曲线的情形一样) 可以由取极限得到, 但极限过程受到要求预先固定



两个点  $A, A'$ , 使得它们在所加入的分点中是不变动的这一限制. 此处没有这一限制, 当  $\max \overline{A_i A_{i+1}} \rightarrow 0$  的极限过程不能达到目的.

我们所考察的情况的特点是: 指定了起点及 (与它相重的) 终点, 并不能确定曲线 ( $K$ ) 描动的方向. 在每一情况下都要特别说明是取的哪一个方向. 在谈到空间曲线时也必须同样说明. 而在平面闭路 ( $K$ ) 的情况下通常用别的方法来说明.

在所给平面的两可能转动方向——“反时针向”及“顺时针向”——中, 取一个算作正的: 这样就构成了确定的平面的定向. 如反时针向算作正的, 则平面的定向称作右手的, 在另一种情形下, 就称作左手的.<sup>78)</sup>

在平面的右手定向的情形下, 我们就令反时针向转动作为简单闭路的正向的定义 (图 5,a)). 实在说来, 这一定义仅对近似于圆周的闭路才非常清楚. 故更正确地我们应该这样规定: 当一人沿 (简单) 闭路循一方向环行时, 如由闭路所围的区域靠近观察者的部分总是在观察者的左手边时, 这一方向就称为曲线的正向 (图 5,a)). 在平面的左手定向的情形下, 顺时针向环行闭路就是正的, 所以区域总是在观察者的右手边 (图 5,b)).

我们注意, 平面中坐标轴本身的安排恒与平面的定向有联系: 在平面的右手定向时, 将  $x$  轴按反时针向转  $90^\circ$  就得到  $y$  轴; 而在左手定向时, 就要按顺时针向转 (参看图 6,a), b)). 在第一种情况下, 坐标系本身也称为右手的, 而在第二种情况下, 称为左手的.<sup>79)</sup>

在作这些说明后, 今后我们永远这样规定好: 如积分道路 ( $K$ ) 是一简单闭曲线, 则当记号

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy$$

没有指明闭路环行的方向时, 我们恒认为它是沿正向所取的积分. 当然, 这一规定并没有限制我们必要时考察沿负向取积分, 不过我们用

$$-\int_{(K)} Pdx + Qdy$$

<sup>78)</sup> 在脚注 79 中叙述了给出平面定向的更正式的方法.

<sup>79)</sup> 由最后一段所说的, 为了给出平面的定向, 只需在此平面上选择某个坐标系. 事实上, 如果确定了坐标系  $xy$  (从观察者的角度来看, 右手系或左手系没有区别), 那么与其相应的转动的正方向是  $x$  轴按此方向绕原点转动  $90^\circ$  后与  $y$  轴重合. 平面绕原点按正方向转动  $\alpha$  角可以由公式  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$  作为变换严格解析地给出. 这样一来, 如果在平面上选定了某个坐标系, 那么这个平面的定向就唯一且严格地给定了. 给出在 (有向) 平面上, 范围区域 ( $D$ ) 的闭路 ( $K$ ) 的环行正方向的正式概念有点难. 作到这一点的方法之一如下: 用  $l(M)$  表示其始点为闭路 ( $K$ ) 上点  $M$ . 与闭路 ( $K$ ) 相切的射线, 其方向指向闭路 ( $K$ ) 的环行方向 (在闭路有参数表示时,  $l(M)$  容易解析地给出). 设  $l'(M)$  是  $l(M)$  绕  $M$  点按正向转动  $90^\circ$  所得射线. 如果对于 (简单的或分段光滑的) 闭路 ( $K$ ) 的无论什么样的非奇异点  $M$ , 射线  $l'(M)$  上所有充分靠近  $M$  的点都在区域 ( $D$ ) 内, 那么所考虑的闭路 ( $K$ ) 的环行方向就是正向. 用这个定义可以纯解析地证明与前面引进的概念有关的所有断言. 然而在许多情况下, 过渡到纯解析的语言将导致极为复杂的证明.



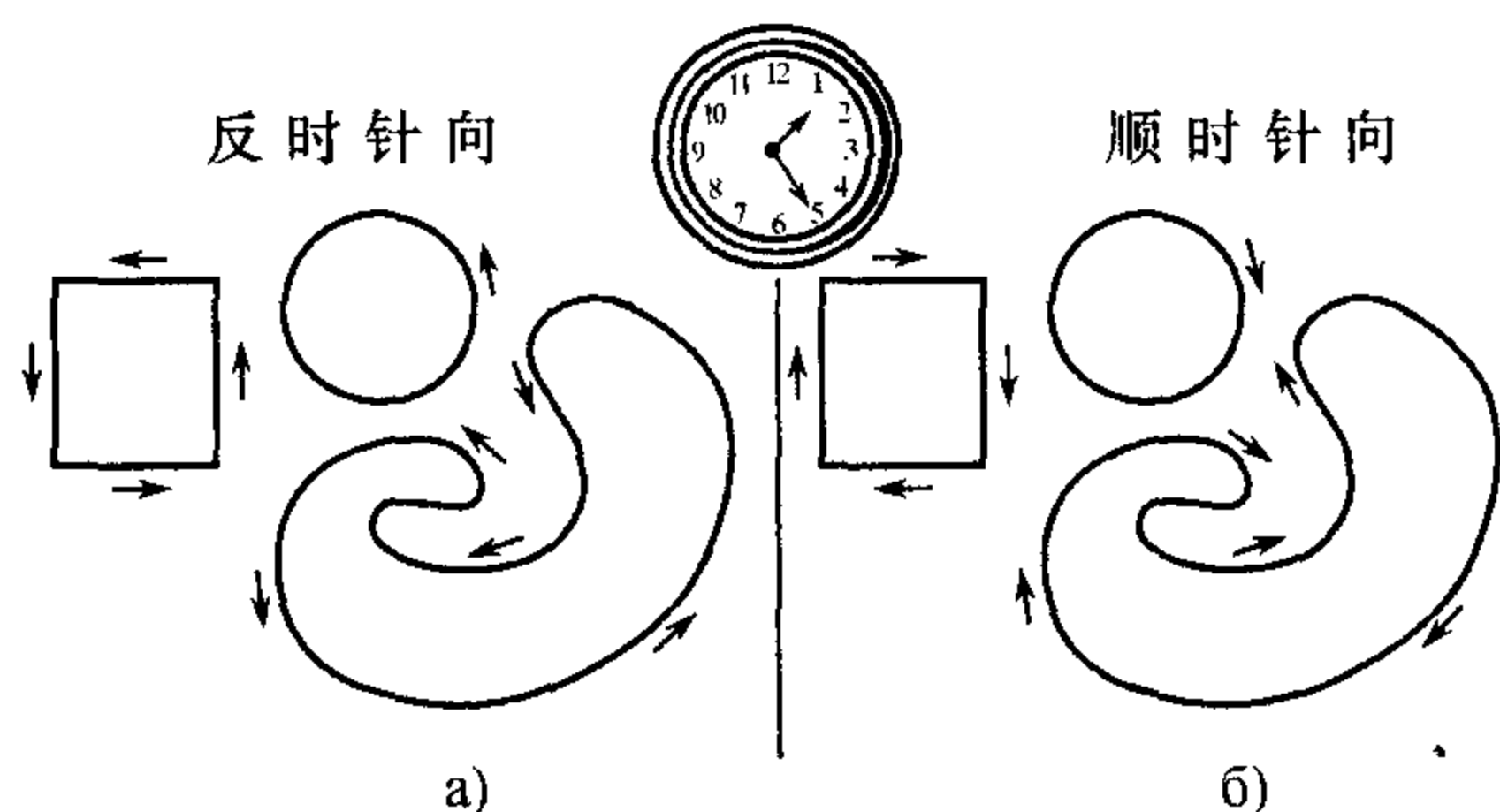


图 5

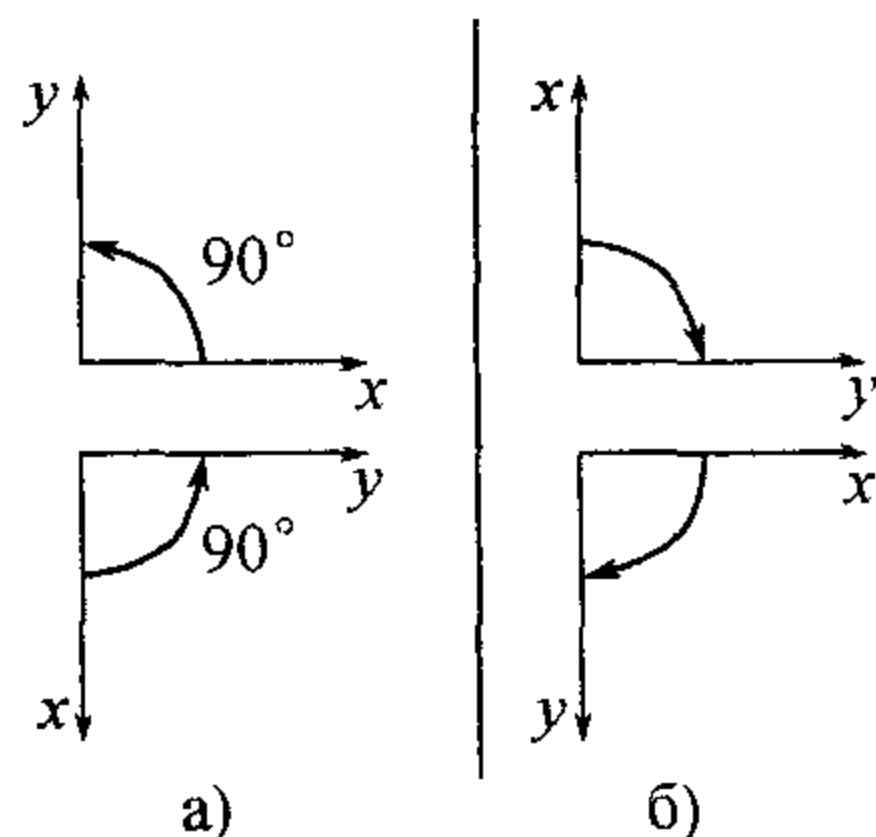


图 6

来表示它罢了.

**549. 例** 1) 假如  $(K)$  是抛物线  $y = x^2$  自横坐标  $x = 0$  的点到横坐标  $x = 2$  的点的一段, 试求积分  $I = \int_{(K)} (x^2 - y^2) dx$ .

**解** 因为积分的曲线是用显方程给出的, 故可应用公式 (7); 得

$$I = \int_0^2 (x^2 - x^4) dx = -\frac{56}{15}.$$

2) 求积分  $J = \int_{(K)} (x^2 - y^2) dy$ , 其中  $(K)$  代表上题中的曲线.

**解** 这里应该利用公式 (8). 注意由曲线方程知  $x^2 = y$  且  $y$  的变动范围是 0 到 4, 我们有

$$J = \int_0^4 (y - y^2) dy = -\frac{40}{3}.$$

3) 计算取在联结点  $O(0, 0)$  与  $A(1, 1)$  的一道路  $(L)$  上的曲线积分

$$H = \int_{(L)} 2xy dx + x^2 dy$$

的值, 如道路  $(L)$  是: (a) 直线  $y = x$ , (b) 抛物线  $y = x^2$ , (c) 抛物线  $x = y^2$ , (d) 立方抛物线  $y = x^3$  (图 7).

**解** (a) 因为  $dy = dx$ , 故

$$(a) \quad \int_{(L)} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 3x^2 dx = 1;$$

$$(b) \quad dy = 2x dx, H = \int_0^1 4x^3 dx = 1;$$

$$(c) \quad dx = 2y dy, H = \int_0^1 5y^4 dy = 1;$$

$$(d) \quad dy = 3x^2 dx, H = \int_0^1 5x^4 dx = 1.$$

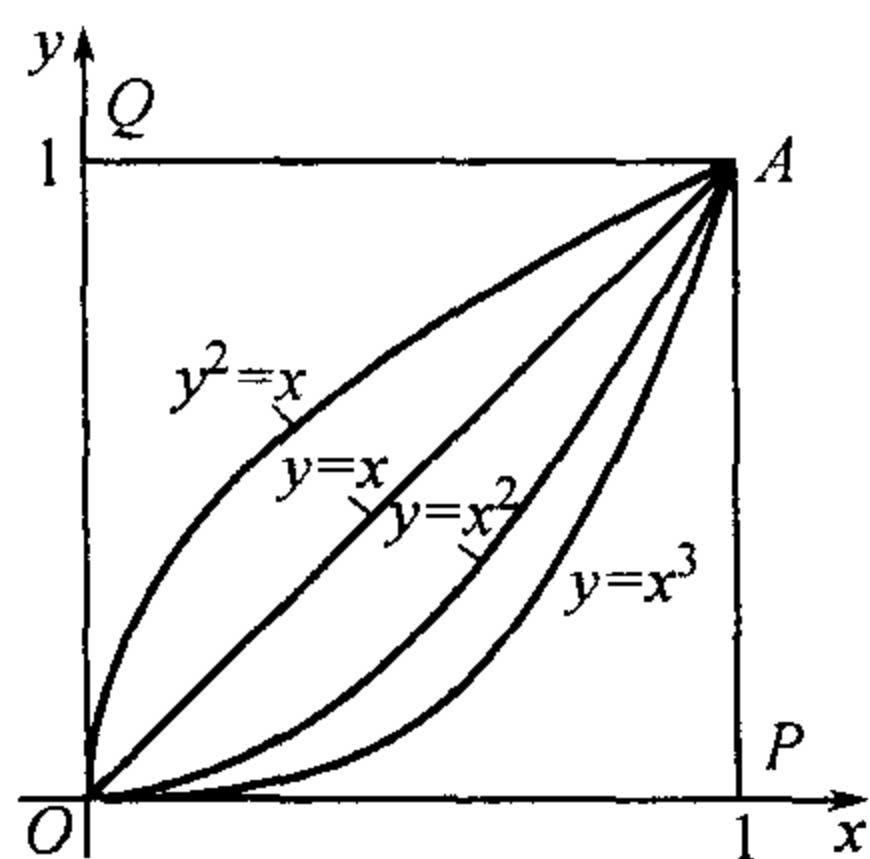


图 7

4) 对这些同样积分路线, 计算曲线积分

$$G = \int_{(L)} xy dx + (y - x) dy.$$



答 (a)  $\frac{1}{3}$ , (б)  $\frac{1}{12}$ , (в)  $\frac{17}{30}$ , (г)  $-\frac{1}{20}$ .

5) 求曲线积分

$$I = \int_{(OA)} (x - y^2) dx + 2xy dy,$$

如取连接点  $O(0,0)$  及  $A(1,1)$  的下列各曲线之一 (参看图 7) 作为积分道路: (a) 直线段  $OA(y=x)$ ; (б) 由  $x$  轴 ( $y=0$ ) 的一段  $OP$  及直线  $x=1$  的一段  $PA$  所组成的折线  $OPA$ ; (в) 由  $y$  轴 ( $x=0$ ) 的一段  $OQ$  及直线  $y=1$  的一段  $QA$  所组成的折线  $OQA$ .

解 (a) 因  $y=x$  及  $dy=dx$ , 故

$$I = \int_0^1 (x + x^2) dx = \frac{5}{6}.$$

(б) 在这一情况下很自然地分积分道路为两段:

$$I = \int_{(OPA)} = \int_{(OP)} + \int_{(PA)} = I_1 + I_2.$$

沿  $OP$  我们有:  $y=0$  及  $dy=0$ , 所以

$$I_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

沿  $PA$  有:  $x=1$  及  $dx=0$ , 故

$$I_2 = \int_0^1 2y dy = 1.$$

因此, 最后  $I = \frac{3}{2}$ .

(в) 与前类似, 得 (因为沿线段  $OQ$  的积分等于零):

$$I = \int_{(QA)} = \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{2}.$$

6) 同样求积分

$$J = \int_{(OA)} (y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy.$$

答 在所有情形下  $J=2$ .

附注 读者可能已注意到例 3), 6) 的结果与 4), 5) 的结果间的差异. 在 3) 与 6) 中所考察积分的大小似乎与连接起点及终点的道路无关. 相反, 在例 4) 与 5) 中我们遇到的积分其值与起点及终点用什么样的线连接相关. 以后 [§3] 我们要特别来讨论这一问题并说明它的重要性.

7) 计算积分

$$I = \int_{(C)} (x^2 + 2xy) dy,$$

其中  $(C)$  表示循反时针向的上半椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



解 利用椭圆的参数表示式:  $x = a \cos t, y = b \sin t$ , 这里  $t$  由 0 变到  $\pi$ . 将  $x, y$  用  $t$  的表示式代入并用  $b \cos t dt$  来代  $dy$ , 得 [由公式 (5)]

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (a^2 \cos^2 t + 2ab \cos t \sin t) b \cos t dt \\ &= a^2 b \int_0^\pi \cos^3 t dt + 2ab^2 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

8) 计算积分

$$K = \int_{(L)} y^2 dx - x^2 dy,$$

其中  $(L)$  是一圆周, 半径为 1 而中心在: (a) 坐标原点或 (b) 点  $(1, 1)$ .

解 (a) 自参数方程  $x = \cos t, y = \sin t$  出发, 其中  $t$  由 0 变到  $2\pi$ , 由公式 (6) 我们有

$$K = - \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = 0.$$

(b) 同样, 用参数表示式

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 1 = \sin t$$

时, 我们得

$$K = - \int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

9) 求积分

$$J = \int_{(K)} \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \quad (A, C \text{ 及 } AC - B^2 > 0),$$

其中  $(K)$  是圆周  $x^2 + y^2 = r^2$ .

提示 比照 339, 14). 答  $\frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$

10) 计算积分

$$L = \int_{(A)} \frac{x dx}{y} + \frac{dy}{y - a},$$

如果  $(A)$  是摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

自点  $t = \frac{\pi}{6}$  到点  $t = \frac{\pi}{3}$  的一段.

$$\text{解 } L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[ a(t - \sin t) - \frac{\sin t}{\cos t} \right] dt = a \left( \frac{\pi^2}{24} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln 3.$$

11) 计算积分

$$I = \int_{(K)} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

如果  $(K)$  是星形线

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

自点  $A(a, 0)$  到点  $B(0, a)$  的一段.

$$\text{解 } I = 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{16} \pi a^{\frac{4}{3}}.$$



**550. 用取在折线上的积分的逼近法** 在许多情形下会遇到一种曲线积分, 用取在折线上的积分来逼近它非常方便. 这种逼近法建立在下一命题上, 这一命题对我们今后不止一次有用.

所提到的曲线  $(L)$  假定是简单曲线, 且是非闭的. 此曲线由方程 (3) 给出, 其中函数  $\varphi$  与  $\psi$  连同它们的导数是连续的; 这一点保证了在下面所述的等式 [547] 中曲线积分的存在性, 同样也保证了曲线  $(L)$  是可求长的 [248].

**引理** 设函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  于某开区域  $(E)$  内连续, 而  $(L)$  是在  $(E)$  内的一曲线. 如作  $(L)$  的内接折线  $(\Lambda)$ , 则当各段小弧直径的最大者趋近于零时我们有

$$\lim \int_{(\Lambda)} Pdx + Qdy = \int_{(L)} Pdx + Qdy.$$

只要讨论  $\int_{(\Lambda)} Pdx$  及  $\int_{(L)} Pdx$  就够了, 对积分  $\int_{(\Lambda)} Qdy$  及  $\int_{(L)} Qdy$  推理完全是一样的. 设内接于  $(L)$  的折线  $(\Lambda)$  的顶点为

$$A \equiv A_0, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \equiv B,$$

以  $x_i, P_i$  表  $x, P$  在点  $A_i$  的值. 给定任意一数  $\varepsilon > 0$  后, 命各小弧的直径非常小, 使 1) 连续函数  $P$  沿线段  $\overline{A_i A_{i+1}}$  的振动  $< \varepsilon$  且 2) 积分和  $\sum_i P_i \Delta x_i$  与它的极限  $\int_{(L)} Pdx$  之差也小于  $\varepsilon$ .

显然, 我们有

$$\int_{(\Lambda)} Pdx = \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} Pdx,$$

且另一方面,

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} P_i dx,$$

所以

$$\int_{(\Lambda)} Pdx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} [P - P_i] dx.$$

但右端的第一项与积分  $\int_{(L)} Pdx$  相差小于  $\varepsilon$  [参看 2)], 而第二项其绝对值不会超过  $\varepsilon \sum_i \overline{A_i A_{i+1}}$  [参看 1)], 也就是更  $< L \cdot \varepsilon$ , 其中  $L$  是曲线  $(L)$  的长.

于是, 最后,

$$\left| \int_{(\Lambda)} Pdx - \int_{(L)} Pdx \right| < \varepsilon(1 + L),$$

这就证明了我们的断言.

**附注** 如果把简单闭路  $(L)$  分成两条非闭的曲线, 并且对后者分别应用上述引理, 那么所证明的断言在某种意义上可以推广到简单闭曲线的情形, 这里的极限过程受到要求分点之中有两个预先固定的点这一限制 [参看 548 目的附注].



**551. 用曲线积分计算面积** 我们现在来指出, 怎样借 (第二型的) 曲线积分来计算平面图形的面积.

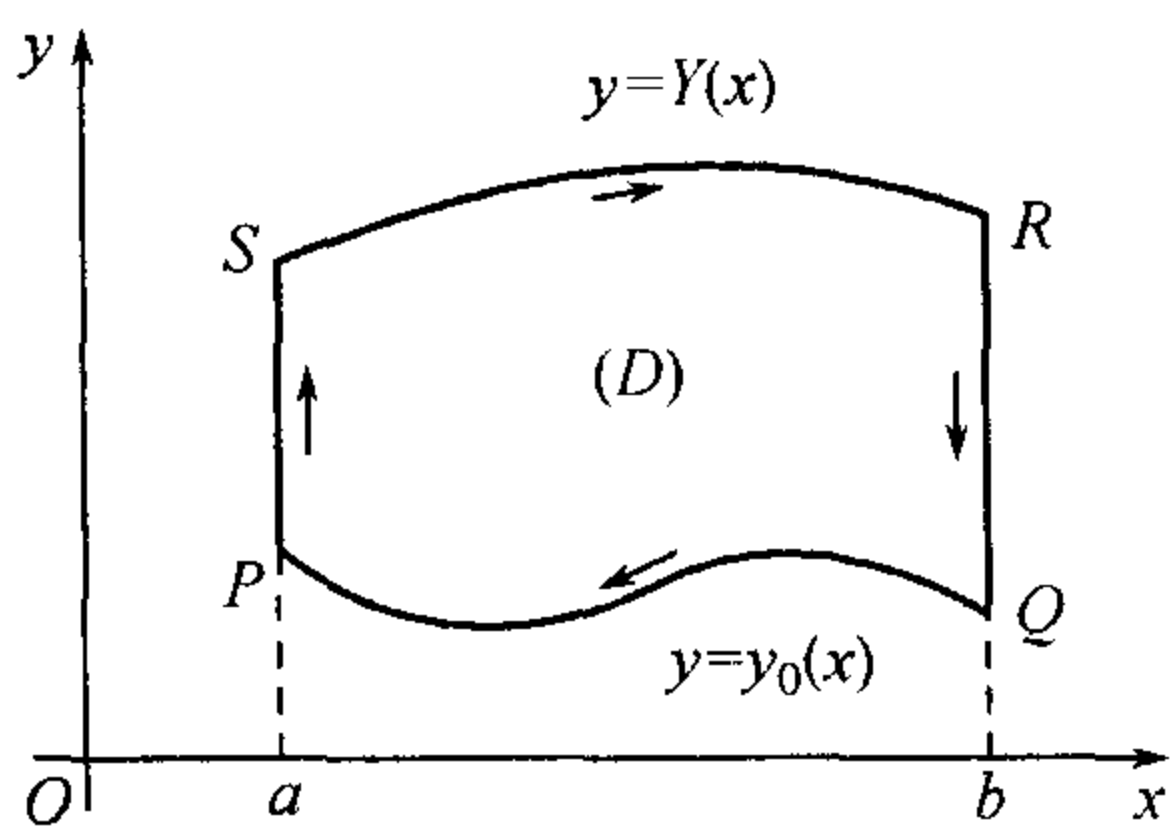


图 8

首先我们来考察 (图 8) 图形  $(D) = PQRS$ , 它是由平行于  $y$  轴的二直线段  $PS$  及  $QR$  (在特别情形时可缩为一点) 与两曲线  $PQ$  及  $SR$  围起来的, 而这两曲线的每一个与平行于  $y$  轴的任一直线仅交于一点. 设曲线  $(PQ)$  及  $(SR)$  的显方程为

$$(PQ) : y = y_0(x), \quad (SR) : y = Y(x),$$

且  $x$  在区间  $[a, b]$  上变动.

将 “曲边梯形”  $PQRS$  的面积  $D$  看作两 “曲边梯形”  $abRS$  及  $abQP$  的面积之差时, 我们就可以写

$$D = \int_a^b Y(x) dx - \int_a^b y_0(x) dx.$$

另一方面, 由公式 (7),

$$\int_{(PQ)} y dx = \int_a^b y_0(x) dx, \quad \int_{(SR)} y dx = \int_a^b Y(x) dx.$$

所以

$$D = \int_{(SR)} y dx + \int_{(QP)} y dx;$$

这里我们已经在第二个积分前面变了号, 但同时却也改变了积分的方向. 若在等式右端加上等于零的两积分

$$\int_{(PS)} y dx \quad \text{及} \quad \int_{(RQ)} y dx$$

(因为它们是沿着平行于  $y$  轴的直线段而取的), 则等式并未破坏. 结果得

$$D = \int_{(PSRQP)} y dx,$$

且积分路线是按积分号下文字的次序前进的.

如以  $(L)$  表区域  $(D)$  的边界, 则按第 548 目末尾的规定, 记号  $\int_{(L)} y dx$  表示以正向取的积分. 在坐标轴, 如图 8 所采用的, 是右手定向时, 这一环行方向使区域在左手边, 而同时方向  $PSRQP$  使这一区域在右手边. 故

$$\int_{(PSRQP)} y dx = - \int_{(L)} y dx,$$

因此,

$$D = - \int_{(L)} y dx. \quad (9)$$



现在假定, 虽然图形  $(D)$  是由较复杂的边界围成的 (甚至边界是由若干曲线所组成), 但这一图形用平行于  $y$  轴的直线恒可分成有限个如上所考察的小块 (图 9). 每一小块有一由公式 (9) 所表出的面积. 将这些等式相加, 在左边我们就得到整个图形  $(D)$  的面积, 而右边是散布在各部分边界上的积分的和. 但这些积分可化为取在总边界  $(L)$  上的一积分, 因为沿每一辅助线段的积分等于零. 因此, 在这种情形下面积  $(D)$  仍以公式 (9) 表示.

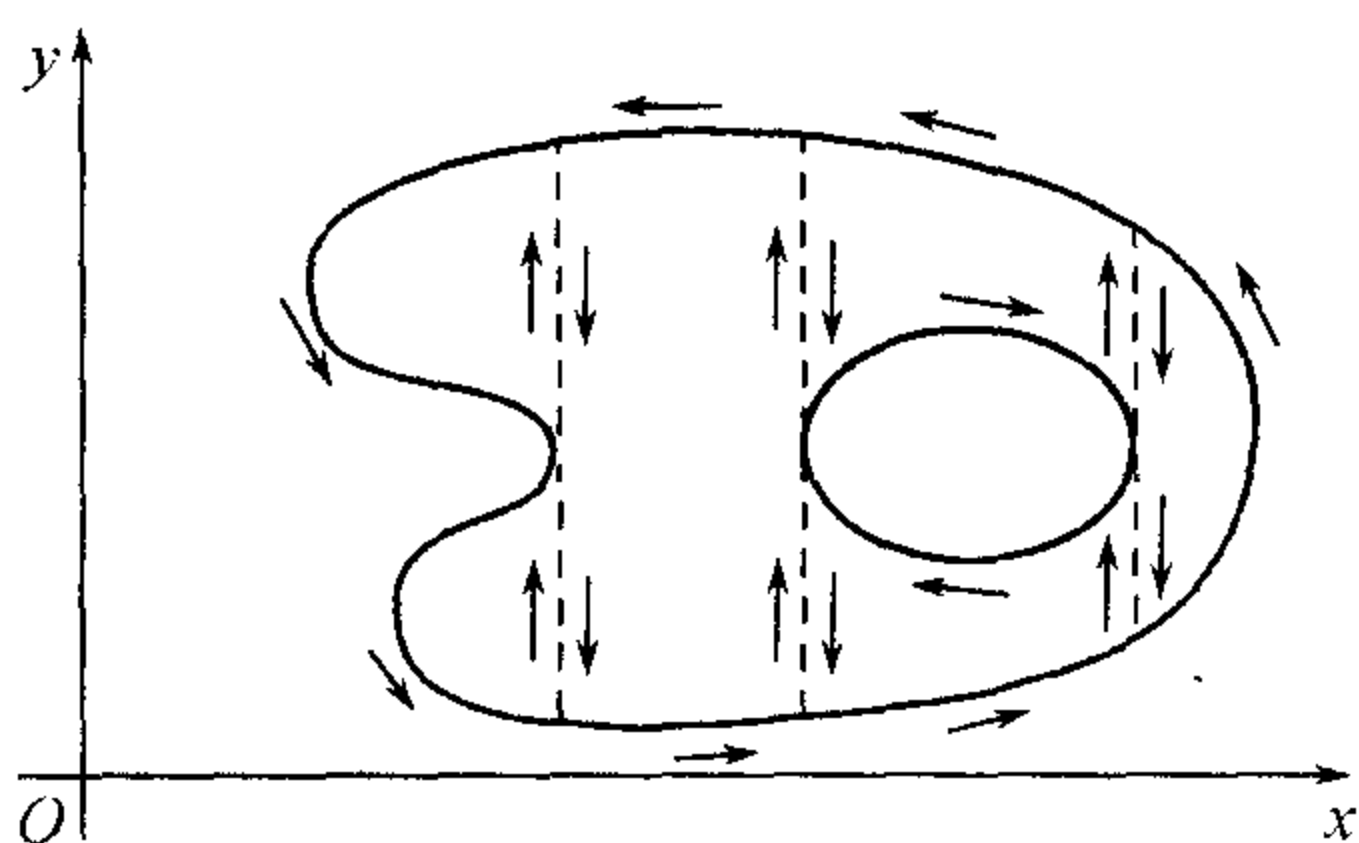


图 9

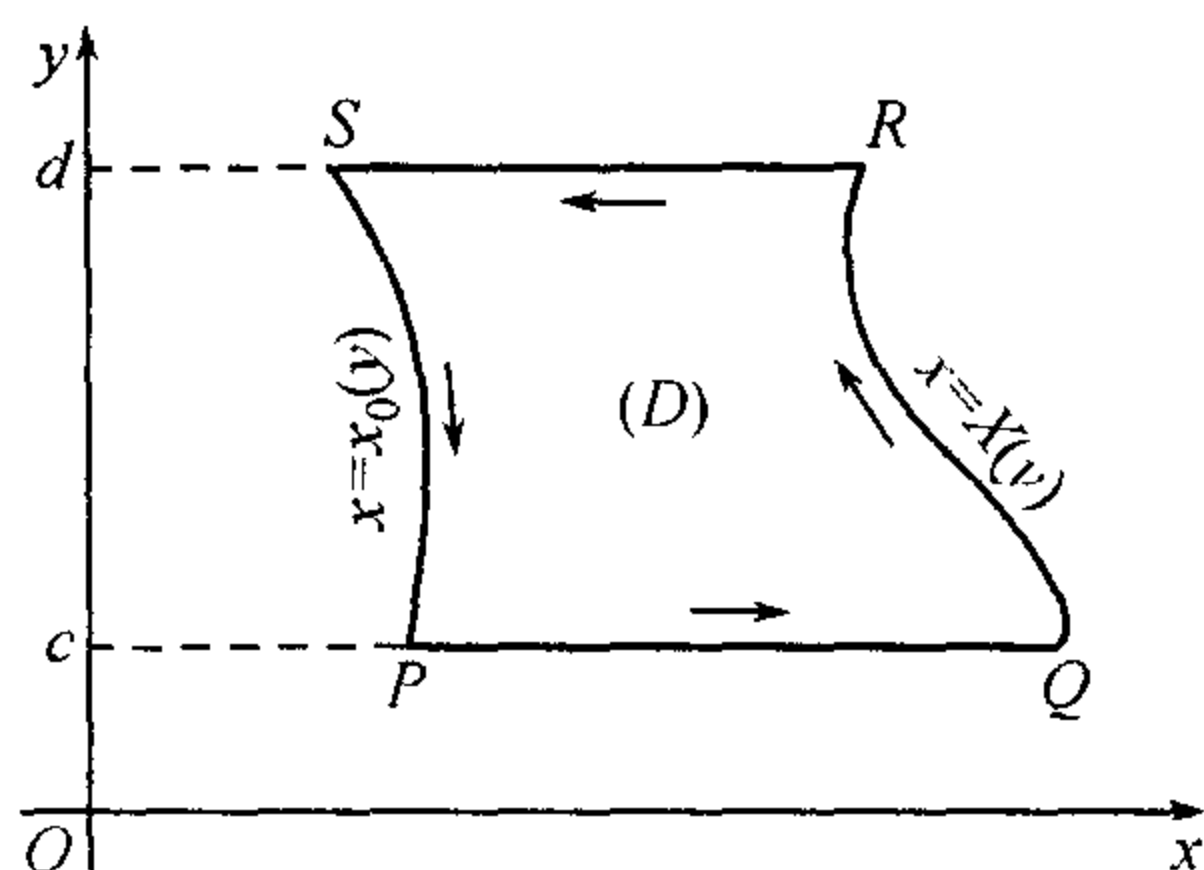


图 10

对于由平行于  $x$  轴的两直线段  $PQ$  及  $SR$  (图 10) 与两曲线

$$\begin{aligned} (PS) : x &= x_0(y), \\ (QR) : x &= X(y) \end{aligned} \quad (c \leq y \leq d)$$

所围成的图形  $PQRS$ , 用类似的推理可得公式

$$D = \int_{(L)} x dy. \quad (10)$$

并且, 如果互换  $x, y$  轴的地位, 它也可直接由公式 (9) 推出. 这时符号必须改变, 这是因为环行的正向与坐标轴地位互换无关, 仍旧完全与前面一样.

容易明白, 对于较复杂的图形, 即用平行于  $x$  轴的直线可将它分成有限个第二型的“曲边梯形”者, 公式 (10) 依然成立.

所得结果事实上已有完全足够的普遍性了. 但是, 在许多具体情况中要去检验上面的图形是否可能分割为上述特殊类型的小块往往很麻烦. 所以我们来证明另一个, 亦是相当一般的, 但容易验证的条件, 在这一条件下公式 (9) 及 (10) 可同时应用.

我们假定, 区域  $(D)$  是由一任意的分段光滑的<sup>①</sup>曲线  $(L)$  围成的.<sup>80)</sup> 因为这一区域是可求面积的 [337], 故可作一在里面的及一在外面的多角形区域  $(A)$  及  $(B)$  使

$$A < D < B, \quad B - A < \varepsilon,$$

<sup>①</sup>回想一下, 我们称由若干段光滑曲线组成的曲线为分段光滑曲线 [参看 337].

<sup>80)</sup>对具有分段光滑边界的区域, 公式 (9) 与 (10) 的完全解析的证明十分繁琐; 下文中为了简明, 略去了细节.



其中  $\varepsilon$  是事先给定的一正数 [335]. 同时也可以假定这些区域的边界两两无公共点. 以  $\delta$  表这些不同边界的点间的最小距离 [336 脚注]. 如内接于  $(L)$  作一折线  $(\Delta)$  使所有小弧的直径  $< \delta$ , 这折线就已经不会与多角形  $(A)$  及  $(B)$  的边界有公共点, 所以由它所围的多角形  $(\Delta)$  包含着  $(A)$  且自身又含于  $(B)$  内. 于是

$$|\Delta - D| < \varepsilon,$$

故当小弧直径的最大者趋近于零时,  $\Delta \rightarrow D$ .

现在不难证明, 公式 (9) 及公式 (10) 都可应用来计算多角形面积  $\Delta$ , 即

$$\Delta = - \int_{(\Delta)} y dx = \int_{(\Delta)} x dy$$

(因为用平行于  $y$  轴或  $x$  轴的直线很容易分割这一多角形为这种或那种类型的梯形). 如变到极限, 并引用前一目中的引理, 最后就得到: 由一个分段光滑的曲线所围图形  $(D)$  的面积可任意用上述公式之一来表示.

但是, 在计算面积时, 通常采用另一较对称的公式:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(L)} x dy - y dx, \quad (11)$$

这由公式 (9) 及 (10) 很容易得到 [比照 339(16)].

**附注** 容易证明, 曲线上有有限个奇点时事实上并不改变上面所导出的公式的真实性. 如用这些点的邻域将它们分开, 则对图形的其余部分公式是可以应用的. 再只要令这些邻域的直径趋近于零变到极限就可以了.

**552. 例** 1) 求半轴为  $a$  及  $b$  的椭圆面积.

**解** 利用椭圆的参数方程:  $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ . 由公式 (11),

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt - b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

在计算曲线积分时我们利用了公式 (6), 当排列积分上下限的次序时要注意闭路正向的环行对应于参数的增加.

2) 求星形线

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的面积.

**答**  $D = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$

3) 求由外摆线

$$\begin{aligned} x &= a[(1+m) \cos mt - m \cos(1+m)t], \\ y &= a[(1+m) \sin mt - m \sin(1+m)t] \end{aligned}$$



的一拱与对应的圆弧间所围图形的面积 (图 11).

解 应先沿着曲线  $(ABC)$  再沿着曲线  $(CDA)$  取积分 (11). 在前一情况下我们可利用上面写出的方程, 令  $t$  自 0 变到  $2\pi$ . 则

$$xdy - ydx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)dt,$$

故

$$\frac{1}{2} \int_{(ABC)} = \pi a^2 m(1+m)(1+2m).$$

至于圆弧  $(CDA)$ , 则如保持同一参数, 它就可用方程

$$x = a \cos mt, \quad y = a \sin mt$$

来表示, 这时  $t$  自  $2\pi$  变到 0. 对应的积分为

$$\frac{1}{2} \int_{(CDA)} = \frac{1}{2} a^2 m \int_{2\pi}^0 dt = -\pi a^2 m.$$

因此, 所求面积等于

$$D = \pi a^2 m^2 (2m+3).$$

#### 4) 试求笛卡儿叶形线

$$x^2 + y^3 = 3axy$$

一圈的面积 (图 12).

解 为了要求得闭路的参数方程, 令  $y = tx$ .<sup>①</sup> 则 [参照 224,5)]

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由几何观察很清楚, 当参数  $t$  自 0 变到  $\infty$  时, 圈子就描画出来了 (因为  $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta$ , 其中  $\theta$  由 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ ). 我们有

$$dx = 3a \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} dt,$$

$$dy = 3a \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} dt$$

及

$$D = \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2} a^2.$$

注意这里我们用了无穷限的反常积分, 而在推演公式 (6) 时我们一直认为参数变化的区间是有限的. 要证明上面做的是正确的非常容易, 只要先引进另一参数使其变化区间是有限的 (例如, 角  $\theta$ ), 再变到参数  $t = \frac{y}{x}$ .

#### 5) 同一问题, 对曲线:

$$(a) (x+y)^4 = ax^2y, \quad (b) (x+y)^{2n+1} = ax^n y^n (n \text{ 为自然数}).$$

<sup>①</sup>一般, 当代数曲线的方程有两类齐次项且次数相差一时, 这样的代换法总是很方便的.

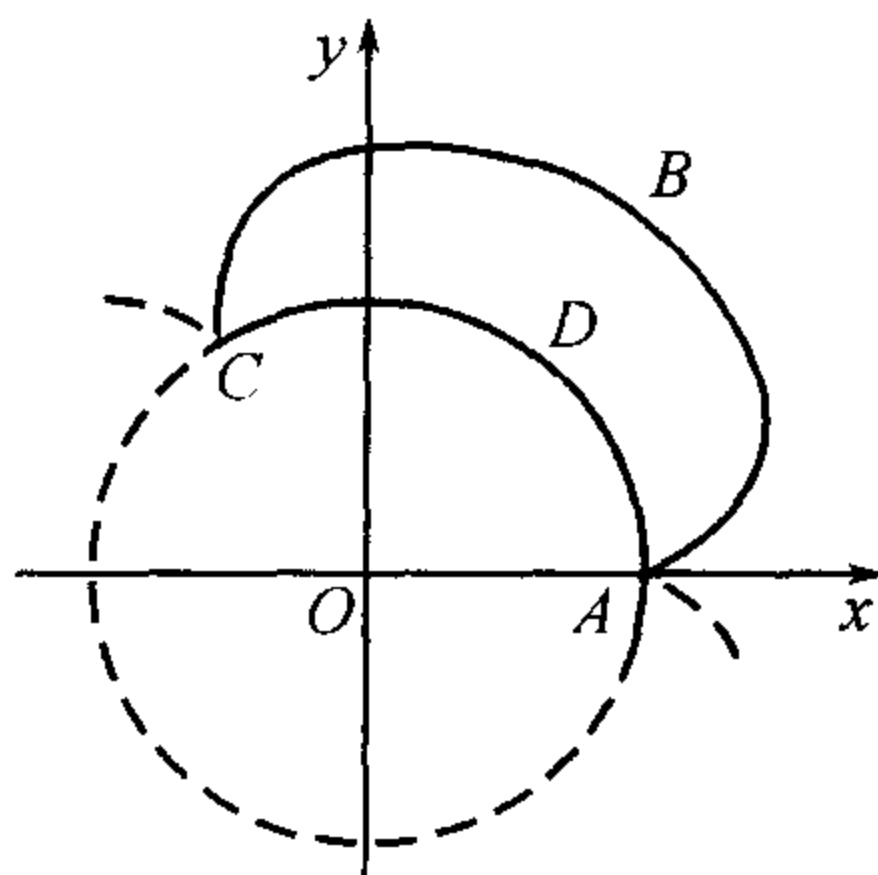


图 11

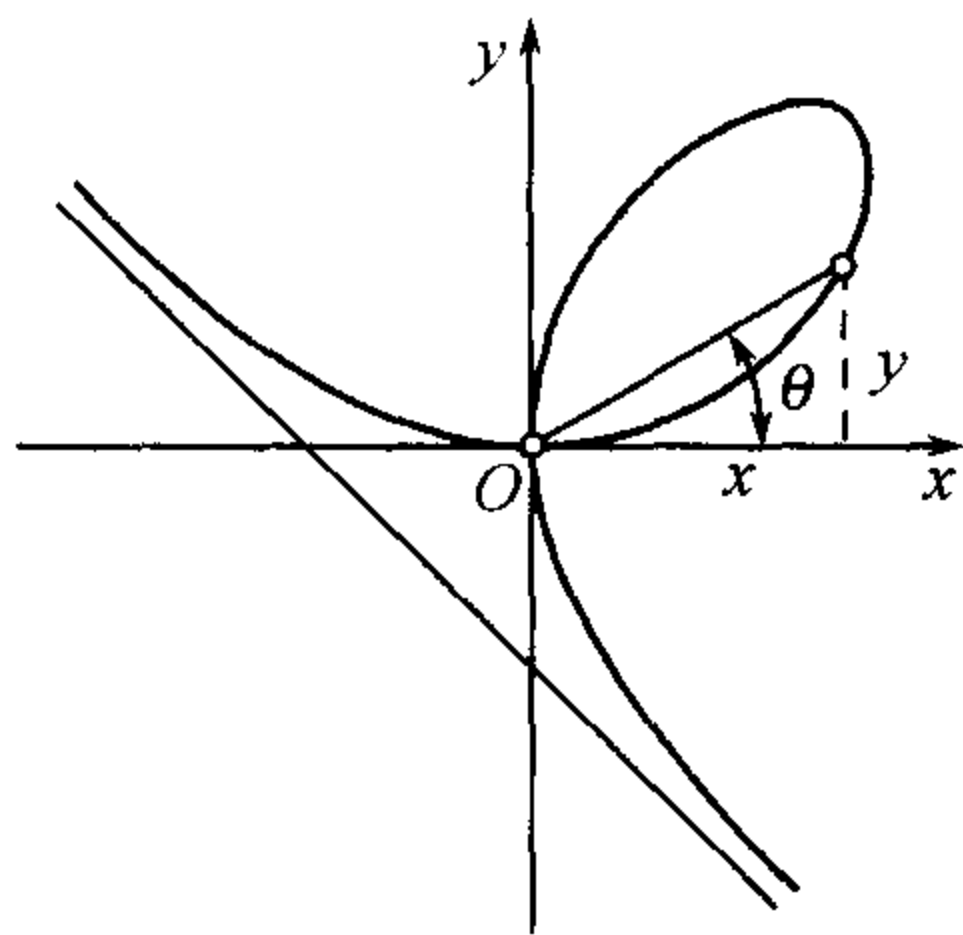


图 12



提示 引导  $t = \frac{y}{x}$ ,  $t$  自 0 变到  $\infty$ . 在情形 (6) 下,

$$x dy - y dx = a^2 \frac{t^{2n}}{(1+t)^{4n+2}} dt.$$

在积分时, 自恒等式

$$t^{2n} = [(1+t) - 1]^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k (1+t)^k$$

出发, 可使分式分成许多简单的分式.

答 (a)  $D = \frac{a^2}{210}$ ; (6)  $D = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{C_{2n}^k}{4n-k+1} \cdot a^2.$

6) 求坐标轴与曲线

$$x^2 + y^3 = x^2 + y^2$$

所围图形的面积.

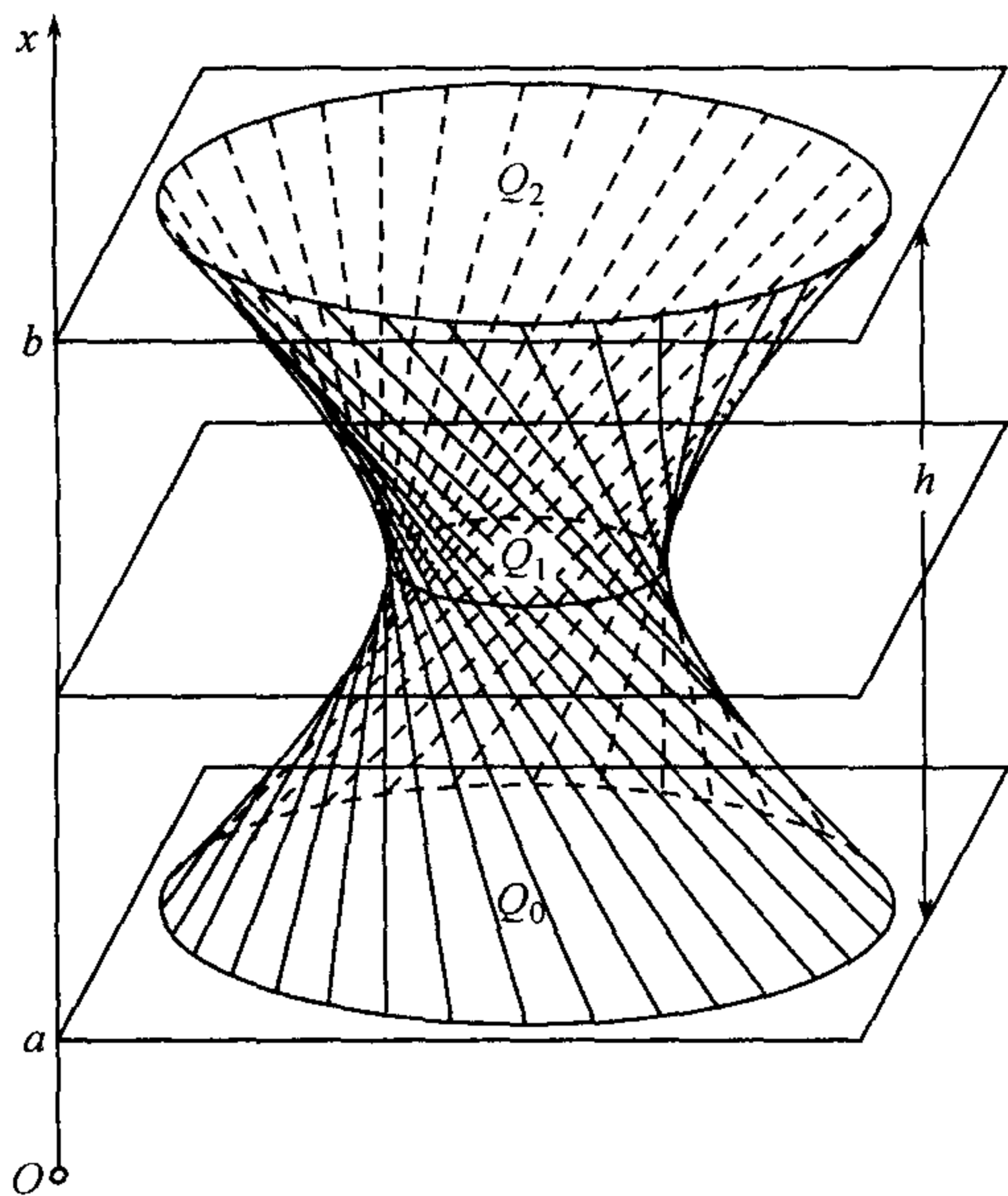


图 13

$$D = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

7) 作为应用一般公式 (11) 于计算任何样子的平面图形<sup>①</sup>面积的一例, 我们最后来讨论这样一问题.

设某一立体的底面是在两平行平面上的二任意形状的图形, 而侧面是直纹面, 是由按照某种规则连接这两图形的边缘上的点而成的直线所组成的 (图 13). 求证, 立体的体积  $V$  可用公式

$$V = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2) \quad (12)$$

来表示, 其中  $h$  表立体的高,  $Q_0, Q_2, Q_1$  是它的底面积与中间截面的面积.

我们知道, 如横断面面积是  $Q = Q(x)$ , 则体积  $V$  可用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx$$

来表示 (参看 342). 另一方面, 如  $Q(x)$  是至多三次的多项式, 则辛普森公式:

$$\int_a^b Q(x) dx = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2)$$

是准确的 (参看第二卷 327 脚注). 事实上, 我们将看到,  $Q(x)$  是一个二次多项式.

设

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta \quad (13)$$

<sup>①</sup>当然, 要合于上面所说的条件, 为简单起见这些条件我们这里不再重提了.



是构成范围立体的直纹面的方程. 这里可以假定系数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是某一参数  $t$  的函数, 当  $t$  变化 (例如, 由  $t_0$  到  $T$ ) 时母线就描画出曲面来. 现在如果用一平行于  $yz$  平面、与它相距  $x$  的平面去截这一曲面, 则在相交的地方就得一曲线, 它在  $yz$  平面上的射影 (并未变形!) 恰以方程 (13) 做它的参数方程. 我们假定, 当  $t$  自  $t_0$  变到  $T$  时所有截面处的边界都是以正向 (被对应的母线上的点) 描画出来了. 因此截面面积, 例如由类似于 (10) 的公式, 可表为:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{(K_x)} y dz = \int_{t_0}^T (\alpha x + \beta) d(\gamma x + \delta) \\ &= x^2 \cdot \int_{t_0}^T \alpha d\gamma + x \cdot \int_{t_0}^T (\alpha d\delta + \beta d\gamma) + \int_{t_0}^T \beta d\delta, \end{aligned}$$

即, 确实表为  $x$  的二次三项式.

容易证明, 类似于公式 (12) 的公式也可应用到计算立体对  $yz$  平面的静矩上去. 这静矩可用积分

$$M_{yz} = \int_a^b x Q(x) dx$$

来表示 [356,1)], 这里积分号下的函数是一个三次多项式.

**553. 两不同型曲线积分间的联系** 考察一光滑曲线  $(K) \equiv (AB)$ , 取弧  $s = \widehat{AM}$  为参数, 我们就可表它为方程

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S).$$

函数  $x(s), y(s)$  将有连续导数  $x'(s), y'(s)$ . 如以  $\alpha$  表示向着弧的增加方向的切线与  $x$  轴间的夹角, 则大家都知道 [249,(15)],

$$\cos \alpha = x'(s), \quad \sin \alpha = y'(s).$$

如沿曲线  $(K)$  已知一连续函数  $f(M) = f(x, y)$ , 因此我们有

$$\begin{aligned} \int_{(K)} f(M) dx &= \int_0^S f(x(s), y(s)) x'(s) ds \\ &= \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_{(K)} f(M) \cos \alpha ds, \end{aligned}$$

而第二型曲线积分就化成第一型曲线积分了.

同样可得

$$\int_{(K)} f(M) dy = \int_{(K)} f(M) \sin \alpha ds.$$

如沿曲线  $(K)$  已知二连续函数  $P(M) = P(x, y)$  及  $Q(M) = Q(x, y)$ , 则

$$\int_{(K)} P dx + Q dy = \int_{(K)} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds. \quad (14)$$



我们着重指出, 在所有这些公式中角  $\alpha$  与切线的方向有关, 而这一方向对应于曲线  $(K)$  的方向. 如将曲线方向改变, 则不仅左端的积分变号, 且由于切线方向的改变, 角  $\alpha$  要变动  $\pm\pi$ , 故同时右端的积分也要变号.

显然, 所导出的公式对无重点及奇点的分段光滑曲线依然成立; 这很容易证明, 只要对曲线的每一光滑段将公式写出来再逐一相加就可以了.

作为一练习我们将面积公式 (11) 改变成第一型曲线积分:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{(K)} (x \sin \alpha - y \cos \alpha) ds.$$

如变成极坐标  $r, \theta$ , 则又得

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} r(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) ds = \frac{1}{2} \int_{(K)} r \sin(\alpha - \theta) ds.$$

注意  $\alpha - \theta$  是点的位置向量与该点处切线间的夹角  $(r, t)$ , 故可给这公式一最终形状:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} r \sin(r, t) ds.$$

对沿空间曲线的曲线积分也可作同样的讨论. 结果得公式

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(K)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是切线的方向余弦, 当然假定它的方向对应于积分道路的方向.

在平面曲线的情形下, 与两种曲线积分相关的公式中, 如写出  $x$  轴与积分所散布的曲线法线间的夹角时, 有时比较方便. 如给法线一方向使切线与法线间的夹角  $\angle(t, n)$  等于  $+\frac{\pi}{2}$ ,<sup>①</sup> 故

$$\angle(x, n) = \angle(x, t) + \angle(t, n) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

则

$$\cos \alpha = \sin(x, n),$$

$$\sin \alpha = -\cos(x, n).$$

因此, 例如公式 (14) 就可写成下面的形状:

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy = \int_{(K)} [P \sin(x, n) - Q \cos(x, n)] ds. \quad (15)$$

<sup>①</sup>计算角的正负方向必须按照平面的定向!



**554. 物理问题** 最后我们来讨论一些物理问题, 在其中曲线积分得到了应用.

1) **力场中功的问题** 设在  $xy$  平面 (或平面的一确定部分) 的任一点  $M$  如放一单位质量, 就有一确定的力  $\vec{F}$  作用于它, 这个力的大小与方向只与点  $M$  的位置有关; 如放在  $M$  的质点其质量  $m$  不等于 1, 则作用于它的力就等于  $m\vec{F}$ . 在这种情形下  $xy$  平面 (或所考察的一部分) 称作(平面) **力场**, 而作用于单位质量的力  $\vec{F}$  称作**场的引力**. 给出力  $\vec{F}$  的大小与方向相当于给出它在坐标轴上的射影  $X, Y$ , 显然射影是点  $M$  的坐标  $x, y$  的函数

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y).$$

如果向量  $\vec{F}$  与  $x$  轴构成的角用  $\varphi$  表示, 那么 (图 14)

$$X = F \cos \varphi, \quad Y = F \sin \varphi. \quad (16)$$

现在假定, 位于场中的质点  $M(x, y)$  (有单位质量者) 运动, 且以一确定的方向描出某一连续曲线  $(K)$ . 我们的问题是在这一运动中场的力所做的功  $A$  如何计算.

假如作用于点的力保持一常值  $F$  且保持一固定方向, 而点的位移本身以直线进行, 则大家都知道, 功  $A$  可表为位移  $l$  与力在位移方向上射影的乘积:

$$A = Fl \cos \theta,$$

其中  $\theta$  是力  $\vec{F}$  与位移方向间的夹角.

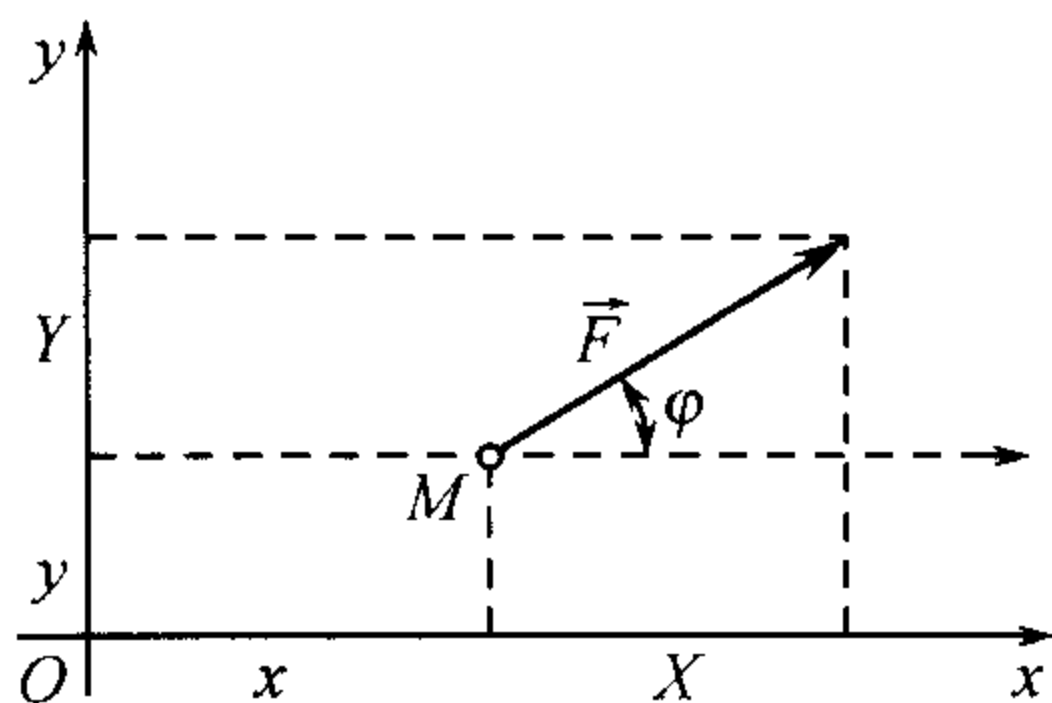


图 14

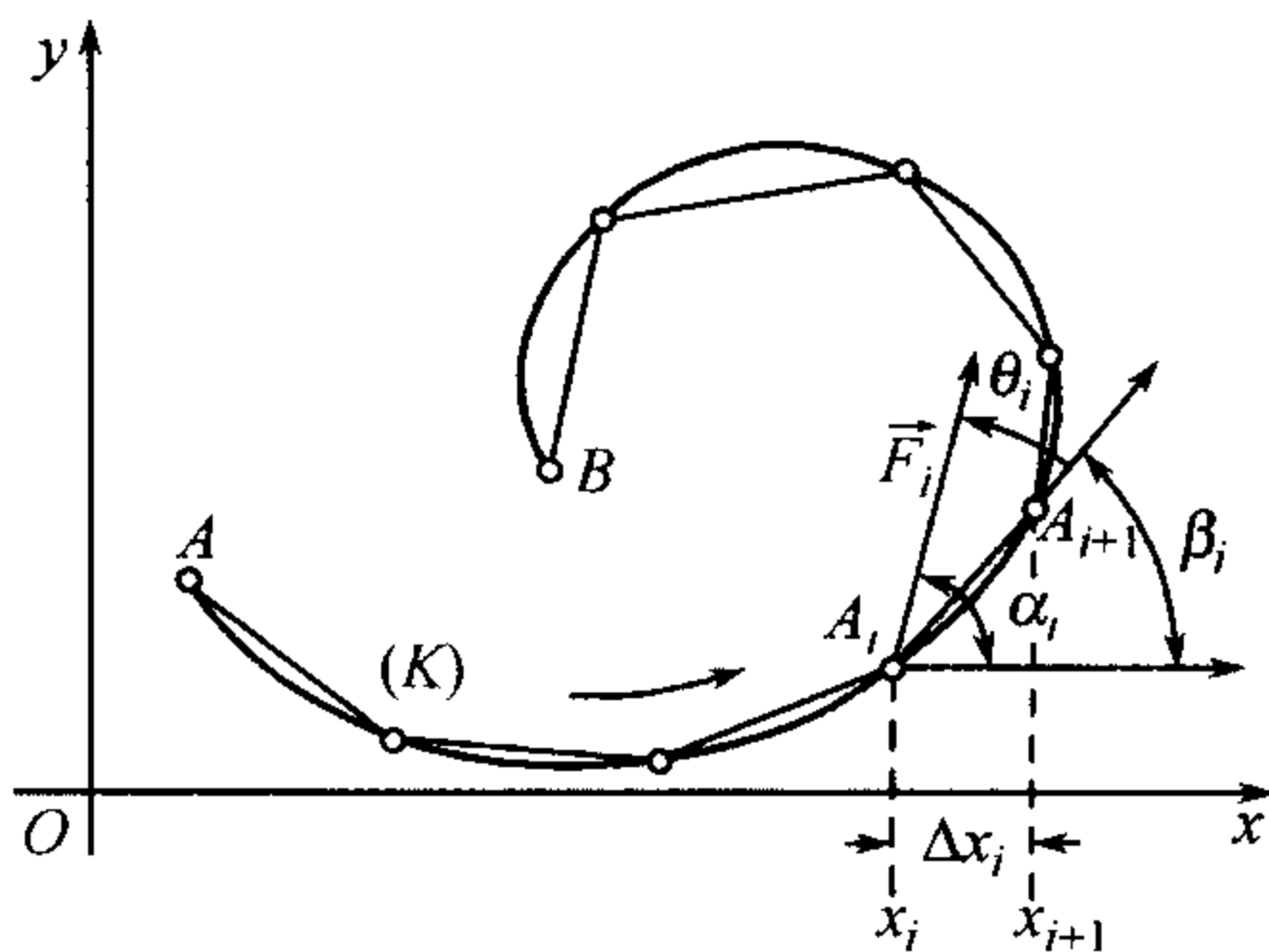


图 15

在非直线运动以及非常数力的情况下, 功要借某一极限过程来确定. 同时, 为了简明, 可以采取在实际中所熟知的“无穷小求和法” [参看 348]. 我们用弧  $\widehat{AM}$  的长  $s$  来确定曲线  $(K)$  上的点  $M$  的位置. 考虑曲线的无穷小元素  $MN = ds$ , 并近似地认为, 力  $\vec{F}$  与其对位移  $ds$  的角  $\theta$  保持数值不变. 那么相应的元功为

$$dA = F \cos \theta ds.$$

现在余下来的仅仅是把这些沿曲线  $(K)$  的元素“加起来”, 结果功  $A$  就表示成第一型曲线积分

$$A = \int_{(K)} F \cos \theta ds. \quad (17)$$



引入元素  $ds$  的方向 (即曲线在点  $M$  的切线方向) 与  $x$  轴之间的角  $\alpha$ . 显然,  $\theta = \varphi - \alpha$ , 于是

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha,$$

积分的元素可记为:  $(F \cos \varphi \cos \alpha + F \sin \varphi \sin \alpha)ds$ , 或者, 根据 (16) 式:

$$(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)ds.$$

功的表达式 (17) 本身具有如下形式:

$$A = \int_{(K)} (X \cos \alpha + Y \sin \alpha)ds.$$

如果现在考虑到建立了一、二型曲线积分之间联系的 (14) 式, 那么力场所作的功最终表为

$$A = \int_{(K)} Xdx + Ydy. \quad (18)$$

这是对功的最通用的表示, 是对于如下一系列与功有关的重要问题的研究方便的表示: 所作的功与连接给定两点的道路的形式是否有关? 沿一条闭路所作的功是否总是等于零? [关于这一点, 参看下面的 555 ~ 562 目.]

2) 不可压缩流体在平面中的定常流动 这种运动的特征是: 第一, 在某平面的同一铅垂线上各部分流体有相同的速度, 所以, 要说明整个运动只要研究在一个平面<sup>①</sup>内的运动就够了; 第二, 流体各部分的速度  $\vec{c}$  仅与各部分的位置有关而与时间无关. 因此, 在所考察的平面 (或它的一部分) 中每一几何点处, 就有一个在大小及方向上都确定的速度与它联系着; 换句话说, 给出了某一“速度场”.

如以  $\varphi$  表示向量  $\vec{c}$  与  $x$  轴间的夹角, 而以  $u$  及  $v$  表这一向量在坐标轴上的射影 (速度沿坐标轴的分量), 则 (图 16, a))

$$u = c_x = c \cos \varphi,$$

$$v = c_y = c \sin \varphi.$$

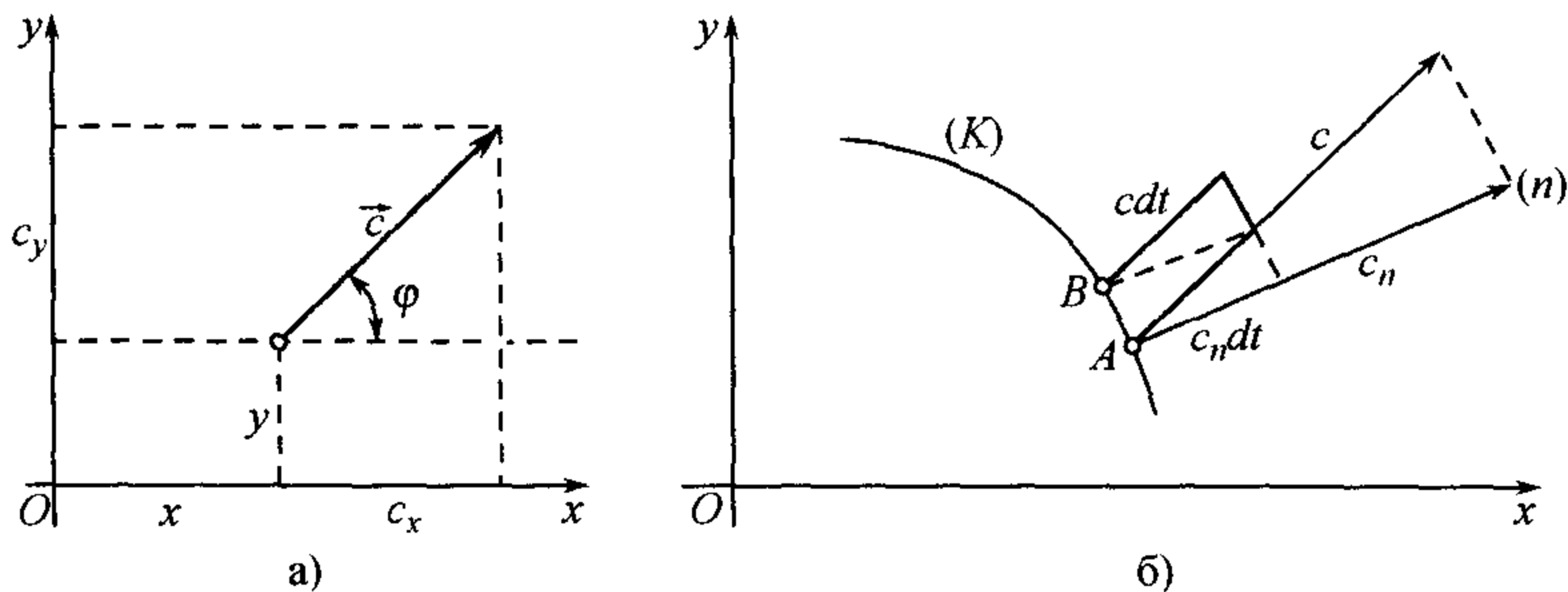


图 16

<sup>①</sup>我们取这一平面为  $xy$  平面.



现在在  $xy$  平面中取一任意曲线  $(K)$ , 我们设法决定流体在单位时间内向曲线的确定一侧流过 (曲线) 的流量  $Q$ . 设流体是不可压缩的, 便可用流体所掩盖图形的面积来测量流体的量. 如实际上流体向所取的相反一侧流动, 则流体的流量就算是负的.

考察曲线  $(K)$  的元素  $ds = AB$ . 在时间  $dt$  内通过这一元素流体的流量等于

$$c_n ds dt. \quad (19)$$

其中  $c_n$  是速度  $\vec{c}$  在元素  $ds$  的法线  $\vec{n}$  上的射影, 法线是向着所取的曲线那一侧的. 实际上, 这一量等于以  $ds$  及  $c \cdot dt$  为边的平行四边形的面积, 它的高恰为乘积  $c_n dt$  (图 16, 5)). 为了计算在单位时间内流体通过元素  $ds$  的流量, 将 (15) 式对元素  $dt$  相加, 得出  $c_n ds$ . 再将所得式子对曲线  $(K)$  的所有元素相加, 我们就可将所求流量  $Q$  表作第一型曲线积分的样子:

$$Q = \int_{(K)} c_n ds. \quad (20)$$

如  $x$  轴与曲线法线间的夹角为  $(x, n)$ , 则法线与速度  $\vec{c}$  间的夹角就是

$$(n, c) = (x, c) - (x, n) = \varphi - (x, n);$$

所以

$$\begin{aligned} c_n &= c \cos(n, c) = c [\cos \varphi \cos(x, n) + \sin \varphi \sin(x, n)] \\ &= u \cos(x, n) + v \sin(x, n), \end{aligned}$$

而式 (20) 就成为以下形式:

$$Q = \int_{(K)} [u \cos(x, n) + v \sin(x, n)] ds. \quad (21)$$

现在, 按照第 553 目中公式 (15), 这一积分也可表作第二型曲线积分的形状:

$$Q = \int_{(K)} v dx - u dy, \quad (22)$$

并且很重要地我们特别指出, 应该取这一曲线的方向使对应的切线方向与前所取的法线方向间夹角等于  $+\frac{\pi}{2}$  [因为就是在这一假定下公式 (15) 才推出来的].

如  $(K)$  是一闭路, 且积分 (22) 是认为沿着正向而取的 (与通常一样, 548), 则公式 (22) 中的法线应取着朝向路线  $(K)$  所围区域的内部 (为了适合刚才所说的条件). 因此, 在这种情形下, 公式 (22) 就给出在单位时间内流体通过边界  $(K)$  流向境域内部的流量. 如想要得到在单位时间内由边界  $(K)$  所围区域流体向外的流量, 只要在公式 (22) 中变号就可以了.

再, 如场中流体既没有“泉源”也没有“漏洞”时, 则在任一有界区域内流体的量保持不变. 所以, 不论取怎样的闭曲线, 沿它所取的积分 (22) 必定等于零.

因此, 若  $u$  及  $v$  是不可压缩流体在平面的定常流动中的分速度, 则当没有泉源与漏洞时, 不论  $(K)$  是怎样的闭路,

$$\int_{(K)} v dx - u dy = 0.$$



以后 [566,2)] 我们将看到, 这一借物理观察而得的结果也可以给出函数  $u$  及  $v$  的某种分析说明.

3) 气体所吸收的热 考察若干质量的气体, 例如 1 千克. 气体的状态由三个量来说明: 体积  $V$ , 压力  $p$  及绝对温度  $T$ . 如将气体算作理想的, 则这三个量彼此由克拉彼依龙方程相联系:

$$pV = RT,$$

其中  $R$  是一常量. 因此,  $p, V$  及  $T$  中任一量可用其它二量来表示. 故要确定气体的状态只要知道其中两个量就够了, 例如,  $V$  及  $p$ . 则横坐标为  $V$ , 纵坐标为  $p$  的点可用来表明气体的状态. 如气体状态从对应于点  $A$  的最初状态变到由点  $B$  所决定的终止状态, 则整个变化过程可用一曲线  $(K) \equiv (AB)$  来说明, 这曲线说明变化状态的连续性.<sup>①</sup>

现在我们的任务是: 求出在由曲线  $(K)$  所表明的这一整个过程的时间内, 已知质量的气体吸收了多少热量  $U$  (卡). 为达此目的, 与通常一样, 我们考察某一“无穷小”过程, 将气体从状态  $(V, p, T)$  变到一无限接近的状态  $(V + dV, p + dp, T + dT)$ . 对应于这无穷小过程有曲线  $(K)$  的一元素 (图 17). 我们曾经确定过这时传给它的元素热量  $dU$  [当推演泊松公式时, 361,3)]. 我们来利用那里所得的式子:

$$dU = \frac{c_v}{R} V dp + \frac{c_p}{R} p dV.$$

要求出由曲线  $(K)$  所表明的气体整个变化过程中它所传得的总热量  $U$ , 只要将元素  $dU$  沿这一曲线“相加”:

$$U = \int_{(K)} \frac{c_v}{R} V dp + \frac{c_p}{R} p dV. \quad (23)$$

因此, 热量  $U$  就已表作第二型的曲线积分.

如果我们不用  $dV$  及  $dp$ , 而用  $dV$  及  $dT$  或用  $dp$  及  $dT$  来表出热的增量  $dU$ , 那么事情不过是变成分别在  $VT$  平面或  $pT$  平面中的一曲线上取曲线积分.

4) 电流的磁效应 表明电流磁效应的毕奥-萨伐尔定律有“微分的”形式. 按照这一定律, 如一导体上通过的电流为  $I$ , 它上面的一元素  $ds$  作用于与它相距  $r$  的一磁荷  $m$  上的力, 其大小等于

$$\frac{Im \sin \varphi ds}{r^2}, \quad (24)$$

其中  $\varphi (0 < \varphi < \pi)$  是连接磁极及电流元素的向量  $\vec{r}$  与导体元素  $\vec{ds}$  在电流进行的方向间的夹角. 这一元素力的方向垂直于由向量  $\vec{r}$  及  $\vec{ds}$  所决定的平面并朝着那一边, 使从那里看来由  $\vec{r}$  旋转一角  $\varphi$  到  $\vec{ds}$  是按反时针向进行的 [比照 356,8)].

我们提出一问题: 有一任意形状的有限闭导线  $(K)$  放在空间的任意位置, 要表明在它上面流动的电流所产生的磁场; 换句话说, 就是要求出这一整个导线对放置于空间任意一点  $M$  处的磁荷  $m$  的作用力. 然而, 当上面所谈到的各个元素力有各各不同的方向并且须将它们几何地相加时, 要得到毕奥-萨伐尔定律的“积分”形式是很困难的.

<sup>①</sup> 此处及今后我们指的所谓拟平稳过程, 就是我们表明改变气体的状态是尽可能地慢慢进行的, 并尽可能伴以很均匀的搅拌使气体的全部同时通过每一中间状态.

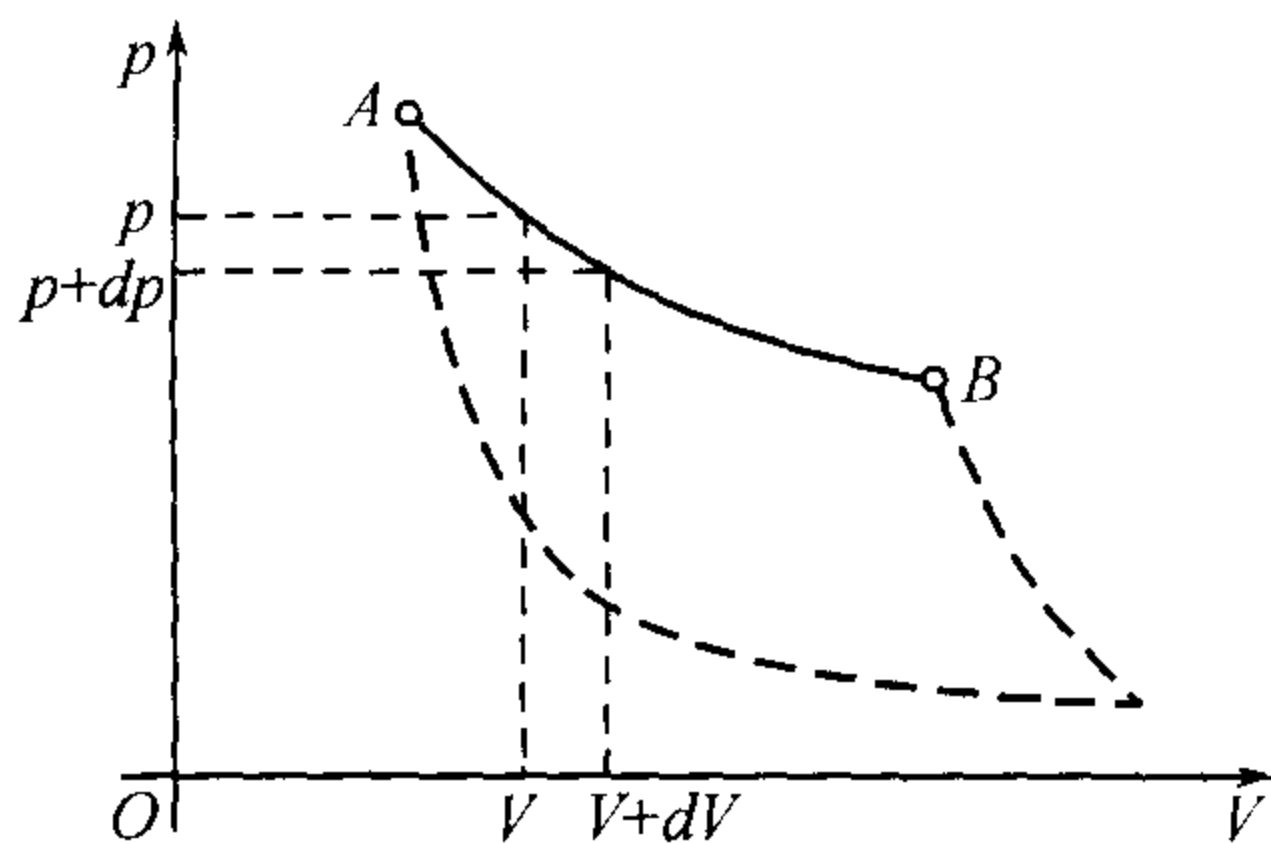


图 17



在这类情况下通常是变成向量在空间的任一直角坐标系的轴上的射影, 因为元素力的射影相加时已经是代数的了.

为了计算的简化我们利用向量代数这工具. 如将表元素力  $\vec{dF}$  大小的式子 (24) 改写为

$$\frac{mI}{r^3} \cdot r ds \sin \varphi,$$

则很容易注意到它仅与向量积  $\vec{r} \times \vec{ds}$  的大小相差一因子  $\frac{mI}{r^3}$ . 又因为由毕奥-萨伐尔定律所决定的  $\vec{dF}$  的方向与这一乘积的方向相重, 故可写

$$\vec{dF} = \frac{mI}{r^3} (\vec{r} \times \vec{ds}).$$

现在我们考察任一 (右手的) 直角坐标系  $Oxyz$ . 如以  $x, y, z$  表元素  $ds$  (起点) 的坐标, 而以  $\xi, \eta, \zeta$  表所考察的空间点  $M$  的坐标, 则向量  $\vec{r}$  在坐标轴上的射影为

$$x - \xi, y - \eta, z - \zeta;$$

而向量  $\vec{ds}$  就有射影

$$dx, dy, dz.$$

在这种情形下  $\vec{dF}$  的射影就是因子  $\frac{mI}{r^3}$  分别与

$$(y - \eta)dz - (z - \zeta)dy, \quad (z - \zeta)dx - (x - \xi)dz,$$

$$(x - \xi)dy - (y - \eta)dx$$

的乘积.

因此, 对曲线  $(K)$  的所有元素相加, 最后就得到所求力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影写作沿空间曲线  $(K)$  的曲线积分的形状:

$$\begin{aligned} F_x &= mI \int_{(K)} \frac{(y - \eta)dz - (z - \zeta)dy}{r^3}, \\ F_y &= mI \int_{(K)} \frac{(z - \zeta)dx - (x - \xi)dz}{r^3}, \\ F_z &= mI \int_{(K)} \frac{(x - \xi)dy - (y - \eta)dx}{r^3}. \end{aligned}$$

且曲线的方向由电流流动的方向所决定. 这就给出了我们问题的解答.

### §3. 曲线积分与道路无关的条件

**555. 与全微分相关问题的提出** 设在某一通连区域  $(D)$  内已知二连续函数

$$P = P(x, y) \quad \text{及} \quad Q = Q(x, y).$$

考察第二型曲线积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy, \tag{1}$$

此处  $A$  与  $B$  是区域  $(D)$  的任意两点, 而  $(AB)$  是连接这两点的一个分段光滑<sup>①</sup>曲

<sup>①</sup>在这一目中我们只考察这样的积分道路, 这就已很好地保证了积分 (1) 的存在.



线, 全部在这一区域内者.

这一目主要问题就是要弄清楚这一积分的大小不与道路 ( $AB$ ) 的形状有关的条件, 即积分由起点  $A$  及终点  $B$  所一意决定的条件, 而这两点不论在哪里.

积分 (1) 的性质由积分号下的微分式

$$Pdx + Qdy \quad (2)$$

的性质而决定. 我们回想在以前已经遇见过类似样子的式子, 就是在我们谈到两变数的可微函数以及它的 (全) 微分

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (3)$$

的时候 [179], 而这一式子当

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

时与 (2) 式全同.

然而, 远非每一个形状为 (2) 的式子都是“恰当微分”, 也就是并非对每一个这种式子都有一“原函数”  $F(x, y)$  存在, 使这一式子恰是它的 (全) 微分. 从这里就能看出, 在积分号下的式子是恰当微分的情况下, 积分 (1) 就与道路无关! 我们将这一有特殊重要性的结论写成一定理的样子, 其证明放在下两目中:

**定理 1** 要使曲线积分 (1) 与积分道路的形状无关的必要充分条件是: 微分式 (2) 在所讨论的区域中为某一两个变数的 (单值<sup>①</sup>) 函数的微分.

**556. 与道路无关积分的微分法** 首先设积分 (1) 与道路无关. 在这种情况下, 积分由点  $A(x_0, y_0)$  及  $B(x_1, y_1)$  的给出一意地确定, 与此相关, 就可以用记号

$$\int_A^B Pdx + Qdy \quad \text{或} \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$$

来表示它. 这里只标明了积分道路的起点与终点; 道路本身没有标出来, 但这没有什么关系——积分沿随便什么道路都可以. 当然, 没有上面所做的与积分道路无关的假定, 这种表示法就没有确定意义.

如点  $A(x_0, y_0)$  固定, 而点  $B$  用区域 ( $D$ ) 中的任意点  $M(x, y)$  来代替, 则所得积分就是在区域 ( $D$ ) 中  $M$  的某一个点函数, 即它的坐标  $x, y$  的函数:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy. \quad (4)$$

现在我们来研究关于它对  $x$  及对  $y$  的偏导数问题.

<sup>①</sup>以后 [562] 读者可以清楚强调原函数单值的必要性.



在区域  $(D)$  中取一任意点  $B(x_1, y_1)$ , 给  $x_1$  一增量  $\Delta x$  使它变到点  $C(x_1 + \Delta x, y_1)$ , 对相当小的  $\Delta x$  这一点同时会与整个线段  $BC$  都属于  $(D)$  (图 18). 函数的对应值为

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy,$$

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Pdx + Qdy.$$

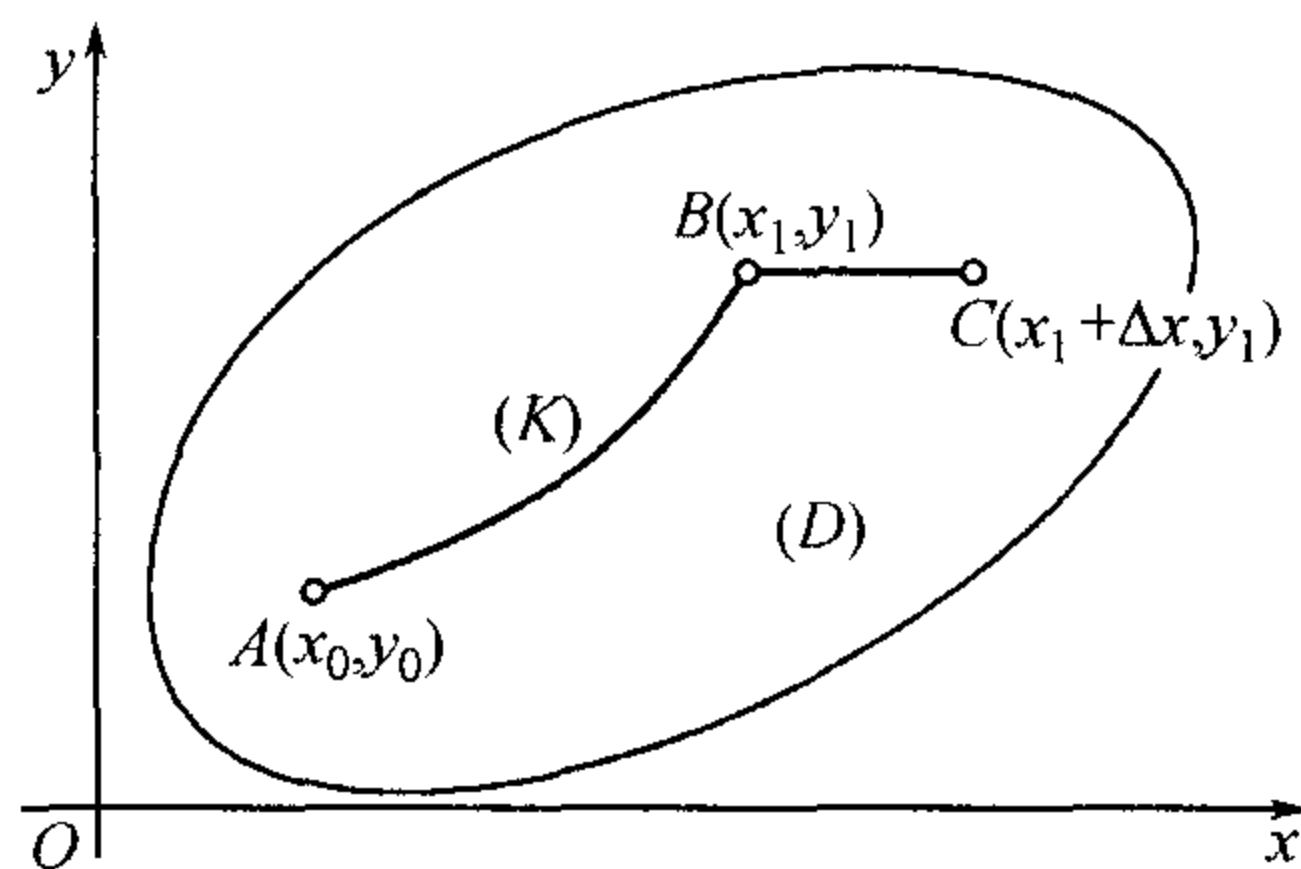


图 18

其中第一个积分我们沿连接点  $A$  与  $B$  的任一曲线  $(K)$  来取, 而对第二个积分其积分道路是由这一曲线  $(K)$  与一直线段  $BC$  所组成. 于是, 函数的增量就是

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(BC)} Pdx + Qdy = \int_{(BC)} P(x, y)dx;$$

其间因为线段  $BC$  垂直于  $y$  轴, 而所含  $Qdy$  的积分变成零了.

所留下的积分立刻就可化成普通定积分: 为此在积分号下的函数中必须用 (是直线  $BC$  方程  $y = y_1$  中的)  $y_1$  代替  $y$ , 并应取点  $B$  及  $C$  的横坐标作为对  $x$  积分的下限及上限. 最后得

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (R) \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1)dx.$$

将中值定理应用到所得的普通积分上并两端以  $\Delta x$  相除, 得

$$\frac{F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

现令  $\Delta x$  趋近于零. 由函数  $P(x, y)$  的连续性, 等式的右端, 同时其左端, 都趋近于  $P(x_1, y_1)$ . 因此, 函数  $F$  对  $x$  的偏导数在点  $(x_1, y_1)$  处存在且可表作等式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

同样可得公式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

因为点  $(x_1, y_1)$  是在区域  $(D)$  内任意取的, 故对这一区域的一切点, 有

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

既然这些偏导数连续, 函数  $F(x, y)$  就以

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

为微分, 这和积分 (1) 的被积式一致 [179].<sup>①</sup>

<sup>①</sup>由此, 顺便也推出了函数  $F(x, y)$  本身对于它的二变量的连续性.



这样一来, 对于与道路无关的曲线积分, 我们就得以建立一个与普通定积分中关于有变动上限积分的微分法的定理完全相类似的结果 [305, 12°].

在前目定理中所述条件的必要性也同时证明了. 如积分 (1) 与道路无关, 则 (2) 式实际上就是恰当微分; 在所作假定下积分 (4) 本身就给了我们积分号下式子的一个单值原函数!

**557. 用原函数来计算曲线积分** 现在反过来, 假定 (2) 式是某一单值函数  $\Phi(x, y)$  的全微分, 则

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (5)$$

已知两点:  $A$  的坐标是  $x_A, y_A$ ,  $B$  的坐标是  $x_B, y_B$ ; 考察连接这两点的任意一个分段光滑的曲线  $(K)$ . 设它的参数表示式为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

且当参数自  $\alpha$  变到  $\beta$  时, 曲线从  $A$  描画到  $B$ . 因此,

$$\varphi(\alpha) = x_A, \quad \psi(\alpha) = y_A; \quad \varphi(\beta) = x_B, \quad \psi(\beta) = y_B.$$

现在来计算沿曲线  $(K)$  的曲线积分, 将它化为普通的积分 [第 547 目公式 (6)], 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{(K)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt, \end{aligned}$$

或者, 注意到 (5) 时, 按复合函数微分法的规则,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi'(t) \right\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \Phi(\varphi(t), \psi(t)) dt.$$

最后,

$$\begin{aligned} I &= \Phi(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \\ &= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A). \end{aligned}$$

因此, 在有了原函数

$$\Phi(M) = \Phi(x, y)$$

时, 曲线积分就可用简单的公式来计算:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A) = \Phi(x, y) \Big|_{(x_A, y_A)}^{(x_B, y_B)} \quad (6)$$



或更简单地,

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M) \Big|_A^B. \quad (6^*)$$

这一公式与积分学中的基本公式 [308] 即用原函数表普通定积分的公式完全相类似. 不过, 我们再强调一次, 这一公式只能用于当积分号下的式子是恰当微分的时候.

这一公式同时证明了在所考察的情形下积分 (1) 与所取的曲线  $AB$  无关,<sup>①</sup> 因而在第 555 目的定理中所述条件的充分性也就建立起来了. 于是, 这一定理现在就完全被证明了.

**558. 恰当微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法** 现在自然要发生一问题, 就是用怎样的判别法可以辨别一个给出的微分式 (2) 是否为恰当微分. 这一问题的答案就可以最后弄清楚曲线积分与道路无关的条件.

为了要得到一个在检验时既简单又方便的判别法, 我们今后补充假定在所讨论的区域 ( $D$ ) 中两偏导数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  存在且连续.

在这一假定下所求判别法立刻就能得到. 如果 (2) 式是某一函数  $\Phi(x, y)$  的微分, 故等式 (5) 就成立:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

假定了偏导数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  连续就保证这两个混合导数相等 [190], 因此,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (A)$$

于是, 这一简明的关系式就是 (2) 式是恰当微分的必要条件.

在研究到条件 (A) 的充分性时, 开始我们限制在区域 ( $D$ ) 是一矩形的情形; 为明确起见, 设它是一有限的闭矩形  $[a, b; c, d]$ . 在条件 (A) 适合的假定下, 我们来直接给出原函数的构成法.

这问题就是要在矩形  $[a, b; c, d]$  上确定一个函数  $\Phi(x, y)$ , 要它满足下列二方程:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (5^*)$$

实际上, 由函数  $P$  及  $Q$  的连续性就已经能从这里推出 (2) 式是所述函数的全微分了 [179].

<sup>①</sup>因为, 由于函数  $\Phi$  的单值性, 只要给了两点  $A$  及  $B$ , 它的值  $\Phi(A)$  及  $\Phi(B)$  就完全确定了.



在  $[a, b]$  中任取两值  $x_0$  及  $x$ , 当  $y$  固定于  $[c, d]$  中的任意一值时将 (5\*) 中第一个方程对于  $x$  从  $x_0$  积分到  $x$ ; 我们得到

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \Phi(x_0, y).$$

现在如在 (5\*) 的第二个方程中令  $x = x_0$  而将它对于  $y$  在  $[c, d]$  中任意两值  $y_0$  及  $y$  间积分, 则得

$$\Phi(x_0, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \Phi(x_0, y_0).$$

因此, 所求函数  $\Phi(x, y)$  必须有

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \quad (7)$$

的样子, 其中  $C = \Phi(x_0, y_0) = \text{常数}$ .

现在剩下来就是要验证由公式 (7) 确定的函数 (不论  $C$  是怎样的常数) 实际上的确满足两方程 (5\*). 对于第一个来说这是很明显的, 因为 (7) 中右端的第一项对  $x$  的导数等于  $P(x, y)$  [305], 而后两项与  $x$  无关. 现在将等式 (7) 对  $y$  微分并将莱布尼茨规律 [507] 应用到右端第一个积分:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x_0, y).$$

由 (A), 这里可用  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  来代替  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ; 则积分就变成差  $Q(x, y) - Q(x_0, y)$ , 而导数  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  就恰等于  $Q(x, y)$ , 这就是所要证明的.

注意如果开始时我们对  $y$  积分, 那对所求的原函数就会得到这样的一个式子:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C \quad (8)$$

与前一式子仅在形式上不同.

能懂得这一点是有益的: 在区域的某一点上固定了原函数的值, 我们借此就在原函数的一般表示式中选定了常数, 且已经得到了完全确定的单值原函数.

**559. 推广到任意区域的情形**<sup>81)</sup> 现在我们考察一任意的 (当然是连通的) 区域 ( $D$ ), 它是由一个或几个分段光滑的曲线所围成, 并且可以有限或伸展到无穷远. 以后我们假定这一区域是开的. 在这种情况下它的每一点是内点 [163] 且它与某一个, 例如, 矩形的邻域都属于区域. 因为前目推理可应用到这种邻域上来, 故当条件 (A)

<sup>81)</sup> 在本目及以后的一些目中, (与“任意”区域及自身相交曲线有关的) 一般情形的断言的证明不很详细, 读者在必要时可以独立进行更详细的论证, 或者仅限于考虑课文中所引出的那些区域和闭路而不会发生问题 (实际上遇到的极为大量的即是这种情形).



在区域  $(D)$  的每一点的邻域中适合时 (2) 式就有原函数存在, 并且有相差为常数的无穷个原函数. 然而, 要统一所有这些原函数使在整个区域  $(D)$  上得一单值的原函数并不是永远可能! 此处, 问题与区域本身的特性有关.

为了在一般情形下要保证这一单值原函数的存在, 必须给区域  $(D)$  一种特殊限制. 这可以这样来表明: 不论在  $(D)$  中取一怎样的简单闭路, 用这一线路所围起来的内域必须整个属于区域  $(D)$ . 换句话说, 区域必须不包含有“洞”, 甚至须不包含有点洞. 有这种性质的连通区域称作单连通的.

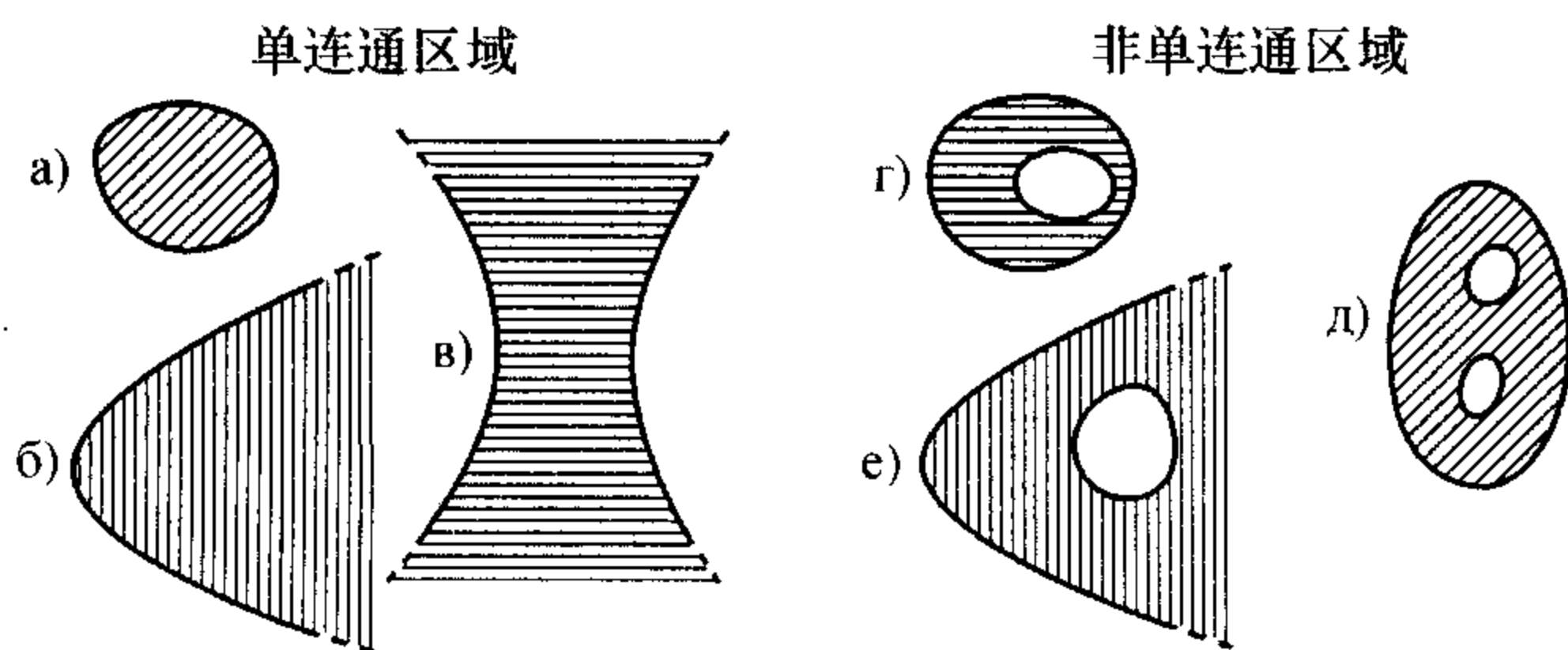


图 19

如果我们谈的是有限区域(即不伸展到无穷远的), 则单连通性的概念还可更简单地表为: 区域必须是由唯一的一个闭路围成的. 在图 19 中举出了一些单连通与非单连通区域的例子, 其中 a), r), л) 是有限的, 而 б), в), e) 是伸展到无穷远的.

设所考察的区域  $(D)$  是单连通的; 开始我们假定它是有限的, 所以它单纯地是由一个分段光滑曲线  $(K)$  所围成的. 我们将自包含在  $(D)$  内而拆成许多矩形的区域出发逐步对区域  $(D)$  进行建立原函数.

给定一任意小数  $\varepsilon > 0$  后, 我们可以用一个边长  $< \varepsilon$  的正方形包围线路  $(K)$  的每一点使在它的范围内线路可用两种类型之一的显方程来表示 [参照 223]; 而仅在拐角的地方有两个这样的曲线在这里接头.

由博雷尔引理 [175], 仅用有限个这样的正方形就可以覆盖整个线路  $(K)$ . 这一正方形的有限锁链围成了某一闭区域  $(\tilde{D})$ , 全部在  $(D)$  内, 且很明显地是可拆成许多矩形的. 它是连通的,<sup>①</sup> 因此与  $(D)$  一样也是单连通的; 区域  $(D)$  离开边界的距离  $\geq \varepsilon$  的一切点根本都属于这一区域.

我们下面将指出如何对区域  $(\tilde{D})$  作原函数. 为了要得到确定的原函数, 我们在属于  $(\tilde{D})$  的任一点  $M_0$  固定它的值. 注意, 定义于两相重叠的区域上的两原函数在它们的公共部分上只能差一个常数(因为它们差的偏导数为零, [183]). 因此, 如果这

<sup>①</sup>如两点  $M_0$  及  $M_1$  属于  $(\tilde{D})$ , 则它们可以用一完全在  $(D)$  内的折线  $(L)$  相连接 [153]. 这一折线一般说来可能已超出  $(\tilde{D})$  的范围而落入上文中所述的某些正方形内去了. 但包含在某一正方形内的折线部分恒可用它的周围上的对应部分来代替. 用这种方法就得到连接  $M_0$  及  $M_1$  的一折线  $(\tilde{L})$ , 完全在  $(\tilde{D})$  内.



两原函数只要在某一点处相重, 它们便在整个所述的公共部分上恒等. 由此可见, 当  $\varepsilon$  趋近于零时, 我们真正能够逐步把原函数的定义延伸到整个区域  $(D)$  上而保持其单值性.

为了要做出区域  $(\tilde{D})$  上的原函数, 我们设想这一区域分成许多矩形, 彼此沿着垂直边互相挨靠在一起 (图 20, a)). 在图 20, b) 中我们画出了两个这种相邻的矩形  $d_1$  及  $d_2$ . 在其每一个上面我们将作原函数, 设为  $\Phi_1$  及  $\Phi_2$ . 沿矩形  $d_1$  及  $d_2$  的公共线段  $\alpha\beta$ , 它们只可能相差一常数, 因为我们只要在图中打了斜线的矩形上作一任意原函数, 由前一目这一定是存在的, 如果我们回想一下上面这两个原函数的每一个与这一原函数沿  $\alpha\beta$  真正只各相差一常数项, 那么这就很明白了. 将原函数  $\Phi_1$  或  $\Phi_2$  之一改变一适当常数, 因此就可使它们沿线段  $\alpha\beta$  相重.

自点  $M_0$  所在的矩形出发来作一原函数, 且迫使原函数在这一点有预先固定的值. 再在与它相邻的一些矩形上作原函数使通过它们的公共边界时不破坏连续性, 如此继续下去.

现在我们想要说明: 区域  $(D)$  单连通性的条件也同时使  $(\tilde{D})$  单连通的条件究竟要它做什么. 在图 20, a) 中的一串矩形当对边界  $(K)$  较复杂时也可能分叉, 如图 21, a) 所示; 不过这并没有阻住

原函数沿彼此分开的叉支连续延伸. 但若区域有一“洞” (参看图 21, b)) 而二分支又重新合在一起时, 则在合起来的第一个矩形上选取一原函数使通过两接头处  $\alpha\beta$  及  $\gamma\delta$  时同时保持连续性就不一定可能了!

区域  $(D)$  伸展到无穷远的情形可同样处理, 只要从一些有限的部分区域出发, 将原函数逐步延伸到整个区域  $(D)$  上去.

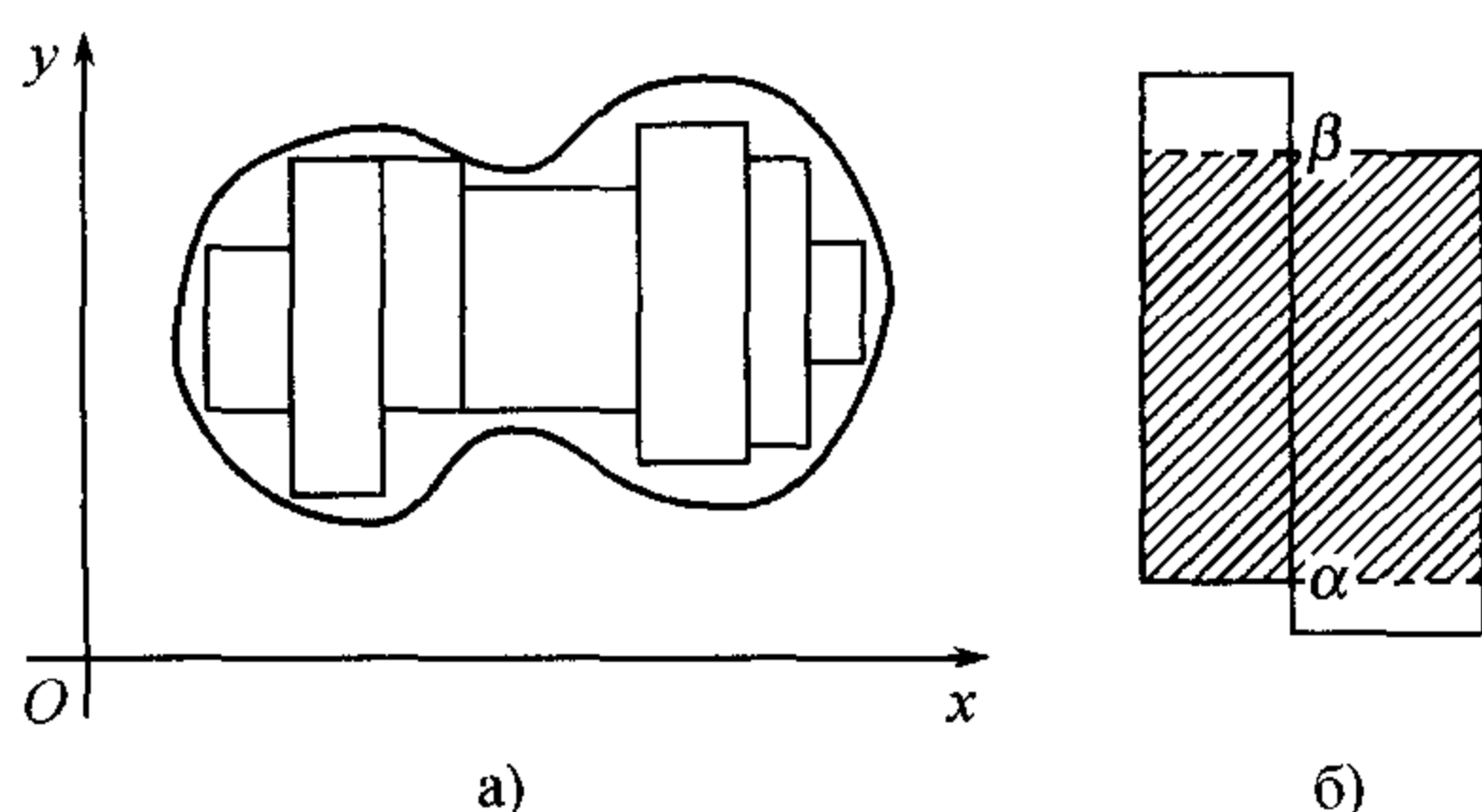


图 20

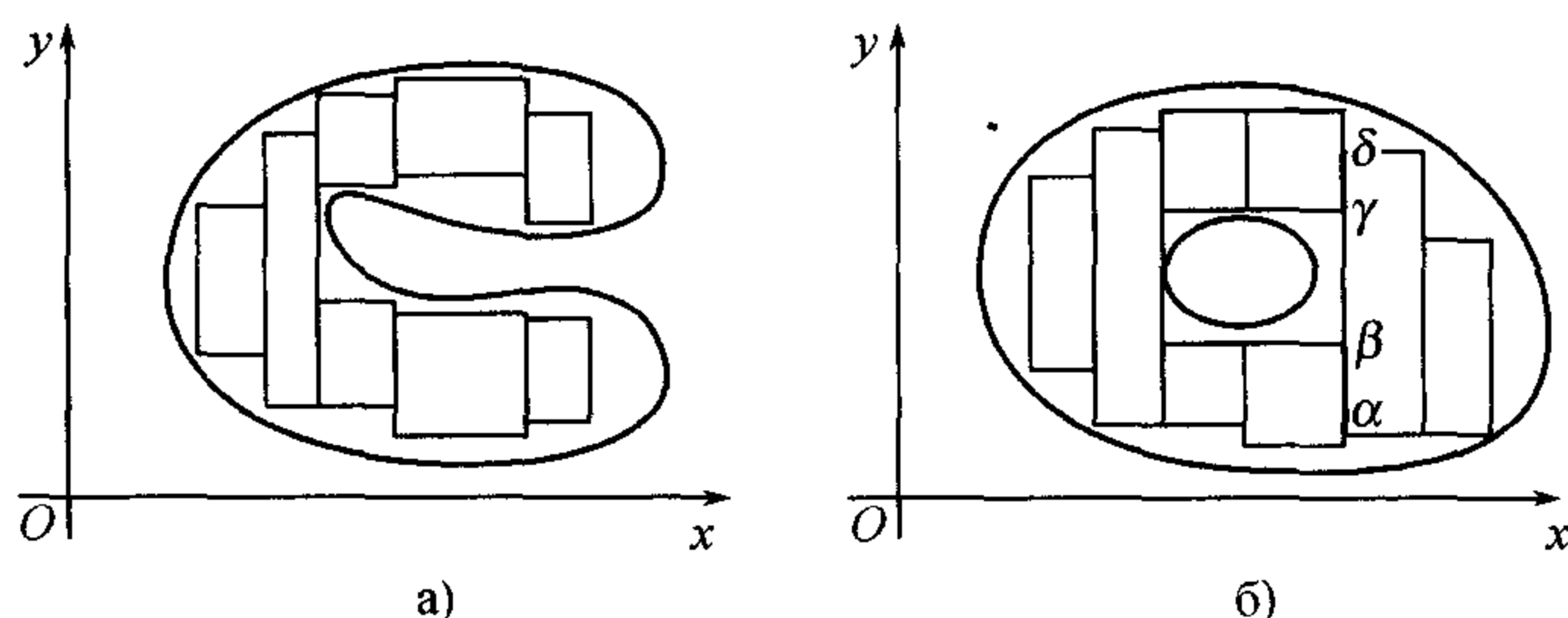


图 21



**560. 最终结果** 整个在前面两目中所述的可总结为下一命题:

**定理 2** 在整个区域  $(D)$  上, (2) 式要是两个变量的某单值函数的微分就必然适合条件 (A), 而在  $(D)$  是单连通区域的假定下, 这也是充分的.

所以条件 (A) 常称作 (2) 式的“可积条件”.

现在如再回想一下定理 1, 就立刻可得下一结论:

**定理 3** 在区域  $(D)$  中积分道路的起点  $A$  与终点  $B$  不论怎样取定之后, 如果曲线积分 (1) 与积分道路的形状无关就必然适合条件 (A), 而在  $(D)$  是单连通区域的假定下, 这也是充分的.

因此, 最后我们找到了条件 (A) 是曲线积分与道路无关的一个方便而又容易检验的判别法. 用这一判别法, 例如, 就很容易将第 549 目问题 3), 4), 5), 6) 中所提出的积分进行分类, 并可预见在附注中所指出的它们的特性.

以后我们要遇到这些所得结果的重要应用. 在第 562 目中我们将回到非单连通区域的特殊情形.

**561. 沿闭路的积分** 到现在为止我们考察了积分 (1)

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy$$

并研究了其中与积分道路无关的一类重要情况. 现在我们来考察积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy, \quad (9)$$

$(L)$  是在区域  $(D)$  范围内的任一闭路; 并提出在什么条件下这一积分恒为零的问题. 可以看出, 这一问题完全相当于上面所解决的问题: 若对已给微分式 (2), 积分 (1) 与道路无关, 则积分 (9) 永远等于零, 反过来也是如此.

我们先假定积分 (1) 与道路无关. 如  $(L)$  是区域  $(D)$  中的任一闭路 (图 22), 则在它上面任取两点  $A$  及  $B$  将它分为两段  $(AMB)$  及  $(ANB)$ . 因为沿这两曲线的积分必须相等:

$$\int_{(AMB)} = \int_{(ANB)}, \quad (10)$$

于是,

$$\int_{(L)} = \int_{(AMB)} + \int_{(BNA)} = \int_{(AMB)} - \int_{(ANB)} = 0. \quad (11)$$

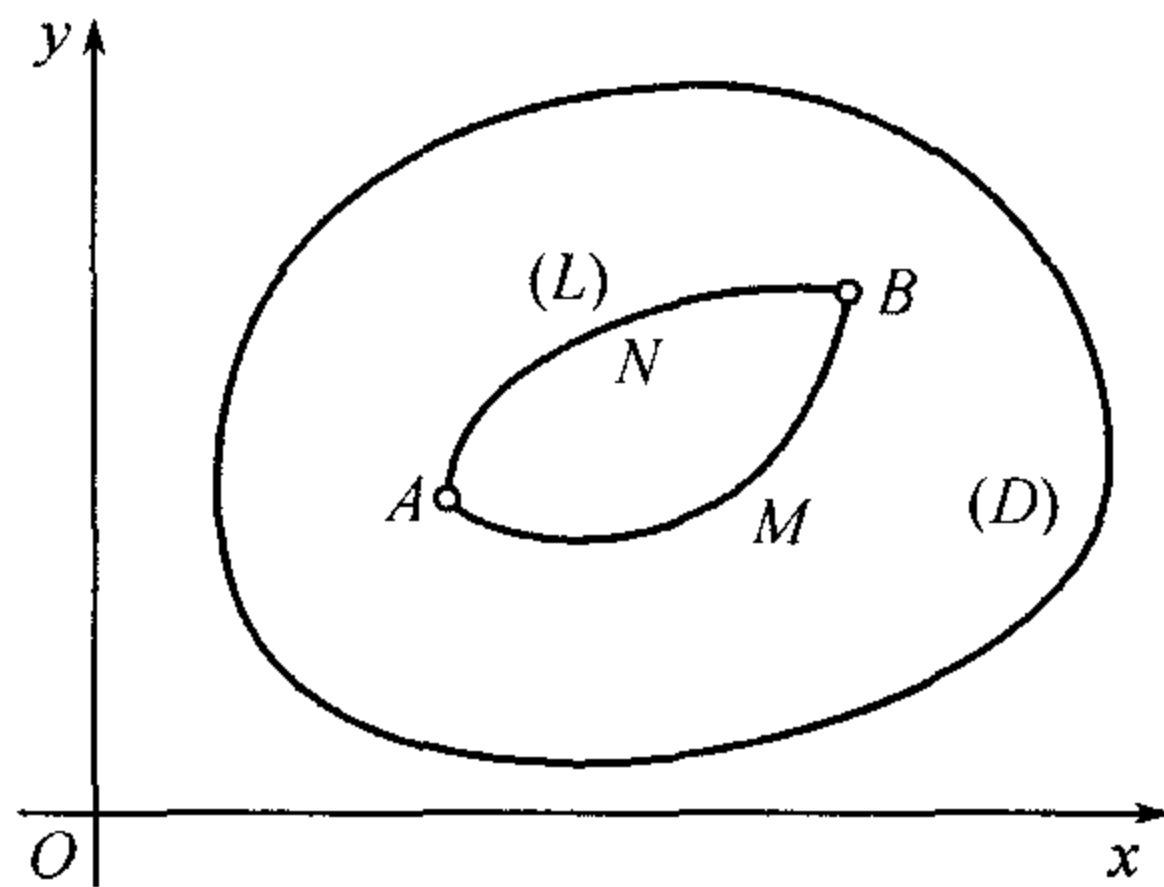


图 22



现在反过来, 设已知沿闭数的积分 (9) 永远等于零. 取定两点  $A$  及  $B$ , 用两道路  $(AMB)$  及  $(ANB)$  将它们连接起来, 它们组成一闭路

$$(L) = (AMBNA).$$

当曲线  $(AMB)$  与  $(ANB)$  除去点  $A$  与  $B$  之外没有公共点, 则事情比较容易, 此时闭路  $(L)$  不自身相交, 即是简单闭路. 如果道路  $(AMB)$  及  $(ANB)$  彼此相交, 那么闭曲线  $(L)$  已不是简单曲线.

然而, 如下面引理所示, 整个的讨论可限于沿简单(即不自身相交)闭路上的积分.

**引理** 如积分 (9) 取在沿不论怎样的简单 (即不自身相交) 闭路上永等于零, 则它即使取在任何自身相交的闭路上也将为零.

由第 550 目中所建立的引理,<sup>82)</sup> 只要证明对任一自身相交的闭折线这一断言成立就够了. 设  $(L)$  是这样的一折线, 有一确定的方向. 从它上面的某一点  $M_0$  出发并顺着折线描画这一折线到第一个自身相交处——点  $M_1$ . 丢掉所得的闭折线  $(L_1)$  后, 延长路径  $M_0M_1$  到新的自身相交处, 这又可分出一闭折线  $(L_2)$ , 一直这样下去. 经过有限步后折线  $(L)$  就折成有限个不自身相交的闭折线

$$(L_1), (L_2), \dots$$

沿它们上面的积分已知为零. 这就是说, 沿折线  $(L)$  它也等于零, 这就是所要求证的. 因此, 我们就证明了下面有用的

**定理 4** 要曲线积分 (1) 与道路无关, 必要且充分的条件是积分 (9) 沿任何闭路都等于零. 如果只限于简单 (即不自身相交) 闭路的情形条件依旧是充分的.

现在可以看出, 要判断积分 (9) 沿闭路是否为零可以用定理 3 中所述积分与道路无关的同一判别法:

**定理 5** 要积分 (9) 不论取在区域  $(D)$  范围内的任何闭路上恒为零就必须适合条件 (A), 而在单连通区域  $(D)$  时它也是充分的. 当我们仅限制于简单 (即不自身相交) 的闭路时, 这一条件依然是必要的.

以后 [601], 我们具备了更深入的工具 (重积分, 格林公式) 时, 我们还要回到这一目中所讨论的一些问题, 并可用更经济的方法重新得到若干这里所建立的结果.

**562. 非单连通区域或有奇点的情形** 在本节中所发展的并与利用可积条件 (A) 有关的全部理论建立在下面两假定上: 1) 所考察的区域  $(D)$  是单连通的, 即

<sup>82)</sup>更确切地说, 根据所说引理在自身相交闭路情况的推广 (此推广引理的正确性可以与 550 目相仿加以证明).



没有“洞”, 2) 函数  $P$  及  $Q$  与其导数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  都在区域  $(D)$  中连续. 如果这些条件被破坏了, 则一般说来上面所叙述的断言就不能成立. 分析这所表明的特性就是本目的目的.

我们注意, 破坏连续性条件 2) 的“奇”点, 如果将它们从区域中撇开, 则也可解释为一种点的“洞”. 因此, 问题就化为对区域  $(D)$  的讨论, 在它里面连续性的一切要求与条件 (A) 都适合, 然而有一个或几个点的或非点的“洞”. 并且, 为了明确起见, 在以后的叙述中我们想只限制在点“洞”即奇点的情形. 一般情形可完全同样地处理.

开始我们假定, 区域  $(D)$  含有一个奇点  $M$  (而没有其它的“洞”). 在这一区域中取一简单闭路  $(L)$ , 并考察积分 (9)

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy.$$

如这一闭路没有包围着奇点, 则与以前一样积分等于零. 而如点  $M$  在闭路  $(L)$  的内面, 则积分可能就不是零了.

但是, 非常值得注意的, 沿各种可能围绕点  $M$  的所述类型的闭路而取正向 [548] 其积分彼此皆相等.

要证明这, 我们考察两条围绕点  $M$  的分段光滑的曲线  $(L_1)$  及  $(L_2)$ . 可以认为它们互不相交, 因为在相反的情形下, 我们可以引一包围  $(L_1)$  及  $(L_2)$  的第三条闭路  $(L_3)$  而又与它们都不相交者, 交分别考察闭路偶  $(L_1), (L_3)$  及  $(L_2), (L_3)$ .

曲线  $(L_1)$  与  $(L_2)$  在一起形成了夹在它们之间的环形区域  $(\Delta)$  的边界 (图 23). 用两条截线  $(A_1A_2)$  及  $(B_1B_2)$  将这一区域分成两个已经是单连通了的部分  $(\Delta')$  及  $(\Delta'')$ . 则我们就可写:

$$\int_{(A_1M_1B_1)} + \int_{(B_1B_2)} + \int_{(B_2M_2A_2)} + \int_{(A_2A_1)} = 0$$

及

$$\int_{(B_1N_1A_1)} + \int_{(A_1A_2)} + \int_{(A_2N_2B_2)} + \int_{(B_2B_1)} = 0.$$

将这些积分相加时, 在截线上所取的相反方向积分互相对消, 得

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} + \int_{(A_2N_2B_2M_2A_2)} = 0,$$

于是, 最后,

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} = \int_{(A_2N_2B_2M_2A_2)} \quad \text{或} \quad \int_{(L_1)} = \int_{(L_2)},$$

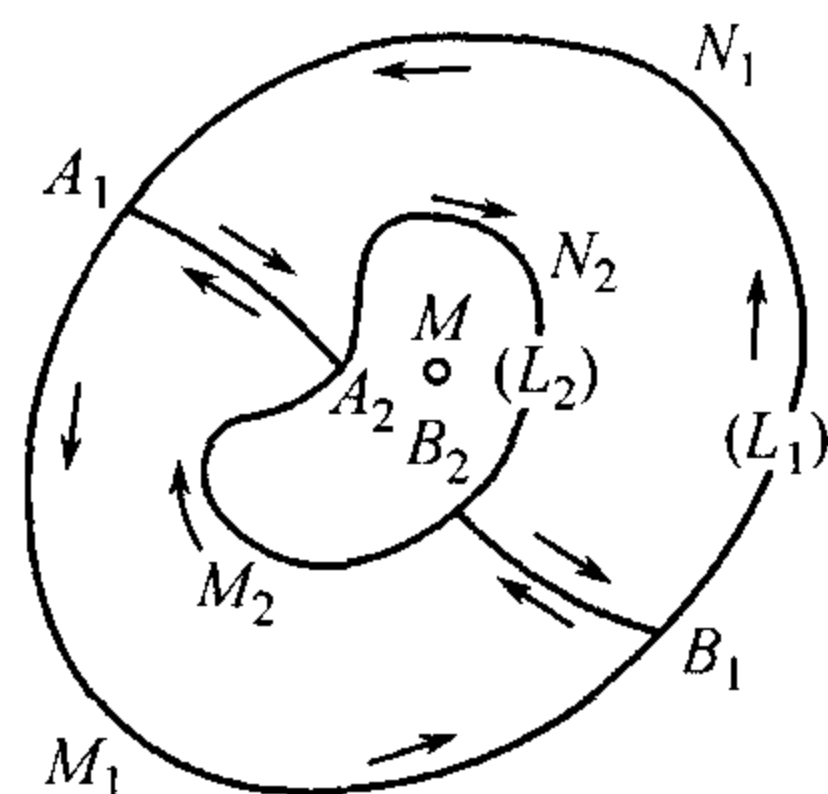


图 23



且后面这两积分都是沿正向取的. 我们的断言得以证明.

以  $\sigma$  表示所有类似积分的公共值. 它称作对应于点  $M$  的循环常数.<sup>①</sup>

我们现在来证明, 若  $(L)$  是区域  $(D)$  中的任一甚至是自身相交的但不通过奇点  $M$  的闭路, 则

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = n\sigma, \quad (12)$$

其中  $n$  是一整数 (正的, 负的或零). 对多边形的闭路这是很明显的, 因为它可拆成有限个不自身相交的闭多边形线路, 沿它们的每一个, 积分都等于零或  $\pm\sigma$ . 在一般情形时我们又利用在第 550 目中建立的引理, 并自内接于曲线的折线出发, 采取极限过程. 因为形如  $n\sigma$  的式子 (当  $\sigma \neq 0$  及  $n$  为整数时) 只能趋近于同一形状的有限极限 (只要数  $n$  一直不变), 故公式 (12) 对任何闭路  $(L)$  都是正确的.

现在我们来考察沿一曲线的积分, 这一曲线是连接区域  $(D)$  中的两点  $A(x_0, y_0)$  及  $B(x_1, y_1)$  而成的但不通过奇点. 如  $(AB)_0$  是一条这样的曲线, 而  $(AB)$  是任何另外一条, 则  $(AB)$  及  $(BA)_0$  在一起就组成一闭路. 故由 (12),

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + \int_{(BA)_0} Pdx + Qdy = n\sigma,$$

于是,

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(AB)_0} Pdx + Qdy + n\sigma.$$

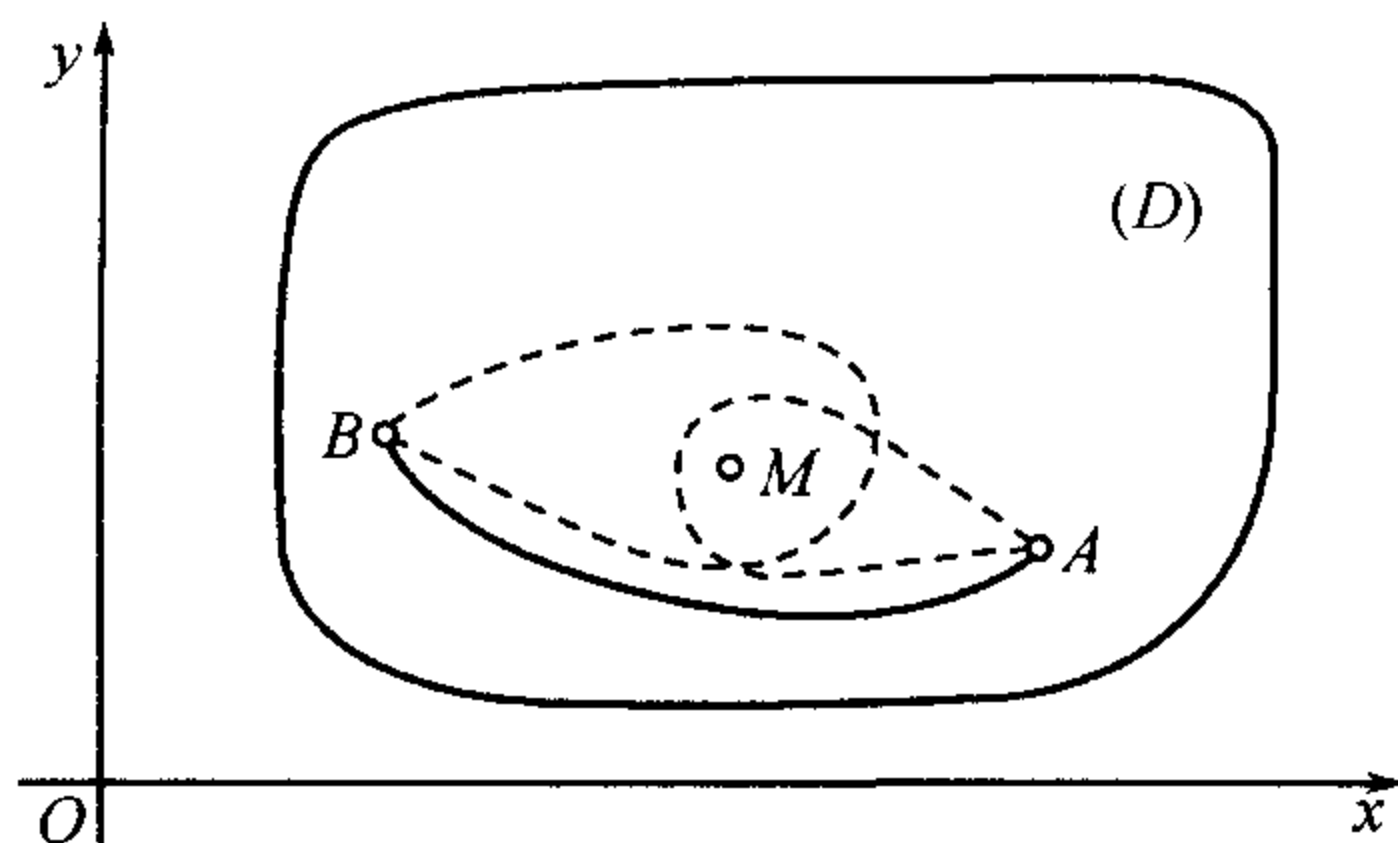


图 24

这里, 积分就真正与积分道路有关了, 但也只是加上循环常数的一整数倍. 在曲线  $(AB)_0$  上面加上若干个围绕点  $M$  的圈子 (图 24), 可以使倍数  $n$  为任一事先选定的整数值.

换句话说, 在这种情形下, 当  $A$  及  $B$  已知时记号

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$$

就不是 (如  $\sigma \neq 0$ ) 单值的了, 它有一形如  $n\sigma$  的项没有确定, 其中  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

若点  $B$  用一动点  $N(x, y)$  来代替, 则积分

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

与以前一样是式子  $Pdx + Qdy$  的原函数, 连续 (当然除掉点  $M$ ) 而多值.

<sup>①</sup>对应于真正的 —— 非点的 —— “洞”, 其循环常数可完全同样地定义.



理解这里所讨论的情况与以前所研究的 [556, 558, 559] 本质上的不同是很重要的. 原函数的表示式中本来含有一任意常数, 如果把这也算进来的话, 那么在以前我们也可说原函数的“多值性”. 然而, 要得到在整个所讨论的区域中的一单值函数, 只要固定这一常数就够了; 在那里, 在多值原函数的各“分支”间并没有什么强制在一起的联系. 而这里的“分支”, 相差一循环常数的倍数, 就不能孤立地看待, 因为当绕奇点转动时, 它们就连续地彼此转变了.<sup>①</sup>

为了说明此处整个所述的, 我们举一例题:

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

这些函数与它们的导数除坐标原点  $O(0, 0)$  外在整个平面上连续, 因此原点是唯一的奇点. 立刻可以验证, 可积条件到处 (理解为除原点外) 适合:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

很容易计算出, 沿以原点为中心的任何圆上的正向积分

$$\int_{(L)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

等于  $2\pi$ . 这就是对应于原点的循环常数.

很容易猜到微分式

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

的原函数是幅角  $\theta$ , 如以  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  代入马上就可以看出来. 因此, 原函数的一般形式是  $\theta + C$  ( $C =$  常数). 然而, 在平面中任一异于原点的已知点处, 我们不论以幅角  $\theta$  的任何值出发, 如迫令这点围绕原点不论沿哪一方向转  $n$  转, 则  $\theta$  角, 因为是连续变动的, 当点回到出发位置时, 增加了循环常数的一倍数  $\pm 2n\pi$ . 所以, 如果此时我们在整个平面中或包含原点在内部的平面的一部分中 (当然, 原点本身除外) 来考察原函数, 则就必须认为它是多值的, 并认为这是它的不可分割的特性: 它的相差  $2\pi$  整数倍的分支在某种意义下是不可分的.

读者不难推广上述研讨到当有若干个奇点或“洞”时的情形. 例如, 设有  $k$  个奇点

$$M_1, M_2, \dots, M_k.$$

如  $A$  及  $B$  是区域中两 (不同于奇点的) 点, 以  $(AB)_0$  表连接这两点 (且不通过奇点) 的任一确定的曲线, 则沿任何类似的曲线  $(AB)$  的积分其一般公式为

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(AB)_0} Pdx + Qdy + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \dots + n_k\sigma_k.$$

<sup>①</sup>我们在复变数多值函数的情形 [例如比照 458] 已经处理过这类现象. 不难看出, 这也好, 那也好, 都与平面的性质有关.



这里  $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是对应于点  $M_i$  的循环常数, 亦即积分

$$\int_{(L_i)} Pdx + Qdy$$

的值, 其中  $(L_i)$  是一包含奇点  $M_i$  在其内而不包含其它奇点的一简单闭路, 且以正向而取的. 系数  $n_1, n_2, \dots, n_k$  彼此无关. 可取任何整数值.

**563. 高斯积分** 在某些数学物理问题中必须要考察一个第一型曲线积分称作高斯积分者:

$$g = \int_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r} ds,$$

这里以  $r$  表连接曲线  $(L)$  外一点  $A(\xi, \eta)$  与曲线上动点  $M(x, y)$  的向量的长 (图 25):

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

$(r, n)$  表这向量与曲线在点  $M$  处的法线间的夹角.

因为点  $A$  不动, 故积分号下的式子  $\frac{\cos(r, n)}{r}$  是点  $M$  的坐标  $x, y$  的函数. 我们现在要将高斯积分表成第二型曲线积分. 如  $(x, n)$  与  $(x, r)$  是  $x$  轴的正向与法线及位径向量的方向间的夹角, 则显然,

$$(r, n) = (x, n) - (x, r),$$

所以

$$\begin{aligned} \cos(r, n) &= \cos(x, n) \cos(x, r) + \sin(x, n) \sin(x, r) \\ &= \frac{x - \xi}{r} \cos(x, n) + \frac{y - \eta}{r} \sin(x, n). \end{aligned}$$

将这代入高斯积分中, 就将它化为

$$g = \int_{(L)} \left[ \frac{y - \eta}{r^2} \sin(x, n) + \frac{x - \xi}{r^2} \cos(x, n) \right] ds.$$

如果利用第 553 目公式 (15), 则就得到积分  $g$  的所求第二型曲线积分表示式:

$$g = \pm \int_{(L)} \frac{y - \eta}{r^2} dx - \frac{x - \xi}{r^2} dy.$$

其中正负号对应于法线方向的选取法.

函数  $P = \frac{y - \eta}{r^2}$  及  $Q = -\frac{x - \xi}{r^2}$  与它们的导数除点  $A$  (此处  $r = 0$ ) 外在整个  $xy$  平面中皆连续. 在异于  $A$  的一切点处, 可积条件都满足. 事实上,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y - \eta}{r^2} \right) &= \frac{r^2 - 2(y - \eta)^2}{r^4} = \frac{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}{r^4}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x - \xi}{r^2} \right) &= -\frac{r^2 - 2(x - \xi)^2}{r^4} = \frac{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}{r^4}. \end{aligned}$$

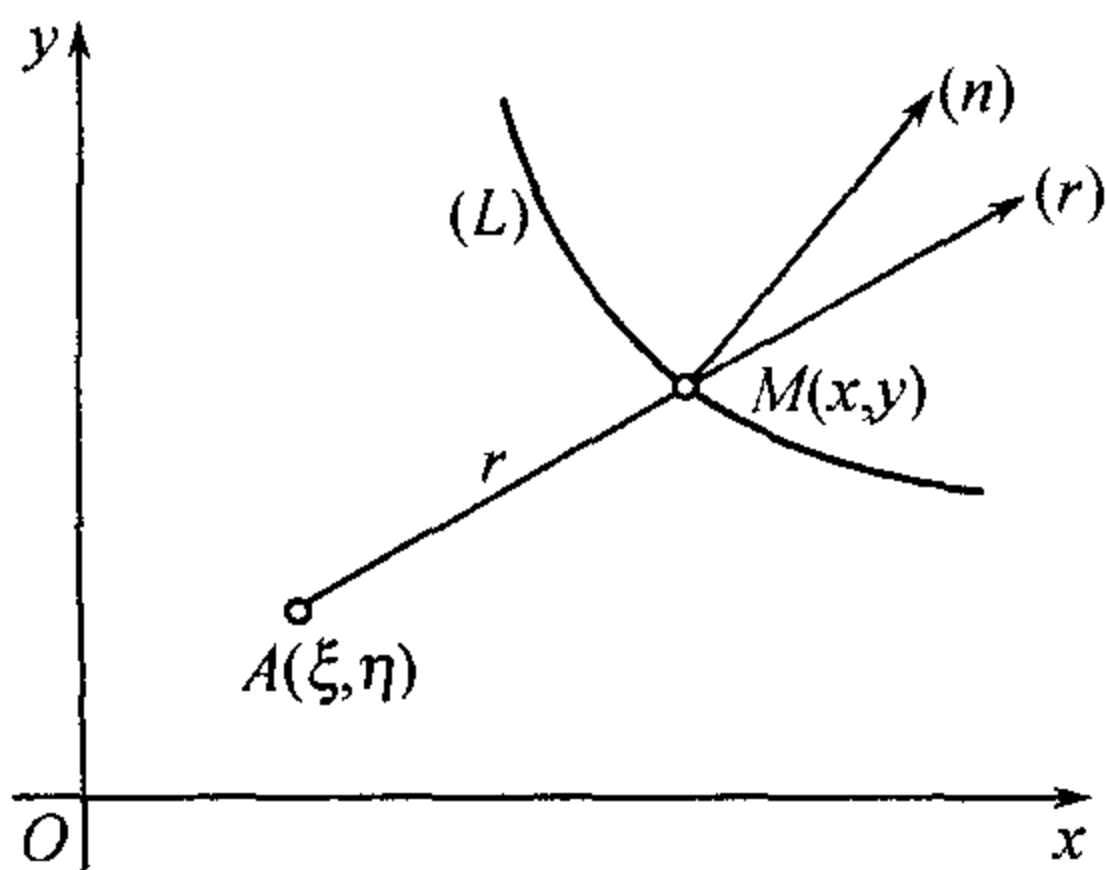


图 25



所以这两导数相等.

若曲线  $(L)$  是闭的, 但不包围点  $A$  (亦不通过它), 则必  $g = 0$ . 若闭曲线  $(L)$  包围点  $A$ , 则高斯积分可能异于零, 但如我们在前一目中已经看到的, 对一切这样的曲线它的值必须是相同的. 为了要计算这一值, 我们取中心在点  $A$  半径为  $R$  的圆周作为曲线  $(L)$ . 则

$$r = R \quad \text{且} \quad \cos(r, n) = 1$$

(如认为法线及位径向量有相同的方向), 所以

$$g = \frac{1}{R} \int_{(L)} ds = \frac{1}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi.$$

因此, 对每一将点  $A$  包围在内面的闭曲线  $(L)$ , 如与在圆的情况下我们所做的一样, 将法线朝向外面, 则有

$$g = \int_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r} ds = 2\pi.$$

如事先将高斯积分的几何意义弄明白, 则预先就可看到所得的结果. 它的几何意义是:  $g$  是从点  $A$  所能看到曲线  $(L)$  的角的度量 (如果是环行曲线时, 取自  $A$  出发的位径向量所描画出来的有符号的角).

为了要揭露这一点, 我们开始先假定曲线  $(L)$  与每一自  $A$  出发的射线相交于不多于一点 (图 26). 又设曲线的法线  $n$  朝向与点  $A$  相反的一面, 故

$$0 < (r, n) < \frac{\pi}{2}.$$

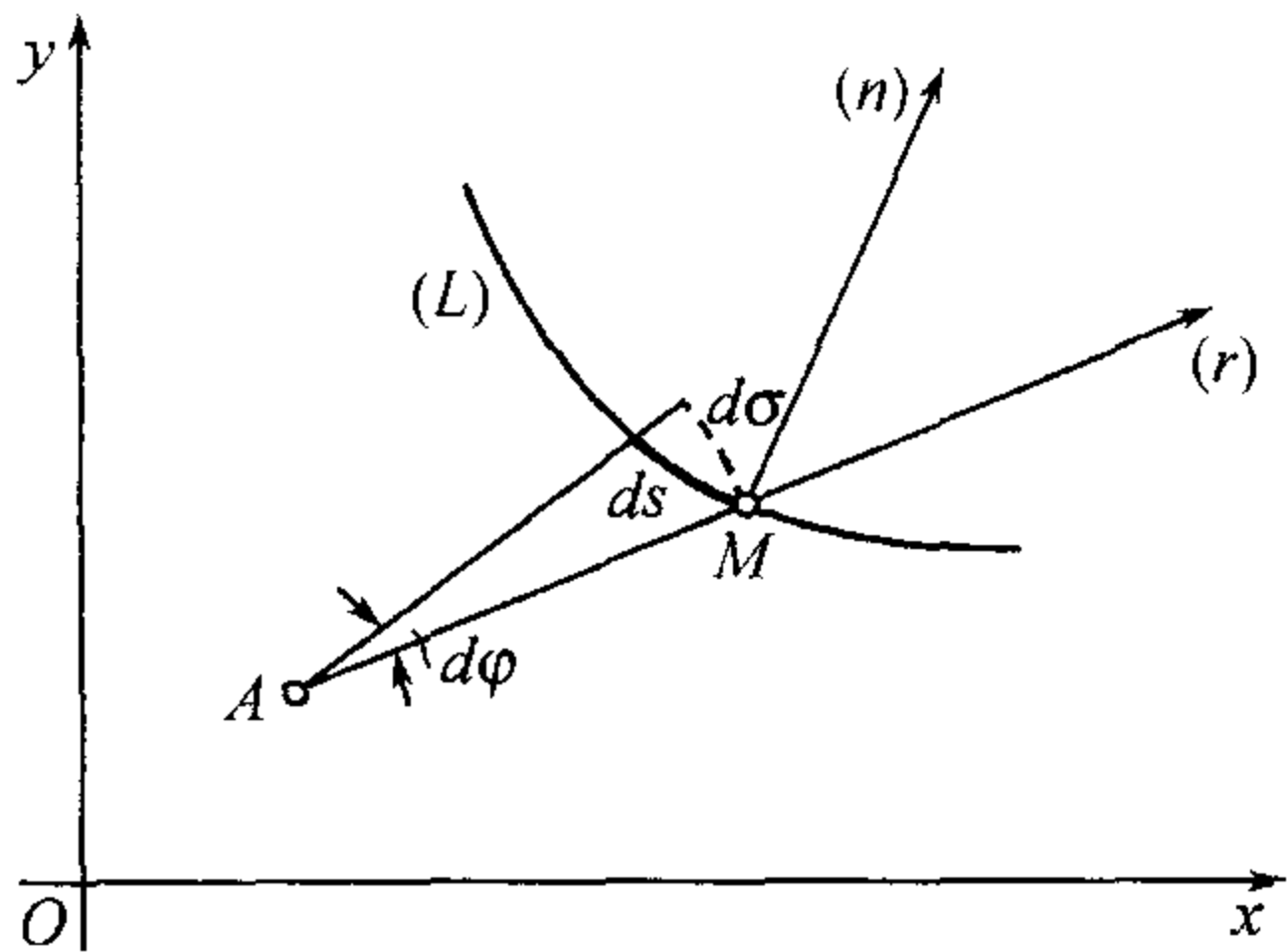


图 26

在曲线  $(L)$  上取一元素  $ds$  并来确定从点  $A$  看这一元素的角度. 如  $M$  是这元素上的点 (例如, 起点), 绕  $A$  以  $AM$  为半径作一圆并将元素  $ds$  射影到这一圆上.

设圆周上元素  $ds$  的射影为一元素  $d\sigma$ . 因为它们间的夹角 (认为这两元素差不多是直线的) 等于角  $(r, n)$ , 则

$$d\sigma = \cos(r, n) ds.$$

另一方面, 显然

$$d\sigma = r d\varphi,$$

其中  $\varphi$  是对应于圆弧  $d\sigma$  的中心角, 即从点  $A$  所看到元素  $ds$  的角. 于是对这一可以看见的元素角有表示式

$$d\varphi = \frac{\cos(r, n)}{r} ds.$$

最后, 将所有元素角相加, 我们得到对整个曲线  $(L)$  可以看见的角恰恰可表作积分  $g$ .

如曲线与自点  $A$  出发的射线相交不止一点, 但可将它分为若干部分, 使每一部分与这些射线只相交于一点, 那么只要将对应于这些部分的高斯积分相加起来就可以了.



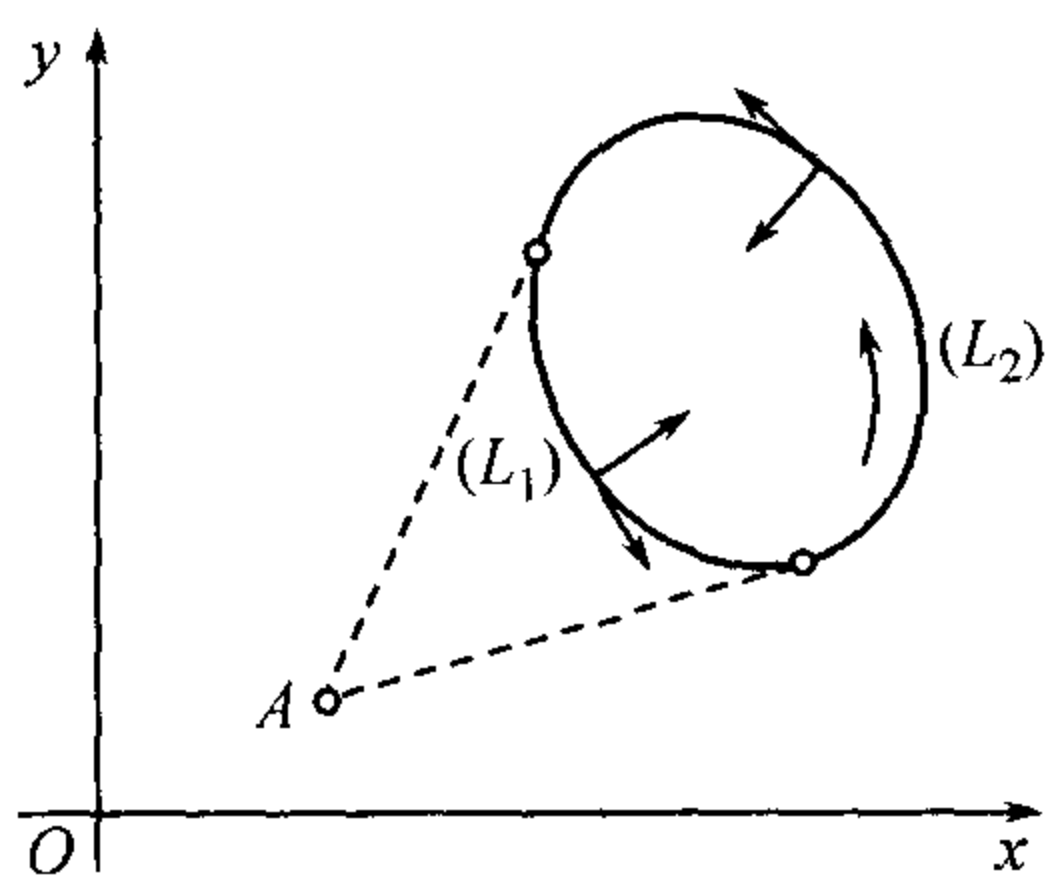


图 27

在曲线  $(L)$  上取定一确定的方向, 而我们将法线朝着一方向, 例如, 使切线的正向与它的夹角为  $+\frac{\pi}{2}$ . 则某些部分曲线的法线是向着与点  $A$  相反的一面, 高斯积分就给出—正的可见到的角, 而在另外一些部分法线向着与  $A$  点的同一面, 得出的可见到的角是负的. 一般说来, 在这种情形下高斯积分给出可见到角的代数和. 并且就是这一和称作对整个曲线  $(L)$  的可见到的角, 因此我们了解可见到的角为视线从曲线的起点转到终点的全部度量.

如曲线是闭的且围绕着重心  $A$ , 则立刻就很清楚, 曲线的可见角为  $2\pi$ . 如闭曲线不包围点  $A$ , 则可见角由于符号不同彼此相消结果加起来等于零. 在简单的情形下, 如图 27 所示, 曲线  $(L)$  可拆成两部分:  $(L_1)$  及  $(L_2)$ , 从  $A$  看来张同一角; 但对曲线  $(L_1)$  这一角是正的, 而对  $(L_2)$  是负的.

这整个与上面所述的完全相符合.

**附注** 从高斯积分的几何解释可以观察到, 当闭曲线  $(L)$  通过  $A$  点且在此点有切线时, 积分的值为  $\pi$ . 如  $A$  点是一角点且在此点单侧切线间的交角为  $\alpha$ , 则  $\alpha$  亦就是高斯积分的值. 如要用分析法建立所述结果就应该先从  $(L)$  分割掉点  $A$  的某一邻域, 再紧缩这一邻域而变到极限.

**564. 三维的情形** 整个上面的研究也可重复到空间的情形.

设有三函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义于并连续于某一空间的区域  $(V)$ , 我们来讨论沿在这区域中的任一曲线  $(AB)$  而取的曲线积分:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (13)$$

第 556 及 557 目中的推理立刻可不加改变地搬到这里来. 因此, 这里就有类似于第 555 目中定理 1 的一定理成立: 积分 (13) 与积分道路无关的问题可化为微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad (14)$$

是否为恰当微分的问题, 亦即是否有一 (“原”) 函数  $\Phi(x, y, z)$  存在, 其全微分

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

与表示式 (14) 相同.

顺便注意到, 如这样的函数存在, 则积分 (13) 就可表作它的两有限值的差:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M) \Big|_A^B \quad (15)$$

[比较 557(6\*)].



与前面一样, 下面就产生了恰当微分判别的问题. 设在区域 (V) 中有连续导数

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}.$$

于是, 如果 (14) 式是某一函数  $\Phi(x, y, z)$  的微分, 故等式

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (16)$$

成立, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

由假设, 所有这些导数都连续, 于是 [191] 等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (B)$$

皆成立. 因此, 不论 (V) 是怎样的区域, 要使 (14) 式是恰当微分因此积分 (13) 与道路无关, 条件 (B) 是必要的.

转到这一条件充分性的问题上来, 我们这里限制在区域 (V) 是长方体

$$(V) = [a, b; c, d; e, f]$$

的情形. 这里我们重复第 558 目的讨论.

为了要决定条件 (16) 中的函数  $\Phi(x, y, z)$ , 我们将第一个式子对于  $x$  从  $x_0$  积分到  $x(a \leq x_0, x \leq b)$ , 而将  $y$  及  $z$  任意地固定在对应的区间中, 我们得

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \Phi(x_0, y, z).$$

在 (16) 的第二个方程中令  $x = x_0$  并对  $y$  从  $y_0$  积分到  $y(c \leq y_0, y \leq d)$ , 得

$$\Phi(x_0, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \Phi(x_0, y_0, z).$$

最后, 在 (16) 的第三个方程中令  $x = x_0, y = y_0$ , 而对  $z$  从  $z_0$  积分到  $z(e \leq z_0, z \leq f)$ :

$$\Phi(x_0, y_0, z) = \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + \Phi(x_0, y_0, z_0).$$

显然, 常数值  $\Phi(x_0, y_0, z_0)$  是依然可任意的, 如表作  $C$ , 则最后得所求函数的如下表示式:

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C. \quad (17)$$



在必要时如应用莱布尼茨规则, 现在很容易验证这一函数确实满足 (16) 的所有条件.

这种原函数的直接构成法使我们相信, 至少对长方体的区域 (V),——要使 (14) 式是恰当微分, 也就是说, 要使积分 (13) 与道路无关, 条件 (B) 是充分的.

要将这里推广到一般情形是可以的, 只要区域 (V) 满足某一条件 (与平面区域单连通性的条件相类似). 但因为这时要进行所有的推理是很困难的, 我们暂时丢开它. 以后 [641], 在熟悉了曲面积分与斯托克斯公式后, 我们再回到这些问题来.

**565. 例** 1) 沿任何闭路所取的曲线积分

$$\int_{(l)} (x^2 + y^2)(x dx + y dy)$$

是否为零?

**答** 为零, 因为积分号下的式子显然是函数  $\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$  的全微分.

2) 不参照条件 (A), 说明积分

$$\int_{(AB)} x dy - y dx$$

与积分道路有关与否.

**答** 有关 (一般说来). 因为沿一不自身相交的闭路, 这类积分代表由这一闭路所范围的区域面积的两倍 [551], 并且因此异于 0.

3) 对下列各微分式判定原函数的存在性并求出来:

(a)  $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy,$

(б)  $(10xy - 8y)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy,$

(в)  $(4x^3y^3 - 2y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy,$

(г)  $[(x + y + 1)e^x - e^y]dx + [e^x - (x + y + 1)e^y]dy.$

**解** 借可积分条件之助可知, 在 (a), (б), (г) 三情形下是恰当微分, 而在情形 (в) 时不是的.

(a) 由公式 (8), 令  $x_0 = y_0 = 0$ , 有

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_0^x 5dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy + C \\ &= 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C.\end{aligned}$$

用公式 (7) 亦可同样得出:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_0^x (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + \int_0^y (-4)dy + C \\ &= x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C.\end{aligned}$$

(б) 取  $x_0 = y_0 = 0$  后可很方便由公式 (8) 计算出来, 因为第一个积分成为零了:

$$\Phi(x, y) = \int_0^y (5x^2 - 8x + 3)dy + C = (5x^2 - 8x + 3)y + C.$$

(г) 由上述任一公式得:

$$\Phi(x, y) = (x + y)(e^x - e^y) + C.$$



4) 求证条件  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  相当于恒等式

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{x_0}^y Q(x, y) dy$$

(假设函数  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  皆连续).

5) 有时原函数的求法 (如果可积条件满足) 可与在 558 中所做的有所不同. 用例 3)(a) 来说明这点.

由条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x^3 y^3 - 3y^2 + 5,$$

对  $x$  积分, 求得  $\Phi$  的表示式  $x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x$ , 但可相差一“积分常数”. 这常数与我们对  $x$  所积分的  $x$  无关, 但可与“参数”  $y$  有关; 故我们可将它取为  $\varphi(y)$  形状. 因此,

$$\Phi = x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x + \varphi.$$

当将  $\Phi$  代入条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^4 y^2 - 6xy - 4$$

时, 得到

$$\frac{d\varphi}{dy} = -4,$$

于是  $\varphi = -4y + C$ . 最后

$$\Phi = x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C.$$

6) 如不注意到可积条件不合适而将同一方法应用到例 3)(e) 上去, 则在决定  $\varphi$  时得条件

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2xy.$$

这显然是矛盾的, 因为右端的式子包含有  $x$ , 而同时  $\varphi$  又与  $x$  无关!

7) 一般地来弄清楚在实践上述方法时, 可积条件究竟起怎样的作用, 是很有趣的.

将等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$$

对  $x$  积分, 与在特殊例子中一样, 得

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y).$$

在决定  $\varphi(y)$  时第二个等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

给出条件

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx = Q(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx. \quad (18)$$



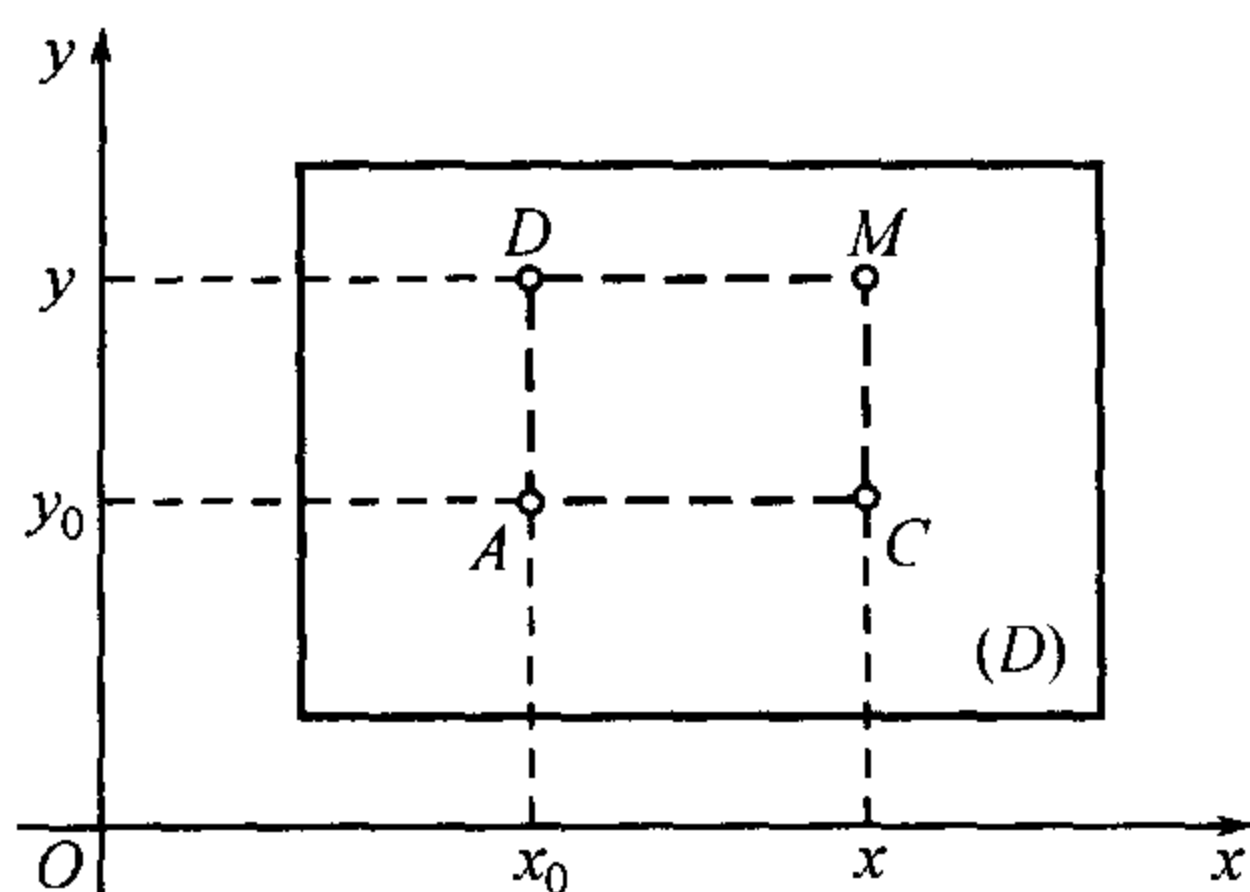


图 28

若右端式子实际上与  $x$  无关 (即当  $y = \text{常数}$  时不因  $x$  改变而改变), 则单纯地对  $y$  求积分就得到  $\varphi$  的式子. 而如 (18) 式中包含  $x$ , 则对  $\varphi$  所得的条件就是矛盾的, 因为  $\varphi$  必须与  $x$  无关. 因此, 成功与否根本决定于 (18) 式是否与  $x$  有关, 而这非常简单地从 (18) 式对  $x$  的偏导数是否为零来判定. 但这一导数等于  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ . 因此条件 (A) 满足, 也只要它满足就能保证成功!

8) 函数  $F(x, y)$  应满足怎样的条件才能使式子

$$F(x, y)(x dx + y dy)$$

是一恰当微分?

答  $x \frac{\partial F}{\partial y} = y \frac{\partial F}{\partial x}.$

9) 利用原函数的曲线积分表示式 [556(4)], 并一次取折线  $ACM$  而另一次取  $ADM$  (图 28) 作为积分道路来推出第 558 目中原函数的公式 (7) 与 (8).

10) 为了给出第 556 目中求原函数的一般公式 (4) 的另一应用例题, 我们由这一公式重新来解问题 3) (a). 取连接坐标原点及平面中一任意点  $(x, y)$  的直线段为积分道路 (我们用另法来表示它的坐标是为了使不与积分道路上动点的坐标  $x, y$  相混淆).

在积分

$$F(x', y') = \int_{(0,0)}^{(x',y')} (4x^3 y^3 - 3y^2 + 5) dx + (3x^4 y^2 - 6xy - 4) dy$$

中应以  $\frac{y'x}{x'}$  代替  $y$  (因为  $y = \frac{y'x}{x'}$  恰为积分道路的方程), 且这就将问题变成计算对  $x$  的自 0 到  $x$  的普通定积分. 结果得

$$\begin{aligned} F(x', y') &= \int_0^x \left( \frac{7y'^3 x^6}{x'^3} - \frac{9y'^2 x^2}{x'^2} + 5 - \frac{4y'}{x'} \right) dx \\ &= x'^4 y'^3 - 3x' y'^2 + 5x' - 4y', \end{aligned}$$

除记号外, 这与上面求得的式子全同.

11) 确定一区域使表示式

$$Pdx + Qdy = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} dx + \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} dy \quad ①$$

在其中是一全微分, 并对这一区域求出其原函数.

解 我们有 (当  $y \neq 0$  时):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

①与通常一样, 符号  $\sqrt{\quad}$  代表算术根.



且在第一式中正负号应取得与  $y$  的符号相一致. 因此, 可积条件仅在  $y > 0$  时才能适合.

因为这样的关系, 我们限制在上半平面中, 在还原原函数时我们利用与 10) 中相同的方法, 但将直线段方程取作参数形式:

$$x = xt, \quad y = y't \quad (0 \leq t \leq 1).$$

则

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x',y')} Pdx + Qdy \\ &= \int_0^1 (x' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}) \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} (x' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}). \end{aligned}$$

12) 令

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{2} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \quad (A, C, AC - B^2 > 0).$$

验证适合条件 (A) 并求对应于奇点  $(0,0)$  的循环常数.

提示 沿椭圆

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (\text{E})$$

来计算曲线积分最为简便, 因为, 这样,

$$\int_{(E)} Pdx + Qdy = \frac{1}{2} \int_{(E)} xdy - ydx$$

就简单地成为 [551, (10)] 这椭圆的面积, 这面积为我们大家所熟知 [339, 6]. 比较 549, 9).

13) 如可积条件满足, 则有时即使有奇点时, 曲线积分仍可与道路无关, 而原函数为单值的! 例如, 对以坐标原点为奇点的式子

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

例如, 函数  $\ln(x^2 + y^2)$  就是一原函数, 它与它的导数在整个平面中 (除原点外) 单值且连续. 读者立刻自己可以想到, 这是由于对应于原点的循环常数等于零的缘故.

14) 将微分式

$$z \left( \frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left( \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz$$

积分.

解 “可积条件” 很容易验证:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{z}{x^2 y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

将公式 (17) 中的  $x$  及  $z$  的地位对调后按所得公式来进行计算, 并令  $z_0 = 0$ , 而  $x_0$  及  $y_0 > 0$ . 则三个积分中只剩下一个了, 立刻就得到

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \left( \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz + C = \operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$



**566. 物理问题的应用** 根据所述理论我们再回到若干以前讨论过的力学及物理学领域内的问题.

1) **力场的功** 在第 554 目中我们已经看到, 当质量为 1 的质点自位置  $A$  位移到位置  $B$  时, 力场的功可表作曲线积分 [参看 554(18)]:

$$A = \int_{(AB)} Xdx + Ydy, \quad (19)$$

其中  $X = X(x, y)$   $Y = Y(x, y)$  是力场强度在坐标轴上的射影, 而  $(AB)$  表质点的轨道.

很自然地要阐明在什么样的条件下, 力场中的功仅与点的开始位置与终止位置有关而与轨道的形状无关. 显然这一问题相当于曲线积分 (19) 与积分道路无关的问题. 故所求条件为等式

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (20)$$

这时当然假设由场所范围的区域是单连通的且无奇点.

这同一条件也可表为这种形式: 当质点由一个位置位移到另一位置时, 场中力的功当且仅当元素功

$$Xdx + Ydy$$

为某一单值函数  $U(x, y)$  的全微分时就与位移轨道的形状无关. 这一函数通常称为力函数或位势函数; 在这函数存在的情况下, 场本身名叫位势场.

当点自位置  $A(x_0, y_0)$  位移到位置  $B(x_1, y_1)$  时, 位势场的功就等于 [参考 557(6)] 力函数对应的增量:

$$U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = U(B) - U(A).$$

作为一例题, 我们来考察牛顿引力场. 如在坐标原点  $O$  处放一质量  $\mu$ , 而在点  $A$  处放一质量 1, 则后面这一点就被  $O$  以一力  $\vec{F}$  向中心吸引, 其大小等于

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  为原点到点  $A$  的距离. 因为这一力与坐标轴间夹角的余弦为  $-\frac{x}{r}$  及  $-\frac{y}{r}$ , 故力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影可表作:

$$X = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

直接可以看清楚, 牛顿场是位势场, 因为式子

$$-\frac{\mu x}{r^3}dx - \frac{\mu y}{r^3}dy \quad (21)$$

是函数

$$U = \frac{\mu}{r}$$

的微分, 而  $U$  在这里就起位势函数的作用; 它称为 (点  $O$  的场的) 牛顿位势. 尽管有一奇点 (坐标原点) 存在, 这一函数是单值的: (21) 式沿一闭路的积分即使包围原点时也为零 (此处“循环常数”等于零!).



当点自位置  $A$  位移到位置  $B$  时, 场的力做一功

$$A = \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{r_A},$$

其中  $r_A$  及  $r_B$  是中心到点  $A$  及  $B$  的距离. 当将点  $B$  移到无穷远时, 功就成为  $-\frac{\mu}{r_A}$ ; 如点从无穷远处位移到位置  $A$  时, 它就恰恰等于牛顿位势的大小  $\frac{\mu}{r_A}$ . [比照第 549 目, 13).]

与径向量  $\vec{r}$  构成  $+\frac{\pi}{2}$  角的力场

$$F = kr \text{ 或 } F = \frac{k}{r} \quad (k = \text{常数})$$

是非位势场的例子.

整个这里所述的可很容易地移到空间力场的情形去.

2) 平面中流体的定常流动 如以  $u, v$  表向量速度沿坐标轴的分量, 则, 在第 554 目 2) 中我们已看到, 在单位时间内通过闭路  $(K)$  流到里面去的流量等于

$$Q = \int_{(K)} v dx - u dy$$

[参看 554, (22)]. 在不可压缩流体的情况下, 当没有泉源或漏洞时, 这一积分恒等于零. 由此推得, 向量速度的分量  $u, v$  必须适合条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

因此积分号下的式子  $v dx - u dy$  就有一原函数  $\varphi(M) = \varphi(x, y)$ , 在流体力学中称为流函数.

如取连接点  $A$  及  $B$  的任一曲线  $(AB)$ , 则如已经知道的 [554(18)], 在单位时间内通过它流向一确定的一侧流量可用积分

$$Q = \int_{(AB)} v dx - u dy$$

来表示, 且曲线  $(AB)$  的方向必须是这样, 使朝向所提到的这一侧的法线与正的切线方向交于一角  $+\frac{\pi}{2}$ . 现在我们看到, 这一量恰恰就等于流函数在曲线两端的值的差  $\varphi(B) - \varphi(A)$ !

3) 气体所吸收的热 现在我们重新来考虑 [554, 3)] 一问题, 就是一已知质量 (例如, 1 千克) 的理想气体当改变它的状态时它所得到的热量. 如果气体状态变化过程的本身用  $v_p$  平面中的曲线  $(K)$  来说明, 则, 如在第 554 目 3) 中已见的, 这一热量可表作曲线积分 [参看该处 (23)]:

$$U = \int_{(K)} \frac{c_p}{R} p dV + \frac{c_v}{R} V dp$$

(我们保持原来的记号).

如果与通常一样, 认为气体热容量  $c_v$  及  $c_p$  (分别当体积固定及当压力固定时) 不变, 则可积条件这里显然不成立. 实际上, 因为  $c_p \neq c_v$ ,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{c_p}{R} p \right) = \frac{c_p}{R} \neq \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{c_v}{R} V \right) = \frac{c_v}{R}.$$

由此推得, 热量  $U$  不是气体状态的函数, 而与如何得到这一状态的过程有关. 甚至在一循环过程中气体回到它最初状态时, 气体可能得到 (或失去) 若干热量.



如在元素热量的式子

$$dU = \frac{c_p}{R} p dV + \frac{c_v}{R} V dp$$

中乘上  $\frac{1}{T}$ , 其中  $T = \frac{pV}{R}$  是气体的绝对温度. 则得一式子

$$\frac{dU}{T} = c_p \frac{dV}{V} + c_v \frac{dp}{p},$$

很清楚这是一全微分. 其原函数为

$$S = c_p \ln V + c_v \ln p.$$

曲线积分

$$\int_{(V_0, p_0)}^{(V, p)} \frac{dU}{T}$$

已经不再与连接定点  $(V_0, p_0)$  与动点  $(V, p)$  的积分道路有关, 且仅与上面所示的函数  $S$  只差一常数. 由这一积分决定某一物理量 (所谓“熵”), 它已经是气体状态的函数且在热量计算中起重要的作用.

## §4. 有界变差函数

**567. 有界变差函数的定义** 本节所谈的是某一离这一章主题较远的东西. 我们向读者介绍一类重要函数 (在标题中已说明), 这是若尔当 (C. Jordan) 首先引导到科学中来的. 这一类函数将在我们下一节中所讨论的定积分概念的推广中起主导作用. 并且, 在许多其它数学分析问题中有界变差的函数类也有重要的意义.

设函数  $f(x)$  定义于某一有限区间  $[a, b]$  中, 其中  $a < b$ . 用任意的方法借分点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

之助将这一区间分为许多部分 (这与我们在建立定积分概念时, 当形成积分和或黎曼和时所做的相似). 从对应于各个部分区间的函数增量的绝对值, 作和

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \quad (1)$$

现在整个的问题是: 用各种不同方法细分区间  $[a, b]$  为许多部分时, 这些数的集合是否有上界.

若和 (1) 在其集合中有上界, 就说函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  中为有界变差 (或有界变动). 这时, 这一和的上确界就称为函数在这区间上的全变差 (或全变动), 并用记号

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}$$



来表示. 这一概念也可应用到非有界变差函数的情形, 不过这时全变差将等于 $+\infty$ .

由上确界定义本身, 在这两种情况下, 适当地选取区间  $[a, b]$  的细分后, 可使和  $v$  任意接近于全变差  $\bigvee_a^b f(x)$ . 换句话说, 可以选取一细分的序列使全变差为对应的和  $v$  的序列的极限.

有时会遇到在一无穷区间内函数  $f(x)$  变差的有界性问题, 例如在区间  $[a, +\infty]$  内. 如果  $f(x)$  在这区间的任何有限部分  $[a, A]$  上为有界变差函数, 且全变差  $\bigvee_a^A f(x)$  在其集合中是有界的, 我们就说函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty]$  中为有界变差的. 在所有情况下, 我们令

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\}. \quad (2)$$

注意, 在这些定义中函数  $f(x)$  连续性的问题并没有起任何作用.

任何有界单调函数可作为有限或无穷区间  $[a, b]$  上有界变差函数的例子. 如区间  $[a, b]$  为有限的, 则它立刻可由下面推出:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(b) - f(a)|,$$

故亦  $\bigvee_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$ . 对区间  $[a, +\infty]$ , 显然有

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \{|f(A) - f(a)|\} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

与通常一样, 我们将  $f(+\infty)$  理解为极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)$ .

现在举一个连续函数但不是有界变差函数的例子. 令

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad (\text{对 } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

我们来考察, 例如, 区间  $[0, 1]$ . 如取点

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

为这一区间的分点, 则容易证明,

$$v = v_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n$$

而 [参看 365,1)]

$$\bigvee_0^1 f(x) = \sup\{v\} = +\infty.$$



**568. 有界变差函数类** 我们已经提到过, 单调函数是有界变差的. 可以用下面的方法推广这一函数类:

1° 如在区间  $[a, b]$  中给出的函数  $f(x)$  是这样的: 可使区间分为有限个部分

$$[a_k, a_{k+1}] \quad (k = 0, 1, \dots, m-1; a_0 = a, a_m = b),$$

而在每一部分上  $f(x)$  是单调的,<sup>①</sup> 则它在  $[a, b]$  上为有界变差的.

用任意方法将区间  $[a, b]$  分为许多部分, 作和  $v$ . 因为加入每一新的分点只可能使  $v$  增加,<sup>②</sup> 故若将所有上面所谈到的点  $a_k$  一起加到分点中去, 我们就得一和  $\bar{v} \geq v$ . 如在和  $\bar{v}$  中集出与区间  $[a_k, a_{k+1}]$  有关的项, 则在上面用一符号  $(k)$  表它们的和时, 我们将有

$$\bar{v}^{(k)} = |f(a_{k+1}) - f(a_k)|,$$

所以

$$\bar{v} = \sum_{k=0}^{m-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|.$$

因为任意的和  $v$  不会超过这一数, 故它就是函数的全变差.

2° 如函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  中满足条件

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq L|\bar{x} - x|, \quad (3)$$

其中  $L = \text{常数}$ , 而  $\bar{x}$  及  $x$  是区间的两任意点,<sup>③</sup> 则它是有界变差的, 且

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L(b-a).$$

这可由下面不等式推得:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b-a).$$

特别,

3° 如函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有有界的导数:  $|f'(x)| \leq L$  (其中  $L = \text{常数}$ ), 则它在这区间上是一有界变差的函数.

事实上, 由中值定理, 这时

$$|f(\bar{x}) - f(x)| = |f'(\xi)(\bar{x} - x)| \leq L(\bar{x} - x) \quad (x \geq \xi \geq \bar{x}),$$

① 这种函数我们称它在区间  $[a, b]$  上分段单调.

② 如在  $x_i$  及  $x_{i+1}$  间插入一点  $x'$ , 则项  $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$  就代之以和

$$|f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)| \geq |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

③ 这一条件通常称为利普希茨 (R.Lipschitz) 条件.



故利普希茨条件 (3) 适合.

由这一注意可以推断, 例如, 函数

$$f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

在任何有限区间上变差的有界性, 因为它的导数

$$f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f'(0) = 0$$

是有界的. 很有趣的, 我们注意, 在包含点 0 的每一区间中, 这函数 “无限地振动”, 亦即无数次地从增加变成减少, 无数次地从减少变成增加.

有界变差函数的一般类可由下面的命题给出:

4° 如  $f(x)$  在一有限 (或甚至在一无穷) 区间  $[a, b]$  上可表作一有变动上限的积分的形状时:

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad (4)$$

其中  $\varphi(t)$  假定在这一区间上是绝对可积的, 则  $f(x)$  在这区间上是有界变差的. 这时

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

设  $[a, b]$  是一有限区间, 则

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt, \end{aligned}$$

由此就推得我们的断言.

如果我们所谈的是无穷区间  $[a, +\infty]$ , 则只要注意

$$\bigvee_a^A f(x) \leq \int_a^A |\varphi(t)| dt \leq \int_a^{+\infty} |\varphi(t)| dt$$

就够了.

**附注** 可以证明, 在有限的区间或无限区间的情形, 实际上准确的等式

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

成立. 若函数  $\varphi(t)$  在区间  $[a, b]$  上可积但不是绝对可积的, 则  $f(x)$  的全变差根本就是无穷的. 我们不想讨论这了, 但仅用一些例题来说明后面讲的这一点.



设  $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2} (x \neq 0), f(0) = 0$ , 所以

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \quad (x \neq 0), \quad f'(0) = \varphi(0) = 0.$$

因此, 例如对  $0 \leq x \leq 2$ ,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt,$$

但在第 482 目中我们已证, 这一积分不是绝对收敛的. 利用与在那里相同的思想, 将区间  $[0, 2]$  用点

$$0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}, 2$$

分开; 对于其对应的和  $v$  显然有:

$$v > \sum_{k=1}^n \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n,$$

由此推得

$$\bigvee_0^2 f(x) = +\infty.$$

与此相类似, 容易证明函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

在区间  $[0, +\infty]$  中不是有界变差的[比照 476].

**569. 有界变差函数的性质** 这里一切函数所讨论的区间  $[a, b]$  假定为有限的.

1° 任一有界变差函数是有界的.

事实上, 当  $a < x' \leq b$  时我们有

$$v' = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \leq \bigvee_a^b f(x),$$

于是

$$|f(x')| \leq |f(x') - f(a)| + |f(a)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f(x).$$

2° 两有界变差函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的和、差及积同样是有界变差函数.

设  $s(x) = f(x) \pm g(x)$ , 则

$$|s(x_{i+1}) - s(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

对附标  $i$  相加,

$$\begin{aligned} \sum_i |s(x_{i+1}) - s(x_i)| &\leq \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \\ &\leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x), \end{aligned}$$



由此推得

$$\bigvee_a^b s(x) \leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x).$$

今令  $p(x) = f(x)g(x)$ , 并设对  $a \leq x \leq b$ ,

$$|f(x)| \leq K, \quad |g(x)| \leq L, \quad (K, L = \text{常数})$$

(参看 1°). 显然,

$$\begin{aligned} |p(x_{i+1}) - p(x_i)| &= |f(x_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \\ &\leq K \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + L \cdot |f(x_{i+1}) - f(x_i)|, \end{aligned}$$

由此已很容易得到

$$\bigvee_a^b p(x) \leq K \bigvee_a^b g(x) + L \bigvee_a^b f(x).$$

3° 若  $f(x)$  及  $g(x)$  为有界变差函数且  $|g(x)| \geq \sigma > 0$ , 则商  $\frac{f(x)}{g(x)}$  也为有界变差函数.

由性质 2°, 只要求证函数  $h(x) = \frac{1}{g(x)}$  为有界变差函数就够了. 我们有

$$|h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \frac{|g(x_{i+1}) - g(x_i)|}{|g(x_i)| \cdot |g(x_{i+1})|} \leq \frac{1}{\sigma^2} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

所以

$$\bigvee_a^b h(x) \leq \frac{1}{\sigma^2} \bigvee_a^b g(x).$$

4° 设函数  $f(x)$  定义于区间  $[a, b]$  上且  $a < c < b$ . 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上为有界变差, 则它在区间  $[a, b]$  及  $[c, b]$  上也为有界变差, 反过来也是如此. 这时,

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \quad (5)$$

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  中有有界变差. 我们将区间  $[a, c]$  及  $[c, b]$  分别分成许多部分:

$$y_0 = a < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad z_0 = c < z_1 < \cdots < z_n = b; \quad (6)$$

这样整个区间  $[a, b]$  亦分成许多部分. 对区间  $[a, c]$  及  $[c, b]$  分别作和:

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|;$$



对于区间  $[a, b]$  的对应和将为  $v = v_1 + v_2$ . 于是

$$v_1 + v_2 \leq \bigvee_a^b f(x),$$

因此, 每一和  $v_1, v_2$  都是有界的, 即函数  $f(x)$  在区间  $[a, c]$  及  $[c, b]$  上是有界变差的. 选择许多细分 (6) 使和  $v_1$  及  $v_2$  趋近于对应的全变差, 到极限时得

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leq \bigvee_a^b f(x). \quad (7)$$

现设  $f(x)$  在每一区间  $[a, c]$  及  $[c, b]$  中都是有界变差的. 将区间  $[a, b]$  任意地分成许多部分. 如点  $c$  不在诸分点之列, 则我们将它补充进去, 我们已知,<sup>①</sup> 这样得出的和  $v$  只可能增大. 仍用以前的记号, 将有

$$v \leq v_1 + v_2 \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

由此立刻可以推得  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的有界变差性及不等式

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \quad (8)$$

最后, 由 (7) 及 (8) 推出 (5).

从已证的一些定理, 特别可推得:

5° 如在区间  $[a, b]$  中函数  $f(x)$  有有界变差, 则对  $a \leq x \leq b$ , 全变差

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

为  $x$  的单调增加, (且为有界) 函数.

事实上, 若  $a \leq x' < x'' \leq b$ , 则

$$\bigvee_a^{x''} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t),$$

故

$$g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t) \geq 0 \quad (9)$$

(因为由全变差定义本身它不会是负数).

<sup>①</sup> 参看第 54 页上脚注 ②.



现在很清楚了, 在无穷区间  $[b, +\infty]$  中全变差的定义可不用 (2) 而写成下面的形式:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \bigvee_a^A f(x). \quad (2^*)$$

用这一说明, 这一目中的定理很容易推广到无穷区间的情形.

**570. 有界变差函数的判定法** 设函数  $f(x)$  定义于一有限的或无穷区间  $[a, b]$  上.

6° 要使函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上为有界变差的, 必要与充分条件是: 对于它, 在这一区间上有这样的一有界单调增加函数  $F(x)$  存在, 使在区间  $[a, b]$  的任何部分  $[x', x''] (x' < x'')$  上, 函数  $f$  的增量绝对值不超过函数  $F$  的对应的增量:

$$|f(x'') - f(x')| \leq F(x'') - F(x'). \textcircled{1}$$

(有这种性质的函数  $F(x)$  自然地称为函数  $f(x)$  的强函数.)

**必要性** 可从下面推得: 对有界变差的函数  $f(x)$ , 例如, 函数

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

可作为强函数, 由 5° 它是有界单调增加的. 由函数全变差定义本身, 就能推出不等式

$$|f(x'') - f(x')| \leq g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t).$$

**充分性** 对有限区间的情形, 从不等式

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(b) - F(a)$$

立刻可以看出, 而对无穷区间的情形, 可由极限过程得出.

判定法的下一另外形式非常重要:

7° 要函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有有界变差, 必要与充分条件是它在这一区间中能表作两个有界单调增加函数的差:

$$f(x) = g(x) - h(x). \quad (10)$$

<sup>①</sup>但亦可用不带绝对值记号的不等式:

$$f(x'') - f(x') \leq F(x'') - F(x').$$



**必要性** 由 6°, 对有界变差函数  $f(x)$  应有一有界单调增加的强函数  $F(x)$  存在. 令

$$g(x) = F(x), \quad h(x) = F(x) - f(x),$$

所以 (10) 式适合. 还要证明的是函数  $h(x)$  的单调性; 但当  $x' < x''$  时, 由强函数的定义,

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0.$$

**充分性** 可从下面看出来: 当有等式 (10) 时, 函数

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

就是强函数, 因为

$$|f(x'') - f(x')| \leq [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] = F(x'') - F(x').$$

留给读者两习题:

1) 根据所述判定法, 重新证明前目中断言 1°~4°;

2) 对在第 568 目中所考察的有界变差函数类, 直接证明单调强函数的存在, 并将它表作两单调函数差的可能性.

关于定理 7° 我们将作一补充说明. 因为函数  $g$  及  $h$  都是有界的, 故在它们上面各加上同一常数恒可使它们都变成正的. 同样, 在函数  $g$  及  $h$  上加上任何一个严格增加的有界函数 (例如,  $\arctg x$ ), 我们便得到一个形如 (10) 的拆开来的式子, 其中两个函数都已经是严格增加的.

由 7° 中所建立的, 有界变差函数在某种意义上化为单调函数的可能性, 读者不要幻想到有界变差函数的性质很“简单”: 试看, 在第 568 目曾考察过的无限振动函数

$$f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

也可表作两单调函数的差的形状!

然而, 就是因为 (10) 式的关系, 单调函数的某些性质也搬到有界变差函数上来了. 例如, 如果回忆到, 对任何的  $x = x_0$ , 单调有界函数  $f(x)$  的右侧的及左侧的单侧极限都存在,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), \quad (11)$$

[71, 1°], 则, 应用这一性质到每个函数  $g$  及  $h$ , 亦可得出结论:

8° 在区间  $[a, b]$  上有界变差的函数  $f(x)$  在这一区间的任何点  $x = x_0$  处有有限单侧极限 (11) 存在.<sup>①</sup>

<sup>①</sup>当然, 如果  $x_0$  是区间的端点之一, 则只能谈到这两个极限中的一个.



**571. 连续的有界变差函数** 9° 设在区间  $[a, b]$  中给出一有界变差函数  $f(x)$ . 如  $f(x)$  在某一点  $x = x_0$  连续, 则在同一点, 函数

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

也连续.

假定  $x_0 < b$ , 求证  $g(x)$  在点  $x_0$  处右连续. 为达此目的, 取一正数  $\varepsilon > 0$  后, 用点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

将区间  $[x_0, b]$  分为许多部分使

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \bigvee_{x_0}^b f(t) - \varepsilon. \quad (12)$$

依据函数  $f(x)$  的连续性, 这里可以假定,  $x_1$  已经非常靠近  $x_0$ , 使不等式

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

适合 (在必要时, 可以再插入一分点, 这样, 和  $v$  只会增加). 因此, 由 (12) 应得

$$\bigvee_{x_0}^b f(t) < \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b f(t),$$

因而,

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon,$$

或最后,

$$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon.$$

于是更加有

$$0 \leq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon,$$

因为  $\varepsilon$  是任意的, 因此

$$g(x_0 + 0) = g(x_0).$$

同样可证明 (当  $x_0 > a$  时)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0),$$

亦即  $g(x)$  在点  $x_0$  处左连续.

从证得的定理得出这样一推论:



10° 连续的有界变差函数可表作两连续增加函数差的形状.

事实上, 如回到命题 7° 的证明 (特别, 关于必要性一方面), 并取函数 (且由 9°, 是一连续的函数)

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

作为单调强函数时, 就能得到所求的分拆开的式子.

最后我们指出, 对连续函数, 在全变差的定义

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}$$

中, 不论全变差是有限的或无穷的, “sup” 都可用一极限来代替.

11° 设函数  $f(x)$  连续于一有限区间  $[a, b]$  上. 将这一区间用点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

分成许多部分并作和

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

后, 就有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v = \bigvee_a^b f(x), \quad (13)$$

其中  $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$ .<sup>①</sup>

已经说过, 在添加一新的分点时和  $v$  不会减少.<sup>②</sup> 另一方面, 如这一新分点落在  $x_k$  及  $x_{k+1}$  间的区间内时, 则由这一点所产生的和  $v$  的增加不会超过函数  $f(x)$  在区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上振动的两倍.

注意到这一点以后, 我们取任何一数

$$A < \bigvee_a^b f(x)$$

并求得一和  $v^*$  使

$$v^* > A. \quad (14)$$

设这一和对应于下一分法:

$$x_0^* = a < x_1^* < \cdots < x_m^* = b.$$

<sup>①</sup>这里, 极限过程与对黎曼和或达布和 [259, 30] 时的极限为同一类型.

<sup>②</sup>参看第 54 页脚注 ②.



现选取一非常小的  $\delta > 0$ , 使只要  $|x'' - x'| < \delta$  时,

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m}$$

(由函数  $f$  的一致连续性这是办得到的). 我们来证明, 对任何的分法其  $\lambda < \delta$  者, 有

$$v > A. \quad (15)$$

事实上, 有了这样一分法 (I), 我们就在 (I) 上添加这些点  $x_k^*$  后得一新分法 (II). 如对应于分法 (II) 的和为  $v_0$ , 则

$$v_0 \geq x^*. \quad (16)$$

另一方面, 分法 (II) 是由 (I) 经过 (至多)  $m$  次添加一个点而得来的. 因为每次添加所引起和  $v$  的增加小于  $\frac{v^* - A}{2m}$ , 故

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}.$$

从这里以及 (16) 与 (14), 得

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geq \frac{A + v^*}{2} > A.$$

这样, 当  $\lambda < \delta$  时 (15) 式适合; 但既然恒有

$$v \leq \bigvee_a^b f(x),$$

故的确 (13) 式成立, 这就是要求证的.

**572. 可求长曲线** 有界变差函数的概念在曲线的可求长问题上有应用, 所称概念就是在联系到这一问题时首先被若尔当介绍的. 我们想来叙述这一问题作为本节结束.

设一曲线 ( $K$ ) 以参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (17)$$

给出, 其中函数  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  仅假定为连续的. 同时设曲线没有重点.

取曲线上对应于参数值

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T \quad (18)$$

的点为曲线内接折线的顶点, 对折线的周长我们有表示式

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2}.$$



如我们所知 [247], 所考察的曲线其弧长  $s$  可定义为所有内接折线周长  $p$  的集合的上确界. 如果它是有限的, 曲线就称为可求长的. 可求长的充分条件我们在第一卷中已说明过 [248]. 现在我们要建立最一般的 —— 必要及充分 —— 条件.

**若尔当定理** 曲线 (17) 可求长的必要充分条件为函数  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  在区间  $[t_0, T]$  上皆为有界变差.

**必要性** 如曲线可求长且长为  $s$ , 则对区间  $[t_0, T]$  的任何细分 (18) 有

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} \leq s,$$

于是, 由明显的不等式

$$|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \leq \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2}$$

得出

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \leq s,$$

所以函数  $\varphi(t)$  的确是有界变差的. 同样的结论可加到函数  $\psi(t)$  上.

**充分性** 现设函数  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  都是有界变差的. 由明显的不等式

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| \end{aligned}$$

可以推断: 所有数  $p$  上面有界, 例如以数

$$\bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t)$$

为上界, 于是由上所证就能推得曲线  $(K)$  的可求长性.

我们还加两个重要的说明于后.

由刚才所述的, 很清楚, 曲线 (17) 的全长满足不等式

$$s \leq \bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t).$$

考察一对应于区间  $[t_0, t]$  中参数变化的变动弧  $s = s(t)$ , 应用上面不等式到区间  $[t, t + \Delta t]$  上去, 其中  $\Delta t$ , 譬如说,  $> 0$ , 则

$$0 < \Delta s < \bigvee_t^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_t^{t+\Delta t} \psi(t).$$



因为对无限小的  $\Delta t$ , 右端的两个变动量 [由 571, 9°] 与  $\Delta s$  一起同样也是无限小, 故我们得到结论: 对可求长的连续曲线, 动弧  $s(t)$  是参数的连续函数.

因为这一函数自 0 单调增加到整个曲线的长  $S$ , 故不论  $n$  为怎样的自然数, 我们可以设想这一曲线分为  $n$  部分, 每分长  $\frac{S}{n}$  [柯西定理, 82]. 如平面被一边长  $\frac{S}{n}$  的正方形网覆盖起来, 则上述每一小段至多只能与四个这种正方形相交. 因此, 所有与曲线相交的正方形面积的和在任何情形下不会超过  $4n \cdot \frac{S^2}{n^2}$ , 可使它任意小: 曲线有面积零.

由此得一有趣的推论: 由一可求长曲线 (或若干个这种曲线) 所围的区域显然是可求面积的, 亦即有一面积 [337].

## §5. 斯蒂尔切斯积分

**573. 斯蒂尔切斯积分的定义** 斯蒂尔切斯 (Th.J.Stieltjes) 积分是通常的黎曼定积分 [295] 的直接推广. 它用下法来定义.

设在区间  $[a, b]$  上已给两个有界函数  $f(x)$  及  $g(x)$ . 用点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

将区间  $[a, b]$  分成许多部分, 命  $\lambda = \max \Delta x_i$ . 在每一部分  $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \cdots, n-1)$  上取一点  $\xi_i$ , 计算出函数  $f(x)$  的值  $f(\xi_i)$ , 并将它乘上函数  $g(x)$  对应于区间  $[x_i, x_{i+1}]$  的增量:

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

最后, 作所有这些乘积的和:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i). \quad (2)$$

这一和称为斯蒂尔切斯积分和.

如当  $\lambda$  趋近于零时斯蒂尔切斯和  $\sigma$  有一确定的有限极限, 且这一极限既与区间  $[a, b]$  分成许多部分的方法无关, 又与在部分区间中点  $\xi_i$  的选择无关, 则这一极限称作函数  $f(x)$  对函数  $g(x)$  的斯蒂尔切斯积分,<sup>83)</sup> 并表作记号

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i). \quad (3)$$

①为明确起见我们假定  $a < b$ . 不难同样地讨论  $a > b$  的情形, 由等式  $\int_a^b = -\int_b^a$ , 它立刻可化为前者.

<sup>83)</sup>等式 (3) 定义的积分可更完整地称为黎曼-斯蒂尔切斯积分; 在现代积分理论中是研究其推广, 称为勒贝格-斯蒂尔切斯积分.



有时候, 为了要特别强调积分是在斯蒂尔切斯意义下考察的, 就采用记号

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad \text{或} \quad S_b^a f(x) dg(x).$$

这里的极限其意义与在通常的定积分情况下相同. 更精确地说, 数  $I$  称作斯蒂尔切斯积分, 如对任何数  $\varepsilon > 0$ , 有一数  $\delta > 0$  存在, 使得只要区间  $[a, b]$  分成许多部分其  $\lambda < \delta$  时, 不论点  $\xi_i$  在对应的区间中如何选取, 不等式

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

总能满足.

当积分 (3) 存在时, 也这样说: 函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上对函数  $g(x)$  可积分.

读者可以看见, 上面所给定义与通常黎曼积分定义间唯一的 (但为实质上的) 区别是:  $f(\xi_i)$  不是用独立变数的增量  $\Delta x_i$  来乘, 而是用第二个函数的增量  $\Delta g(x_i)$  来乘. 因此, 当取独立变数  $x$  本身作为函数  $g(x)$  时:

$$g(x) = x,$$

可见黎曼积分是斯蒂尔切斯积分的一特殊情形.

**574. 斯蒂尔切斯积分存在的一般条件** 在函数  $g(x)$  单调增加的限制下, 我们来建立斯蒂尔切斯积分存在的一般条件.

于是, 当  $a < b$  时, 与早前的  $\Delta x_i > 0$  一样, 现在所有的  $\Delta g(x_i) > 0$ . 只要将  $\Delta x_i$  换作  $\Delta g(x_i)$ , 就可以逐字逐句地重复整个第 296 及 297 目的论证.

首先, 与达布和同样, 在这里最好引入下列和数

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i),$$

其中  $m_i$  及  $M_i$  分别表函数  $f(x)$  在第  $i$  个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的下确界及上确界. 我们将称这些和为达布-斯蒂尔切斯下和及上和.

首先很清楚的 (对同一分法),

$$s \leq \sigma \leq S,$$

且  $s$  及  $S$  为斯蒂尔切斯和  $\sigma$  的确界.

与最简单的情形 [296] 一样, 达布-斯蒂尔切斯和本身有下列二性质:

**第一性质** 如在已有的分点中加上新的点, 则达布-斯蒂尔切斯下和只会增加, 上和只会减少.

**第二性质** 每一达布-斯蒂尔切斯下和不会超过每一上和, 即使是对应于区间另一分法的上和.



如引进达布-斯蒂尔切斯下积分及上积分:

$$I_* = \sup\{s\} \quad \text{及} \quad I^* = \inf\{S\},$$

则

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

最后, 借达布-斯蒂尔切斯和之助, 对所考察的情形很容易给斯蒂尔切斯积分的存在建立一基本判定法:

**定理** 斯蒂尔切斯积分存在的必要充分条件为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$$

或

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) = 0, \quad (4)$$

与通常一样,  $\omega_i$  为函数  $f(x)$  在第  $i$  个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振动  $M_i - m_i$ .

所有的证明, 我们已说过, 与在第 296, 297 目中所引用的对应证明全类似, 我们把它留给读者.

在下一目中, 我们将应用这一判定法来求出若干类有斯蒂尔切斯积分的重要函数偶  $f(x)$  及  $g(x)$ .

### 575. 斯蒂尔切斯积分存在的若干种情况

I. 若函数  $f(x)$  连续而函数  $g(x)$  的变差是有界的, 则斯蒂尔切斯积分

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad (5)$$

存在.

开始我们假定  $g(x)$  单调增加, 我们就应用前目中的判定法. 对任一已给的  $\varepsilon > 0$ , 由函数  $f(x)$  的一致连续性, 可找得  $\delta > 0$  使  $f(x)$  在任一长小于  $\delta$  的区间上振动小于  $\frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ . 现设区间  $[a, b]$  任意地分成许多部分, 其  $\lambda = \max \Delta x_i < \delta$ . 则所有的  $\omega_i < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ , 且

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i) < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \cdot \sum_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \varepsilon,$$

由此, 可知条件 (4) 适合, 因而积分也存在.

在一般情形下, 如函数  $g(x)$  为有界变差的, 则它可表为两有界增加函数差的形状:  $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$  [570, 7°]. 与此相应, 对应于函数  $g(x)$  的斯蒂尔切斯积分就



变成:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g_1(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g_2(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2.\end{aligned}$$

因为由已经证明的论断可知每一和  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  当  $\lambda \rightarrow 0$  时趋近于有限的极限, 故对和  $\sigma$  也是如此, 这就是要求证的.

如加强对函数  $g(x)$  的要求, 同时就可减轻加到函数  $f(x)$  上的条件:

II. 如函数  $f(x)$  在黎曼意义下在区间  $[a, b]$  上可积而  $g(x)$  满足利普希茨条件:

$$|g(\bar{x}) - g(x)| \leq L(\bar{x} - x) \quad (L = \text{常数}, a \leq x < \bar{x} \leq b), \quad (6)$$

则积分 (5) 存在.

为了又有可能应用前面讲的判定法, 开始时我们假设函数  $g(x)$  不仅满足条件 (6), 且单调增加.

由 (6), 显然,  $\Delta g(x_i) \leq L \Delta x_i$ , 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

但由函数  $f(x)$  的可积性 (在黎曼意义下), 后面的和当  $\lambda \rightarrow 0$  时本身也趋近于 0, 因而第一个和也趋近于零, 这就证明了积分 (5) 的存在.

在一般情形  $g(x)$  仅满足利普希茨条件 (6) 时, 将它表作差

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] = g_1(x) - g_2(x).$$

函数  $g_1(x) = Lx$  显然满足利普希茨条件且同时单调增加. 同样, 函数  $g_2(x) = Lx - g(x)$  也是如此, 因为由 (6), 当  $a \leq x \leq \bar{x} \leq b$  时,

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \geq 0$$

且

$$|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \leq L(\bar{x} - x) + |g(\bar{x}) - g(x)| \leq 2L(\bar{x} - x).$$

在这种情况下, 推理与上面一样.

III. 如函数  $f(x)$  在黎曼意义下可积, 而函数  $g(x)$  可表作有变动上限的积分的形状:

$$g(x) = c + \int_a^{\bar{x}} \varphi(t) dt, \quad (7)$$

其中  $\varphi(t)$  在区间  $[a, b]$  上绝对可积, 则积分 (5) 存在.



设  $\varphi(t) \geq 0$ , 故  $g(x)$  单调增加. 如  $\varphi(t)$  在正常意义下可积分因而有界:  $|\varphi(t)| \leq L$ , 则对  $a \leq x < \bar{x} \leq b$  我们有

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t) dt \right| \leq L(\bar{x} - x).$$

因此, 在这种情形下,  $g(x)$  满足利普希茨条件, 由 II, 积分存在.

现在假定,  $\varphi(t)$  在广义的意义下可积. 我们只讨论一个奇点的情形, 例如  $b$ . 首先, 对任意取定的  $\varepsilon > 0$ , 选一  $\eta > 0$  使

$$\int_{b-\eta}^b \varphi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega}, \quad (8)$$

其中  $\Omega$  是函数  $f(x)$  在所考察的区间中总的振动.

将区间  $[a, b]$  任意地分成许多部分并作和

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i).$$

将它拆成两个和  $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$ , 第一个和对应于完全包含在区间  $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$  中的一些区间, 第二个和对应于其余的区间. 只要  $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$ , 后面的一些区间就一定在区间  $[b - \eta, b]$  中; 故由 (8),

$$\Sigma'' < \Omega \int_{b-\eta}^b \varphi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 因为在区间  $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$  中函数  $\varphi(t)$  在常义下可积, 故由已经证明的, 当  $\lambda$  相当小时和  $\Sigma'$  就小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ . 因此得 (4), 这就是所要证明的.

在一般情形, 当函数  $\varphi(t)$  在区间  $[a, b]$  上绝对可积时, 我们就考察函数

$$\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2},$$

显然, 它们在上述区间上为非负的且可积的. 因为

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

故与上面一样, 问题归结到已讨论的情形.

**附注** 设函数  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且除可能有限个点外, 有导数  $g'(x)$ , 又这一导数<sup>①</sup> 自  $a$  到  $b$  (在常义或广义的意义下) 可积; 则如大家所熟知 [470, 附注], 形如 (7) 的公式

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$$

成立. 如  $g'(x)$  绝对可积, 则 III 中所述可完全应用到函数  $g(x)$  上去.

<sup>①</sup>如在导数不存在的点处, 其值任意地选取.



**576. 斯蒂尔切斯积分的性质** 由斯蒂尔切斯积分的定义立刻可推得它的下列各性质:

$$\begin{aligned} 1^\circ & \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a); \\ 2^\circ & \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x); \\ 3^\circ & \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x); \\ 4^\circ & \int_a^b kf(x) d[l g(x)] = kl \cdot \int_a^b f(x) dg(x) \quad (k, l = \text{常数}). \end{aligned}$$

同时在  $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  的情形下, 从右端积分的存在可推得左端积分的存在. 再, 我们还有

$$5^\circ \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x),$$

于其中, 我们假定  $a < c < b$ , 且三积分皆存在.

要证明这一公式, 只要注意在作积分  $\int_a^b f dg$  的斯蒂尔切斯和时将点  $c$  放入区间  $[a, b]$  的分点之中就可以了.

与这一公式有关, 我们提出一些注意, 首先, 由积分  $\int_a^b f dg$  的存在就得出积分  $\int_a^c f dg$  及  $\int_c^b f dg$  的存在.

对于由斯蒂尔切斯和得出斯蒂尔切斯积分的特殊极限手续来说, 布尔查诺-柯西收敛原理成立. 因此, 给出一  $\varepsilon > 0$ , 由积分  $\int_a^b f dg$  的存在可求得一  $\delta > 0$  使任何二斯蒂尔切斯和  $\sigma$  及  $\bar{\sigma}$  当其对应的  $\lambda$  及  $\bar{\lambda} < \delta$  时它们相差小于  $\varepsilon$ . 如同时命分点中包含  $c$  点, 而在区间  $[c, b]$  内的分点在此两种情况下都取相同的点, 则差  $\sigma - \bar{\sigma}$  就化成已经变到区间  $[a, c]$  上的两斯蒂尔切斯和的差  $\sigma_1 - \bar{\sigma}_1$ , 因为其它各项彼此相消掉了. 应用同一收敛原理到区间  $[a, c]$  并计算它上面的斯蒂尔切斯和时, 我们得出积分  $\int_a^c f dg$  存在的结论. 同样可建立积分  $\int_c^b f dg$  的存在.

特别值得注意的是前所未有的事实, 即一般说来, 不能从积分  $\int_a^c f dg$  及  $\int_c^b f dg$  都存在推出积分  $\int_a^b f dg$  存在.

为了要相信这一点, 只要考察一个例子. 设在区间  $[-1, 1]$  上用下列等式给出二函数  $f(x)$  及  $g(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{当 } 0 < x \leq 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{当 } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

易见, 积分

$$\int_{-1}^0 f(x) dg(x), \quad \int_0^1 f(x) dg(x)$$

皆存在且等于 0, 因为对应于它们的斯蒂尔切斯和皆等于 0; 对于第一个来说这是由于  $f(x)$  永远  $= 0$ , 对于第二个来说, 因为  $\Delta g(x_i)$  永远  $= 0$  而函数  $g(x)$  是常数.



这时积分

$$\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$$

不存在. 将区间  $[-1, 1]$  分为许多部分使点 0 不是分点, 作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i).$$

如点 0 在区间  $[x_k, x_{k+1}]$  中, 因此  $x_k < 0 < x_{k+1}$ , 则在和  $\sigma$  中只剩下一个第  $k$  项, 其余的皆为零, 这是因为对  $i \neq k$ ,  $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$ . 这样.

$$\sigma = f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = f(\xi_k).$$

由  $\xi_k \leq 0$  或  $\xi_k > 0$  因而  $\sigma = 0$  或  $\sigma = 1$ , 故  $\sigma$  没有极限.

上面所述的特殊情况是因为函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在  $x = 0$  处不连续之故 [参看 584,3) 及 4)].

**577. 分部积分法** 对斯蒂尔切斯积分, 公式

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \quad (9)$$

成立, 于此假定, 这两积分之一存在; 另一积分的存在从这里可推出来. 这一公式叫做分部积分公式. 我们来证明它.

设积分  $\int_a^b gdf$  存在. 将区间  $[a, b]$  分为许多部分  $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$  后, 在这些部分中任意取点  $\xi_i$ , 故

$$\begin{aligned} a = x_0 &\leq \xi_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i \leq \xi_i \\ &\leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n = b. \end{aligned}$$

积分  $\int_a^b f dg$  的斯蒂尔切斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

可表作如下形式:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1})g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) \\ &= -\{g(a)f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] - g(b)f(\xi_{n-1})\}. \end{aligned}$$

如在右端加减一式子

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$



则  $\sigma$  可重写为:

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b - \{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\}.$$

在大括弧中的式子是积分  $\int_a^b gdf$  (其存在为假定了的!) 的斯蒂尔切斯和. 它对应于区间  $[a, b]$  用分点

$$a \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq \cdots \leq \xi_{i-1} \leq \xi_i \leq \cdots \leq \xi_{n-1} \leq b$$

时的分法, 并在区间  $[\xi_{i-1}, \xi_i] (i = 1, 2, \cdots, n-1)$  中取  $x_i$  为选定的点, 而对区间  $[a, \xi_0]$  及  $[\xi_{n-1}, b]$  分别取  $a$  及  $b$ . 与通常一样, 如命  $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$ , 则现在所有部分区间的长不超过  $2\lambda$ . 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 在大括弧中的和趋近于  $\int_a^b gdf$ , 因此,  $\sigma$  的极限也存在, 即积分  $\int_a^b f dg$  存在且这一积分为公式 (9) 所确定.

作为我们推理中的一推论, 我们特别注意一奇怪的事实: 如函数  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  内对函数  $f(x)$  可积, 则函数  $f(x)$  对函数  $g(x)$  也可积.

在 575 所考察的斯蒂尔切斯积分存在的情形中, 将函数  $f$  及  $g$  的地位交换后, 由这一注意点可增加许多新的情形到上面去.

**578. 化斯蒂尔切斯积分为黎曼积分** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 而  $g(x)$  在这一区间上单调增加, 且在严格的意义下单调增加.<sup>①</sup> 则勒贝格 (H. Lebesgue) 证明了, 斯蒂尔切斯积分  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  用代换法  $v = g(x)$  立刻化为黎曼积分.

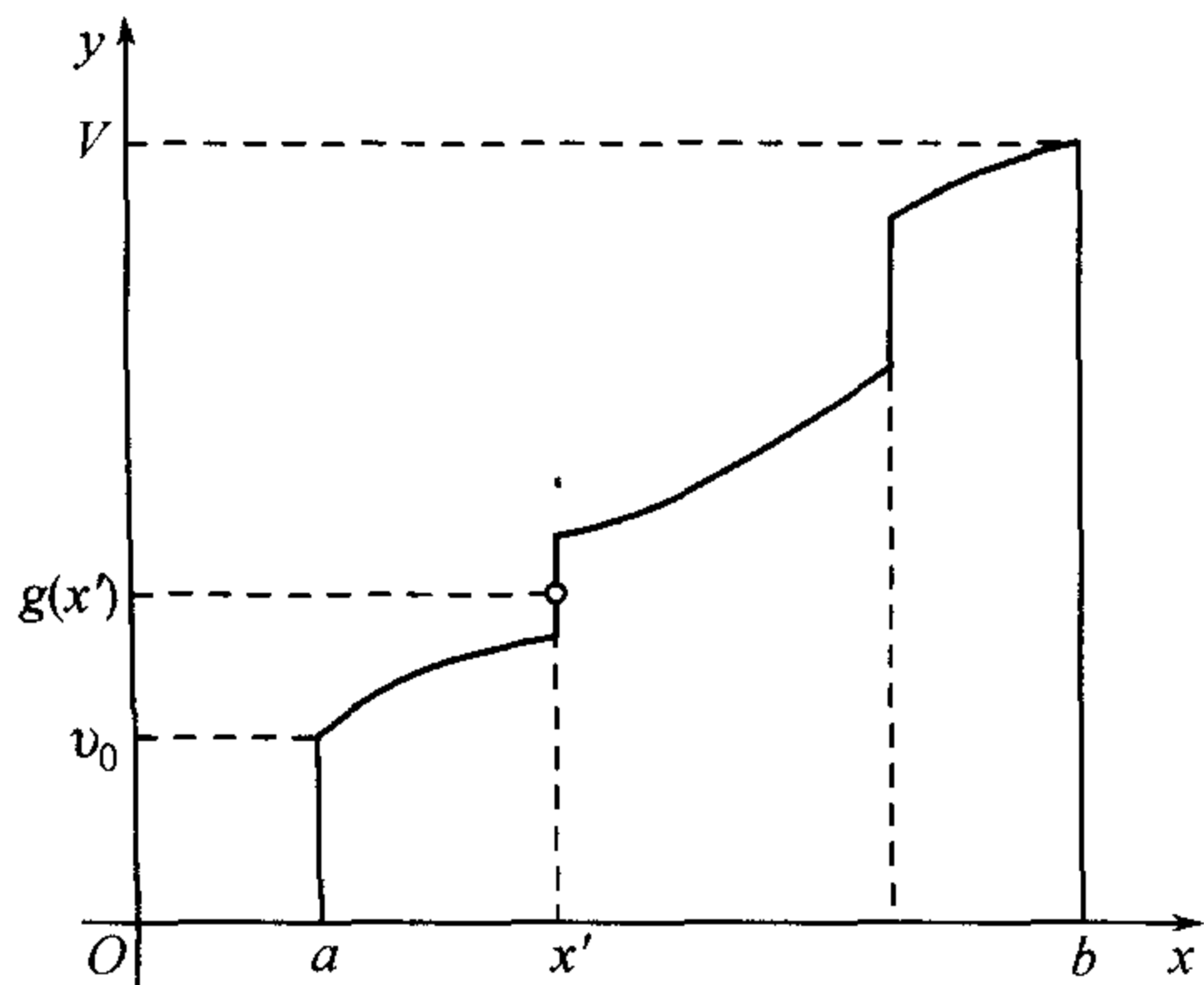


图 29

在图 29 中作出了函数  $v = g(x)$  的图形. 对于那些地方  $x = x', g(x)$  在该处断掉时 (因为我们完全没有假定  $g(x)$  非连续不可), 我们用连接点  $(x', g(x' - 0))$  及  $(x', g(x' + 0))$  的一垂直直线段来补充这一图形. 这样就做成了一连续曲线, 在它上面对于在  $v_0 = g(a)$  及  $V = g(b)$  间的每一值  $v$  就决定一个在  $a$  及  $b$  间的一确定值. 这一函数  $x = g^{-1}(v)$  显然连续且在广义的意义下单调增加; 它可视为函数  $v = g(x)$  的某种反函数.

如只限制于函数  $v = g(x)$  当  $x$  自  $a$  变到  $b$  时所取的  $v$  的值, 则  $x = g^{-1}(v)$  就是在通常意义下的反函数, 亦即将  $v$  变成使  $g(x) = v$  的值  $x$ . 但当  $v$  值取于函数  $g(x)$  跳跃处的区间

$$[g(x' - 0), g(x' + 0)]$$

<sup>①</sup>我们假定这, 完全是为了使叙述简单些.



内时, 只有一个值  $v = v' = g(x')$  有对应的值  $x = x'$ , 而在这一区间中的其它  $v$  值显然没有任何  $x$  的值与它对应. 但我们同意将它们也变到同一值  $x = x'$ , 几何上这就可以用在函数  $y = g(x)$  的图形上补充许多垂直线段来表示.

现在我们来求证

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv, \quad (10)$$

其中后面的积分是在通常意义下取的; 它的存在是有了保证的, 因函数  $g^{-1}(v)$  连续, 因而复合函数  $f(g^{-1}(v))$  也是连续的.

为达此目的, 将区间  $[a, b]$  用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

分成许多部分并作斯蒂尔切斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]. \textcircled{1}$$

如令  $v_i = g(x_i) (i = 0, 1, \cdots, n)$ , 则我们将有

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_i < v_{i+1} < \cdots < v_n = V.$$

因为  $x_i = g^{-1}(v_i)$ , 故

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i)) \Delta v_i \quad (\Delta v_i = v_{i+1} - v_i).$$

这一式子是积分

$$\int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv$$

的一黎曼和.

但从这里还不可立刻作出结论: 当变到极限时等式 (10) 成立. 因为即使  $\Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0)$  还可能  $\Delta v_i$  不趋近于零, 例如, 当  $x_i$  及  $x_{i+1}$  无限接近时如果值  $x = x'$  总夹在中间而函数  $g(x)$  在这里跳跃了一下, 这时就是如此的. 故我们要换一方法来推理.

我们有

$$\int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(g^{-1}(v)) dv$$

且

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i) dv,$$

所以

$$\sigma - \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} [f(x_i) - f(g^{-1}(v))] dv.$$

<sup>①</sup>为简单起见, 在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  中就选取点  $x_i$ .



现在假定  $\Delta x_i$  如此小, 使函数  $f(x)$  在整个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振动小于事先任意指定的一数  $\varepsilon > 0$ . 因为当  $v_i \leq v \leq v_{i+1}$  时显然

$$x_i \leq g^{-1}(v) \leq x_{i+1},$$

故同时也

$$|f(x_i) - f(g^{-1}(v))| < \varepsilon.$$

这时

$$|\sigma - \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv| < \varepsilon(V - v_0).$$

这就证明了

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv,$$

由此可得 (10).

不管所得的结果在原则上如何重要, 但它在实际上并不能算作计算斯蒂尔切斯积分的方便工具. 我们将在下一目中指出在若干极简单的情况下如何来进行计算.

**579. 斯蒂尔切斯积分的计算** 我们来求证下面的定理:

1° 如函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上在黎曼意义下可积, 而  $g(x)$  可表作积分

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt,$$

其中函数  $\varphi(t)$  在  $[a, b]$  上绝对可积, 则

$$(S) \int_a^b f(x)dg(x) = (R) \int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \quad (11)$$

右端的积分存在 [298, 482]. 在所作假定下斯蒂尔切斯积分的存在已经证明过了 [575, III].

剩下来的只要确立等式 (11).

不失一般性我们可假定函数  $\varphi(x)$  是正的 [参照第 69 页].

与通常一样, 作斯蒂尔切斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\varphi(x)dx.$$

因为在另一方面可以写

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx.$$

故有

$$\sigma - \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\varphi(x)dx.$$



显然, 对  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $|f(\xi_i) - f(x)| \leq \omega_i$ , 其中  $\omega_i$  表函数  $f(x)$  在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振动. 由此推出上面所写的差的这样一估计:

$$\left| \sigma - \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i).$$

但我们已经知道 [575, III], 当  $\lambda \rightarrow 0$  时最后一和趋近于 0, 因此,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

这就证明了公式 (11).

特别, 由所证定理推得 [如注意到第 575 目末的附注] 在实际中直接应用起来很方便的一推论:

2° 对函数  $f(x)$  同以前的假定, 设函数  $g(x)$  在整个区间  $[a, b]$  上连续, 且可能除有限个点外, 在这区间上有导数  $g'(x)$ , 而  $g'(x)$  在  $[a, b]$  上绝对可积.<sup>①</sup> 则

$$(S) \int_a^b f(x)dg(x) = (R) \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (12)$$

特别有趣的是, 如将符号  $dg(x)$  表面上当作微分, 而用式子  $g'(x)dx$  代替它时, 公式 (12) 中右端的积分形式上可从左端的积分得来.

我们回到函数  $g(x)$  不连续的情形(以后将看到, 这在实践中特别重要), 首先考虑由等式

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0, \\ 1 & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

所定义的“标准”不连续函数.

它在点  $x = 0$  的右边有一第一类不连续——跳跃, 且跳跃的值  $\rho(+0) - \rho(0)$  等于 1; 在点  $x = 0$  的左边及其余的点处, 函数  $\rho(x)$  连续. 函数  $\rho(x-c)$  在点  $x = c$  的右边也有一同样的不连续; 反过来,  $\rho(c-x)$  在点  $x = c$  的左边有一类似的不连续, 且跳跃的值等于 -1.

假定函数  $f(x)$  在点  $x = c$  处连续, 我们来计算  $(S) \int_a^b f(x)d\rho(x-c)$ , 其中  $a \leq c < b$  (当  $c = b$  时这一积分等于零).

作斯蒂尔切斯和:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta \rho(x_i - c).$$

设点  $c$ , 例如, 落在第  $k$  个区间中, 即  $x_k \leq c < x_{k+1}$ . 则  $\Delta \rho(x_k - c) = 1$ , 而当  $i \neq k$  时显然  $\Delta \rho(x_i - c) = 0$ . 因此, 整个和  $\sigma$  化成一项:  $\sigma = f(\xi_k)$ . 现令  $\lambda \rightarrow 0$ . 由连续性,

<sup>①</sup>参看第 575 目附注的脚注.



$f(\xi_k) \rightarrow f(c)$ . 因此

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(x-c) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = f(c) \quad (13)$$

存在 (当  $a \leq c < b$  时).

同样可证明 (当  $a < c \leq b$  时)

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(c-x) = -f(c) \quad (14)$$

(当  $c = a$  时这一积分为零).

现在我们进而证明一定理, 在某种意义下较  $2^\circ$  更广泛, 也就是, 放弃对函数  $g(x)$  连续的要求:

$3^\circ$  设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 而  $g(x)$ , 可能除有限个点外, 在这一区间上有导数  $g'(x)$ , 且  $g'(x)$  在  $[a, b]$  上绝对可积. 同时设函数  $g(x)$  在有限个点

$$c_0 = a < c_1 < \cdots < c_k < \cdots < c_m = b$$

处有第一种不连续. 则斯蒂尔切斯积分存在且可表作公式

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg(x) &= (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] \\ &\quad + f(b)[g(b) - g(b-0)]. \end{aligned} \quad (15)$$

积分外面的和的出现在这里显示了函数  $g(x)$  有 (在点  $a$  及  $b$  处是单侧的<sup>①</sup>) 跳跃的特征.

为了记起来简单些, 对函数  $g(x)$  在左边及在右边的跳跃我们引用下列记号:

$$\begin{aligned} \alpha_k^+ &= g(c_k+0) - g(c_k) \quad (k=0, 1, \cdots, m-1), \\ \alpha_k^- &= g(c_k) - g(c_k-0) \quad (k=1, 2, \cdots, m); \end{aligned}$$

显然, 对  $1 \leq k \leq m-1$ ,  $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$ .

作一辅助函数:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^m \alpha_k^- \rho(c_k-x),$$

好像在它里面吸收了函数  $g(x)$  的所有不连续点; 我们现在就要证明, 差  $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$  就已经是连续的了.

<sup>①</sup>在这两点中的任何一点处如没有跳跃, 则实际上对应的被加项就是零.



对异于所有  $c_k$  的值  $x$ , 函数  $g_2(x)$  连续不会有疑问, 因为对这些值, 函数  $g(x)$  及  $g_1(x)$  皆连续. 现在求证  $g_2(x)$  在点  $c_k (k < m)$  的右边连续.  $g_1(x)$  中所有各项除  $\alpha_k^+ \rho(x - c_k)$  外在  $x = c_k$  的右边都连续, 故只要研究式子  $g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)$  的性质. 当  $x = c_k$  时它的值是  $g(c_k)$ , 而当  $x \rightarrow c_k + 0$  时它的极限也是如此:

$$\lim_{x \rightarrow c_k + 0} [g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)] = g(c_k + 0) - \alpha_k^+ = g(c_k).$$

同样可验证函数  $g_2(x)$  在点  $c_k (k > 0)$  的左边连续.

其次, 如取一点  $x$  (异于所有的  $c_k$ ), 函数  $g(x)$  在该处有导数者, 则  $g_1(x)$  在这一点附近保持一常数值, 因此在该处函数  $g_2(x)$  也有导数, 且

$$g'_2(x) = g'(x).$$

对连续函数  $g_2(x)$ , 由前面的定理, 斯蒂尔切斯积分存在:

$$(S) \int_a^b f(x) dg_2(x) = (R) \int_a^b f(x) g'_2(x) dx = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

同样也很容易计算积分 [参看 (13), (14)]

$$\begin{aligned} & (S) \int_a^b f(x) dg_1(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c_k) - \sum_{k=1}^m \alpha_k^- \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(c_k - x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ f(c_k) + \sum_{k=1}^m \alpha_k^- f(c_k) \\ &= f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]. \end{aligned}$$

将这两等式两边相加, 我们便得到等式 (15);  $f(x)$  对函数  $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$  的斯蒂尔切斯积分的存在性也附带建立了 [576, 3°].

**580. 例** 1) 用公式 (11) 计算积分:

$$(a) (S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x), \quad (b) (S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x, \quad (B) (S) \int_{-1}^1 x d \arctg x.$$

**解** (a)  $(S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x) = (R) \int_0^2 \frac{x^2}{1+x} dx = \left( \frac{1}{2} x^2 - x + \ln(1+x) \right) \Big|_0^2 = \ln 3$ , 等等.

**答** (b)  $\frac{\pi}{2} - 1$ ; (B) 0.

2) 用公式 (15) 计算积分:

$$(a) (S) \int_{-1}^3 x dg(x), \text{ 其中 } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x = -1, \\ 1 & \text{当 } -1 < x < 2, \\ -1 & \text{当 } 2 \leq x \leq 3; \end{cases}$$



$$(6) (S) \int_0^2 x^2 dg(x), \text{ 其中 } g(x) = \begin{cases} -1 & \text{当 } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{当 } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ 2 & \text{当 } x = \frac{3}{2}, \\ -2 & \text{当 } \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

解 (a) 函数  $g(x)$  当  $x = -1$  时有一跳跃 1, 当  $x = 2$  时有一跳跃  $-2$ ; 在其余的点处  $g(x) = 0$ . 故

$$(S) \int_{-1}^3 x dg(x) = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -5.$$

(6) 当  $x = \frac{1}{2}$  时跳跃为 1, 当  $x = \frac{3}{2}$  时跳跃为  $-2$  (函数  $g$  当  $x = \frac{3}{2}$  时的值对结果没有影响); 在其余的点处  $g'(x) = 0$ . 故有:

$$(S) \int_0^2 x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (-2) = -\frac{17}{4}.$$

3) 用公式 (15) 计算积分:

$$(a) \int_{-2}^2 x dg(x), (b) \int_{-2}^2 x^2 dg(x), (c) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x),$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{当 } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{当 } -1 < x < 0, \\ x^2+3 & \text{当 } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

解 函数  $g(x)$  当  $x = -1$  及  $x = 0$  时有等于 1 的跳跃. 导数

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } -2 \leq x < -1, \\ 0 & \text{当 } -1 < x < 0, \\ 2x & \text{当 } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

所以

$$\int_{-2}^2 x dg(x) = \int_{-2}^{-1} x dx + 2 \int_0^2 x^2 dx + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2\frac{5}{6}.$$

同样,

$$\int_{-2}^2 x^2 dg(x) = 11\frac{1}{3} \quad \text{及} \quad \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x) = 15\frac{1}{20}.$$

4) 假定沿着  $x$  轴上的线段  $[a, b]$  分布着有质量, 在个别的点处集中着, 一般则连续地分布着. 将它们不加区别, 对  $x > a$  以  $\Phi(x)$  表分布在区间  $[a, x]$  上的所有质量的和; 此外, 并令  $\Phi(a) = 0$ . 显然,  $\Phi(x)$  是一单调增加函数. 我们的问题是求出这些质量对坐标原点的静矩.

将区间  $[a, b]$  用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$



分成许多部分. 当  $i > 0$  时在线段  $(x_i, x_{i+1}]$  上显然包含有质量  $\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Delta\Phi(x_i)$ . 同样在线段  $[a, x_1]$  上含有质量  $\Phi(x_1) - \Phi(x_0) = \Delta\Phi(x_0)$ . 在一切情形下, 把质量认为是集中在例如区间的右端, 我们便得所求静矩的近似式

$$M \doteq \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta\Phi(x_i).$$

当所有  $\Delta x_i$  趋近于 0 时, 变到极限就得到准确的结果:

$$M = (S) \int_a^b x d\Phi(x). \quad (16)$$

与在第二卷对通常定积分所说明的一样 [348], 这里也可以首先确立对应于轴上自  $x$  到  $x+dx$  的“元素”静矩  $dM = x d\Phi(x)$ , 然后将这些元素“相加”.

同样, 关于这些同样的质量对原点的惯矩  $I$  我们有公式

$$I = (S) \int_a^b x^2 d\Phi(x). \quad (17)$$

特别着重指出, 斯蒂尔切斯积分给出了可能, 用一个积分公式就将连续分布的质量与集中的质量两种不同情况联结在一起.

设连续分布的质量其线性密度为  $\rho(x)$ , 此外设在点  $x = c_1, c_2, \dots, c_k$  处放置有集中的质量  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . 则除这些点外, 函数  $\Phi(x)$  有导数

$$\Phi'(x) = \rho(x).$$

在每一点  $x = c_j (j = 1, 2, \dots, k)$  处函数有一跳跃, 等于集中在这一点处的质量  $m_j$ .

现在如将积分 (16) 按公式 (15) 展开, 则得

$$M = (S) \int_a^b x d\Phi(x) = (R) \int_a^b x \rho(x) dx + \sum_{j=1}^k c_j m_j.$$

将右端仔细观察后, 容易知道第一项是连续分布质量的静矩, 而第二项是集中质量的静矩. 对积分 (17) 也可得同样的结果.

5) 为了更好地说明前一练习题的涵义, 要求:

(a) 对下面的质量分布情形组成表示式  $\Phi(x)$  并作它的图形: 在点  $x = 1, 2, 3$  处质量大小为 1, 在区间  $[1, 3]$  上连续分布的质量密度为 2;

(6) 同样, 对这样的分布: 当  $x = 2, 4$  时质量大小为 2, 在区间  $[0, 5]$  上连续分布的质量密度为  $2x$ ;

(B) 如  $\Phi(x)$  等于问题 3) 中的函数  $g(x)$ , 说明质量的分布情形.

答 (a) 在区间  $[1, 3]$  上我们有

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{对 } x = 1, \\ 2x - 1 & \text{对 } 1 < x < 2, \\ 2x & \text{对 } 2 \leq x < 3, \\ 7 & \text{对 } x = 3. \end{cases}$$



(6) 在区间  $[0, 5]$  上我们有

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{对 } 0 \leq x < 2, \\ x^2 + 2 & \text{对 } 2 \leq x < 4, \\ x^2 + 4 & \text{对 } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

(B) 在点  $x = -1$  及  $0$  处质量大小为  $1$ , 在区间  $[-2, -1]$  上连续分布的质量密度为  $1$ , 在区间  $[0, 2]$  上密度变为  $2x$ .

6) 考察另一问题, 斯蒂尔切斯积分在它里面所起的作用与习题 4) 中的相同. 假定在安置在两支座<sup>①</sup>上的一梁上 (图 30), 除连续分布的负荷外还有集中力作用着. 沿梁的轴取  $x$  轴, 而  $y$  轴垂直地朝下 (见图). 将作用的力不加区别, 对  $x > 0$  以  $F(x)$  表所有作用于梁的线段  $[0, x]$  上的力, 包括支座的反作用在内; 再令  $F(0) = 0$ . 力  $F(x)$  称作梁在断面  $x$  处的剪力. 这时向下的力将算作正的, 而向上的力算作负的.

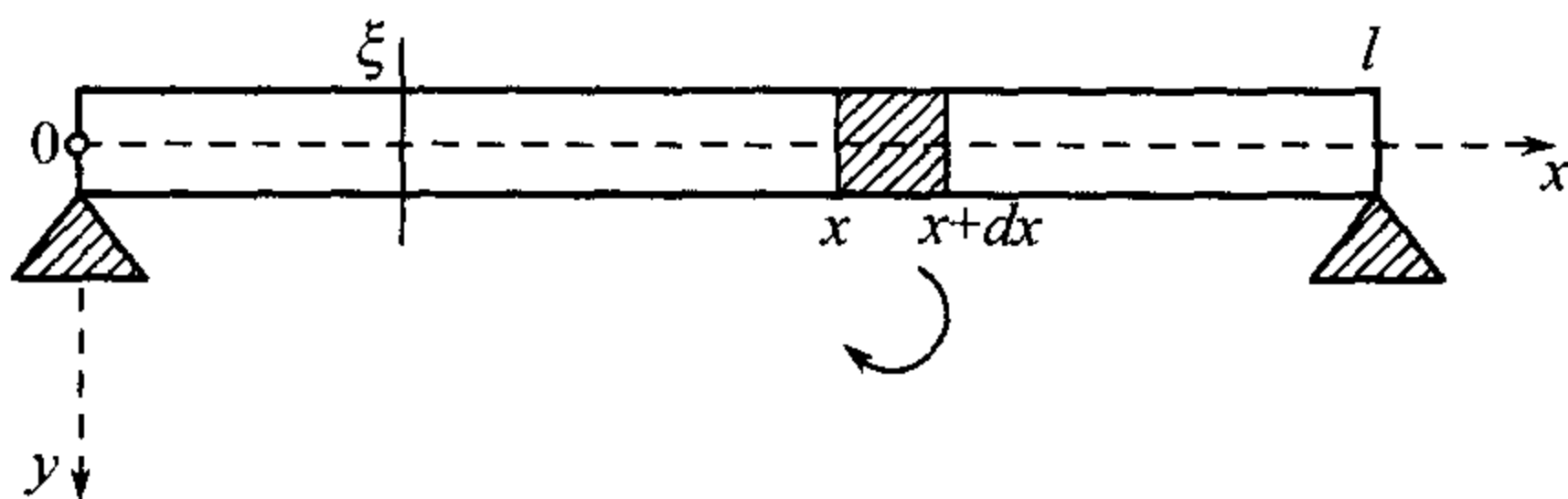


图 30

我们的任务是要确定梁在任意断面  $x = \xi$  处的弯矩  $M$ . 所谓弯矩就是梁的右 (或左) 部上所有的作用力对断面的矩的和. 这时, 如说到的是梁的右部, 而这一矩使这一部分以时针向转动, 则矩就算是正的 (对左部来说, 以相反规则).

因为在梁的右部元素  $(x, x + dx]$  上作用的力为  $F(x + dx) - F(x) = dF(x)$ , 它构成一元素矩

$$dM = (x - \xi)dF(x),$$

故“相加”得

$$M = M(\xi) = (S) \int_{\xi}^l (x - \xi)dF(x).$$

同样, 自梁的左部出发, 可得 (在计算矩时要改变正向)

$$M(\xi) = (S) \int_0^{\xi} (\xi - x)dF(x). \quad (18)$$

很容易直接看到, 这两个表示弯矩的式子实际上是相等的. 这就相当于条件

$$\int_0^l x dF(x) - \xi F(l) = 0,$$

这是由平衡条件即作用于梁上的一切力的和等于零及这些力 (对原点) 的矩的和等于零:

$$F(l) = 0, \quad \int_0^l x dF(x) = 0$$

<sup>①</sup>我们做这一假定仅仅是为了简单起见.



而得来的结果.

如以  $q(x)$  表连续分布的荷载的强度, 则除掉有集中力作用的点外, 有

$$\frac{dF(x)}{dx} = q(x).$$

设集中力  $F_j (j = 1, 2, \dots, k)$  作用于点  $x = x_j$ . 则, 显然剪力在这些点处有跳跃, 分别等于  $F_j$ . 再, 将公式 (15) 应用到, 例如积分 (18) 时, 得

$$M(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x)q(x)dx + \sum_{x_j < \xi} (\xi - x_j)F_j.$$

右端的两项容易认识为连续荷载及集中力分别所产生的矩: 斯蒂尔切斯积分将它们统一为一个积分形式.

我们还证明一事实, 在材料力学理论中有用处的. 在公式 (18) 中进行分部积分, 得

$$M(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x)dF(x) = (\xi - x)F(x)\Big|_0^\xi - \int_0^\xi F(x)d(\xi - x) = \int_0^\xi F(x)dx.$$

由此就很清楚, 除开有集中力作用的点外, 等式

$$\frac{dM}{d\xi} = F(\xi)$$

成立.

7) 例 设一长  $l = 3$  的梁带有 (图 31) 强度为  $\frac{2}{3}x$  的“三角形”荷载, 此外, 设有一等于 3 的集中力加在点  $x = 1$  处, 又支座的反作用都等于  $-3$  (由杠杆定律它们平衡). 试决定剪力  $F(x)$  及弯矩  $M(\xi)$ .

答

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, \\ \frac{1}{3}x^2 - 3, & \text{当 } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{3}x^2, & \text{当 } 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{当 } x = 3; \end{cases}$$

$$M(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{9}\xi^3 - 3\xi, & \text{当 } 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{1}{9}\xi^3 - 3, & \text{当 } 1 < \xi \leq 3. \end{cases}$$

8) 公式 (15) 对计算通常积分 (在黎曼意义下) 也有用处. 我们用下面的一般例题来说明这. 设  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  上为“分段多项式”的函数, 这就是说区间可用点

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k = b$$

分为有限个部分使在每一部分上函数  $\varphi(x)$  可表作不高于  $n$  次的多项式. 在点  $a$  及  $b$  处将函数  $\varphi(x)$  及其所有导数的值用零来代替后, 以  $\delta_j^{(i)} (j = 0, 1, \dots, k; i = 0, 1, \dots, n)$  表第  $i$  阶导数

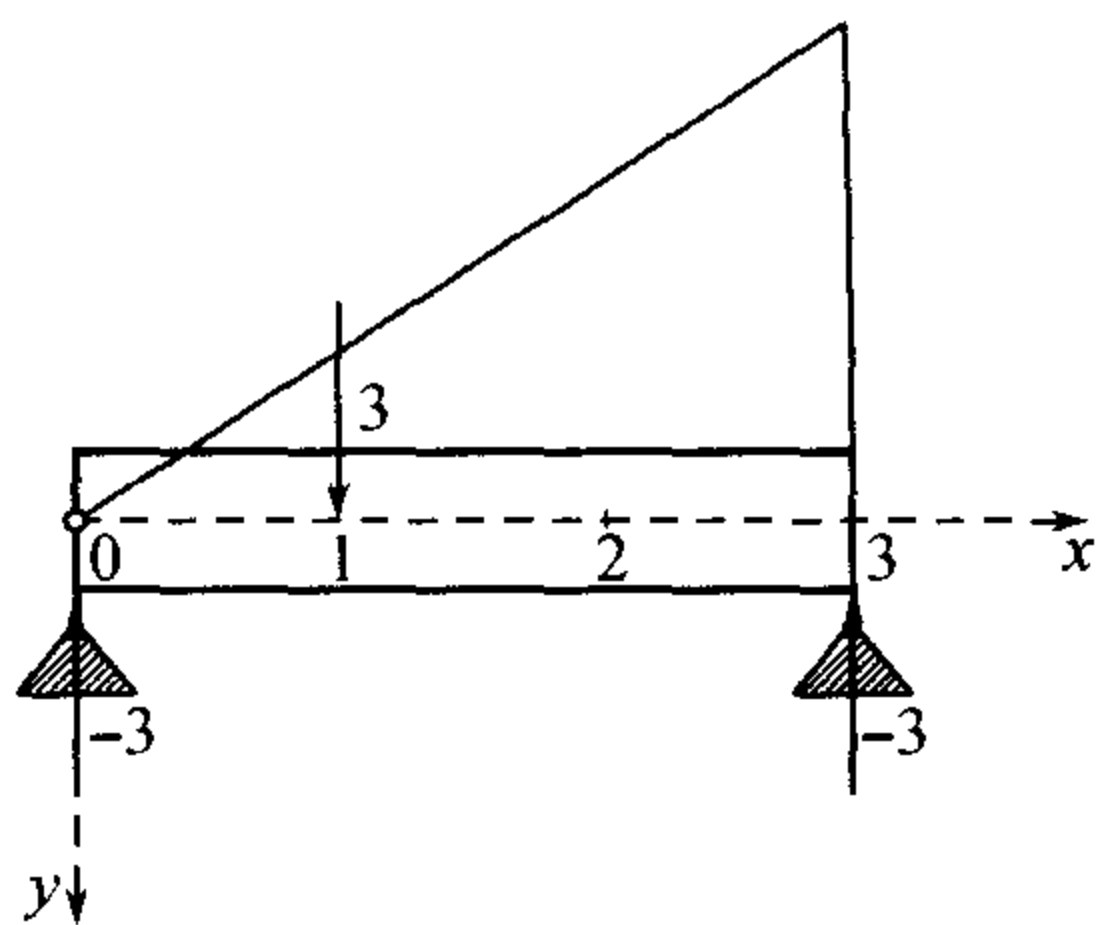


图 31



$\varphi^{(i)}(x)$  在第  $j$  个点  $x = \xi_j$  处跳跃的大小.

又设  $f(x)$  为任何连续函数, 令

$$F_1(x) = \int f(x)dx, \text{ 一般, } F_s(x) = \int F_{s-1}(x)dx \quad (s > 1).$$

则下一公式成立:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = -\sum_{j=0}^k F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)} + \sum_{j=0}^k F_2(\xi_j)\delta_j^{(1)} - \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k F_{k+1}(\xi_j)\delta_j^{(k)}.$$

事实上, 我们逐次地得

$$(R) \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (S) \int_a^b \varphi(x)dF_1(x) = \varphi(x)F_1(x) \Big|_a^b - (S) \int_a^b F_1(x)d\varphi(x);$$

上下代入式等于零, 而积分

$$\int_a^b F_1(x)d\varphi(x) = \sum_j F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)} + \int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx;$$

同样

$$\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx = -\sum_j F_2(\xi_j)\delta_j^{(1)} - \int_a^b F_2(x)\varphi''(x)dx;$$

等等.

9) 最后, 借公式 (11) 之助我们来建立一个有用的对通常积分的分部积分的一般公式. 若  $u(x)$  及  $v(x)$  在区间  $[a, b]$  上都绝对可积, 而  $U(x)$  及  $V(x)$  由积分公式

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t)dt,$$

$$V(x) = V(a) + \int_a^x v(t)dt$$

所确定, 则公式

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x)u(x)dx \quad (19)$$

成立. 为了证明起见, 由公式 (11), 将左端的积分用斯蒂尔切斯积分来代替并分部积分起来 [577]:

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b U(x)dV(x) = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x).$$

要想得到 (19) 只要再一次应用公式 (11) 到后一积分上去.

这里函数  $u(x), v(x)$  所起的作用好像是函数  $U(x), V(x)$  的导数, 但事实上它们并不是导数. 当函数  $u(x)$  及  $v(x)$  连续时, 我们便回到了通常的分部积分公式, 因为这时确乎

$$U'(x) = u(x), \quad V'(x) = v(x).$$

**581. 斯蒂尔切斯积分的几何说明** 考察积分

$$(S) \int_a^b f(t)dg(t), \quad (20)$$



假设函数  $f(t)$  连续且为正的, 而  $g(t)$  只要单调增加 (在严格的意义下); 函数  $g(t)$  可有 (跳跃) 不连续.

参数方程

$$x = g(t), \quad y = f(t) \quad (21)$$

代表某一曲线 ( $K$ ), 一般说来, 是不连续的 (图 32). 如对某一  $t = t_0$ , 函数  $g(t)$  有一跳跃, 即  $g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$  时, 则  $x = g(t)$  的这些极限值有同一个  $y = f(t)$  的极限值  $f(t_0)$  与它们相对应. 将曲线 ( $K$ ) 用一些水平线段添补起来, 它们是连接对应于函数  $g(t)$  的一切跳跃的点偶

$$(g(t_0 - 0), f(t_0)) \quad \text{及} \quad (g(t_0 + 0), f(t_0))$$

而成的. 这样就形成了一连续的曲线 ( $L$ ). 我们求证, 积分 (20) 代表这一曲线下面图形的面积, 更正确地说, 代表由曲线 ( $L$ ),  $x$  轴及对应于横坐标  $g(a)$  与  $g(b)$  的两头的纵坐标所围的面积.

为达此目的将区间  $[a, b]$  用点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b$$

分为许多部分, 与此相应,  $x$  轴上的区间  $[g(a), g(b)]$  由点

$$g(a) < g(t_1) < \cdots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \cdots < g(b)$$

分成许多部分.

设函数  $f(t)$  在第  $i$  个区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上的最小值及最大值为  $m_i$  及  $M_i$ , 作斯蒂尔切斯-达布下和及上和

$$s = \sum_i m_i \Delta g(t_i), \quad S = \sum_i M_i \Delta g(t_i).$$

现在容易看到, 它们代表内面一些矩形及外面一些矩形所成图形的面积, 所考察的曲线图形夹在这些矩形之间.

因为当所有的  $\Delta t_i$  趋近于零时, 这两和趋于公共极限 (20), 由此推得 [336], 我们的图形是可求面积的, 且确实积分 (20) 就是它的面积.

**582. 中值定理, 估计值** 1° 设在区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$  有界:

$$m \leq f(x) \leq M,$$

而  $g(x)$  单调增加. 如  $f(x)$  对  $g(x)$  的斯蒂尔切斯积分存在, 则下一公式成立:

$$I = (S) \int_a^b f(x) dg(x) = \mu[g(b) - g(a)], \quad \text{其中 } m \leq \mu \leq M. \quad (22)$$

这就是斯蒂尔切斯积分的中值定理.

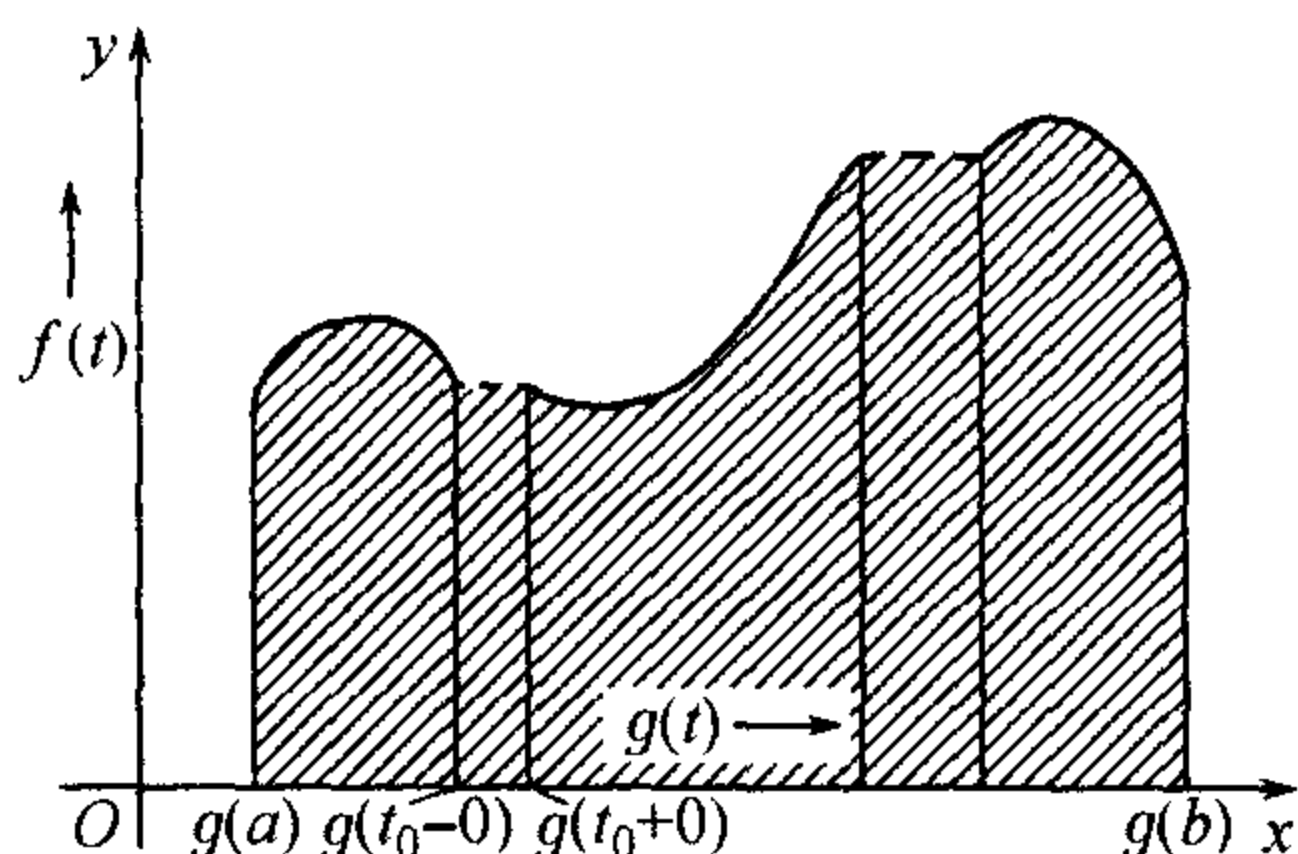


图 32



为了证明起见我们从一个斯蒂尔切斯和  $\sigma$  的明显的不等式出发:

$$m[g(b) - g(a)] \leq \sigma \leq M[g(b) - g(a)].$$

变到极限, 得

$$m[g(b) - g(a)] \leq I \leq M[g(b) - g(a)] \quad (23)$$

或<sup>①</sup>

$$m \leq \frac{I}{g(b) - g(a)} \leq M.$$

将这一比表作  $\mu$ , 便得 (22).

如函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则用普通的方法就能证明  $\mu$  是这一区间上某一点处的函数值, 公式 (22) 就作下形

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi)[g(b) - g(a)], \quad \text{其中 } a \leq \xi \leq b. \quad (24)$$

2° 在实践中斯蒂尔切斯积分最重要的情况是函数  $f(x)$  连续, 函数  $g(x)$  有界变差. 在这种情况下, 斯蒂尔切斯积分的下一估计成立:

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq MV, \quad (25)$$

其中

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad V = \bigvee_a^b g(x).$$

实际上, 对斯蒂尔切斯和  $\sigma$  有

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \left| \sum_i f(\xi_i) \Delta g(x_i) \right| \leq \sum_i |f(\xi_i)| |\Delta g(x_i)| \\ &\leq M \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq MV, \end{aligned}$$

故要得到所需不等式只要变到极限就行.

3° 特别, 由此亦推得出和  $\sigma$  与斯蒂尔切斯积分  $I$  本身近似程度的估计 (对函数  $f$  及  $g$  在前面的假定下). 将  $\sigma$  及  $I$  表作以下形式

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_i f(\xi_i) \Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i) dg(x), \\ I &= \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dg(x), \end{aligned}$$

<sup>①</sup>我们假定  $g(b) > g(a)$ , 因为  $g(b) = g(a)$  [即  $g(x) = \text{常数}$ ] 不消讨论, 这时公式 (22) 两端都是零.



并将这两等式两端相减, 得

$$\sigma - I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x).$$

如与通常一样, 以  $\omega_i$  表函数  $f(x)$  在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的振动, 故

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leq \omega_i, \text{ 对 } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

则分别应用估计值 (25) 到每一积分  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$  时我们将有

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x) \right| \leq \omega_i \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}} g(x).$$

如区间  $[a, b]$  被分成非常小的部分使所有的  $\omega_i < \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon > 0$  是事先任意取定的数, 则我们断言,

$$|\sigma - I| \leq \varepsilon \bigvee_a^b g(x). \quad (26)$$

在下目中我们将利用这些估计值.

**583. 斯蒂尔切斯积分记号下面的极限过程** 1° 设函数  $f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$  在区间  $[a, b]$  上连续且当  $n \rightarrow \infty$  时一致趋近于极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

[显然, 也是连续的, 436], 而  $g(x)$  是一有界变差函数. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

**证明** 对已给的  $\varepsilon > 0$  可求得一  $N$ , 使当  $n > N$  时对所有的  $x$  将有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

则, 由 (25), 对  $n > N$ ,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dg(x) \right| \leq \varepsilon \bigvee_a^b g(x),$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 定理得证.

2° 现设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 而所有的函数  $g_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$  在这区间上有界变差. 如这些函数的全变差全体是有界的:

$$\bigvee_a^b g_n(x) \leq V \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$



且当  $n \rightarrow \infty$  时  $g_n(x)$  趋近于一极限函数

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

**证明** 首先我们证明极限函数  $g(x)$  本身亦有界变差. 将区间  $[a, b]$  任意地用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_m = b$$

分为许多部分, 我们将有 (对任何的  $n$ )

$$\sum_i |g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i)| \leq \bigvee_a^b g_n(x) \leq V.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时变到极限, 得

$$\sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq V,$$

于是

$$\bigvee_a^b g(x) \leq V.$$

作斯蒂尔切斯和

$$\sigma = \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i), \quad \sigma_n = \sum_i f(x_i) \Delta g_n(x_i).$$

如假定这时区间  $[a, b]$  分得很细, 已使函数  $f(x)$  在每一部分中的振动小于事先任意取定的数  $\varepsilon > 0$ , 则由估计值 (26), 对所有的  $n$ ,

$$\left| \sigma_n - \int_a^b f(x) dg_n(x) \right| \leq \varepsilon V, \quad \left| \sigma - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \varepsilon V. \quad (27)$$

另一方面, 如固定上述条件下所取的一分法, 则当  $n \rightarrow \infty$  时显然  $\sigma_n \rightarrow \sigma$ , 故可求得一  $N$  使对  $n > N$  就有

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon. \quad (28)$$

则由 (27) 及 (28), 对同样的  $n$  值, 我们将有

$$\left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| \leq \left| \int_a^b f dg_n - \sigma_n \right| + |\sigma_n - \sigma| + \left| \sigma - \int_a^b f dg \right| < (2V + 1)\varepsilon,$$

于是, 由于  $\varepsilon$  的任意性, 即得所需结论.



**584. 例题及补充** 1) 设函数  $g(x)$  在严格的意义下单调增加, 对在公式 (24) 中所指出的数  $\xi$ , 可以证明一更精确的断言:  $a < \xi < b$ .

以  $m$  及  $M$  表函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最小及最大值, 并认为  $m < M$ ; <sup>①</sup> 容易求得这一区间的一部分  $[\alpha, \beta]$ , 使在这一部分上, 数  $m' > m$  及  $M' < M$  为  $f(x)$  的界, 故 [比较 (23)]

$$\begin{aligned} m[g(\beta) - g(\alpha)] &< m'[g(\beta) - g(\alpha)] \leq (S) \int_{\alpha}^{\beta} \\ &\leq M'[g(\beta) - g(\alpha)] < M[g(\beta) - g(\alpha)]. \end{aligned}$$

对区间  $[a, \alpha]$  及  $[\beta, b]$  写出形如 (23) 的不等式后并将它们与上面的不等式相加, 得的不是 (23) 而是一更精确的不等式:

$$m[g(b) - g(a)] < I < M[g(b) - g(a)],$$

故数

$$\mu = \frac{I}{g(b) - g(a)}$$

严格地在  $m$  及  $M$  之间; 因而  $\xi$  也严格地处于  $a$  及  $b$  之间, 其中  $\mu = f(\xi)$ , 等等.

2) 利用第 579 目的公式 (11), 斯蒂尔切斯积分的分部积分公式及中值定理 [577, 582, 1°], 非常容易重新建立通常积分的第二中值定理 [306].

设在区间  $[a, b]$  上  $f(x)$  (在黎曼意义下) 可积, 而  $g(x)$  单调增加. <sup>②</sup> 作一函数

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx \quad (a \leq x \leq b);$$

大家都知道, 它是连续的 [305, 11°].

现在我们逐步有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) \\ &= g(b)F(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)] = g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)] \\ &= g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b), \end{aligned}$$

这就是所要求证的.

如  $g(x)$  在严格的意义下单调增加, 则由 1) 中所述的说明, 对  $\xi$  可更精确地说:  $a < \xi < b$ .

3) 求证: 如两函数  $f$  及  $g$  之一在点  $x = c$  处连续, 同时另一函数在这一点附近近有界, 则积分  $(S) \int_a^c$  及  $(S) \int_c^b$  的存在就能推出  $(S) \int_a^b$  的存在 [参看 576, 5°].

为达此目的, 我们注意, 如在形成斯蒂尔切斯和  $\sigma$  时我们将点  $c$  包括在分点之列, 则和  $\sigma$  可拆成对部分区间  $[a, c]$  及  $[c, b]$  的两个同样的和; 当  $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$  时它将趋近于积分的和  $\int_a^c f dg + \int_c^b f dg$ . 现设点  $c$  不在分点之列. 将点  $c$  添加进去, 我们自  $\sigma$  就得出一新的和  $\bar{\sigma}$ , 我们已经知道, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时它有上述极限. 因此, 只要证明差  $\sigma - \bar{\sigma}$  与  $\lambda$  同时趋近于 0.

<sup>①</sup> 当  $m = M$  时函数  $f(x)$  成为常数, 这时值就可以任意地选取.

<sup>②</sup>  $g(x)$  单调减少的情形很容易变成这种情况.



设点  $c$  落在区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上; 则和  $\bar{\sigma}$  与和  $\sigma$  的区别仅仅在于:  $\sigma$  的一项

$$f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

变成了两项:

$$f(\xi')[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')[g(x_{k+1}) - g(c)],$$

其中  $\xi'$  及  $\xi''$  是在条件  $x_k \leq \xi' \leq c$  及  $c \leq \xi'' \leq x_{k+1}$  下任意取的. 为简化起见令  $\xi' = \xi'' = c$ , 后式就化为

$$f(c)[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

所以

$$\sigma - \bar{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)]. \quad (29)$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 右端第一因子为无穷小, 同时第二个因子有界, 因此,  $\sigma - \bar{\sigma} \rightarrow 0$ , 这就是所要证的.

4) 若函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在同一点  $x = c$  处 ( $a \leq c \leq b$ ) 都不连续, 则斯蒂尔切斯积分

$$\int_a^b f(x)dg(x) \quad (30)$$

根本不存在.

为了证明起见, 分成两种情况. 开始设  $a < c < b$ , 且极限  $g(c-0)$  及  $g(c+0)$  不相等. 则当作斯蒂尔切斯和时我们就不将  $c$  点取作分点, 譬如设  $x_k < c < x_{k+1}$ . 一次取  $\xi_k \neq c$ , 另一次取  $c$  作为  $\xi_k$ , 我们作出两个和  $\sigma$  及  $\bar{\sigma}$ , 其差可化为 (29) 式. 使分点接近时, 有

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \rightarrow g(c+0) - g(c-0) \neq 0.$$

此外, 点  $\xi_k$  可这样取, 使差  $f(\xi_k) - f(c)$  的绝对值大于某一固定正数. 则差  $\sigma - \bar{\sigma}$  就不趋近于 0, 故积分不可能存在.

如  $g(c-0) = g(c+0)$ , 但它们的公共值异于  $g(c)$  [“可去不连续”],<sup>①</sup> 则相反地我们就将  $c$  取在分点之列, 设  $c = x_k$ . 如  $f(x)$  在点  $x = c$  处例如有一右边的不连续, 则与刚才一样, 作两个和  $\sigma$  及  $\bar{\sigma}$ , 仅由  $\xi_k$  的选取而不同: 对  $\sigma$  点  $\xi_k$  任意取在  $x_k = c$  及  $x_{k+1}$  之间, 而对  $\bar{\sigma}$  点  $c$  就取作  $\xi_k$ . 与前面一样, 我们有 (29) 式且推演可同样地得出来.<sup>84)</sup>

习题 3) 及 4) 更阐明了在第 576 目末所说的重要事实.

5) 设在区间  $[a, b]$  上  $f(x)$  连续而  $g(x)$  为有界变差.

根据估计式 (25), 求证在函数  $g(x)$  连续的  $x_0$  处, 斯蒂尔切斯积分

$$I(x) = \int_a^x f(t)dg(t)$$

对其变动上限  $x$  连续.

<sup>①</sup>这里也包括这种情况, 即: 或者  $c = a$  且  $g(a+0)$  异于  $g(a)$ , 或者  $c = b$  且  $g(b-0)$  异于  $g(b)$ .

<sup>84)</sup>在第二类间断点的情形, 所进行的论证在本质上仍然成立.



如注意到在点  $x_0$  处变差  $V_a^x g(x)$  亦必连续 [571, 9°], 则结论立刻可从下一不等式推出:

$$|I(x_0 + \Delta x) - I(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dg \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \bigvee_{x_0}^{x_0 + \Delta x} g(x).$$

6) 如  $\mathcal{F}$  是在区间  $[a, b]$  上的连续函数类, 而  $\mathcal{G}$  是在这一区间上有界变差的函数类, 则如大家所知道的, 一类中的每一个函数对另一类的每一个函数是可积分的. 求证, 要保持所述性质, 这一类也好, 那一类也好, 都不能推广.

对于类  $\mathcal{F}$  来说, 由 4), 这几乎是明显的. 事实上, 如函数  $f(x)$  有一不连续点  $x_0$ , 则它, 例如, 对有同一不连续点的有界变差函数  $\rho(x - x_0)$ , 根本就不能积分 [573].

现设  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上有一无穷全变差, 在这一假定下我们将做一连续函数  $f(x)$  使积分 (30) 不存在.

如将区间  $[a, b]$  平分, 则至少在一个一半中函数  $g(x)$  的全变差亦为无穷; 将这一半又平分, 如此继续下去. 用这样的方法确定出某一点  $c$ ,  $g(x)$  在它的每一邻域中没有有界的变差. 为简单起见设  $c = b$ .

在这样的情况下容易作出一单调增加的且趋近于  $b$  的数列  $x = c_n$ :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < b, \quad a_n \rightarrow b,$$

使级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(a_{i+1}) - g(a_i)|$$

发散. 对于这一级数又可求得一趋近于 0 的数列  $f_i > 0 (i = 0, 1, 2, \cdots)$  使级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \quad (31)$$

也发散 [比照 475, 4) 及 7)]. 现在我们来定义函数  $f(x)$ . 令

$$\begin{aligned} f(a_i) &= f_i \operatorname{sign}[g(a_{i+1}) - g(a_i)]^{①} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots), \\ f(b) &= 0, \end{aligned}$$

而在区间  $(a_i, a_{i+1})$  内认为  $f(x)$  是线性的:

$$f(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} (x - a_i) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

显然  $f(x)$  是连续的. 同时, 由于级数 (31) 发散的缘故. 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \rightarrow +\infty,$$

①我们提醒一下,  $\operatorname{sign} z$  为  $+1, 0$  或  $-1$  视  $z > 0, = 0$  或  $< 0$  而定. 在所有的情况下

$$z \operatorname{sign} z = |z|.$$



所以  $f$  对  $g$  的积分的确不存在.

所证得的断语也可这样说: 如一已知函数  $f$  对  $\mathcal{G}$  中任何  $g$  斯蒂尔切斯积分存在, 则  $f$  必须属于  $\mathcal{F}$ ; 同样, 如  $\mathcal{F}$  中任何的  $f$  对一已知函数  $g$  这一积分存在, 则  $g$  必须属于  $\mathcal{G}$ .

7) 在斯蒂尔切斯积分记号下作极限手续的第一定理中 [583, 1°], 我们曾经要求函数序列  $\{f_n(x)\}$  一致趋近于极限函数  $f(x)$ . 但亦可以用更一般的条件来代替这一要求; 这条件就是: 这些函数是一致有界的:

$$|f_n(x)| \leq M \quad (M = \text{常数}, a \leq x \leq b, n = 1, 2, 3, \dots).$$

[此处还必须亦只须事先假定极限函数  $f(x)$  连续.]

证明时只要考察  $g(x)$  在严格的意义下增加的情况就够了 [参看第 570 目中的附注]. 但对这种情况, 可利用在 578 目中所引进的变换 [参看 (10)]:

$$\begin{aligned} \text{(S)} \int_a^b f_n(x) dg(x) &= \text{(R)} \int_{v_0}^V f_n(g^{-1}(v)) dv, \\ \text{(S)} \int_a^b f(x) dg(x) &= \text{(R)} \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv, \end{aligned}$$

而在处理黎曼积分时, 只要应用阿尔采拉定理 [526].

8) 最后, 我们指出斯蒂尔切斯积分的另一解说, 与区间的可加函数概念 [参照 348] 有关.

设对已知区间  $[a, b]$  的每一部分  $[\alpha, \beta]$  定义一数  $G([\alpha, \beta])$ , 且若区间  $[\alpha, \beta]$  由点  $\gamma$  分为两部分  $[\alpha, \gamma]$  及  $[\gamma, \beta]$ , 则

$$G([\alpha, \beta]) = G([\alpha, \gamma]) + G([\gamma, \beta]).$$

则  $G([\alpha, \beta])$  是变动区间  $[\alpha, \beta]$  的可加函数. 设除此以外, 在区间  $[a, b]$  上又给出一点函数  $f(x)$ . 与通常一样, 现在将区间  $[a, b]$  用点

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

分成部分  $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$  在每一部分中任意选择一点  $\xi_i$ , 最后作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) G([x_i, x_{i+1}]). \quad (32)$$

这一和当  $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$  时的极限就是一斯蒂尔切斯积分, 很自然地 —— 按作出它的过程 —— 表作:

$$\int_a^b f(x) G(dx). \quad (33)$$

如令

$$g(x) = G([a, x]) \text{ 对 } x > a, \quad g(a) = 0,$$

定义一第二点函数  $g(x)$ , 则由于函数  $G$  的可加性, 在所有情形下

$$G([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha), \quad (34)$$



故和 (32) 就成为通常的斯蒂尔切斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

而极限 (33) 就成为通常的斯蒂尔切斯积分

$$(S) \int_a^b f(x)dg(x).$$

反过来, 如后面这积分存在, 则用等式 (34) 定义一区间函数后 (且容易验证, 它是可加的), 可化通常的斯蒂尔切斯积分成为积分 (33).

**585. 化第二型曲线积分为斯蒂尔切斯积分** 读者在掌握了斯蒂尔切斯积分后, 现在回来考察第二型曲线积分 [546] 是很有用处的:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx \left[ \text{或} \int_{(AB)} f(x, y)dy \right]. \quad (35)$$

设想曲线  $(AB)$  以参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

给出, 且当  $t$  自  $\alpha$  单调地变到  $\beta$  时曲线以自  $A$  到  $B$  的方向描画. 为明确起见设  $\alpha < \beta$ . 则对于为了要形成积分和而取在曲线上的点  $A_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 就有增加的参数  $t$  的值

$$t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = \beta$$

与它们相对应, 而对于在弧  $\widehat{A_i A_{i+1}}$  上所选取的点  $M_i$ , 就有值  $t = \tau_i, t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1} (i = 0, 1, \dots, n-1)$  相对应. 积分和本身, 例如对第一个积分来说, 可写作

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\Delta\varphi(t_i)$$

的样子. 立刻明白, 这是一个斯蒂尔切斯和, 故第二型曲线积分由定义本身就和特殊的斯蒂尔切斯积分恒等:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t).$$

同样,

$$\int_{(AB)} f(x, y)dy = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t).$$

由此就很容易得出曲线积分 (35) 存在的一个非常普遍的条件: 只要假定函数  $f(x, y)$  连续, 而函数  $\varphi(t)$  [或  $\psi(t)$ , 看情形] 为有界变差 [575, I] 就够了.<sup>85)</sup>

<sup>85)</sup> 函数  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  的连续性是不言而喻的, 因为只考虑连续曲线.



特别, 如曲线  $(AB)$  可求长 [572], 而函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  连续, 则积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)$$

存在.

现在, 如果考虑到在 579 中说过的斯蒂尔切斯积分算法 (尤其, 参看 2°), 则可重新得到第 547 目中的公式 (5), (5\*) 或 (6), 且可在比以前更普遍的假定下得到.

其次, 现在也容易来推广第 551 目中的最终结果: 由一连续可求长曲线所范围的面积可用该目中的任一公式 (8), (9) 或 (10) 表示. 这时在推理中没有什么要变更, 因为第 550 目的引理立刻可推广到可求长曲线的情形; 亦可参看 572 的最后说明.

最后, 曲线积分与道路无关的整个理论 [§3] 亦可直接推广到沿任何可求长道路所取的积分的情形.



# 第十六章 二重积分

## §1. 二重积分的定义及简单性质

**586. 柱形长条体积的问题** 与曲边梯形面积问题引导到单重定积分概念 [294] 一样, 同样, 柱形长条体积的问题就引导到一新的概念 —— 二重(定) 积分.

考察一立体  $V$ , 上面为曲面

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

所限制, 侧面为一柱面所限制其母线平行于  $z$  轴, 最后, 下面为  $xy$  平面上的一平面图形  $(P)$  所限制 (图 33); 要去求立体  $V$  的体积.<sup>①</sup>

为了解决这一问题, 我们采用通常在积分学中所用的方法, 将所求量分为元素部分, 近似地计算每一部分, 相加并接着取极限. 为达此目的, 将区域  $(P)$  用一曲线网分成许多部分  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ , 并考察许多柱形细条, 它们的底面是这些部分区域, 总起来就形成所给的立体.

为了要算出一个一个细条的体积, 在每一图形  $(P_i)$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ . 如将每一细条近似地当作一真正的柱形, 其高等于图中一长一短的虚线  $f(\xi_i, \eta_i)$ , 则个别的细条体积近似地等于

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i,$$

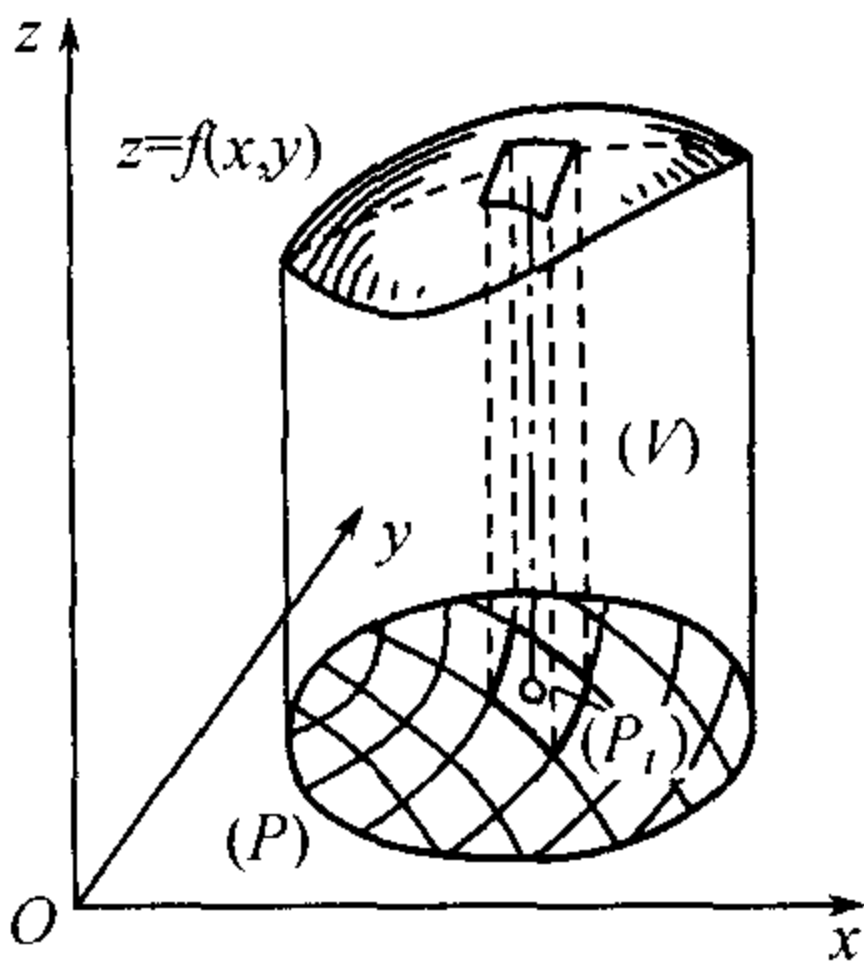


图 33

<sup>①</sup>如假定函数  $f(x, y)$  连续而平面区域  $(P)$  可求面积, 则在这情况下体积存在本身容易从在第 341 及 337 目中所叙述的道理中推出来.



其中  $P_i$  表图形  $(P_i)$  的面积. 在这样的情况下整个立体体积的近似式为

$$V \doteq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

要增加这一等式的准确性就要减小平面小块  $(P_i)$  的幅度, 同时增加它们的个数. 当所有的区域  $(P_i)$  的最大直径趋近于零而变到极限时, 这一等式就变成准确的了, 故

$$V = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i, \quad (2)$$

所提出的问题就此解决了.

这种形状的极限就是函数  $f(x, y)$  对区域  $(P)$  的二重积分; 它表作记号

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP,$$

故体积的公式 (2) 作下形

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP. \textcircled{1} \quad (2^*)$$

因此, 二重积分是定积分概念在两个变量函数上的直接推广. 在决定各种不同的几何及物理量时它同样起很重要的作用.

**587. 化二重积分为逐次积分** 在进行几何地解释二重积分为柱形长条体积时, 我们这里也指出如何用化为逐次积分的方法来计算它.

第二卷中我们已经讨论过用横断面来计算立体  $(V)$  的体积的问题 [342]. 我们回想一下与这里有关的公式. 设立体范围在平面  $x = a$  及  $x = b$  之间 (图 34), 又立体被垂直于  $x$  轴且对应于横坐标  $x (a \leq x \leq b)$  的平面所截的断面面积为  $Q(x)$ . 则立体体积在假定它存在时可用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (3)$$

来表示.

现在应用这一公式到柱形长条体积的计算, 这种长条在前一目中已谈到过. 我们以一简单情形开始, 即长条的底面是一矩形  $[a, b; c, d]$  (图 35).

长条被平面  $x = x_0 (a \leq x_0 \leq b)$  所截的断面是一曲边梯形  $\alpha\beta\gamma\delta$ . 为了要求出它的面积, 将这一图形射影到  $yz$  平面上, 我们得到一与它全同的梯形  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$  (因为射影没有发生变形). 于是,

$$Q(x_0) = \text{面积 } \alpha\beta\gamma\delta = \text{面积 } \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1.$$

<sup>①</sup> 不难给这一公式的推演以一完全严格的形式, 参看第 590 目中的附注.



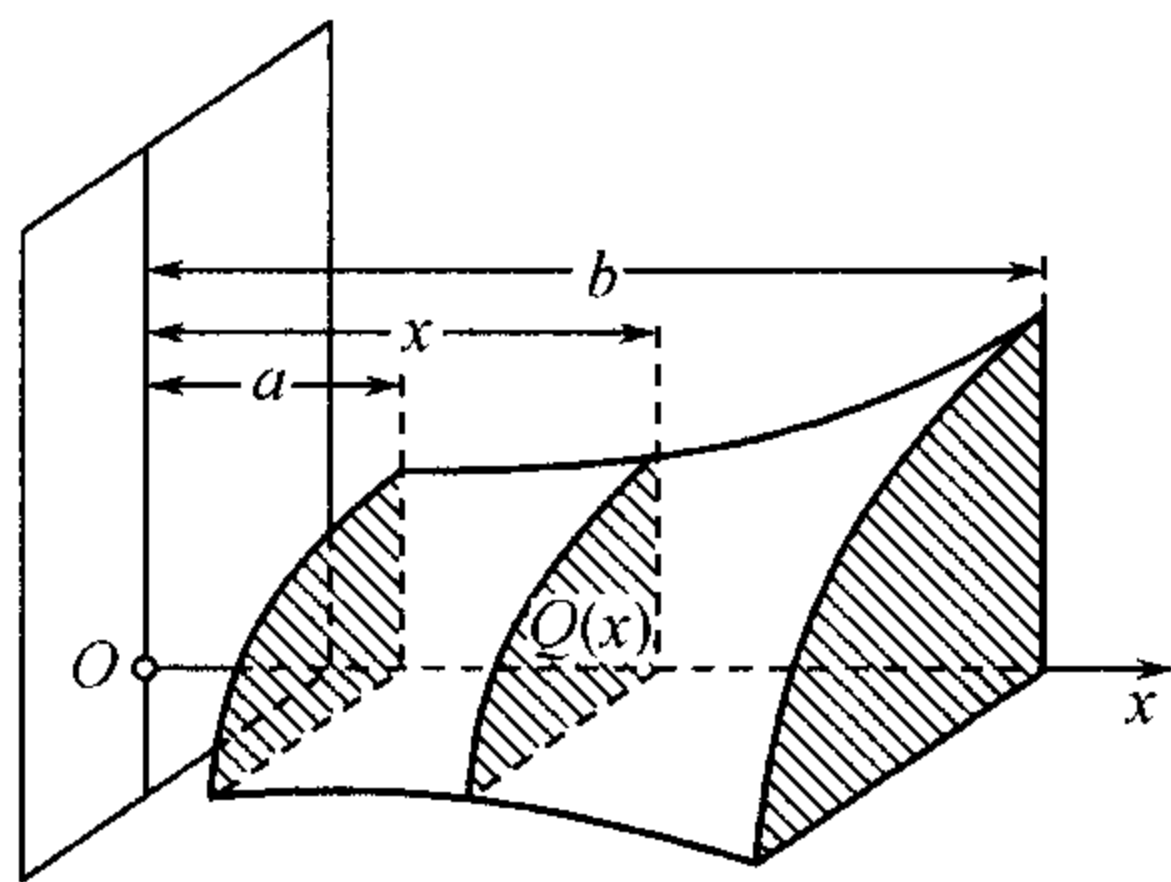


图 34

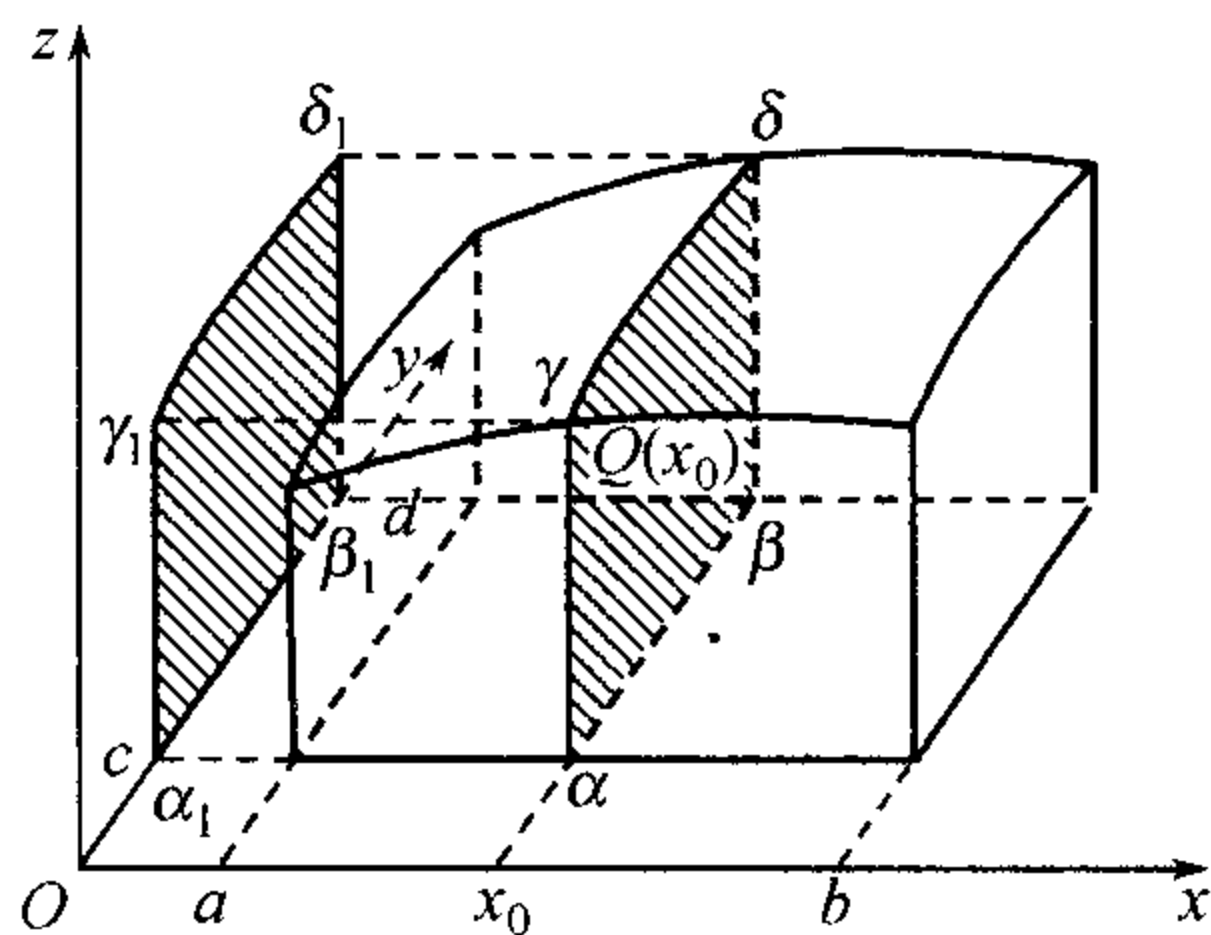


图 35

不过  $yz$  平面上的曲线  $\gamma_1\delta_1$  的方程显然是

$$z = f(x_0, y) \quad (c \leq y \leq d).$$

利用所熟知的表曲边梯形面积为定积分的式子, 我们将有

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

因为我们的推理可用于任何断面, 故一般对  $a \leq x \leq b$ ,

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \textcircled{1}$$

将这一值  $Q(x)$  代入公式 (3), 得

$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

但对体积  $V$  我们有式子 (2\*), 因此,

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (4)$$

——二重积分变成逐次积分了.

在更一般的情况下, 当  $xy$  平面上的区域  $(P)$  是由两曲线

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

及两纵坐标  $x = a$  与  $x = b$  (图 36) 所围的曲边梯形时也可得同样的结果. 与讨论过的情况比较起来

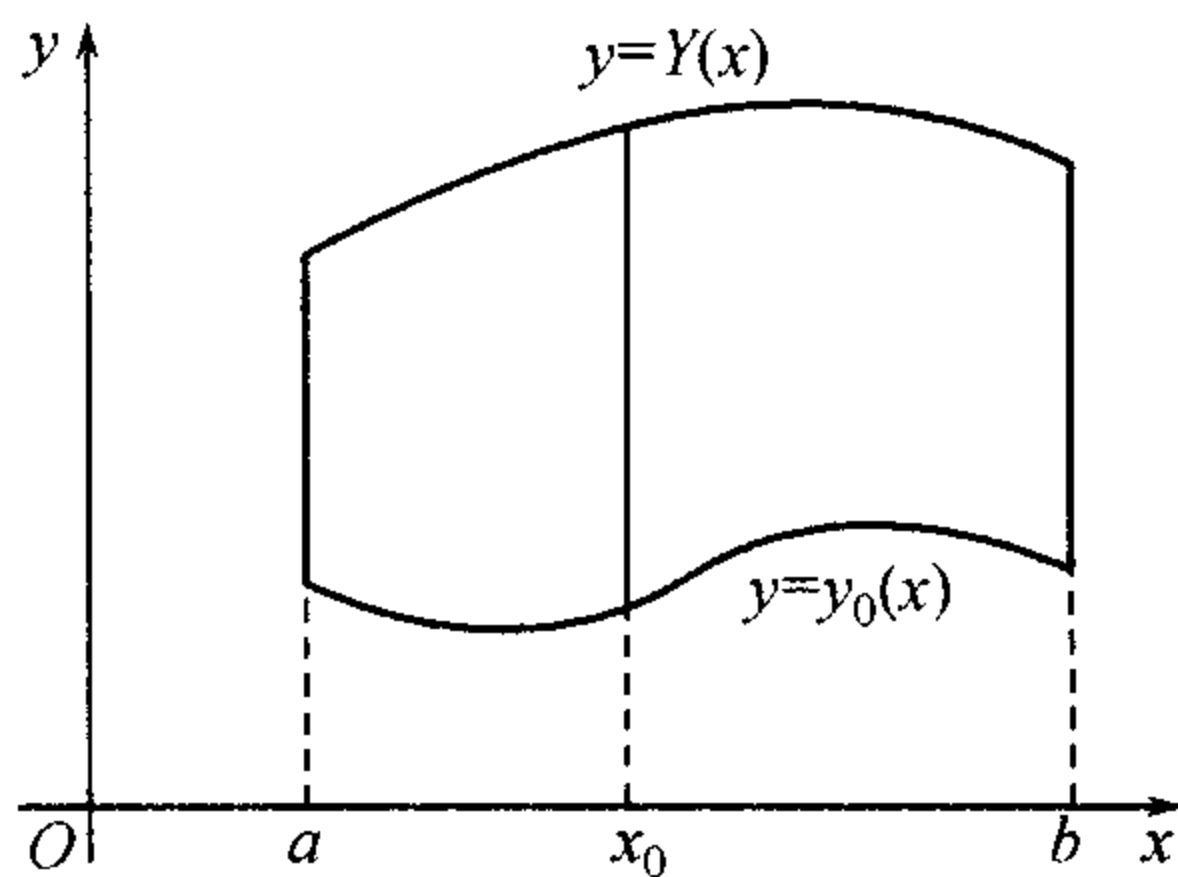


图 36

<sup>①</sup>这是  $x$  的函数, 对于  $x$  也是连续的 [506], 这也是我们在推演公式 (3) 时已经假定了的.



其差别在于: 以前对任何固定的  $x = x_0, y$  的变化发生在同一区间  $[c, d]$  上, 而现在这一区间

$$[y_0(x_0), Y(x_0)]$$

本身也与  $x_0$  有关, 故

$$Q(x_0) = \int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

最后得

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy. \quad (5)$$

在读者对二重积分概念及其计算在几何解释下熟悉以后, 我们现在就要转而用纯分析的观点更一般地讨论这问题.

**588. 二重积分的定义** 然而, 我们这里也不能完全避免几何, 或至少不能避免几何的语言[160~163]. 我们将谈到所讨论的二维变量函数定义所在的“二维区域”(P), 将谈到“用曲线”分它为部分“区域”, 将取这些“区域”的“面积”等等. 事实上这是算术的二维空间中的“区域”及“曲线”, 数对就是它们的“点”. 但通常所有这些“形象”, 为方便起见总是用与它们相对应的真正的几何形象来替代, 而彼此间不加任何区别. 特别, 将算术二维空间中的“区域面积”永远了解为对应的几何区域面积.<sup>86)</sup>

我们回想一下, 要任一曲线所范围的区域可求面积, 必要且充分地需这一曲线有面积 0[337]. 光滑曲线或由有限多个光滑段所组成的曲线 (所谓分段光滑的曲线) 形成这种曲线的很宽广的一类.<sup>②</sup> 我们以后将假定, 区域 (P) 的边界以及我们用来将区域分割的曲线皆有面积 0 (例如, 属于上述的类中); 这就保证了我们所需用的一切面积的存在.

现在我们回到实际上已在第 586 目中引进过的二重积分概念, 并更广泛地给它一个一般的定义.

设在区域 (P) 中定义一函数  $f(x, y)$ .<sup>③</sup> 将区域 (P) 用一曲线网分成有限个区域  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ , 它们的面积为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . 虽然最简单不过是假想这些部分区域为连通的, 但为了简化将来的叙述起见, 对它们还是不撇开有不连通的可能

<sup>①</sup> 这里, 里面的积分是  $x$  的一连续函数 [参看 509].

<sup>②</sup> 不破坏所述性质, 甚至可允许有有限个奇点存在.

<sup>③</sup> 这里我们并没有做关于连续性的任何假定.

<sup>86)</sup> 我们注意, 从严格的分析的角度, 所有涉及二维算术空间中的区域与曲线的“几何上明显的”事实, 一般说来, 需要纯粹分析的、不依靠直观的验证. 今后有时把这种验证交给读者; 对于在实际中所遇到的具体的区域与曲线, 这总是容易的; 而 (在个别情形) 对一般形状的区域和曲线, 可能较为复杂.



好些.<sup>87)</sup> 在第  $i$  个元素区域  $(P_i)$  范围内任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 将在这一点处的函数值  $f(\xi_i, \eta_i)$  乘上对应区域的面积  $P_i$ , 并将所有类似的乘积相加. 所得的和

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i$$

将称为函数  $f(x, y)$  在区域  $(P)$  上的积分和.

以  $\lambda$  表部分区域  $(P_i)$  中的最大直径.<sup>①</sup> 如当  $\lambda \rightarrow 0$  时积分和  $\sigma$  有一确定的有限极限

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma,$$

既与区域  $(P)$  分为部分  $(P_i)$  的分法无关, 又与在每一部分范围内点  $(\xi_i, \eta_i)$  的选法也无关, 则这一极限<sup>②</sup>就称为函数  $f(x, y)$  在区域  $(P)$  上的二重积分并表作记号

$$I = \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

有积分的函数称为可积的.

**589. 二重积分存在的条件** 可积函数必须是有界的. 事实上, 在相反的情形下, 对任何已给的将区域  $(P)$  分割的方法, 依靠点  $(\xi_i, \eta_i)$  的选择可使积分和任意大.

所以以后讨论到已知函数  $f(x, y)$  可积条件时, 我们将事先假定它是有界的:

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

与一个变数函数时一样, 这里引进所谓达布上和与下和:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i P_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i P_i$$

较为方便, 其中  $m_i$  及  $M_i$  分别表示函数  $f(x, y)$  的值在区域  $(P_i)$  上的下确界与上确界.

当给出分割区域  $(P)$  的一方法时, 不论点  $(\xi_i, \eta_i)$  如何选取, 不等式

$$s \leq \sigma \leq S$$

<sup>①</sup>我们回想一下, 一点集中两任意点距离的上确界称作点集合的直径. 在闭的平面区域由连续曲线所范围时最大的弦就是直径. 参看 174.

<sup>②</sup>读者很容易自己确定这一新“极限”的正确意义.

<sup>87)</sup>在二重积分定义中, 重要的是: 区域  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$  的边界的面积为零, 区域  $(P_i)$  彼此不相交, 它们连同其边界取并就给出原来的区域及边界 (例如, 把区域  $(P)$  分割成  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$  的“曲线网”的存在仅仅是使定义更为直观).



将适合. 但适当地选择这些点可使值  $f(\xi_i, \eta_i)$  任意地接近于  $m_i(M_i)$ , 而与此同时可使和  $\sigma$  任意地接近于  $s(S)$ , 因此, 达布上和及下和分别对应于区域的同一分法的积分和的下确界及上确界.

与线性情形时一样, 对达布和可确立下列性质.

**第一性质** 当在旧的分割线外如添加一些新线将部分  $(P_i)$  进一步分割时, 达布下和不会减少, 上和不会增大.

**第二性质** 每一达布下和不超过每一上和, 即使对区域  $(P)$  的不同分法也是如此.

证明可与以前 [296] 同样地来进行; 只是在以前谈的是分点, 这里必须谈分割线.

不过有一点我们愿意读者注意一下. 在线性情况时每一新分点很清楚地将一个旧区间分为两个, 又两个区间的公共部分依然是一区间. 在平面情况时情形就复杂了, 因为两曲线可彼此相交于很多点 (甚至相交于一无穷点集). 故连通部分区域可能被新的曲线拆成不连通的部分, 同样两连通区域的公共部分也可以是不连通区域. 这就是为什么我们一开始就不撇开讨论将基本区域分为不连通部分的原因!

其次, 将达布下积分及上积分的概念确立起来:

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\},$$

且有

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

最后, 将对线性情况的证明 [297] 逐字逐句搬过来这里就得:

**定理** 二重积分存在的必要充分条件为

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0,$$

或用另一记法

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i P_i = 0, \quad (6)$$

其中  $\omega_i$  为函数  $f(x, y)$  在部分区域  $(P_i)$  上的振动  $M_i - m_i$ .

**590. 可积函数类** 借上面所确立的可积判定法容易证明:

I. 任一连续于区域  $(P)$  上的函数  $f(x, y)$  是可积的.

事实上, 如函数  $f$  连续于 (闭) 区域  $(P)$  上, 则由一致连续性, 对每一  $\varepsilon > 0$  一定有一  $\delta > 0$  相对应, 使在区域  $(P)$  的任一直径小于  $\delta$  的部分上函数的振动小于  $\varepsilon$ . 现设区域  $(P)$  分成许多部分  $(P_i)$ , 它们的直径都小于  $\delta$ . 则所有的振动  $\omega_i < \varepsilon$ , 而

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

于是得知条件 (6) 适合. 这样, 函数的可积性就证明了.



**附注** 现在就很容易使柱形长条体积的公式 (2\*) 的推演变得非常严密. 这完全可与推演曲边梯形面积公式时 [338] 一样来做——引用在里面的与外面的立体, 其体积可表作达布和者.

为了将可积函数类作若干推广, 我们需要下一引理.

**引理** 设在区域 (P) 上已给一面积为 0 的某一曲线 (L). 则对每一  $\varepsilon > 0$ , 有一  $\delta > 0$  相对应, 使得只要区域 (P) 被分为直径小于  $\delta$  的许多部分时, 那些与 (L) 有公共点的部分其面积和就小于  $\varepsilon$ .

由曲线 (L) 的假定, 可将曲线 (L) 夹在一面积小于  $\varepsilon$  的多角形域 (Q) 内. 我们可以做得使曲线 (L) 与所讲的区域边界 (K) 没有公共点. 则两曲线上动点间的距离有一最小值  $\delta > 0$ .<sup>①</sup>

现在将区域 (P) 任意地分成许多部分使它们的直径  $< \delta$ . 其中与曲线 (L) 相遇的那些部分必完全在区域 (Q) 内, 因此它们的总面积小于  $\varepsilon$ .

II. 如有界函数  $f(x, y)$  至多在有限个面积为 0 的曲线上有不连续, 则它是可积的.

已给任意一数  $\varepsilon > 0$ . 由假定可将函数  $f(x, y)$  的所有“不连续线”包括在总面积  $< \varepsilon$  的多角形域 (Q) 内. 在图 37 中这一区域用斜线打了出来. 它的边界是有限个折线 (L), 显然其本身面积为 0.

在从 (P) 中减去区域 (Q) 内部后所得的闭区域中, 函数  $f(x, y)$  到处连续, 也就意味着一致连续. 因此, 对给出的  $\varepsilon > 0$  可求得一数  $\delta_1 > 0$ , 使在这一区域的每一直径小于  $\delta_1$  的部分上, 函数  $f(x, y)$  的振动  $< \varepsilon$ .

现由引理, 也可求得一数  $\delta_2 > 0$  使每当区域 (P) 用任意的曲线分为直径小于  $\delta_2$  的部分时, 那些与折线的总体 (L)——被减去的多角形域 (Q) 的边界——相遇的部分面积和必然  $< \varepsilon$ .

设  $\delta$  是两数  $\delta_1, \delta_2$  中的较小的一个. 将区域 (P) 分为直径小于  $\delta$  的部分  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ , 并考察对应的和

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

将它分为两个和:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

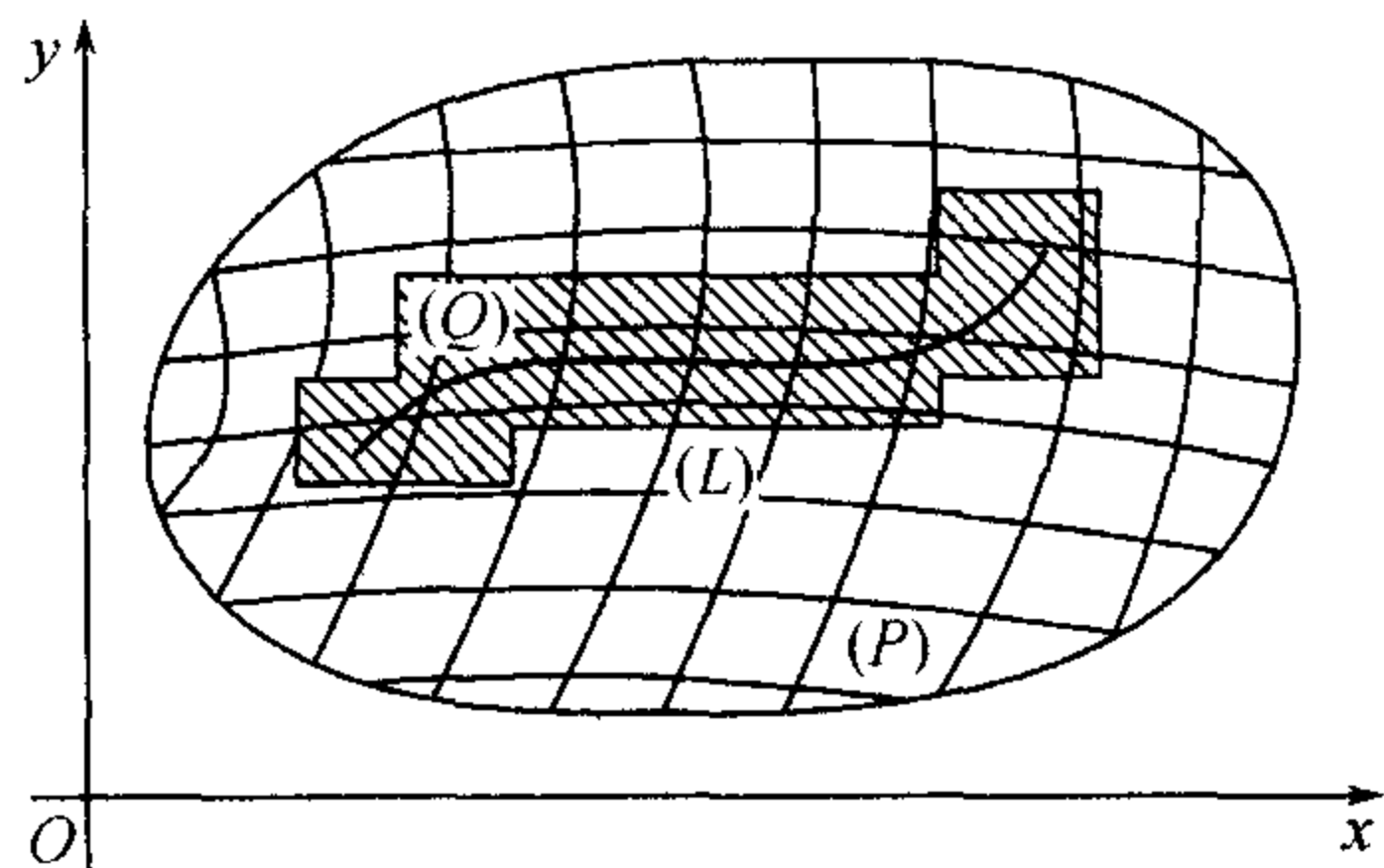


图 37

<sup>①</sup>参看第二卷, 336 目脚注 ①.



假定记号  $i'$  对应于整个在被减去的区域  $(Q)$  的外面的区域  $(P_{i'})$ , 而记号  $i''$  对应于所有其它的. 我们分别来估计每一和.

因为所有的  $(P_{i'})$  都在从  $(P)$  中减去  $(Q)$  后所得的区域内, 且它们的直径  $< \delta \leq \delta_1$ , 故所有  $\omega_{i'} < \varepsilon$ , 所以

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

另一方面, 如以  $\Omega$  表函数  $f(x, y)$  在整个区域  $(P)$  上的振动, 则我们有 (因为  $\omega_i \leq \Omega$ )

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leq \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

这里  $\sum P_{i''}$  是两类  $(P_i)$  的面积和: 1) 一类整个在被除掉的区域  $(Q)$  内, 2) 另一类与这一区域的边界  $(L)$  相遇. 第一类区域的总面积小于  $\varepsilon$ , 因为  $Q < \varepsilon$ ; 既然区域被分为直径小于  $\delta \leq \delta_2$  的部分, 故对第二类区域的总面积也可如此说. 因此  $\sum P_{i''} < 2\varepsilon$ , 所以

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon.$$

最后, 当  $\lambda < \delta$  时就有:

$$\sum_i \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\varepsilon.$$

因为这一不等式右端与  $\varepsilon$  同时可任意小, 故条件 (6) 适合, 等等.

**591. 下积分及上积分作为极限** 在二维情形下, 同样有达布定理 对任何在  $(P)$  中的有界函数  $f(x, y)$  极限等式

$$I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S$$

成立[比照 301].

我们预备来证明这里的结果 (例如, 对上和), 因为在推理上它与线性情形有一点实质上的差异.

与那时一样, 对已给的  $\varepsilon > 0$ , 开始时将区域  $(P)$  用一曲线网分成许多部分使对于对应的和  $S$  有

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

刚才所提到的曲线网——这些曲线总起来表作  $(L)$ ——面积为 0. 因此, 由前一目的引理, 可求得一个  $\delta > 0$ , 使当区域  $(P)$  无论怎样分为直径  $< \delta$  的部分  $(P_i)$  时, 那些至少与曲线  $(L)$  之一相遇的部分其面积和将  $< \frac{\varepsilon}{2\Omega}$ , 其中  $\Omega$  是函数  $f$  在区域  $(P)$  上的全振动.

以  $S$  表对应于任意的这种分法的和. 如果我们将整个曲线网  $(L)$  全部加到所出现的分割曲线上来, 就得出和一和  $S''$ ; 将  $S$  与  $S''$  来比较一下. 由达布和的第一个性质 [589],  $S'' \leq S'$ , 故更不用说

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$



和  $S$  及  $S''$  的差别只在那些对应于被曲线  $(L)$  所切开的部分  $(P_i)$  的项. 因为这些部分的面积和  $< \frac{\varepsilon}{2\Omega}$ , 故容易看到,

$$S - S'' < \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

最后,

$$I^* \leq S < I^* + \varepsilon,$$

这就完成了证明.

现在积分存在的判别就化为等式

$$I_* = I^*.$$

用这, 与线性情形一样, 要函数可积, 对任何的  $\varepsilon > 0$ , 即使对于一对达布和不等式

$$S - s < \varepsilon$$

满足就够了.

**592. 可积函数与二重积分的性质** 1° 如用任意的方式改变在  $(P)$  中可积函数  $f(x, y)$  沿任何面积为 0 的曲线上的值 (只要受一限制, 就是改变后的函数依然有界), 则又得一同样在  $(P)$  中可积的函数, 且它的积分等于  $f(x, y)$  的积分.

为了证明起见, 必须对改变后的与原来的函数作积分和, 它们只可能在与曲线  $(L)$  相遇的区域  $(P_i)$  上面那些项不同. 但由第 590 目引理, 这些区域的总面积当  $\lambda \rightarrow 0$  时趋近于零, 于是就容易作结论: 两积分和趋于同一极限.

因此, 二重积分的存在及大小与积分号下的函数沿有限个面积为 0 的曲线上所取的值无关.

2° 若将函数  $f(x, y)$  所在的区域  $(P)$  用曲线  $(L)$  (面积为 0) 分成二区域  $(P')$  及  $(P'')$ , 则由函数  $f(x, y)$  在整个区域  $(P)$  上的可积性就能推得它在部分区域  $(P')$  及  $(P'')$  上的可积性, 反过来, 由函数在两区域  $(P')$  及  $(P'')$  上的可积性推得在区域  $(P)$  上的可积性. 同时

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \iint_{(P')} f(x, y) dP + \iint_{(P'')} f(x, y) dP.$$

将区域  $(P')$  及  $(P'')$  任意地分成许多部分, 这样  $(P)$  亦分成了许多部分:

$$(P_1), (P_2), \dots, (P_n).$$

如以记号  $i'$  表包含在  $(P')$  内的部分,  $i''$  表包含在  $(P'')$  内的部分, 则

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}.$$

设函数  $f(x, y)$  在  $(P)$  上可积, 故当  $\lambda \rightarrow 0$  时左端的和趋近于零; 因而右端的每一和更趋近于零, 故函数同样在  $(P')$  及  $(P'')$  上可积.



反过来, 如有后面这一情况, 故当  $\lambda \rightarrow 0$  时右端的两个和趋近于零, 则左端的和同样也趋近于零. 不过, 必须注意, 这个和不是对区域  $(P)$  的任意分法得来的, 我们原来是从区域  $(P')$  及  $(P'')$  分开来分割而出发的.

要想将区域  $(P)$  的任意分法变成这种特殊形状的分法, 只要在分割线中加上曲线  $(L)$ . 与它们相对应的和仅仅在和那些与曲线  $(L)$  相遇的元素区域相对应的项上不同. 但由第 590 目中引理, 它们的总面积当  $\lambda \rightarrow 0$  时趋近于零, 而两和相差一无穷小. 因此, 条件 (6) 完全适合, 函数  $f(x, y)$  就在  $(P)$  上可积.

最后, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时从等式

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i) P_i = \Sigma f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'} + \Sigma f(\xi_{i''}, \eta_{i''}) P_{i''}$$

经极限过程就得到所要证的公式.

同样, 从极限过程考察积分和也可得下面三性质:

3° 如将在  $(P)$  上的可积函数  $f(x, y)$  乘上一常数  $k$ , 则所得函数也同样可积, 且

$$\iint_{(P)} k f(x, y) dP = k \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

4° 如在区域  $(P)$  中函数  $f(x, y)$  及  $g(x, y)$  可积, 则函数  $f(x, y) \pm g(x, y)$  也可积, 且

$$\iint_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP \pm \iint_{(P)} g(x, y) dP.$$

5° 如对在  $(P)$  中可积的函数  $f(x, y)$  及  $g(x, y)$  不等式  $f(x, y) \leq g(x, y)$  成立, 则

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \leq \iint_{(P)} g(x, y) dP.$$

再则,

6° 当函数  $f(x, y)$  可积时函数  $|f(x, y)|$  也可积, 且有不等式

$$\left| \iint_{(P)} f(x, y) dP \right| \leq \iint_{(P)} |f(x, y)| dP.$$

函数  $|f|$  的可积从一简单的说明就推得出来: 这一函数在任何区域  $P_i$  上的振动  $\tilde{\omega}_i$  不会超过函数  $f$  的对应振动  $\omega_i$ . 事实上, 这样就有

$$\Sigma \tilde{\omega}_i P_i \leq \Sigma \omega_i P_i,$$

而第二个和趋近于零就隐含着第一个和趋近于零.

从不等式

$$|\Sigma f(\xi_i, \eta_i) P_i| \leq \Sigma |f(\xi_i, \eta_i)| P_i$$

用极限过程就能得到所求证的不等式.



7° 如在  $(P)$  上的可积函数  $f(x, y)$  满足不等式

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

则

$$mP \leq \iint_{(P)} f(x, y) dP \leq MP. \quad (7)$$

这可以从显明的不等式

$$mP \leq \sum f(\xi_i, \eta_i) P_i \leq MP$$

经极限过程得来.

如用  $P$  来除不等式 (7) 的各端:

$$m \leq \frac{\iint_{(P)} f(x, y) dP}{P} \leq M,$$

并以  $\mu$  表示中间的比值, 则得不等式 (7) 的另一写法

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \mu P \quad (m \leq \mu \leq M), \quad (8)$$

这表明了所谓中值定理.

特别, 现在假定函数  $f(x, y)$  在  $(P)$  上连续, 并取在区域  $(P)$  上的最小及最大值——由魏尔斯特拉斯定理 [173], 它们存在!——作为  $m$  及  $M$ . 则由大家熟知的柯西定理 [171], 连续函数  $f(x, y)$  如取值  $m$  及  $M$  也必通过每一中间值. 因此, 在任何情况下, 在区域  $(P)$  上可找得一点  $(\bar{x}, \bar{y})$  使  $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$ , 而公式 (8) 有以下形式:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P. \quad (9)$$

这是特别常用的中值定理的形式.<sup>88)</sup>

同样, 推广的中值定理也很容易 [304, 10°] 搬到这里所讨论的情况上来, 我们将这留给读者.

**593. 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法** 考察一 (闭的) 平面区域  $(P)$  及含在它里面的部分 (闭) 区域  $(p)$ . 我们将假定所有区域都是可求面积的 (有时候它们还要受其它限制). 如果对区域  $(P)$  的每一部分  $(p)$ , 有某一定数

$$\Phi = \Phi((p))$$

<sup>88)</sup> 所述中值定理的证明显然用到了区域  $(P)$  是闭的及连通性; 我们要注意, 没有这两个假设中值定理不成立, 虽然对积分此前所述性质, 这两个假设不是本质的.



与它相对应,这样就对所述的那些  $(p)$  定义了“区域  $(p)$  的一个函数”. 这种区域函数的例子有: 区域的面积, 连续分布在它上面的质量, 这质量的静矩, 连续分布的荷载或一般地作用在它上面的力, 等等.

若尔当将区域  $(p)$  任意地分为互不相叠的部分<sup>89)</sup>

$$(p) = (p') + (p'')$$

时恒有

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')),$$

则区域函数  $\Phi((p))$  称作可加的. 上面所举的一切函数都具有这种可加性质. 可加的区域函数有其特殊重要性, 因为在研究自然现象时常常会遇见它们.

设在一可求面积区域  $(P)$  上已给一可积函数  $f(M) = f(x, y)$ ; 因此它在区域  $(P)$  的任一可求面积部分  $(p)$  上也为可积的, 故积分

$$\Phi((p)) = \iint_{(P)} f(x, y) dP \quad (10)$$

也为区域  $(p)$  的函数. 由 592, 2°, 显然它是一可加函数.

现在我们来讨论“函数  $\Phi((p))$  对区域的微分法”. 设  $M$  是区域  $(P)$  的一定点,  $(p)$  是任一包含这一点的一部分区域. 如比

$$\frac{\Phi((p))}{p}$$

( $p$  是区域  $(p)$  的面积) 当区域  $(p)$  的直径无限减小时趋近于一确定有限极限  $f = f(M)$ , 则这一极限称作在点  $M$  处  $\Phi((p))$  对区域的导数. 例如, 若  $\Phi((p))$  是连续分布在平面图形  $(p)$  上的质量, 则  $f(M)$  不是别的, 就是在点  $M$  处分布质量的密度; 如  $\Phi((p))$  表示作用在图形  $(p)$  上面的力, 则  $f(M)$  表在点  $M$  处的压强, 等等.

我们特别感兴趣的情况是区域函数可表作形如 (10) 的积分时, 其中  $f(x, y)$  是区域  $(P)$  上的连续函数. 我们来证明: 积分在点  $M$  处对区域的导数就是积分号下的函数在这一点处的值, 即

$$f(M) = f(x, y).$$

事实上, 取在导数定义中所谈到的一个区域  $(p)$  后, 由中值定理 [参看 (9)] 有

$$\Phi((p)) = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot p,$$

其中  $(\bar{x}, \bar{y})$  为区域  $(p)$  的某一点. 如区域  $(p)$  的直径趋近于零, 则点  $(\bar{x}, \bar{y})$  就无限接近于  $(x, y)$ , 由连续性,

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow f(x, y),$$

<sup>89)</sup> 如果各个部分区域没有公共点, 就称它们为不相叠的(或不相交的).



这就是所要证明的.

因此, 在变动区域上的二重积分 (10) 在特殊意义下是积分号下点函数的“原函数”; 它成为一区域函数, 对于它来说这一点函数就是对区域的导函数. 自然就发生这样一问题: 由导函数究竟能够唯一地决定“原函数”到怎样的程度呢?

在这一方面可以证明这样一命题: 两可加的区域函数  $\Phi_1((p))$  及  $\Phi_2((p))$  若在原来的区域  $(P)$  的所有点处对区域的导数相同, 则必恒等.

如变为考虑差  $\Phi((p)) = \Phi_1((p)) - \Phi_2((p))$ , 事情就成为求证: 可加的区域函数  $\Phi((p))$  在区域  $(P)$  的所有点处其导数等于零时它本身也恒等于零.

由导数定义本身, 不论  $\varepsilon > 0$  是怎样的一个数, 可用一邻域围绕区域  $(P)$  的每一点  $M$ , 使对任一包含  $M$  的而含在邻域里面的任一部分  $(p)$ , 有

$$\left| \frac{\Phi((p))}{p} \right| < \varepsilon. ^{90)}$$

将博雷尔引理 [175] 应用到这些邻域上, 就能够将区域  $(P)$  分为有限个互不相重叠的区域:

$$(P) = (p_1) + (p_2) + \cdots + (p_k),$$

使对它们的每一个皆有  $(i = 1, 2, \cdots, k)$

$$\left| \frac{\Phi((p_i))}{p_i} \right| < \varepsilon \quad \text{或} \quad |\Phi((p_i))| < p_i \varepsilon.$$

由函数  $\Phi((p))$  假定的可加性, 我们有

$$\Phi((P)) = \sum_i \Phi((p_i)).$$

由此联系到前一不等式, 得

$$|\Phi((P))| \leq \sum_i |\Phi((p_i))| < P\varepsilon.$$

但此处  $\varepsilon$  是任意的, 这就是说  $\Phi((P)) = 0$ . 因为可以取任何部分区域  $(p)$  以代替区域  $(P)$ , 这也就证明了我们的断言.

对照全部上面所述的, 我们得到一最后的断言: 在变动区域上的二重积分 (10) 是积分记号下点函数<sup>①</sup>的唯一可加“原函数”.

<sup>①</sup>与上面一样, 这一函数假定为连续的.

<sup>90)</sup>由导数的定义仅可直接推出, 对位于点  $M$  的某个邻域内, 并且包含点  $M$  本身的各个  $(p)$ , 上述不等式成立. 然而任意不包含  $M$  的区域  $(p)$  可以表为两个包含  $M$  的区域之差. 所求不等式容易从函数  $\Phi((p))$  的可加性推出.



所以, 不必计算就可明白, 例如, 已知在点  $M$  处分布的质量其密度为  $\rho(M) = \rho(x, y)$  时, 分布在图形  $(P)$  上的整个质量可表作积分

$$m = \iint_{(P)} \rho(x, y) dP;$$

如  $q(M) = q(x, y)$  是在点  $M$  处的压强, 则整个作用在图形  $(P)$  上的力为

$$F = \iint_{(P)} q(x, y) dP,$$

等等.

**附注** 前面我们曾经谈过区间的可加函数[348;584,8)]. 因为这种函数总是某点函数的两个值的差, 故对“线性的”情形没有必要像上面对“平面的”情形叙述的那样来发展理论. 然而在定积分对变动上限微分法的定理中 [305,12°], 读者容易观察到与刚才所证明的二重积分对区域的微分法定理的相似处, 而第 348 目中的推理可解释为积分是作为已知点函数的“原函数”的唯一可加区间函数的证明.

## §2. 二重积分的计算

**594. 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分** 关于这一问题的几何的解释, 在一些特殊的假定下我们在第 587 目中已经作过了.

现在我们用分析的工具且在最普遍的形式下来考察它; 我们从最简单的情形开始, 即当积分区域是一矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  时.

**定理** 如对定义于矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  上的一函数  $f(x, y)$  二重积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \quad (1)$$

存在, 且对每一个  $[a, b]$  上的常数值  $x$ , 单积分

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \quad (2)$$

也存在, 则逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (3)$$

同样存在, 且等式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (4)$$

成立.<sup>①</sup>

<sup>①</sup>读者容易观察到这一断言是关于二重极限及逐次极限的熟知定理 [168] 的一种变形.



**证明** 在确定矩形  $(P)$  的区间  $[a, b]$  及  $[c, d]$  内插入分点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots < y_m = d.$$

将它们分为许多部分. 因而矩形  $(P)$  就分成许多部分矩形 (图 38)

$$(P_{i,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1; k = 0, 1, \cdots, m-1).$$

以  $m_{i,k}$  及  $M_{i,k}$  分别表示函数  $f(x, y)$  在矩形  $(P_{i,k})$  上的下确界及上确界, 故对这一矩形的所有点  $(x, y)$ ,

$$m_{i,k} \leq f(x, y) \leq M_{i,k}.$$

将  $x$  在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上任意固定:  $x = \xi_i$ , 对  $y$  自  $y_k$  积分到  $y_{k+1}$ , 我们将有 [304, 8°]

$$m_{i,k} \Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq M_{i,k} \Delta y_k,$$

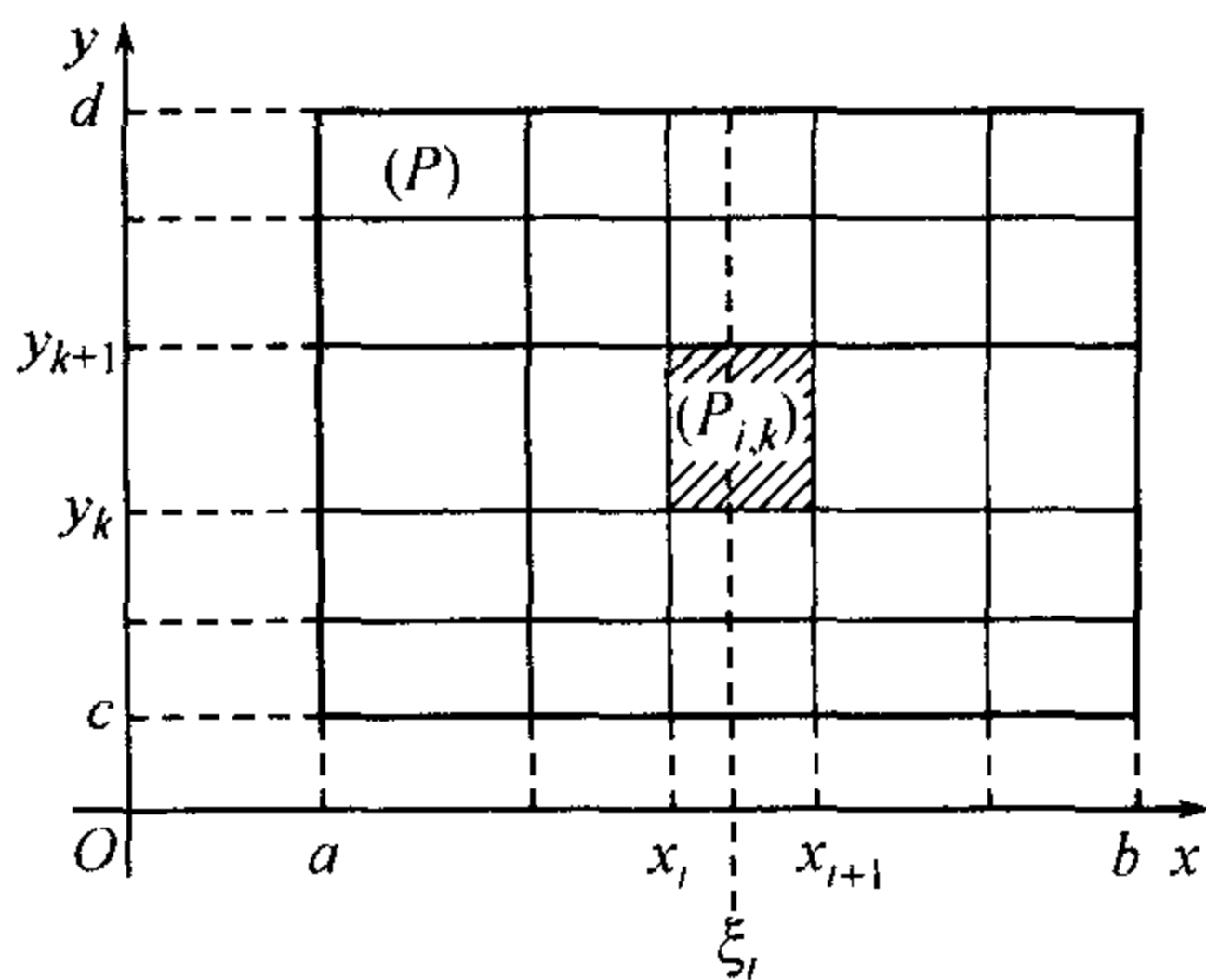


图 38

其中  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ; 对  $y$  的积分是存在的, 因为假定了在整个的区间  $[c, d]$  上的积分 (2) 存在. 将对  $k$  的自 0 到  $m-1$  的类似不等式相加, 得

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leq I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k.$$

如在这不等式各端遍乘以  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  并对附标  $i$  自 0 到  $n-1$  相加, 则得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k.$$

在中间我们得到了函数  $I(x)$  的积分和. 至于两头的项, 它们不是别的, 正是对于二重积分 (1) 的达布和  $s$  及  $S$ . 事实上, 因为  $\Delta x_i \Delta y_k$  是矩形  $(P_{i,k})$  的面积  $P_{i,k}$ , 故我们有, 例如,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

因此, 最后

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S.$$



如现在所有的  $\Delta x_i$  及  $\Delta y_k$  同时趋近于零, 则由于二重积分 (1) 的存在, 和  $s$  及  $S$  都趋近于它为极限. 在这种情形下, 也有

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_{(P)} f(x, y) dP,$$

亦即二重积分 (1) 同时也是函数  $I(x)$  的积分:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

这就是所要求证的.

将  $x$  及  $y$  的地位交换, 与 (4) 同时, 也可证明公式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (4^*)$$

这时假定了当  $y = \text{常数}$  时积分

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

存在.

**附注** 如与二重积分 (1) 一起, 两单积分都存在:

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad (x = \text{常数}) \quad \text{及} \quad \int_a^b f(x, y) dx \quad (y = \text{常数}),$$

则两公式 (4), (4\*) 同时成立, 于是

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5)$$

这一结果我们以前 [528] 已经得出过, 那时没有利用二重积分存在的假定.

应用公式 (4) 或 (4\*) 要受二重积分及单积分之一存在的限制. 如函数  $f(x, y)$  连续(在实际中通常所遇到的情形), 则所有上述积分都保证存在; 例如对二重积分来说, 能由 590, I 得出. 在这种情况下, 在实际计算二重积分时任一上述公式都可利用, 因为计算单积分是一特别简单的问题.

在证明公式 (4) 时最自然的是用平行于坐标轴的直线分矩形  $(P)$  为有面积  $\Delta x_i \Delta y_k$  的矩形元素. 要想就二重积分记号本身能说明是用平行于坐标轴的直线将区域细分而进行积分的, 常常就不用  $\iint_{(P)} f(x, y) dP$  而写

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy \left[ \text{或} \iint_{(P)} f(x, y) dy dx \right].$$



此外, 注意到将取在矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  上的二重积分化为逐次积分时, 二重积分本身也常常用一类似于逐次积分的记号来表示:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \text{或} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

在这种表示法里“外面的积分”与“外面的微分”彼此对应, 故为了要得到任一逐次积分, 只要添置括弧就行了:

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \quad \text{或} \quad \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

**595. 例** 1) 计算展布在矩形  $(P) = [3, 4; 1, 2]$  上的积分

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_3^4 \frac{dx dy}{(x+y)^2}.$$

**解** 由公式 (4\*) 可以写

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}.$$

先求出里面的积分:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4},$$

于是,

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[ \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right] dy = \ln \frac{25}{24}.$$

2) 计算积分

$$(a) I_1 = \int_1^3 \int_2^5 (5x^2 y - 2y^3) dx dy, \quad (b) I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dx dy}{1+y^2},$$

$$(B) I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\text{解 } (a) I_1 = \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2 y - 2y^3) dx = \int_1^3 (195y - 6y^3) dy = 660.$$

$$(b) I_2 = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}.$$

(B) 用公式 (4) 将  $I_3$  表作下形更为简单:

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

因为立刻就能得到

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

所以

$$I_3 = \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+2}} \Big|_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}.$$



如采用另一逐次积分, 则求积时就比较麻烦些:

$$I_3 = \int_0^1 y dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+y^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{y dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

很容易将这一答案变到前面的形状.

3) 求一立体的体积  $V$ , 这立体下面被  $xy$  平面所限制, 侧面被平面  $x=0, x=a, y=0, y=b$  所限制, 而上面被椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

所限制.

解 首先由公式 (2\*)

$$V = \iint_{[0,a;0,b]} \left( \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dP.$$

我们用公式 (4\*) 来计算这一积分:

$$V = \int_0^b dy \int_0^a \left( \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dx = \int_0^b \left( \frac{a^3}{6p} + \frac{ay^2}{2q} \right) dy = \frac{ab}{6} \left( \frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

4) 同样对由  $xy$  平面、曲面  $x^2 + z^2 = R^2 (z > 0)$  及平面  $y=0$  与  $y=H$  所围的立体求体积.

解 如取  $xy$  平面上的矩形  $[-R, R; 0, H]$  为立体的底, 则

$$V = \int_0^H \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 2H \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

(当然, 更简单的是将这立体当作以  $xz$  平面上的半圆为底的柱形.)

5) 同样对由平面  $z=0, x=a, x=b, y=c, y=d (b > a > 0, d > c > 0)$  与双曲抛物面  $z = \frac{xy}{m} (m > 0)$  所围的立体求体积. 答  $V = \frac{(d^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{4m}.$

6) 求证

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 y^y dy.$$

二重积分中积分号下的函数, 如当  $xy=0$  时给它以值 1, 则它在整个正方形  $[0, 1; 0, 1]$  上连续.

我们有

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (xy)^{xy} dx.$$



在里面的积分中作替换  $xy = t$  (当  $y = \text{常数} > 0$ ), 再行分部积分, 因而对二重积分得出表示式

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y t^t dt = \ln y \cdot \int_0^y t^t dt \Big|_0^1 - \int_0^1 y^y \ln y dy.$$

前一双重代入式为零, 因为  $\int_0^y t^t dt$  当  $y \rightarrow 0$  时是一阶无穷小.<sup>①</sup> 至于后面一积分, 则由恒等式

$$(y^y)' = y^y \ln y + y^y,$$

它就化为积分  $\int_0^1 y^y dy$ .

7) 求证 (对任何的  $z = \text{常数}$ )

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda \right\}^2.$$

为达此目的, 将每一积分展开为  $z$  的幂级数. 对于单积分这已经在 [440, 13)] 中做过:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right\}.$$

二重积分中积分号下函数展开成级数

$$\cos(2z \sin \varphi \sin \theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{2i!} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta,$$

它对正方形  $[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}]$  中一切值  $\varphi$  及  $\theta$  一致收敛. 在这一正方形内将它逐项积分, 得<sup>②</sup>

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{2i!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

但 [参看 312(8)]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi d\varphi = \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \right]^2, \end{aligned}$$

故经简单变换后,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!}{2^{2i} [i!]^4} \right\}.$$

<sup>①</sup> 本来,  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_0^y t^t dt = \lim_{t \rightarrow 0} t^t = 1$ .

<sup>②</sup> 不再加以说明, 读者可将一致收敛级数的概念以及将它逐项积分的定理推广到级数项含有两个变数的情形.



现在容易验证 [参看 390,3)], 的确,

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!}{2^{2i} [i!]^4} = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right\}^2.$$

因此, 所提出的二重积分的值可用附标为零的贝塞尔函数来表示:<sup>91)</sup>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{4} [J_0(z)]^2.$$

8) 求证对任何  $k(0 < k < 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\theta}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{\pi}{2} \mathbf{K}(k).$$

提示 将两积分按  $k$  的幂展开, 右端积分的这一展开式我们已经遇见过 [440,11)].

9) 求证: 如函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 而函数  $g(y)$  在区间  $[c, d]$  上可积分, 则两变数的函数  $f(x)g(y)$  在矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  上可积.

提示 问题可变成函数  $f(x)$  及  $g(y)$  当作两变数的函数时<sup>①</sup> 分别在  $(P)$  上的可积分性. 为此, 利用在第 591 目末所述的可积简易判定法非常方便.

注意, 此处

$$\begin{aligned} \iint_{(P)} f(x)g(y) dx dy &= \int_c^d dy \left\{ \int_a^b f(x)g(y) dx \right\} \\ &= \int_c^d g(y) \left\{ \int_a^b f(x) dx \right\} dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy, \end{aligned}$$

故二重积分这里就成为两个单积分的乘积.

反过来, 有时候将两个单积分的乘积表成二重积分的形状也是有用处的. 下面我们举出应用这一思想的若干例题.

10) 求证不等式:

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2,$$

其中  $f(x)$  是一正连续函数.

不失一般性, 可以假定  $a < b$ . 因为积分与积分变量记法无关, 可将任一积分中用文字  $y$  代替文字  $x$ , 则不等式左端就可改写成:

$$I = \iint_P \frac{f(x)}{f(y)} dx dy = \iint_{(P)} \frac{f(y)}{f(x)} dx dy,$$

其中  $(P) = [a, b; a, b]$ . 于是

$$I = \frac{1}{2} \iint_{(P)} \left[ \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy = \iint_{(P)} \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2f(x)f(y)} dx dy.$$

<sup>①</sup>如推广第 299 目, II 的定理到两变数的函数上去.

<sup>91)</sup>参看 440,12).



由明显的不等式  $2AB \leq A^2 + B^2$ , 积分号下的函数  $\geq 1$ , 故 [参看 592, 7°]

$$I \geq (b-a)^2,$$

这就是所要求证的.

11) 布尼亚科夫斯基不等式 我们以前已经遇到过这一不等式 [321]. 作为一习题我们将给出当函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在  $[a, b]$  上在正常的意义下可积时它的一新的推演.

考察积分

$$B = \iint_{(P)} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy,$$

其中  $(P)$  是正方形  $[a, b; a, b]$ . 解开括号, 我们有 [参看 9)]

$$B = \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(y) dy - 2 \int_a^b f(x)g(x) dx \cdot \int_a^b f(y)g(y) dy + \int_a^b f^2(y) dy \cdot \int_a^b g^2(x) dx,$$

或, 最后, 再利用积分与自变数记法的无关性:

$$B = 2 \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx - \left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \right\}.$$

因为在积分  $B$  中积分号下的式子是非负的, 故亦  $B \geq 0$ , 由此就得出所要求的不等式

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

附注 从这里, 特别, 前一习题的不等式也可推出 (将  $f$  换作  $\sqrt{f}$ ,  $g$  换作  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ ).

12) 切比雪夫不等式 用同样的推理可证明不等式

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \cdot \int_a^b p(x)g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx,$$

这是属于П.Л.切比雪夫的. 这里  $p(x)$  是正的可积函数, 而  $f(x)$  及  $g(x)$  是单调增加函数.

设  $a < b$ . 考察差

$$\Delta = \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx - \int_a^b p(x)f(x) dx \cdot \int_a^b p(x)g(x) dx.$$

在两个项的第二因子中将文字  $x$  换作  $y$ , 表这一差为

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x) - g(y)] dx dy.$$

现在交换  $x$  及  $y$  的地位:

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)f(y)[g(y) - g(x)] dx dy.$$

最后, 如取两式的和之半, 得

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] dx dy.$$



因为函数  $f$  及  $g$  都单调增加, 故两方括号有同号, 即积分号下的式子永远非负, 因而亦  $\Delta \geq 0$ , 这就证明了所需不等式.

容易看到, 在函数  $f$  及  $g$  都减少时它也保持有效. 当一个减少另一个增加时, 不等式就掉头.

13) 设函数  $f(x, y)$  在矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  上连续. 以  $(x, y)$  表这一矩形上的任意点, 考察由二重积分所表的函数:

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) dv du.$$

如将它表作逐次积分的样子:

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v) dv.$$

则先对  $x$  然后对  $y$  微分, 依次得<sup>①</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_c^y f(x, v) dv, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

我们得到与单积分对变动上限微分定理的一类似定理. 同样亦可建立

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y).$$

14) 设  $f(x, y)$  在矩形  $(P) = [a, b; c, d]$  上可积分. 如对这一函数 (这一次我们不假定非要连续不可) 存在一“原”函数  $\Phi(x, y)$ , 就是说

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

则

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c).$$

这与用原函数表通常定积分的公式相类似.

我们着手来证明. 将矩形  $[a, b; c, d]$ , 如在第 594 目中一样, 分为部分矩形

$$[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, m-1).$$

两次应用有限增量的公式到式子

$$\Phi(x_{i+1}, y_{k+1}) - \Phi(x_{i+1}, y_k) - \Phi(x_i, y_{k+1}) + \Phi(x_i, y_k)$$

上去,<sup>②</sup>将它表作

$$\Phi''_{xy}(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k = f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k$$

的样子, 其中  $x_i \leq \xi_{ik} \leq x_{i+1}, y_k \leq \eta_{ik} \leq y_{k+1}$ . 对  $i$  及  $k$  相加, 得

$$\sum_{i,k} f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c).$$

<sup>①</sup>应该注意到对外面的积分来说积分号下的函数  $\int_c^y f(u, v) dv$  是  $u$  的连续函数 [506].

<sup>②</sup>比较在第 190 目中当证明两微分法颠倒的定理时式子  $W$  的变换.



最后, 变到极限.

可以看见, 推理的结构与证明积分学中的基本公式用原函数表简单定积分 [310] 时完全一样.

最后我们举两个有启发性的例题, 表明第 594 目中定理的条件相互无关.

15) 如  $x$  是一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 表分母为  $q_x$ . 在正方形  $(P) = [0, 1; 0, 1]$  上定义一函数  $f(x, y)$ , 令:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}, & \text{如 } x \text{ 及 } y \text{ 都是有理的,} \\ f(x, y) &= 0, & \text{在其它情形.} \end{aligned}$$

函数在正方形中有理坐标的一切点处不连续, 而在其余的点处连续.

因为, 不论  $\varepsilon > 0$  是怎样一个数, 只有在有限个点处可能  $f > \varepsilon$ , 故在第 589 目中所建立的可积条件适合,<sup>①</sup> 而二重积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

存在, 但等于 0.

对无理的值  $y$  函数  $f(x, y)$  对所有的  $x$  为 0, 所以

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0.$$

而如  $y$  为有理时, 则对无理的值  $x$ ,  $f(x, y) = 0$ , 对有理的  $x$  有:  $f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}$ . 这个  $x$  的函数在  $x$  的任何区间上有振动  $> \frac{1}{q_y}$ , 因此, 它对  $x$  的积分不存在. 这就是说, 不可能来谈逐次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$$

同样可证明积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

也不存在.

16) 现今在正方形中所有点其坐标  $x, y$  为有理且  $q_x = q_y$  时  $f(x, y) = 1$ , 在其它的点处  $f(x, y) = 0$ .

因为在正方形的任何部分内, 函数  $f$  的振动等于 1, 故二重积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

这一次不存在.

同时对固定的  $y$ , 函数  $f(x, y)$  或恒等于 0 (如  $y$  为无理) 或仅对有限个值  $x$  可能异于 0 (如  $y$  为有理). 在这两种情况下,

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0,$$

<sup>①</sup> 这一点不对, 事实上  $f$  可以在无穷多个点上  $> \varepsilon$ . 但下面的二重积分还是存在的, 这是因为,  $f$  的不连续点只有“可数多个”, 所以其面积为 0; 由 590 目 II, 便得所要结果 —— 译者.



就是说, 逐次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0$$

存在. 同样, 积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0$$

也存在 [比较 528].

**596. 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分** 考察一区域  $(P)$ , 其上下由两连续曲线

$$y = y_0(x), y = Y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

所限制, 两侧由两纵坐标  $x = a$  及  $x = b$  所限制 (图 39). 则类似于第 594 目中的定理, 下一定理也成立:

**定理** 如对定义于区域  $(P)$  上的函数  $f(x, y)$ , 二重积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

存在, 又对  $[a, b]$  中每一固定值  $x$  单积分

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$$

也存在, 则逐次积分

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$$

也同样存在, 且等式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy \quad (6)$$

成立.

证明建立在将这种情况化为在第 594 目中所讨论过的情况. 令  $c = \min_{a \leq x \leq b} y_0(x)$ ,  $d = \max_{a \leq x \leq b} Y(x)$  (参看图 39), 将区域  $(P)$  包在矩形

$$(R) = [a, b; c, d]$$

内, 并用下法在这一矩形上定义一函数  $f^*(x, y)$ :

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{如点}(x, y)\text{属于区域}(P), \\ 0, & \text{在矩形}(R)\text{的其它点处.} \end{cases}$$

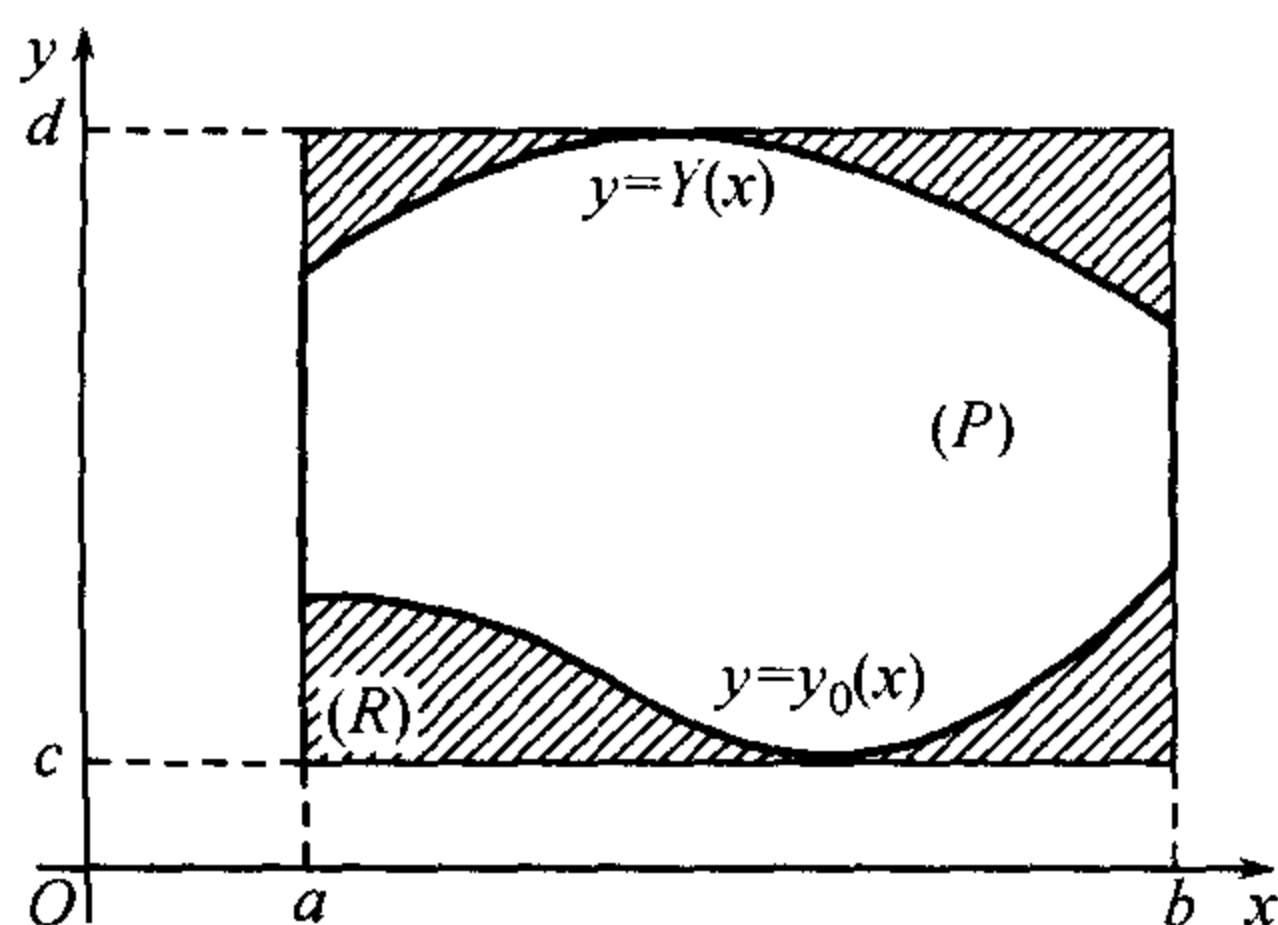


图 39



我们来证明, 这一函数满足第 594 目定理的条件.

首先, 它在区域  $(P)$  上可积, 因为它在这里与假设的可积函数  $f(x, y)$  相重合; 显然,

$$\iint_{(P)} f^*(x, y) dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

另一方面, 在  $(P)$  的外面  $f^*(x, y) = 0$ , 因此在矩形  $(R)$  的余下部分  $(Q) = (R) - (P)$  它就可积,<sup>①</sup> 且

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y) dQ = 0.$$

则由 592, 2°, 函数  $f^*$  在整个矩形  $(R)$  上可积且

$$\iint_{(R)} f^*(x, y) dR = \iint_{(P)} f(x, y) dP. \quad (7)$$

对  $[a, b]$  上的固定值  $x$ , 积分

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{y_0(x)} f^* dy + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^* dy + \int_{Y(x)}^d f^* dy$$

存在, 因右端三积分都存在. 事实上, 因为在  $y$  变化的区间  $[c, y_0(x))$  及  $(Y(x), d]$  内函数  $f^*(x, y) = 0$ , 故第一个及第三个积分存在且等于零. 第二个积分与函数  $f(x, y)$  的积分相同:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y) dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy,$$

因为对于在  $[y_0(x), Y(x)]$  上的  $y$ ,  $f^*(x, y) = f(x, y)$ . 最后,

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy. \quad (8)$$

由所提到的定理, 对函数  $f^*$  逐次积分也存在, 且等于二重积分 [参看 594(4)]:

$$\iint_{(R)} f^*(x, y) dR = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy.$$

注意 (7) 及 (8), 可以看见, 这一公式相当于公式 (6).

如区域  $(P)$  是另一类型的曲边梯形, 由曲线

$$x = x_0(y), x = X(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

及直线  $y = c, y = d$  所围成, 则代替 (6) 我们得一公式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y) dx, \quad (6^*)$$

这时假定了与二重积分同时, 当  $y = \text{常数}$  时对  $x$  的单积分存在.

<sup>①</sup>它在这一区域边界上的值不发生作用, 参看 592, 1°.



**附注** 如区域  $(P)$  的边界与纵轴的平行线也好, 与横轴的平等线也好, 都只交于两个点 (例如, 如图 40 中所画出的情形), 则当所述条件适合时, 所提到的两个公式都可应用. 将它们相比较, 得等式

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y) dx, \quad (9)$$

它有特殊的重要性. 这与第 594 目中公式 (5) 相类似.

如函数  $f(x, y)$  在区域  $(P)$  中连续, 则二重积分及单积分都存在, 视区域  $(P)$  的类型, 可在计算二重积分时利用公式 (6) 或 (6\*).

在边界较复杂时通常将区域  $(P)$  分成有限个上面讨论过的类型的部分 [例如, 图 41 中的图形  $(P)$  被直线  $x = a$  割成三部分:  $(P_1), (P_2), (P_3)$ ]. 然后由 592, 2°, 所求积分可表作分别展布在这些部分上的积分的和; 它们的每一个都可按照刚才所述的来计算.

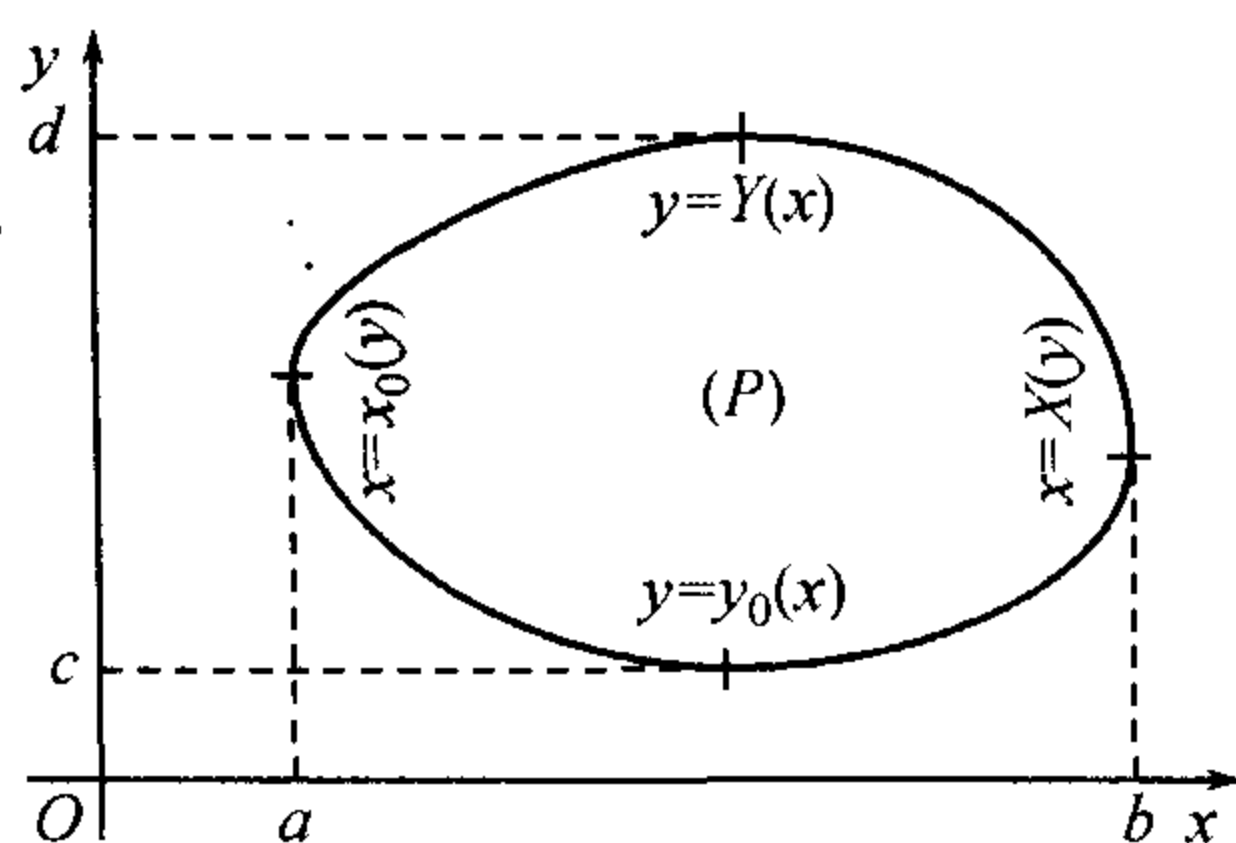


图 40

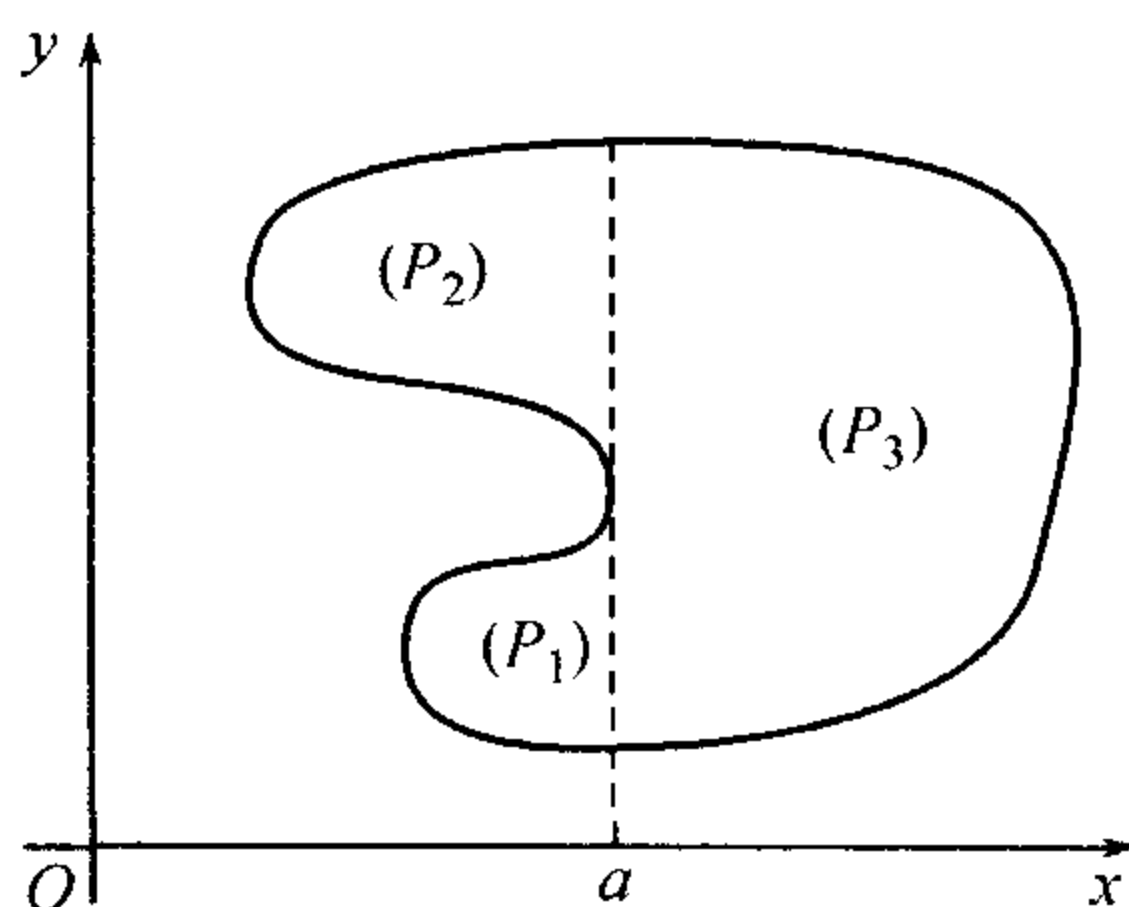


图 41

一般情形, 因为我们要将问题变到第 594 目的定理, 也是把所考察的图形分成矩形元素, 作为论断的基础. 与此相关, 这里关于二重积分的记法常常就用记号

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy;$$

乘积  $dx dy$  象征元素矩形的面积.

由此也可了解记号

$$\int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f dy dx \quad \text{或} \quad \int_c^d \int_{x_0(y)}^{X(y)} f dx dy.$$

**597. 例** 1) 计算二重积分

$$I = \iint_{(P)} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dP,$$

其中  $(P)$  是半径为  $R$  中心在坐标原点的圆 (图 42).



解 区域 (P) 的边界方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ , 于是  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ . 显然,  $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$  是上半圆周的方程, 而  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$  是下半圆周的方程. 因此, 对在区间  $[-R, R]$  上的一常数  $x$ , 变数  $y$  自  $-\sqrt{R^2 - x^2}$  变到  $+\sqrt{R^2 - x^2}$ . 由公式 (6) (考虑积分号下的函数对  $y$  是偶函数).

$$I = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2-x^2} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy.$$

算出里面的积分:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

再算出 (又考虑偶函数性质)

$$I = \frac{2}{3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{32}{45} R^5.$$

完全同样地可按公式 (6\*) 进行计算.

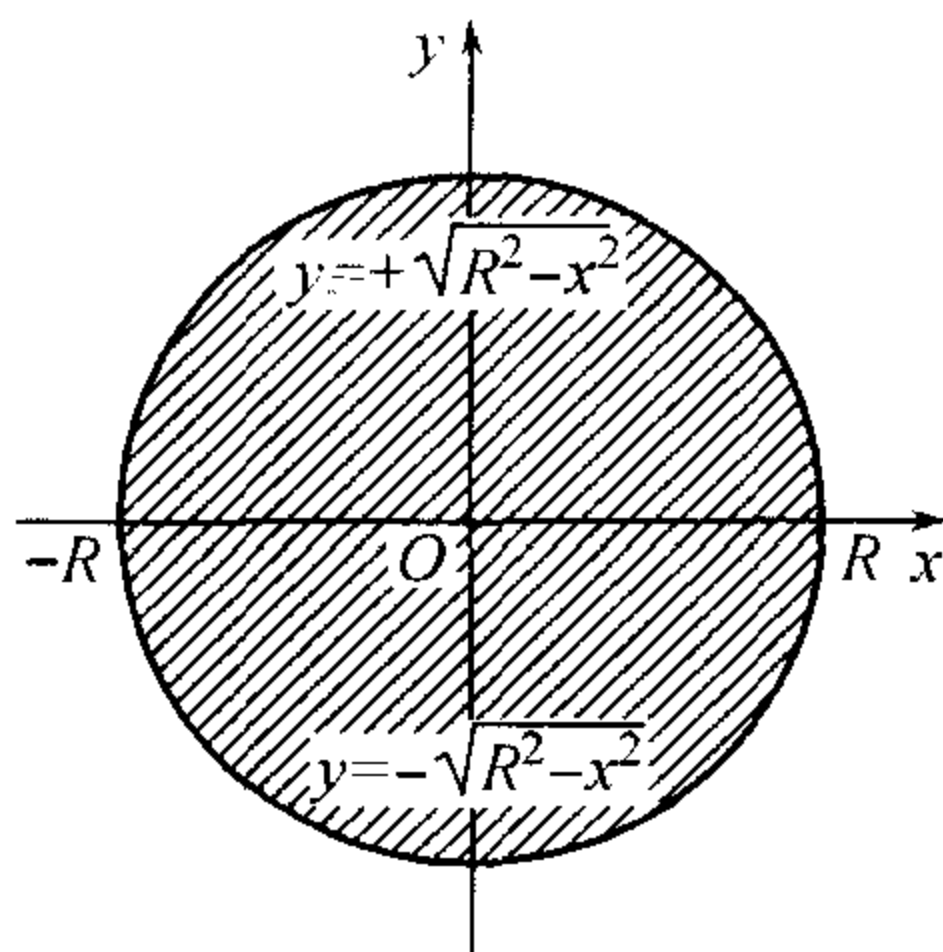


图 42

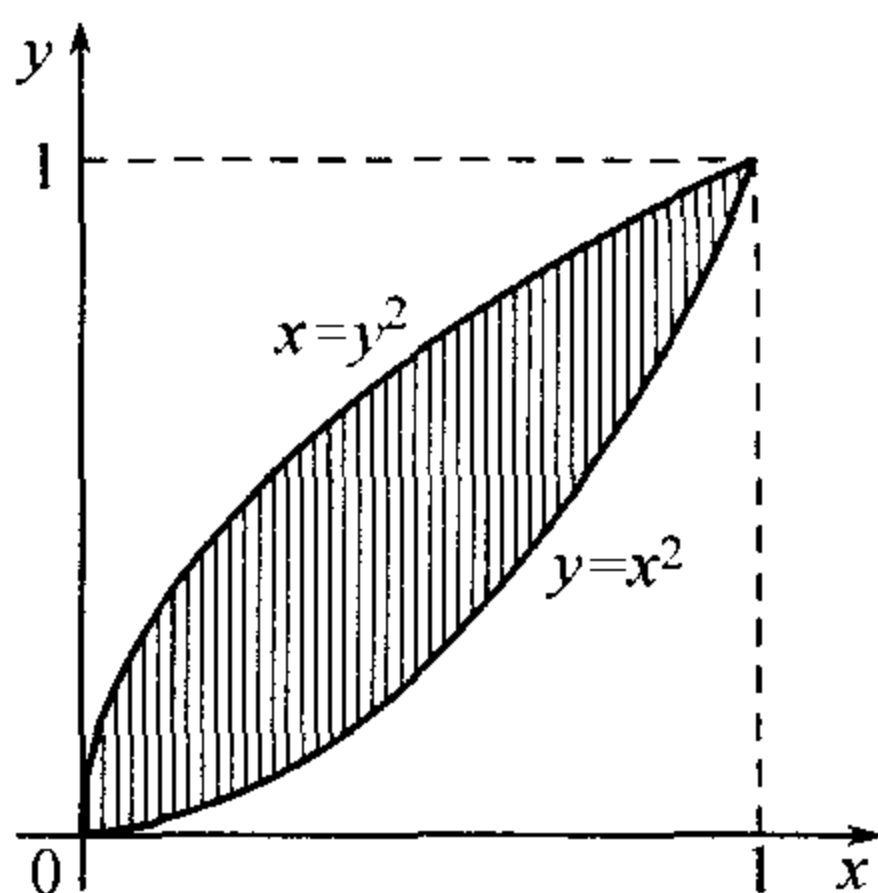


图 43

## 2) 计算

$$K = \iint_{(A)} (x^2 + y) dx dy,$$

如区域 (A) 由二抛物线:  $y = x^2$  及  $y^2 = x$  所围成.

解 为了得到这区域的大概样子, 作一草图也是有用的. 联立解抛物线方程, 求出它们的交点 (0,0) 及 (1,1) (图 43).

如果外层的积分对  $y$  进行, 则  $y$  变化的区间显为  $[0, 1]$ . 在这范围内取一  $y$  的任意值后, 由图可见,  $x$  自  $x = y^2$  变到  $x = \sqrt{y}$ . 由公式 (6\*),

$$K = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx.$$

计算出里面的积分:

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + yx \Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} y^6 - y^3,$$



再算出外面的:

$$K = \int_0^1 \left( \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3 \right) dy = \frac{33}{140}.$$

3) 计算积分

$$J = \iint_{(D)} xy dx dy,$$

其中  $(D)$  是由坐标轴及抛物线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  所围的区域 (图 44).

解 我们有:

$$J = \int_0^1 x dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 dx = \frac{1}{280}.$$

4) 计算积分  $I = \iint_{(C)} \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $(C)$  是由直线  $x=2$ ,  $y=x$  及双曲线  $xy=1$  所围的区域.

解 将这些线画在图上 (图 45). 很容易得出方程的公共解来: 直线  $x=2$  交直线  $y=x$  于点  $(2,2)$ , 交双曲线  $xy=1$  于点  $(2, \frac{1}{2})$ , 而直线  $y=x$  及双曲线 (在所讨论区域所在的第一象限范围内) 交于点  $(1,1)$ .

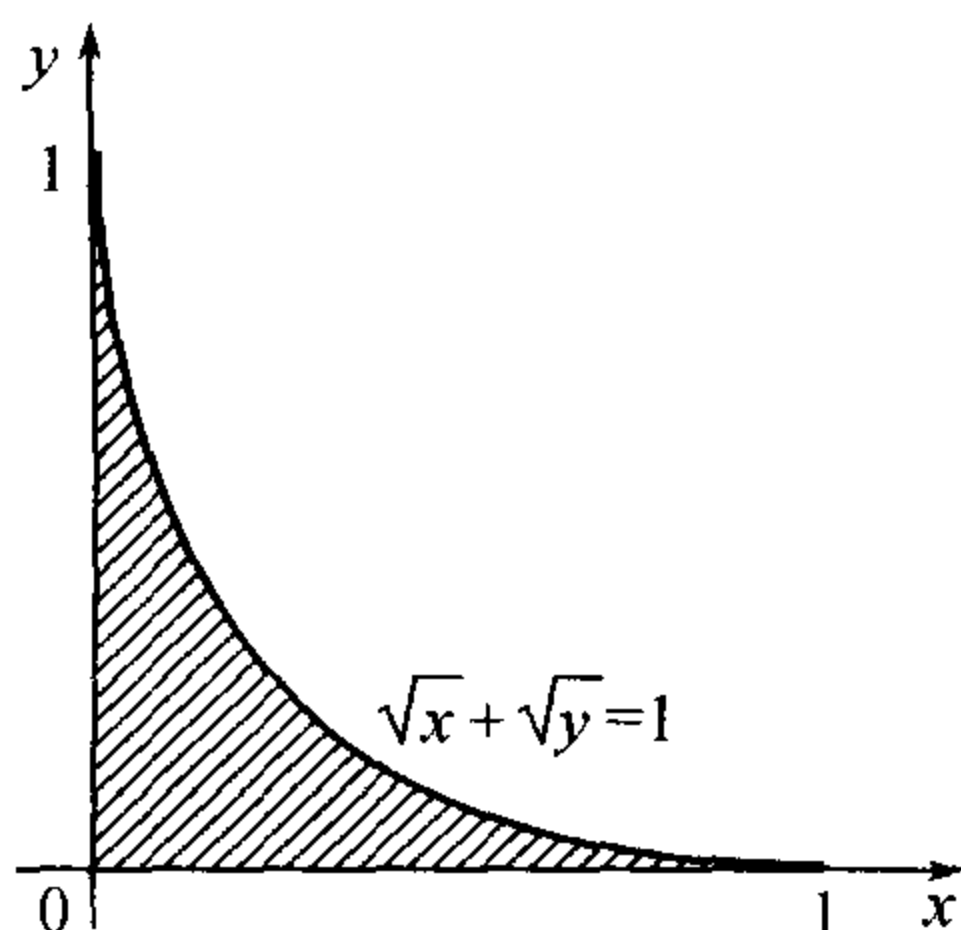


图 44

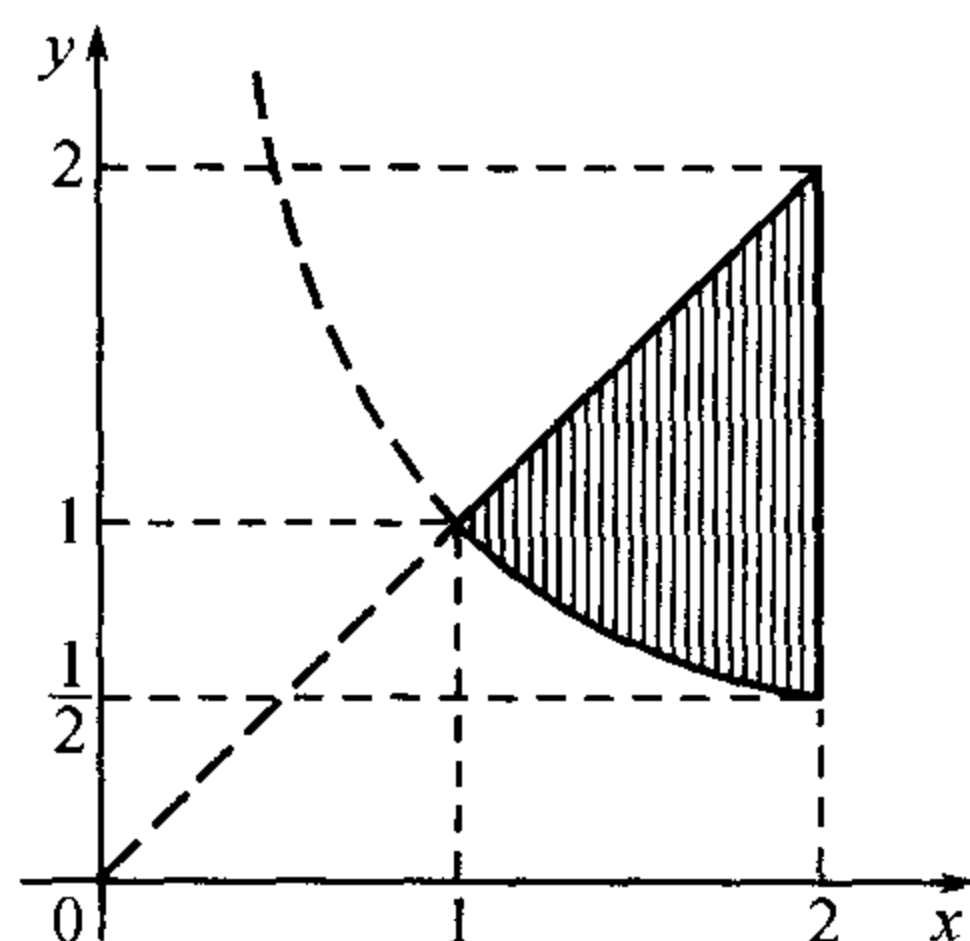


图 45

如用公式 (6) 来计算积分  $I$ , 则外面的对  $x$  的积分就必须在区间  $[1, 2]$  上进行. 当固定  $x$  于这一区间上时,  $y$  的变化范围为  $y = \frac{1}{x}$  及  $y = x$ . 这样,

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy.$$

但

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = -\frac{x^2}{y} \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x,$$

所以

$$I = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

在以前各例中按公式 (6) 或 (6\*) 计算时同样简单, 在现在这一情况下事情就不同了: 按公式 (6\*) 来计算就要麻烦些. 然而我们依然来做做看, 因为要作为一教训来弄清楚所以如此的原因何在.



平行于  $x$  轴的直线交区域的边界于两点, 故公式 (6\*) 可以应用. 但在左边限制我们区域的曲线——它相当于一般理论中的曲线  $x = x_0(y)$ ——这里由两部分构成: 一直线段及一双曲线段, 它们是用不同的方程来表示的. 换句话说, 所提到的函数  $x_0(y)$  在区间  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  的不同部分内由不同的公式给出来. 即

$$x_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{如 } \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ y, & \text{如 } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

区域右面被直线  $x = 2$  所限制. 故较方便地是将对  $y$  的积分拆开并表  $I$  为下形:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx.$$

因为

$$\int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}, \quad \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

故

$$I = \int_1^1 \left( \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left( \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

在类似的情况下必须考虑到, 在二重积分的两种可能计算方法中自然是取比较简单的.

5) 计算积分:

$$(a) I_1 = \iint_{(Q_1)} \cos(x+y) dx dy,$$

$$(b) I_2 = \iint_{(Q_2)} (2x+y) dx dy,$$

$$(B) I_3 = \iint_{(Q_3)} (x+6y) dx dy,$$

其中  $(Q_1)$  是由直线

$$x = 0, \quad y = x, \quad y = \pi$$

所围的三角形,  $(Q_2)$  是由坐标轴及直线  $x+y=3$  所围的三角形, 而  $(Q_3)$  是由直线

$$y = x, \quad y = 5x, \quad x = 1$$

所围的三角形.

**提示** 在 (a), (b) 的情形下, 用公式 (6), (6\*) 中哪一个没有什么区别; 在 (B) 的情形下用公式 (6) 较方便些. (为什么? 作图!)

$$\text{答 } (a) I_1 = -2; (b) I_2 = \frac{27}{2}; (B) I_3 = 25\frac{1}{3}.$$

6) 计算积分

$$I = \iint \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy,$$

展布在由直线  $y=0, x=1, y=x$  所形成的三角形上.

**解** 由公式 (6),  $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy$ ; 里面的积分等于

$$\int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \Big|_{y=0}^{y=x} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2,$$

$$\text{最后 } I = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$



用公式 (6\*) 也可以来计算,但在这一情况下我们就会陷入较困难的求积法中去了. 在选择计算方法时也应注意到类似的情形.

有时,在曲边区域的情况下积分极限的排列上会遇到些困难的,关于这一点,下列例题很有用:

7) 在下列各逐次积分中交换积分次序 [由公式 (9)]:

$$(a) \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy, \quad (b) \int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) dx,$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy, \quad (r) \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx,$$

认为  $f(x, y)$  是连续函数.

(a) 解 积分区域由联立不等式

$$0 \leq x \leq 4, \quad 3x^2 \leq y \leq 12x$$

所确定. 于是首先可以看清楚,  $y$  的极端值为 0 及 48. 将后一不等式对  $x$  解出来, 当固定  $y$  时求得  $x$  自  $\frac{1}{12}y$  变到  $\sqrt{\frac{y}{3}}$ .<sup>①</sup>

从图 46 来观察这一结果还更简便些, 在图中画出了由直线  $y = 12x$  及抛物线  $y = 3x^2$  所围的区域, 它们在横坐标为 0 及 4 的点处相交, 注意沿  $x$  轴取着与沿  $y$  轴不同的刻度.

答

$$\int_0^{48} dy \int_{\frac{1}{12}y}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f dx.$$

(b) 提示 积分区域是由圆周

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

所围起来的.

答

$$\int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f dy.$$

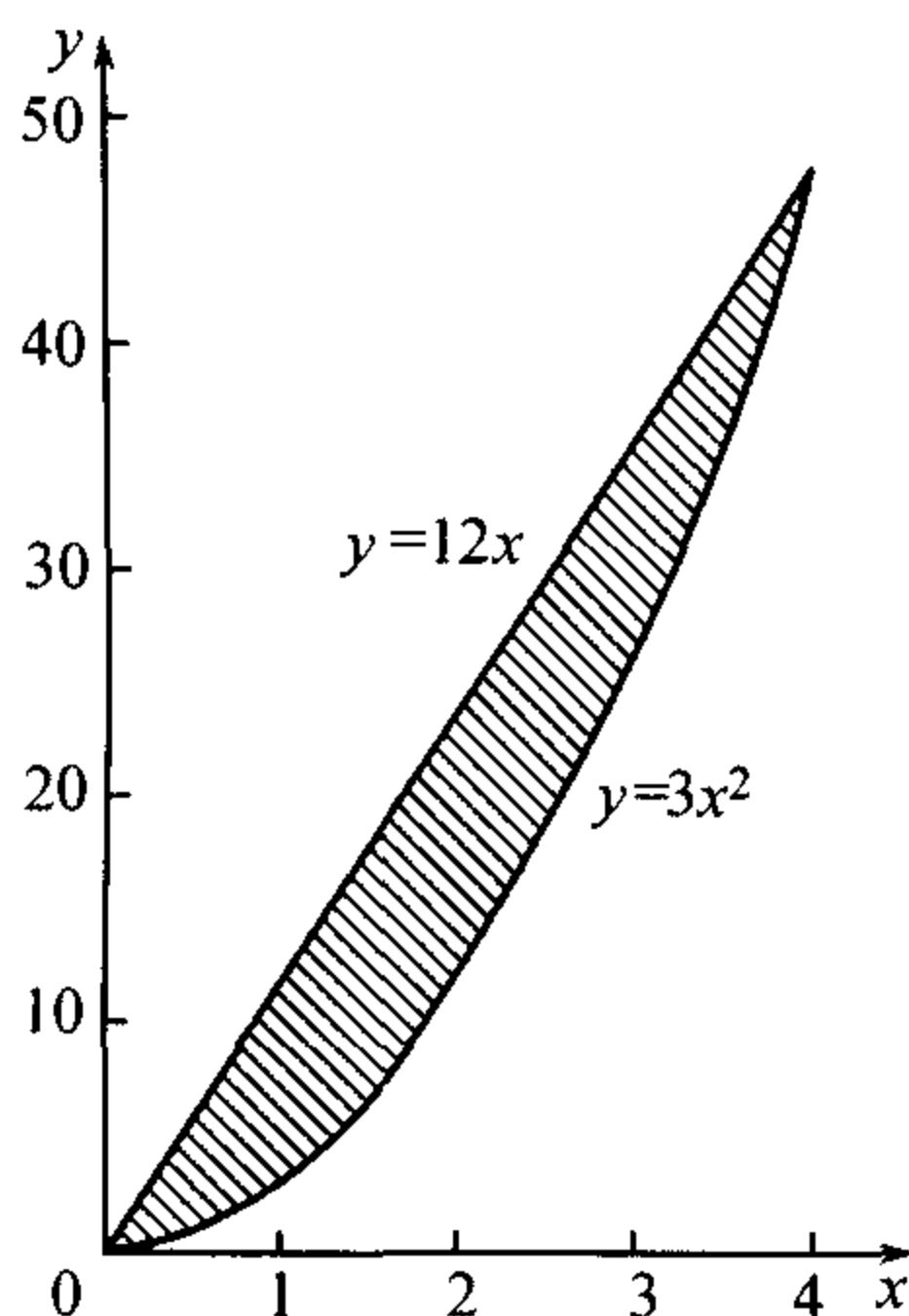


图 46

(B) 解 积分区域由联立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 2x \leq y \leq 3x$$

所确定, 于是算出  $y$  的极端值: 0 及 3.

解出后一不等式, 可以看见  $\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{2}$ . 但对  $y > 2$ , 极端  $\frac{y}{2}$  已越出区间  $[0, 1]$ ,  $x$  的变化一直受这区间限制的. 因此, 当  $0 \leq y \leq 2$  时变量  $x$  自  $\frac{y}{3}$  变到  $\frac{y}{2}$ , 而当  $2 \leq y \leq 3$  时, 自  $\frac{y}{3}$  变到 1.

如观察到积分区域是由直线  $y = 3x$ ,  $y = 2x$  及  $x = 1$  所围成的三角形 (作图!), 则特别简单地从几何上可得出这一结果.

<sup>①</sup>这两数都不越出区间  $[0, 4]$  的范围!



答 我们得到两个逐次积分的和:

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^1 f dx \quad (\text{比较 4) 及 5)(B)}).$$

(Г) 答 我们得到三个逐次积分的和:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy.$$

8) 将下面的式子写成一个逐次积分的样子:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^1 f(x, y) dx, \\ \text{(б)} \quad & \int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^3 f(x, y) dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

答 (a)  $\int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f dy$ ; (б)  $\int_1^3 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f dy$ .

(建议在所有情形下都作图.)

9) 求证: 积分学中常用的表明由  $x$  轴、纵坐标  $x = a, x = b$  及曲线  $y = f(x)$  (其中  $f \geq 0$ ) 所围的曲边梯形面积的公式

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

是显明等式

$$P = \iint_{(P)} dx dy$$

的一推论.

提示 利用公式 (6).

10) 求证公式

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx, \quad (10)$$

其中  $f(x, y)$  是在由直线  $y = a, x = b, y = x$  所围成的三角形  $(\Delta)$  上连续的任意函数.

提示 参看图 47; 利用公式 (9), 亦即令区域  $(\Delta)$  上的二重积分所化成的两个逐次积分相等.

所证明的公式通常与狄利克雷的名字联在一起; 它有各种不同的应用, 特别是在沃尔泰拉(G. Volterra) 的所谓积分方程理论中有许多应用.

11) 借公式 (10) 容易证明

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-2} f(t) dt = \frac{1}{n-1} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt.$$

逐次应用这一公式得出结果:

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_1}}_n f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt,$$

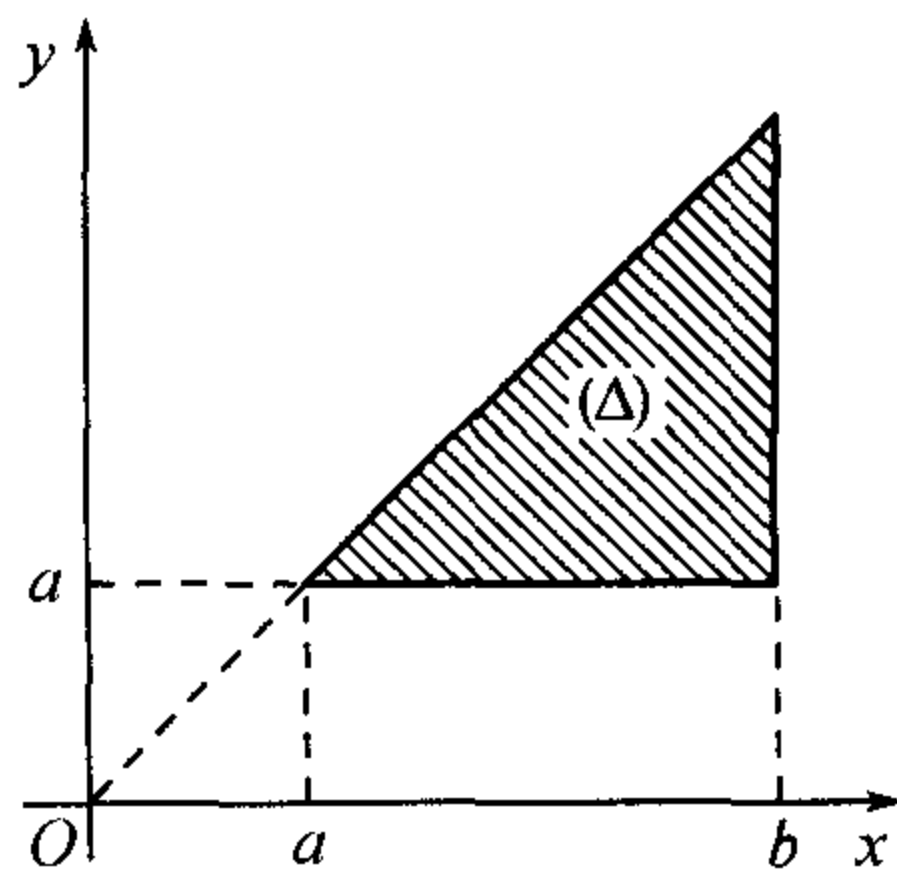


图 47



这在以前 [511,12)] 用别的方法已证明过.

12) 假定  $p \geq 1$  及  $q \geq 1$ ,<sup>①</sup> 计算积分

$$I = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy.$$

由公式 (5) 我们有

$$I = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} dy = \frac{1}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{1}{q} B(p, q+1).$$

最后

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

这一公式是属于狄利克雷的, 式中  $\Gamma(p)$  是  $\Gamma$  函数.

13) 假定  $p \geq 1, q \geq 1, r \geq 1$ ,<sup>①</sup> 计算更一般的积分

$$J = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy.$$

开始, 与上面一样,

$$J = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dy.$$

再用替换  $y = (1-x)t$  将里面的积分变换, 结果得:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+r-1} dx \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{r-1} dt \\ &= B(p, q+r) B(q, r) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}. \end{aligned}$$

14) 计算较前面更广的积分:

$$K = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q+r}}$$

(其中  $\alpha, \beta \geq 0, \gamma > 0$ , 此外,  $p \geq 1, q \geq 1, r \geq 1$ ).<sup>①</sup>

变成逐次积分, 得

$$K = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} \frac{y^{q-1} (1-x-y)^{r-1}}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q+r}} dy,$$

<sup>①</sup>这里我们作这种限制只是为了避免积分号下的函数变成无穷, 以后 [617,14)] 限制要放松.



再经替换  $y = (1-x)t$  后, 改变积分次序:

$$K = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1} dt \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}}{[\alpha x + \beta t(1-x) + \gamma]^{p+q+r}} dx.$$

为了计算里面的积分, 利用一已经知道的结果 [534, 2)]. 则

$$K = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p} \int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{r-1}}{(\beta t + \gamma)^{q+r}} dt,$$

再运用同一结果, 最后:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p} \cdot \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \cdot \frac{1}{(\beta+\gamma)^{q+r}} \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^{q+r}}. \end{aligned}$$

15) 设函数  $f(x, y), g(x, y)$  在有界闭区域  $(D)$  上连续, 且函数  $g$  的最小及最大值设为  $m$  及  $M$ ; 设  $\varphi(u)$  表一函数, 对  $m \leq u \leq M$  连续.

以  $\psi(u)$  表积分

$$\iint_{m \leq g \leq u} f(x, y) dx dy$$

展布在区域  $(D)$  的适合所示不等式的那一部分.<sup>①</sup>

则卡塔兰 (E. Catalan) 公式成立:

$$\iint_{m \leq g \leq M} f(x, y) \varphi(g(x, y)) dx dy = \int_m^M \varphi(u) d\psi(u),$$

其中右端的积分是在斯蒂尔切斯意义下取的.

因为连续函数永远可以表作两正的连续函数的差, 故在证明这一公式时我们可以简单地认为函数  $f$  是正的.

将区间  $[m, M]$  任意地分为许多部分:

$$m = u_0 < u_1 < \cdots < u_i < u_{i+1} < \cdots < u_n = M,$$

与此相应, 我们就将所提出的积分 (将它表作  $I$ ) 拆开:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{u_i \leq g \leq u_{i+1}} f \cdot \varphi(g) dx dy \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*)) \iint_{u_i \leq g \leq u_{i+1}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>我们假定, 方程  $g(x, y) = u$  表一闭曲线,<sup>92)</sup> 故正文中所提到的部分区域是由两个这样的曲线所限制着的.

<sup>92)</sup>这里也隐含着所给定的曲线面积为零的假设.



我们这里利用了推广的中值定理;  $(\xi_i^*, \eta_i^*)$  是能使  $u_i \leq g \leq u_{i+1}$  成立的区域<sup>93)</sup>中某一点, 故令  $g(\xi_i^*, \eta_i^*) = u_i^*$ , 我们将有  $u_i \leq u_i^* \leq u_{i+1}$ . 这样. 最后,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(u_i^*) [\psi(u_{i+1}) - \psi(u_i)].$$

右端的和我们知道是斯蒂尔切斯和. 当  $\max \Delta u_i \rightarrow 0$  时取极限, 得所需结果:

$$I = (S) \int_m^M \varphi(u) d\psi(u).$$

如对函数  $\psi(u)$ , 有连续 (或至少绝对可积) 的导函数  $\psi'(u)$ , 则斯蒂尔切斯积分就可用普通的来代替:

$$I = \int_m^M \varphi(u) \psi'(u) du.$$

16) 作为一例题, 按照卡塔兰的方法, 我们从狄利克雷的基本公式 [参看 12)] 可以推出一个属于刘维尔 (J.Liouville) 的较一般的公式.

特别, 取

$$f(x, y) = x^{p-1} y^{q-1}, \quad g(x, y) = x + y,$$

并选取三角形  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$  作为区域  $(D)$ . 则按狄利克雷公式, 当  $0 < u \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq u}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = u^{p+q} \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} u^{p+q}, \end{aligned}$$

利用卡塔兰变换后, 我们将有

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} \varphi(x+y) dx dy &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \int_0^1 \varphi(u) du^{p+q} \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du, \end{aligned}$$

这就是刘维尔公式.

17) 求由下列各曲面所围立体的体积:

(a) 平面  $x=0, y=0, z=0$ , 圆柱  $x^2 + y^2 = R^2$  及双曲抛物面  $z = xy$  (在第一个卦限内);

(b) 平面  $x=0, y=0, z=0, x+2y=1$  及曲面  $z = x^2 + y + 1$ ;

(c) 平面  $y=1, z=0$ , 抛物柱  $y = x^2$  及抛物面  $z = x^2 + y^2$ ;

(d) 平面  $y=0, z=0, y = \frac{b}{a}x$  及椭圆柱  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

答 (a)  $V = \int_0^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \frac{1}{8} R^4$ ;

(b)  $V = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{1-2y} (x^2 + y + 1) dx = \frac{1}{3}$ ;

<sup>93)</sup>所提到的区域从而假定是连通的.



$$(B) V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105};$$

$$(r) V = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dy = \frac{abc}{3}.$$

18) 同样, 对由下列各面所围的立体:

(a) 椭圆柱  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  及平面  $z = 0$  与  $z = \lambda x + \mu y + h (h > 0)$ ;

(b) 柱面  $az = y^2, x^2 + y^2 = r^2$  及平面  $z = 0$ ;

(B) 被平面  $z = p, z = q (0 < p < q), x = r, x = s (0 < r < s)$  在曲面  $xyz = a^3$  上所割下的部分, 这一部分在  $xy$  平面上的射影以及射影时的柱面.

$$\text{答 (a)} V = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (\lambda x + \mu y + h) dy = \pi abh = Ph$$

(如  $P$  是椭圆的面积, 这一结果在几何上很明显);

$$(b) V = \frac{4}{a} \int_0^r dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y^2 dx = \frac{4}{a} \int_0^r y^2 \sqrt{r^2-y^2} dy = \frac{\pi r^4}{4a};$$

$$(B) V = \int_r^s dx \int_{\frac{a^3}{qx}}^{\frac{a^3}{px}} \frac{a^3}{xy} dy = a^3 \ln \frac{q}{p} \ln \frac{s}{r}.$$

19) 求旋转抛物面  $y^2 + z^2 = 4ax$  被圆柱  $x^2 + y^2 = 2ax$  所割下立体的体积  $V$ .

解 我们有:

$$V = 4 \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2} dy.$$

在熟知的公式

$$\int \sqrt{b^2-y^2} dy = \frac{b^2}{2} \arcsin \frac{y}{b} + \frac{y}{2} \sqrt{b^2-y^2}$$

中令  $b^2 = 4ax$ , 计算出原函数  $\int \sqrt{4ax-y^2} dy$ , 并借它求出里面的积分:

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2} dy = 2ax \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}} + \frac{x}{2} \sqrt{4a^2-x^2}.$$

用分部积分法又得:

$$\begin{aligned} 2a \int_0^{2a} x \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}} dx &= \frac{a}{2} \int_0^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}} dx \\ &= \frac{a}{2} \left( 2a^2 \arcsin \frac{x}{2a} - \frac{x}{2} \sqrt{4a^2-x^2} \right) \Big|_0^{2a} = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

最后

$$\frac{1}{2} \int_0^{2a} x \sqrt{4a^2-x^2} dx = \frac{4}{3} a^3,$$

而

$$V = 4 \left( \frac{\pi a^3}{2} + \frac{4}{3} a^3 \right) = a^3 \left( 2\pi + \frac{16}{3} \right).$$

20) 求球  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被圆柱  $x^2 + y^2 = Rx$  所割下立体的体积 (图 48).<sup>①</sup>

解 我们有:

$$V = 4 \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

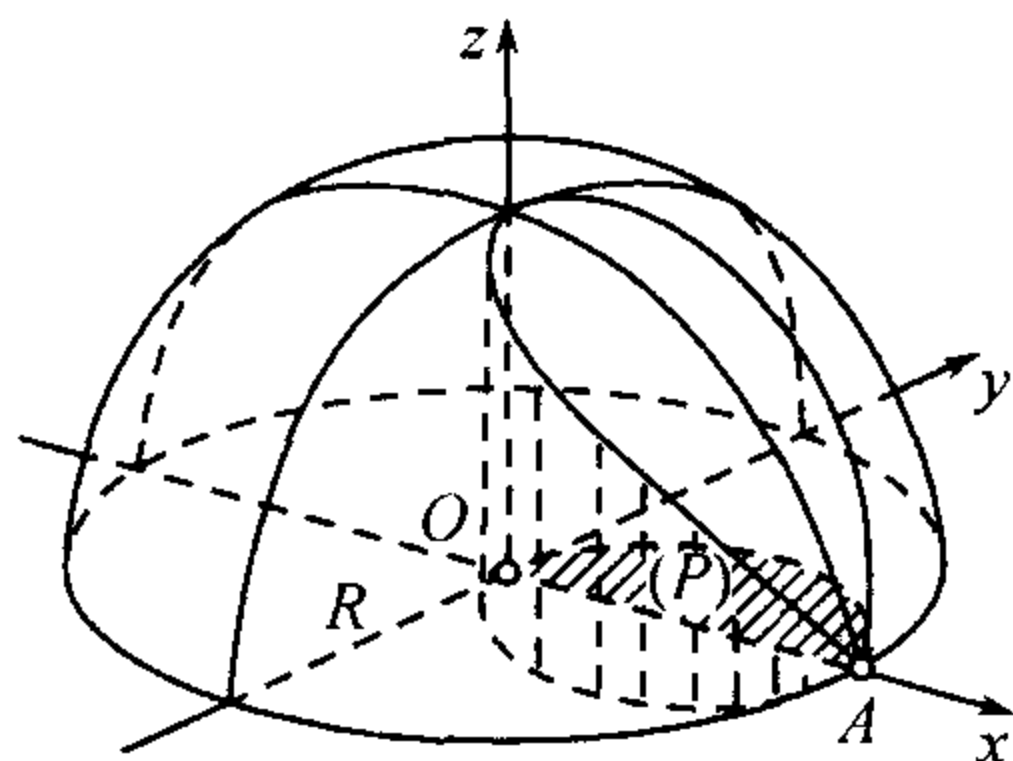


图 48

<sup>①</sup>这一立体有时候用 17 世纪意大利数学家的名字称为维维亚尼 (Viviani) 立体, 他首先研究它.



其中  $(P)$  是  $xy$  平面第一象限内由曲线  $x = 0$  及  $x^2 + y^2 = Rx$  所围的半圆, 或者

$$V = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy.$$

但

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \\ &= \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \\ &= \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} + \frac{1}{2} \sqrt{R}(R-x)\sqrt{x}. \end{aligned}$$

分部积分, 得:

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} dx = \frac{\pi R^3}{12} - \frac{\sqrt{R}}{12} \int_0^R \frac{3R^2 x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{R+x} dx.$$

例如, 用替换  $x = Rt^2$  容易求出后一积分的值:

$$\frac{\sqrt{R}}{12} \cdot 2R^2 \sqrt{R} \cdot \left( \frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{16}{45} - \frac{\pi}{12} \right) R^3,$$

所以

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} dx = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{16}{45} \right) R^3.$$

其次, 不难求出,

$$\frac{1}{2} \sqrt{R} \int_0^R (R-x) \sqrt{x} dx = \frac{2}{15} R^3,$$

所以, 最后,

$$V = 4 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3. \textcircled{1}$$

**附注** 因为半球的体积是  $\frac{2}{3} \pi R^3$ , 故在拿掉维维亚尼立体后所余部分的体积等于  $\frac{8}{9} R^3$ . 有趣的是, 它可不带任何无理数用  $R$  表示出来.

## 21) 计算积分

$$I_1 = \iint_{(A)} y dx dy, \quad I_2 = \iint_{(A)} x dx dy,$$

其中  $(A)$  是由摆线的一拱

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

与  $x$  轴所围起来的区域.

<sup>①</sup>以后我们将指出计算这一体积的一个大为简便的方法[611,6)].



**解** 这一问题的特点在于区域的边界是用参数方程给出的. 然而摆线上点的纵坐标  $y$  还是横坐标  $x$  的单值连续函数:  $y = y(x)$ , 所以, 变到逐次积分时, 由一般公式我们有

$$I_1 = \int_0^{2\pi R} dx \int_0^{y(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} y^2(x) dx.$$

为了避免未知函数  $y(x)$  而回到已知函数, 我们作替换  $x = a(t - \sin t)$ . 则  $y(x)$  应该用  $a(1 - \cos t)$  代替, 因而得到

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 da(t - \sin t) = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi a^3.$$

同样,

$$I_2 = 3\pi^2 a^3.$$

## 22) 计算积分

$$K = \iint_{(B)} xy dx dy,$$

其中区域  $(B)$  是由坐标轴及星形线的一部分

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

所围起来的.

**答**  $K = \frac{1}{80} R^4.$

**598. 力学应用** 所有的几何及力学量, 与某一图形  $(P)$  上平面地连续分布的质量有关而且在区域中为可加的函数时, 原则上可表作取在这一图形上的二重积分. 在第 593 目中我们已经详细讨论到这一问题. 特别, 我们已看见过, 分布质量的大小本身可由已知的分布密度  $\rho(M) = \rho(x, y)$  表为:

$$m = \iint_{(P)} \rho dP. \quad (11)$$

这里我们想简略地说明一下通常如何得到这种类型的公式. 这里思想的条理与在定积分的应用 [参看 348] 时相同.

在图形  $(P)$  中取出一元素部分  $(dP)$ , 作一使计算简化的假定, 例如, 整个这元素的质量集中在一个点, 或质量分布的密度在这元素的范围内是常数, 这就可使对所求量  $Q$  的元素  $dQ$  给以一形如

$$dQ = q(M)dP$$

的近似值, 正确到一高于  $dP$  的阶的无穷小, 则  $Q$  的准确值就可表作公式

$$Q = \iint_{(P)} q(M)dP.$$

可以用两种方法建立这一公式 (如在 348 中那样!).

首先, 将元素  $dQ$  的近似式加起来, 可得出积分和形式的量  $Q$  的近似值, 而变到极限时就可得到已经是和的极限形式亦即积分形式的准确值  $Q$  了.



另一方面, 由元素  $dQ$  的表示式本身就可作出结论:  $q(M)$  是量  $Q$  (在点  $M$  处) 的“对区域的导数”, 于是, 由第 593 目所述, 又可推得同一结果.

容易观察到, 例如, 对坐标轴的元素静矩及元素惯矩为

$$\begin{aligned} dM_x &= y\rho dP, & dM_y &= x\rho dP, \\ dI_x &= y^2\rho dP, & dI_y &= x^2\rho dP; \end{aligned}$$

于是对这些矩本身立刻得到

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \iint_{(P)} y\rho dP, & M_y &= \iint_{(P)} x\rho dP, \\ I_x &= \iint_{(P)} y^2\rho dP, & I_y &= \iint_{(P)} x^2\rho dP. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

现在用普通的方法可得到图形重心的坐标:

$$\xi = \frac{\iint_{(P)} x\rho dP}{m}, \quad \eta = \frac{\iint_{(P)} y\rho dP}{m}. \quad (13)$$

在均匀图形的情况下:  $\rho = \text{常数}$ , 这些公式就可简化:

$$\xi = \frac{\iint_{(P)} x dP}{P}, \quad \eta = \frac{\iint_{(P)} y dP}{P}. \quad (14)$$

在各个简单的情况下, 用二重积分也可概括一些对立体的亦即对柱形长条的类似问题.

设已知这样一长条, 由曲面  $z = z(x, y)$ , 它在  $xy$  平面上的射影  $(P)$  及母线与  $z$  轴平行的射影柱面所围起来的. 例如, 如要确定均匀条子 (为简单起见假定立体的密度等于 1) 的静矩  $M_{xy}$ , 则我们就设想这一条子是由许多以  $dP$  为底以  $z$  为高的细条构成的. 细条对于  $xy$  平面的静矩等于它的质量或在所给情况下, 也就是 —— 体积  $z dP$ , 乘上自这一平面到它的重心的距离, 亦即乘上  $\frac{1}{2}z$ . 这样, 元素静矩为

$$dM_{xy} = \frac{1}{2}z^2 dP,$$

于是, 对所有的细条子相加, 得

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dP. \quad (15)$$

同样, 可建立公式

$$M_{zx} = \iint_{(P)} yz dP, \quad M_{yz} = \iint_{(P)} xz dP. \quad (15a)$$

由此容易得出长条重心的坐标  $\xi, \eta, \zeta$  的表示式:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\iint_{(P)} xz dP}{V}, \text{ 等等.}$$

同样可推演出长条对  $z$  轴的惯矩  $I_z$  及对坐标面的惯矩  $I_{yz}, I_{zx}$ :

$$I_z = \iint_{(P)} (x^2 + y^2)z dP, \quad I_{zx} = \iint_{(P)} y^2 z dP, \quad I_{yz} = \iint_{(P)} x^2 z dP, \quad (16)$$

并且很清楚,  $I_z = I_{zx} + I_{yz}$ .

如质量分布的空间密度  $\rho$  不是常数, 但仅与  $x, y$  有关 (即沿细条总是常数), 则与前面一样可用二重积分来处理. 但是, 在一般情形下, 当  $\rho$  也与  $z$  有关时, 二重积分就不够, 而必须要用到三重积分 [参看 649] 了.



**599. 例** 1) 设图形  $(P)$  是由曲线  $y = f(x)$ ,  $x$  轴的一段及两纵坐标  $x = a$  与  $x = b$  所围成的一曲边梯形, 又设沿这一图形所分布质量的密度为 1. 试求静矩  $M_x$  及  $M_y$ .

将公式 (12) 变成逐次积分, 我们将有:

$$M_x = \iint_{(P)} y dP = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$M_y = \iint_{(P)} x dP = \int_a^b x dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b x f(x) dx,$$

或更简单地,

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx,$$

我们回到了以前就得到过的 [351] 静矩的表示式.

建议读者重复对惯矩  $I_x$  及  $I_y$  的这些计算.

2) 柱形长条  $(V)$  以平面图形  $(P)$  为底, 而上面被一任意平面  $(K)$  所限制. 求证: 立体体积  $V$  等于底面积  $P$  与通过底的重心到平面  $(K)$  为止和底面相垂直的垂线的乘积.

如坐标轴放着与通常一样 (图 49), 平面  $(K)$  的方程为

$$z = ax + by + c,$$

则由第 586 目公式 (2\*),

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(P)} (ax + by + c) dP \\ &= a \iint_{(P)} x dP + b \iint_{(P)} y dP + c \iint_{(P)} dP \\ &= (a\xi + b\eta + c)P = Pk. \end{aligned}$$

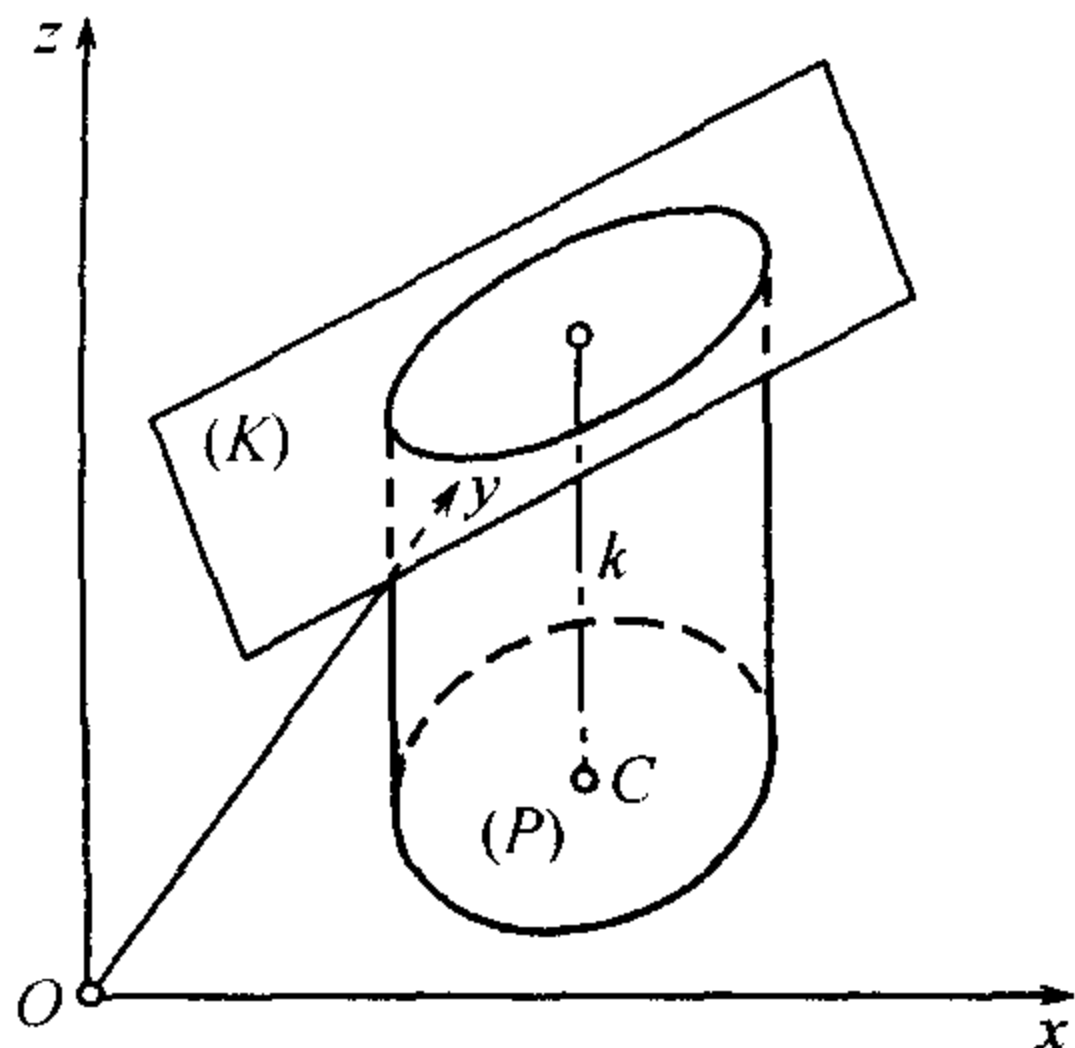


图 49

3) 求证: 如在图形  $(P)$  的平面中取两相距  $h$  的平行轴  $x$  及  $x'$ , 且第一个轴通过图形的重心, 则图形对这两轴的惯矩以关系式

$$I_{x'} = I_x + h^2 m$$

相联, 其中  $m$  为图形的质量.

取  $x$  为横轴, 我们有

$$I_{x'} = \iint_{(P)} (y - h)^2 \rho dP = I_x - 2hM_x + h^2 m.$$

因为由假设,  $M_x = 0$ , 故得所需的等式.

4) 一质点的极惯矩就是点的质量与它到极的距离平方的乘积. 容易明白什么是一平面图形的极惯矩.

将极放在坐标原点  $O$ , 求证极惯矩

$$I_O = I_x + I_y.$$



5) 设在  $xy$  平面中已给一任意图形  $(P)$ . 试求这一图形对一与  $x$  轴夹角为  $\theta$  的任意轴  $Ou$  的惯矩一般表示式 (图 50).

如取轴  $Ou$  及垂直于它的轴  $Ov$  为新的坐标轴, 则如大家所知, 新坐标  $u, v$  与旧坐标  $x, y$  以关系式

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

相联系. 故

$$\begin{aligned} I_u &= \iint_{(P)} v^2 \rho dP \\ &= \cos^2 \theta \cdot \iint_{(P)} y^2 \rho dP - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \iint_{(P)} xy \rho dP + \sin^2 \theta \iint_{(P)} x^2 \rho dP. \end{aligned}$$

$\cos^2 \theta$  及  $\sin^2 \theta$  的系数, 可以看出来, 是对坐标轴的惯矩  $I_x$  及  $I_y$ , 但除此以外还遇见了一量

$$K_{xy} = \iint_{(P)} xy \rho dP,$$

称为离心矩 [参看下面第 7 题] 或惯性积. 因此,

$$I_u = I_x \cos^2 \theta - 2K_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta. \quad (17)$$

为了清楚说明当轴  $Ou$  转动时图形的惯矩变化情形, 我们这样做. 在轴  $Ou$  上截取一线段

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

(参看图 50) 并考察这样所得点  $N$  的几何轨迹, 如以  $x, y$  表点  $N$  的坐标, 则

$$x = ON \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{I_u}}, \quad y = ON \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{I_u}}.$$

以  $I_u$  除关系式 (17), 得到所述的几何轨迹的方程:

$$I_x x^2 - 2K_{xy} xy + I_y y^2 = 1. \quad (18)$$

推广布尼亚科夫斯基不等式到二重积分的情形, 容易看见, 判别式

$$I_x I_y - K_{xy}^2 > 0,$$

故曲线 (18) 是椭圆. 它称为惯性椭圆.

如  $K_{xy} = 0$ , 方程 (18) 就有形式

$$I_x x^2 + I_y y^2 = 1.$$

这就证明了, 在这一情况下坐标轴就是惯性椭圆的轴 (主惯性轴).

6) 关于离心矩  $K_{xy}$ , 求证:

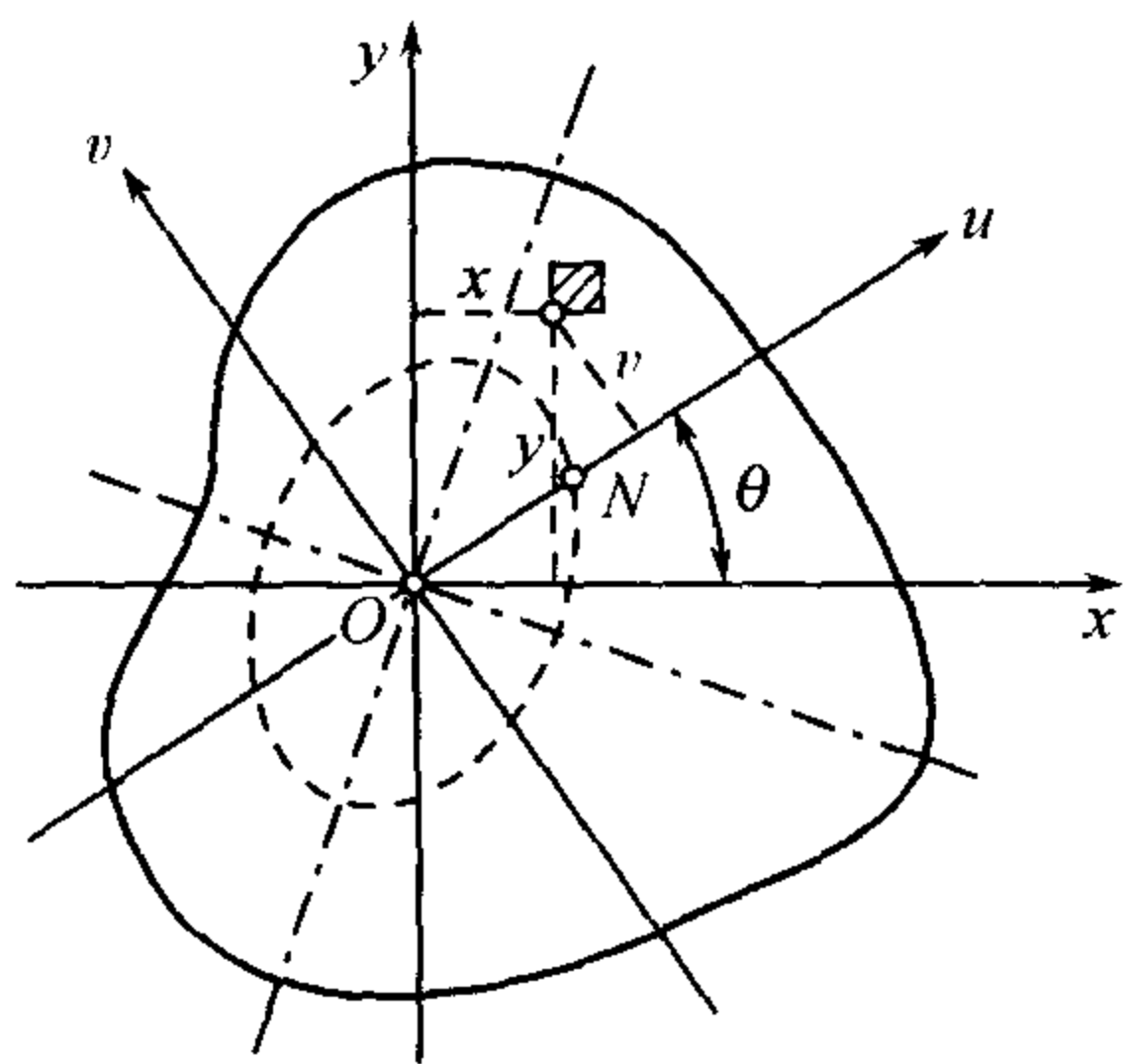


图 50



(a) 如两轴之一, 例如  $y$  轴, 是图形  $(P)$  的对称轴及其上面分布质量的对称轴,<sup>①</sup> 则  $K_{xy} = 0$ ;

(6) 如坐标原点是图形的重心, 又过点  $O_1(a, b)$  引平行于原来的轴的直线轴  $O_1x_1$  及  $O_1y_1$  (图 51), 则

$$K_{x_1y_1} = K_{xy} + ab \cdot P.$$

如  $K_{xy} = 0$ , 这公式就具有特别简单的样子, 即:

$$K_{x_1y_1} = ab \cdot P. \quad (19)$$

7) 设连续分布有质量的平面图形  $(P)$  (图 52) 以角速度  $\omega$  绕  $y$  轴旋转. 试确定这时所发生的离心力  $F$  的总大小及其对  $z$  轴的矩  $M$ .<sup>②</sup>

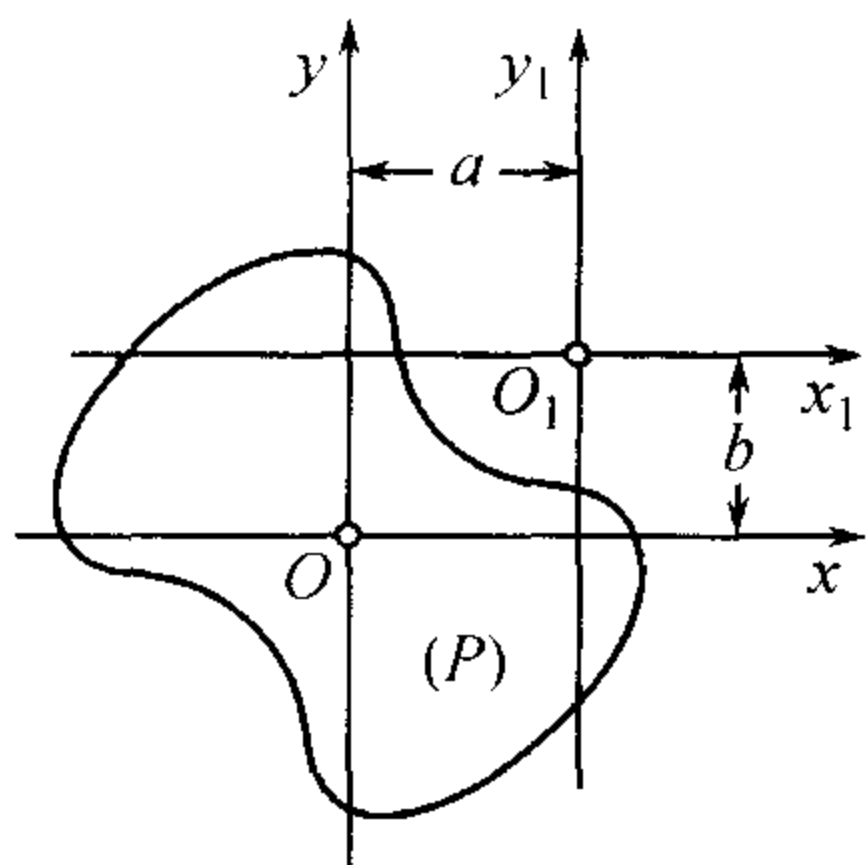


图 51

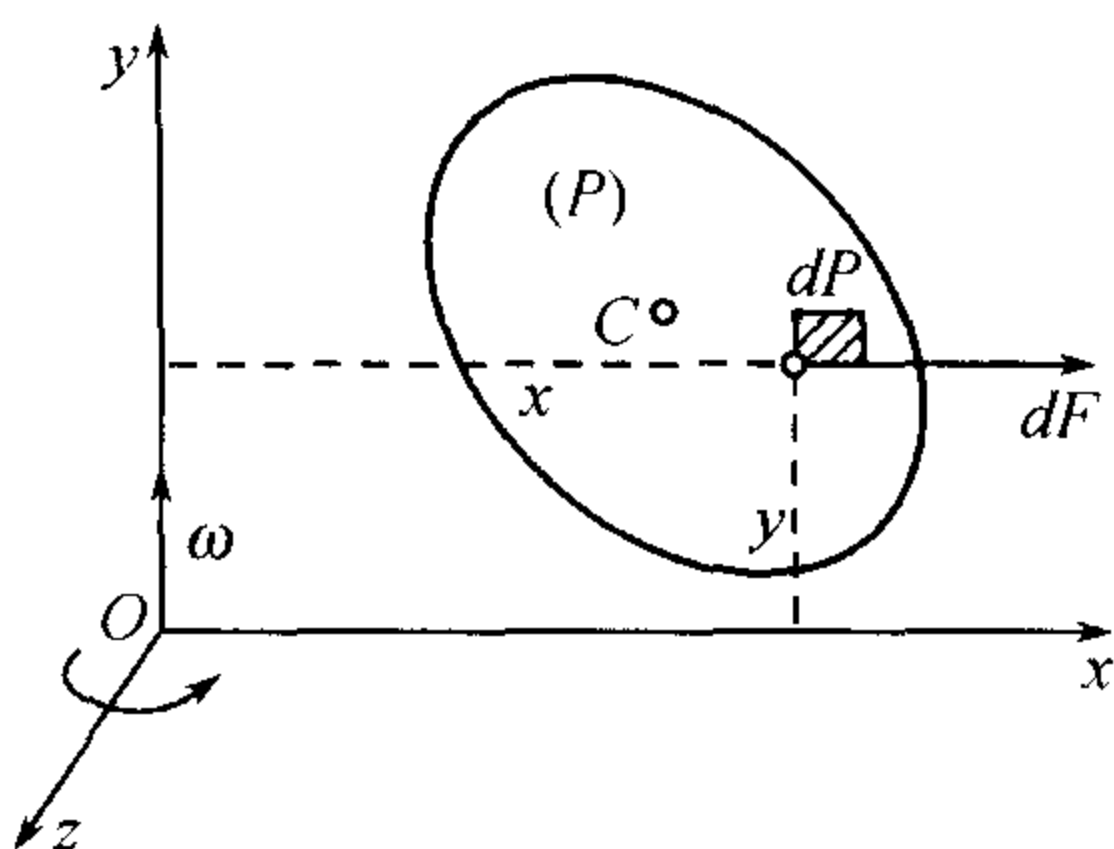


图 52

对元素  $\rho dP$  离心力等于

$$dF = \omega^2 x \rho dP$$

(当  $x > 0$  时朝向一边, 当  $x < 0$  时朝向另一边), 而它对  $z$  轴的矩

$$dM = \omega^2 xy \rho dP.$$

由此, 相加:

$$F = \omega^2 \iint_{(P)} x \rho dP = \omega^2 M_y,$$

$$M = \omega^2 \iint_{(P)} xy \rho dP = \omega^2 K_{xy}.$$

因此, 当  $\omega = 1$  时, 量  $K_{xy}$  是离心力矩; 于是名叫“离心矩”.

要离心力在旋转轴上的作用等于零, 必要且充分地需等式

$$M_y = 0, \quad K_{xy} = 0$$

适合.

第一式就是说我们图形的重心必在  $y$  轴上, 而第二式是说这一轴是主惯性轴. 因此, 离心力仅当旋转轴是图形的中心主惯性轴之一时就对旋转轴不发生任何作用.

<sup>①</sup>故  $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$ .

<sup>②</sup>对其它轴的矩显然等于 0.



8) 考察一由平面图形(P)(图 53) 绕一与它不相交的  $y$  轴旋转而得的立体. 求它的体积及它的重心  $C^*$ .

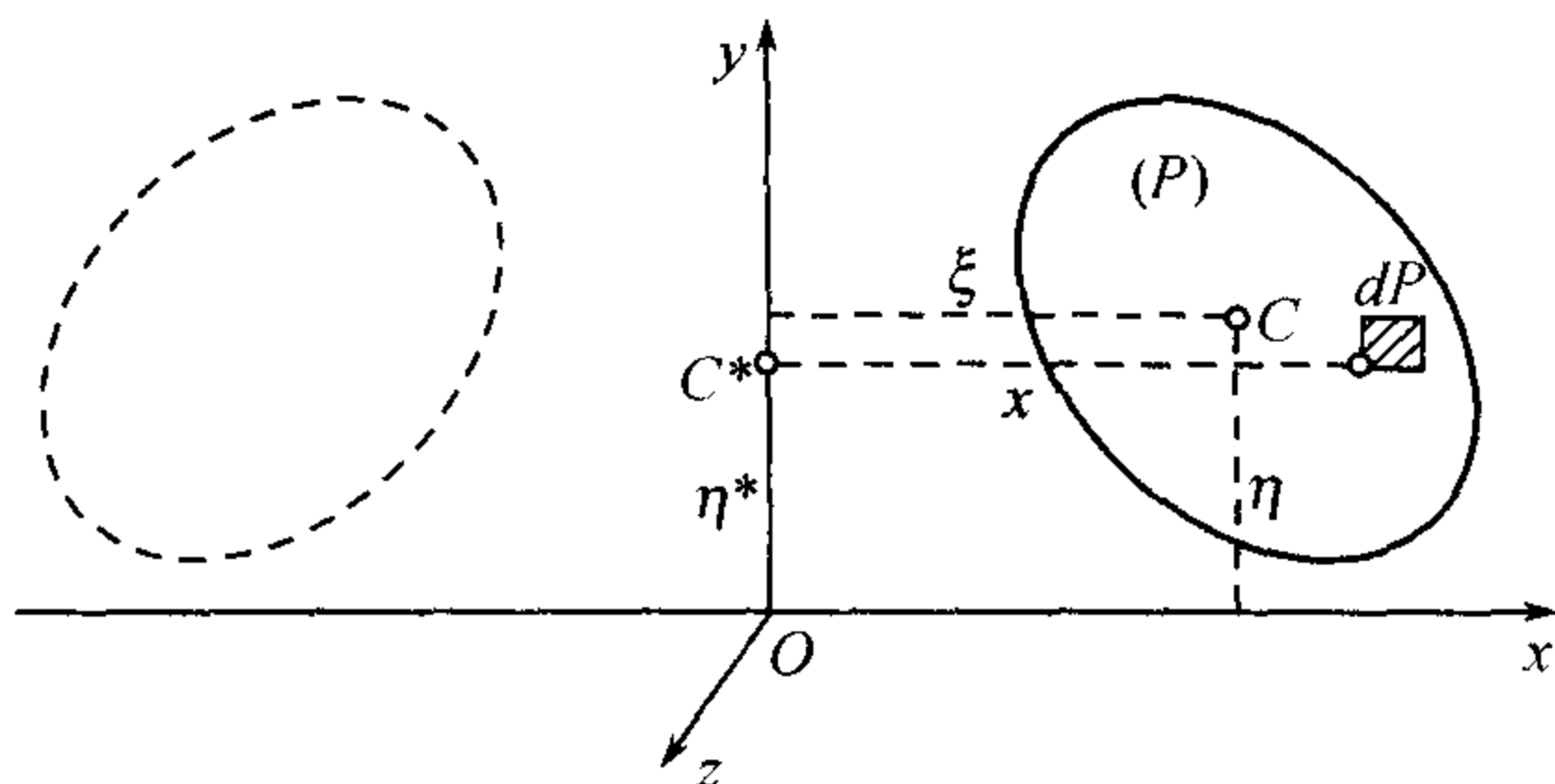


图 53

解 我们先取一由图形的元素  $dP$  所描画出的元素环, 它的体积可取为等于高为  $2\pi x$  底为  $dP$  的柱形的体积, 故

$$dV = 2\pi x \cdot dP,$$

且

$$V = 2\pi \iint_{(P)} x dP = 2\pi M_y = 2\pi \xi \cdot P,$$

其中  $M_y$  是我们图形对  $y$  轴的静矩, 而  $\xi$  是自这一轴到图形重心  $C$  的距离. 因此, 我们又得到了古尔丹定理 [351], 但这一次是对由任意边界所围成的图形.

刚才所谈到的元素环对于  $xz$  平面的静矩显然等于

$$dM = y dV = 2\pi xy dP,$$

故

$$M = 2\pi \iint_{(P)} xy dP = 2\pi K_{xy}.$$

因此, 重心  $C^*$  的坐标  $y = \eta^*$  等于

$$\eta^* = \frac{M}{V} = \frac{K_{xy}}{M_y}. \quad (20)$$

9) 应用这一公式到图形 (P) 是一直角三角形 (图 54) 的情形.

如图中的记法,

$$M_y = \frac{bh}{2} \left( a + \frac{1}{3}b \right) = \frac{bh(3a+b)}{6}$$

(因为三角形重心的位置大家都知道). 注意到三角形斜边的方程:

$$y = \frac{h}{b}(a+b-x).$$

我们求得  $K_{xy} = \frac{bh^2(4a+b)}{24}$ . 于是, 由 (20),  $\eta^* = \frac{h}{4} \cdot \frac{4a+b}{3a+b}$ .

可以看见, 这一坐标与三角形本身重心的坐标  $\eta = \frac{h}{3}$  不同.



10) 求证: 如被旋转的图形有一平行于旋转轴的对称轴 (图 55), 则必

$$\eta^* = \eta,$$

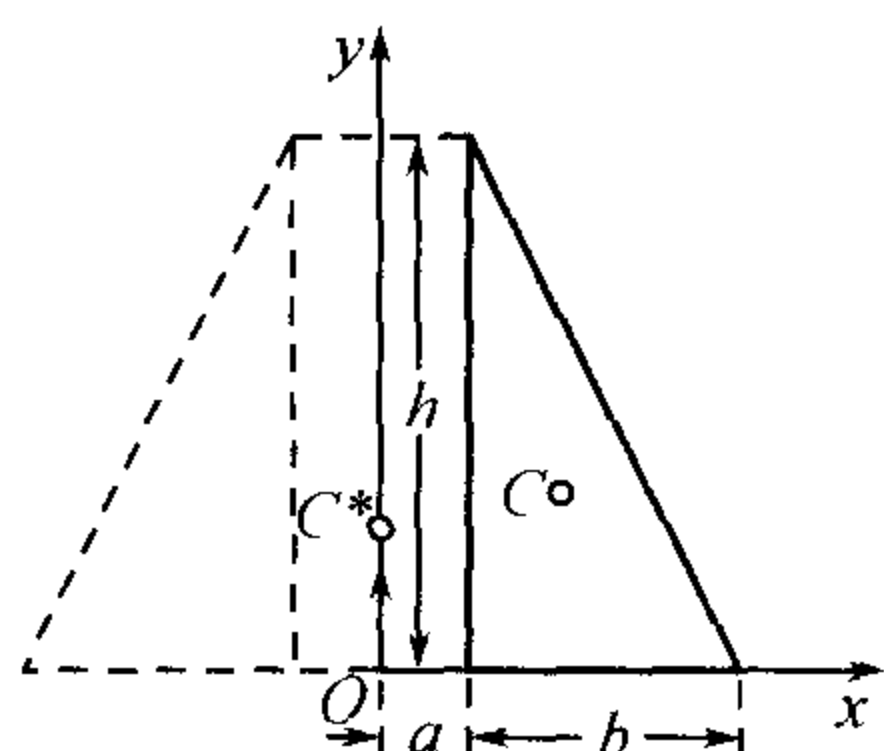


图 54

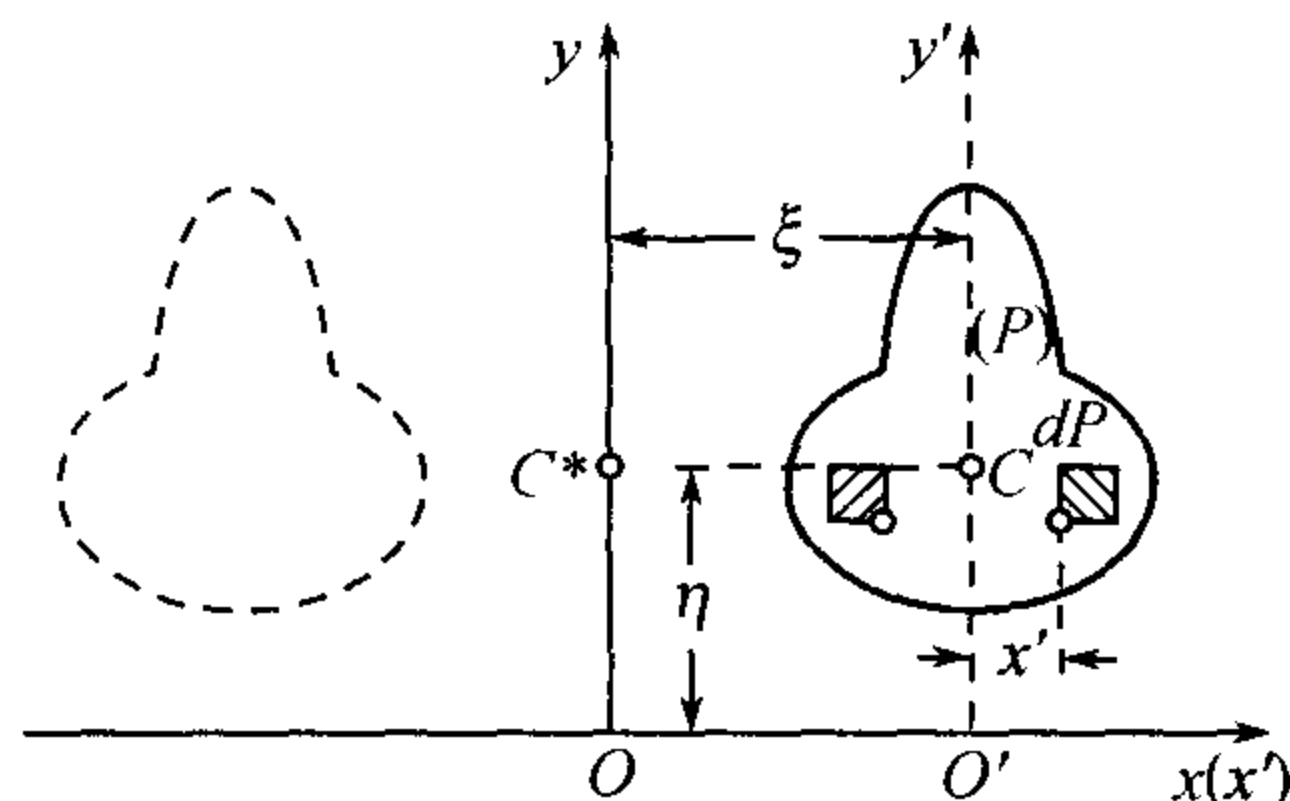


图 55

亦即, 立体的重心与平面图形的重心有同一高度.

提示 如考虑到  $K_{x'y'} = 0$ , 这可由 (20) 及 (19) 得出来 [参看 6)(a)].

11) 求证: 在同样的假定下, 将所考察的图形旋转后所得立体对旋转轴的惯矩可用公式  $I = 2\pi\xi(\xi^2 P + 3I_{y'})$  表示出来.

12) 应用公式 (15) 及 (15a) 到下一特殊情形: 设长条的底是一矩形  $[0, a; 0, b]$ , 长条的一面为椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

所限制.

$$\text{答 } \xi = \frac{3a^2q + 2b^2p}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{a}{4}, \quad \eta = \frac{2a^2q + 3b^2p}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{b}{4}, \quad \zeta = \frac{9a^4q^2 + 10a^2b^2pq + 9b^4p^2}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{1}{60pq}.$$

13) 求截头圆柱的重心 [343, 8]; 图 56].

解 用图中的记法, 截面方程为  $z = ky$ , 其中  $k = \tan \alpha$ , 这里半径为  $a$  的半圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  所围的半圆起 (P) 的作用. 我们有:

$$M_{zx} = \iint_{(P)} yz dP = k \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 dx dy = \frac{2k}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{8} ka^4$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dP = \frac{k}{2} \iint_P yz dP = \frac{\pi}{16} k^2 a^4, \quad M_{yz} = 0.$$

因为体积

$$V = \frac{2}{3} ka^3,$$

故

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{16} \pi a, \quad \zeta = \frac{3}{32} \pi ka.$$

14) 同样, 对于椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

含在第一卦限内的部分 (图 57).



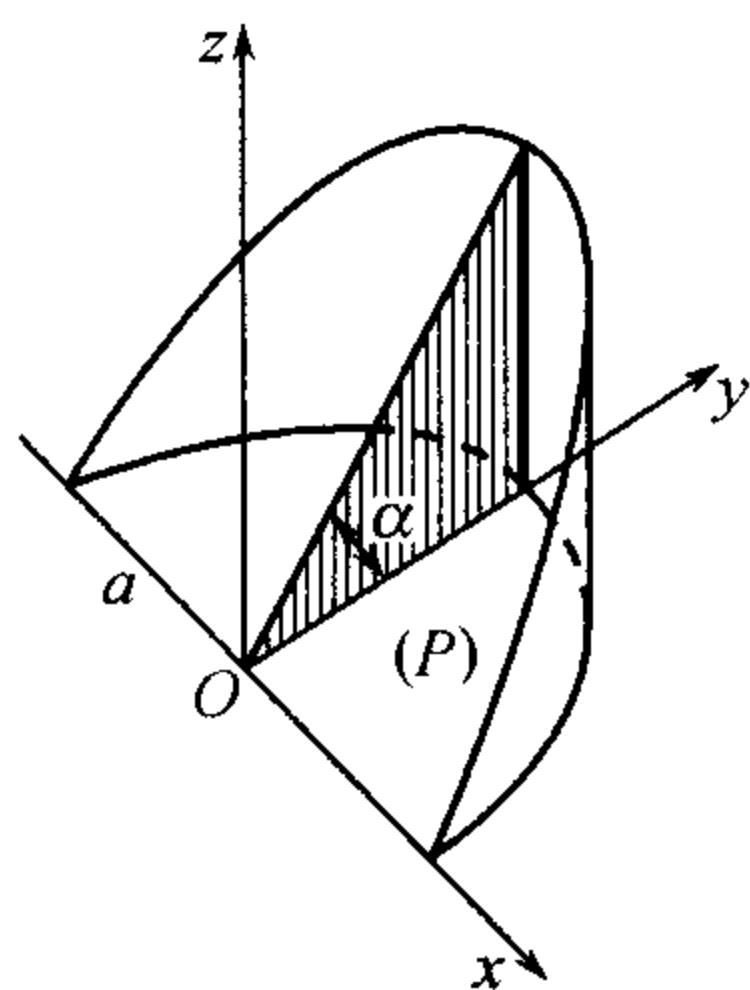


图 56

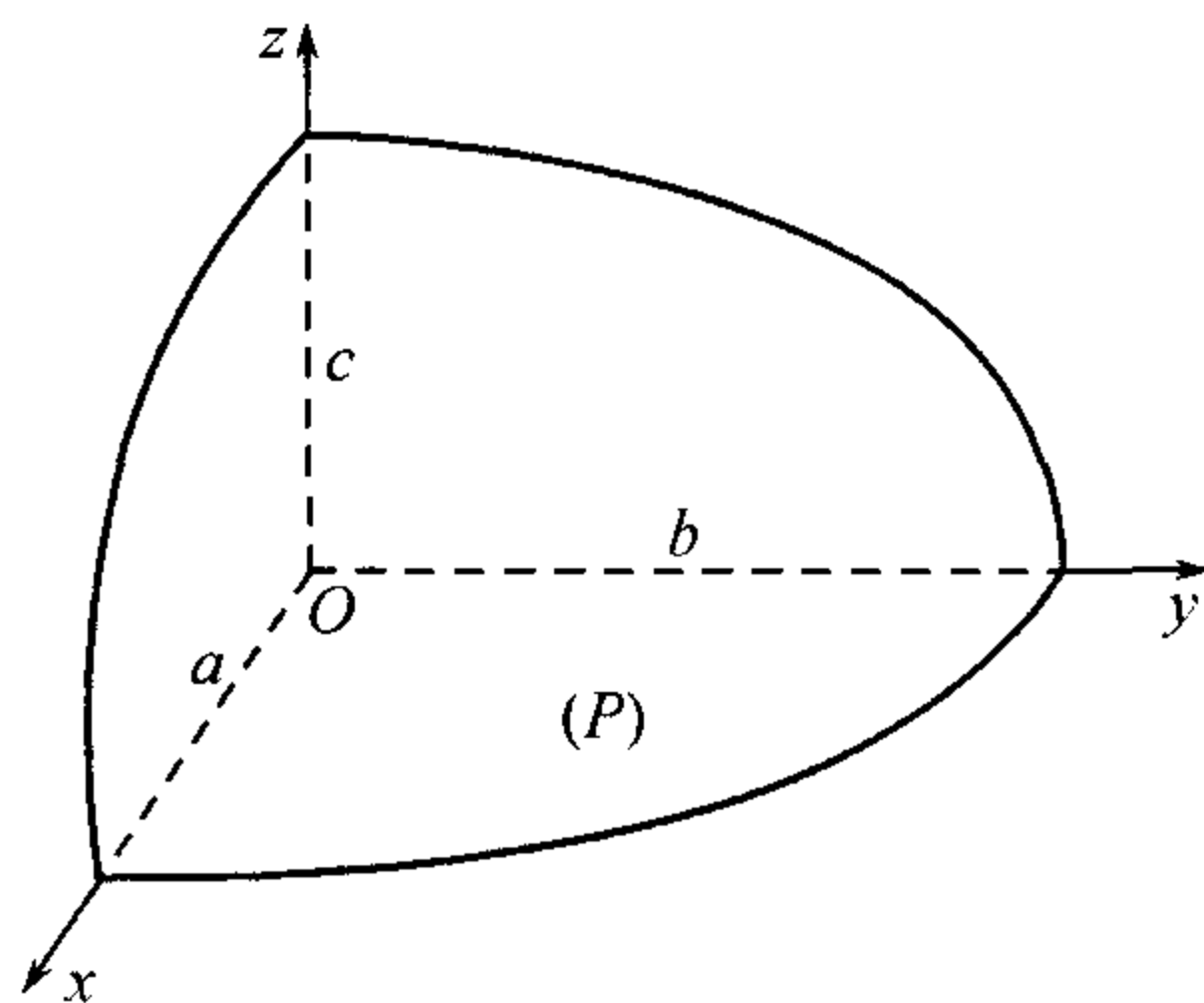


图 57

解 区域 (P) 是由坐标轴及椭圆

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

( $0 \leq x \leq a$ ) 所围起来的, 椭球表面方程的显式为

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

由公式 (15),

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{1}{2} c^2 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &= \frac{bc^2}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{16} abc^2. \end{aligned}$$

同样

$$M_{yz} = \frac{\pi}{16} a^2 bc, \quad M_{zx} = \frac{\pi}{16} ab^2 c.$$

同时体积

$$V = \frac{\pi}{6} abc,$$

故

$$\xi = \frac{3}{8} a, \quad \eta = \frac{3}{8} b, \quad \zeta = \frac{3}{8} c.$$

15) 试求一高为  $h$  半径为  $a$  的圆柱对通过其轴的任一平面的惯矩 (图 58).

解 选取坐标轴如图所示, 由公式 (16) 的第二个我们有

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \iint y^2 z dP = h \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 dy \\ &= \frac{4}{3} h \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{4} ha^4. \end{aligned}$$

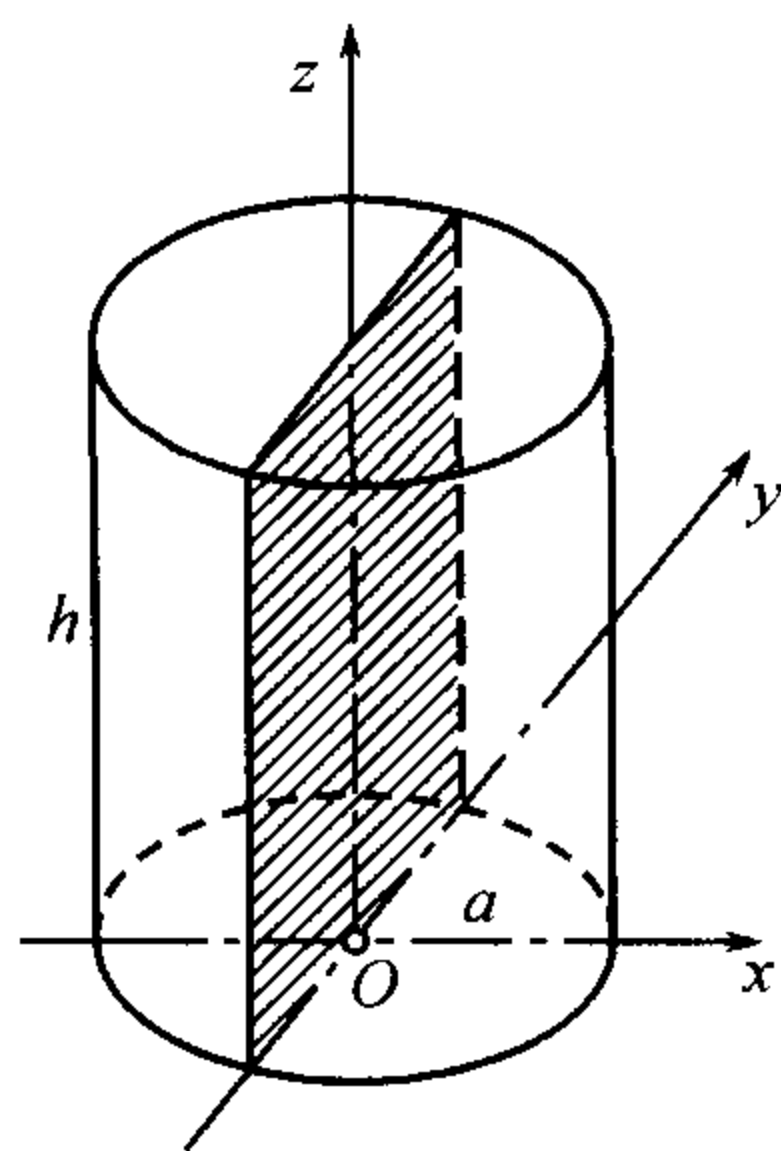


图 58



16) 试求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的惯矩  $I_z$ .

解 可以限于讨论椭球体的一个卦限 (图 57), 再将结果乘 8. 这时区域  $(P)$  是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的一象限.

我们有

$$\begin{aligned} I_{zx} &= 8 \iint_{(P)} y^2 z dP = \frac{8c}{a} \int_0^b y^2 dy \int_0^a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - x^2} dx \\ &= 2\pi ac \int_0^b y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{15} \pi ab^3 c. \end{aligned}$$

同样,

$$I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc.$$

最后,

$$I_z = I_{zx} + I_{yz} = \frac{4}{15} \pi abc(a^2 + b^2).$$

### §3. 格林公式

**600. 格林公式的推演** 在本目中我们建立联系二重积分与曲线积分的一非常重要的公式.

考察一区域  $(D)$ ——由闭路  $(L)$  所围的一“曲边梯形”(图 59),  $(L)$  是曲线

$$\begin{aligned} (PQ) : y &= y_0(x), & (a \leq x \leq b) \\ (RS) : y &= Y(x) \end{aligned}$$

及二平行于  $y$  轴的线段  $PS$  与  $QR$  组成.

假定在区域  $(D)$  中已给一函数  $P(x, y)$ , 且与其导函数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  同时连续.

现在由第 596 目公式 (6) 来计算二重积分

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

得

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

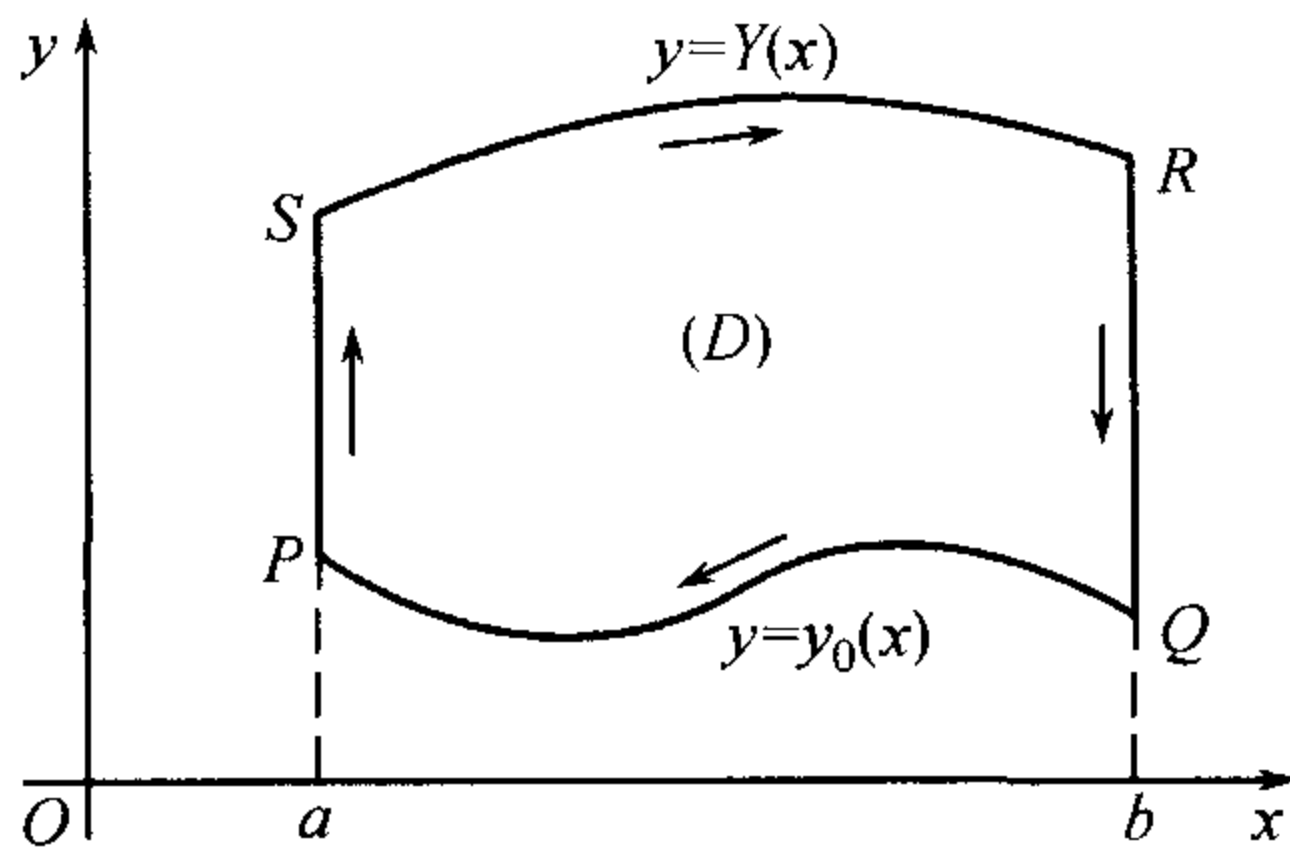


图 59



里面的积分这里借原函数  $P(x, y)$  之助很容易算出来, 即:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x)).$$

因此,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) dx.$$

这两个积分的每一个现在可以用曲线积分来代替. 事实上, 回想第 547 目的公式 (7), 可以看见,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, Y(x)) dx &= \int_{(SR)} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_0(x)) dx &= \int_{(PQ)} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{(SR)} P(x, y) dx - \int_{(PQ)} P(x, y) dx \\ &= \int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

如果要考察沿区域  $(D)$  的整个边界  $(L)$  的积分, 在所得等式的右端还要添加积分

$$\int_{(PS)} P(x, y) dx \quad \text{及} \quad \int_{(RQ)} P(x, y) dx,$$

显然, 它们是等于零的, 因为线段  $(PS)$  及  $(RQ)$  垂直于  $x$  轴 [参看 547]. 我们得到

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{(PS)} P dx + \int_{(SR)} P dx + \int_{(RQ)} P dx + \int_{(QP)} P dx.$$

这一等式的右端是沿着范围区域  $(D)$  的整个闭路  $(L)$  所取的积分, 不过是负向罢了. 按照我们所做的关于沿一闭路曲线积分记法的规定 [548], 我们可以将所得公式最后重写为:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} P(x, y) dx. \quad (1)$$

虽然这一公式是在坐标轴右手定向的假定下导得的, 但容易看出, 它在左手定向时保持不变 (只是闭路环行的方向掉换了).

导得的公式对于比所讨论的区域更复杂时也是正确的: 只要假定区域  $(D)$  可用平行于  $y$  轴的直线分为有限个所述形状的曲边梯形就够了. 我们将不再证明这一点了, 因为如要做起来与在第 551 目中当推广用曲线积分表示面积的公式时完全一样.



同样, 假定函数  $Q$  及其偏导函数  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  在区域  $(D)$  中连续时, 也可建立公式

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy. \quad (2)$$

这时首先取如图 60 中所画出的那样曲边梯形作为区域  $(D)$ . 它由曲线

$$\begin{aligned} \text{及} \quad (PS) : x &= x_0(y) \\ (QR) : x &= X(y) \end{aligned} \quad (c \leq y \leq d)$$

与两平行于  $x$  轴的线段  $(PQ)$  及  $(RS)$  围成的. 再与上面一样, 将公式推广到可用平行于  $x$  轴的直线分为有限个这种形状的曲边梯形的区域上.

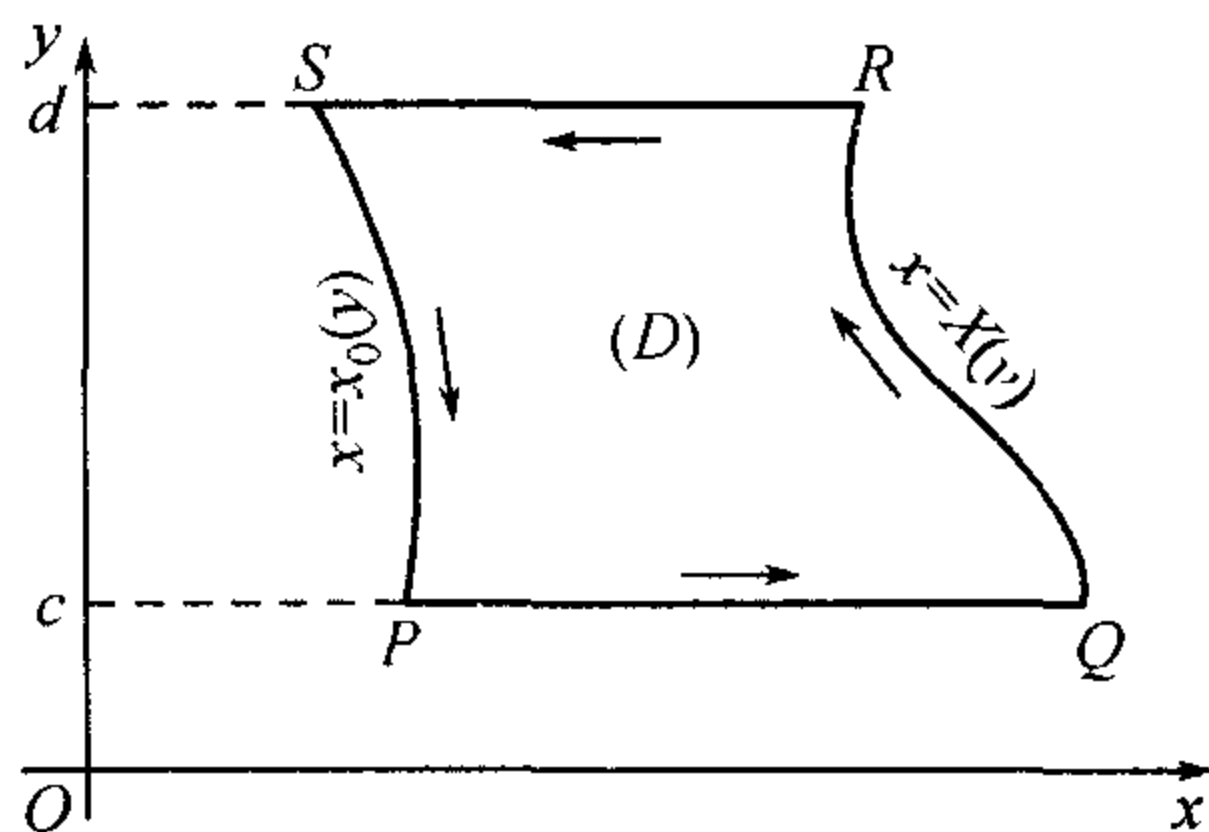


图 60

最后, 如区域  $(D)$  同时满足两种情况的条件, 即既可分为有限个第一类型的梯形, 又可(另外)分为有限个第二类型的梯形, 则对这区域, 公式 (1) 及 (2) 都成立, 当然, 还是假定函数  $P, Q$  及其导函数  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  都连续. 从公式 (2) 减去 (1), 得

$$\int_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3)$$

这就是著名的格林(G. Green)公式.<sup>①</sup>

第 551 目中用曲线积分表示面积的公式很容易从这里作为一特殊情形得出来. 例如, 令  $P = -y, Q = 0$  并利用显然的等式  $\iint_{(D)} dx dy = D$  后, 便得到第 551 目公式 (8).

与在第 551 目中一样, 这里使公式 (3) 得以正确的那些条件也可以取得一种更便于检查的形式. 亦即, 可以证明: 对于任何由一个或几个分段光滑的线路所围成的区域  $(D)$  格林公式成立.<sup>94)</sup>

设  $(L)$  是我们区域的总边界. 重复第 551 目中的推理, 在  $(L)$  内内接一折线  $(\Delta)$ , 并考察由它所围成的多角形区域  $(\Delta)$ . 为简单起见, 假定函数  $P$  及  $Q$  在区域  $(D)$  的外面, 例如在某一包含  $(D)$  在其内的矩形  $(R)$  内有意义, 连续, 且有连续的导函数  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ .<sup>②</sup> 可以认为  $(\Delta)$  也包含在  $(R)$  内. 因为多角形区域显然既可分为这种类型的又可分为那种类型的许多梯形, 故在它上面格林公式可以应用:

$$\int_{(\Delta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(\Delta)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4)$$

<sup>①</sup>有时它也称为高斯或黎曼公式.

<sup>②</sup>实际上, 对公式的正确性来说这一假定并非必要的.

<sup>94)</sup>这个论断的纯粹分析的证明比下面引述的要更为繁琐. 参看 551 目的脚注 80).



现在只要假定当闭路  $(L)$  被折线  $(\Lambda)$  的顶点所分成的弧段的最大直径趋近于零而变到极限. 等式 (4) 的左端由第 550 目的引理此时趋近于等式 (3) 的左端.

另一方面, 如同在第 551 目中我们已看见过的, 可选取折线  $(\Lambda)$  使它夹在多角形域  $(A)$  的外面及多角形域  $(B)$  的内面, 这两多角形域分别在  $(D)$  的里面及外面, 且它们的面积可相差得任意小:

$$B - A < \varepsilon.$$

可以认为  $(A)$  及  $(B)$  包含在上面所提到的矩形  $(R)$  内. 为简便起见令  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(D)} f dx dy - \iint_{(\Delta)} f dx dy \right| &= \left| \iint_{(D)-(A)} f dx dy - \iint_{(\Delta)-(A)} f dx dy \right| \\ &\leq \iint_{(D)-(A)} |f| dx dy + \iint_{(\Delta)-(A)} |f| dx dy \\ &\leq 2 \iint_{(B)-(A)} |f| dx dy < 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

其中  $M$  是  $|f|$  在  $(R)$  上的最大值. 由此可见, 等式 (4) 的右端在刚才所提到的极限过程中趋近于公式 (3) 的右端. 因此, 这一公式的正确性就建立起来了.

**601. 应用格林公式到曲线积分的研究** 考察一单连通 [559] 开区域  $(G)$  并假定在它里面给出函数  $P$  及  $Q$ , 与它们的导函数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  同时皆连续. 我们重新提出 [561] 一问题:

要使沿任何不自身相交且完全在  $(G)$  内的闭路  $(L)$  上所取的曲线积分

$$\int_{(L)} P dx + Q dy \quad (5)$$

恒为零, 函数  $P$  及  $Q$  应满足怎样的条件?

因为我们假定基本的区域  $(G)$  是单连通的, 故被闭路  $(L)$  在外面所围的区域  $(D)$  本身同样也属于  $(G)$ , 所以可以将格林公式应用到它上面去;<sup>①</sup> 因此曲线积分 (5) 可代以二重积分

$$\iint_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6)$$

为了要使类似的积分永远等于零, 显然假定

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (A)$$

就够了.

<sup>①</sup>我们提请读者注意, 区域  $(G)$  的单连通性这里是怎样被利用了.



条件 (A) 的必要性非常简单地就可证明, 只要在假定积分 (6) 等于零后应用对区域的微分法 [593]: 积分号下的函数, 既是积分 (6) 的“导函数”, 本身也必恒等于零.

因此, 考虑到第 561 目的引理时, 我们已得出下面定理的一新证明: 为了要使取在任何闭路上的形如 (5) 的积分恒等于零, 只要基本区域 (G) 单连通, 条件 (A) 是必要且充分的 [561, 定理 5]. 由第 561 目中定理 4, 对区域在同样的假定下, 要使沿连接点 A 及 B 的曲线 (AB) 上的曲线积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy$$

与积分道路的形状无关, 条件 (A) 也是必要且充分的 [560, 定理 3].

用格林公式可以避免一切与恰当微分的积分法有关的讨论直接来建立这一结果. 此处, 再一次又阐明了基本区域单连通假定的作用.

现在反过来, 从这里借第 556 目中讨论之助, 条件 (A) 对于式子  $Pdx + Qdy$  可积的充分性(其必要性立刻可明白!) 又可重新建立起来 (第 560 目定理 2).

**602. 例题及补充** 1) 对于在半径为 1 中心为坐标原点的圆内的函数

$$(a) \quad P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$(b) \quad P = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

验证格林公式.

**提示** 在两种情形下皆  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , 故二重积分为零. 沿圆周

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

所取的曲线积分仅在情况 (b) 下等于零, 而在情况 (a) 下等于  $2\pi$ .

这是由于: 格林公式是在所考察的函数及其导函数连续的假定下推出的, 而这里 —— 在两种情况下 —— 这一条件在坐标原点处被破坏了. 在情况 (a) 下格林公式事实上不能应用; 很有趣的, 在情况 (b) 下, 尽管是如刚才所述的情况, 而它完全是正确的 [比照 565, 13].

2) 将格林公式变成

$$(a) \quad \iint_{(D)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int_{(L)} Pdy - Qdx$$

的形状, 或

$$(b) \quad \iint_{(D)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int_{(L)} [P \cos(x, \nu) + Q \sin(x, \nu)] ds$$

的形状 (其中  $\nu$  表示朝外的法线方向).

**提示** 将  $P$  换作  $-Q$ , 而将  $Q$  换作  $P$ ; 利用第 553 目中将第二型曲线积分变成第一型曲线积分的公式 (14). 注意法线的方向!



3) 利用格林公式, 求证公式:

$$(a) \quad \iint_{(D)} \Delta u dx dy = \int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

$$(b) \quad \iint_{(D)} v \Delta u dx dy = - \iint_{(D)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \int_{(L)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

$$(B) \quad \iint_{(D)} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_{(L)} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds,$$

如令

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(x, \nu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(x, \nu).$$

提示 如要 2)(b) 中令  $P = v \frac{\partial u}{\partial x}, Q = v \frac{\partial u}{\partial y}$ , 则可得 (b); (a) 是 (b) 当  $v = 1$  时的特殊情形; 在 (b) 中交换  $u, v$  的地位并将结果从 (b) 内减去, 便得 (B).

4) 一函数  $u$ , 当它与它的导函数皆连续且在所考察的区域  $(G)$  上满足方程  $\Delta u = 0$ , 称为在这一区域上的调和函数.

在函数  $u$  于区域  $(D)$  上有连续导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  的假定下, 求证下面的断言: 要函数  $u$  是调和函数, 必要且充分地需不论  $(L)$  是怎样的简单闭路, 条件

$$\int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

恒能适合.

提示 利用公式 3)(a).

5) 如函数  $u$  在闭区域  $(D)$  上是调和的, 则它在区域内的值可由在闭路  $(L)$  上的值唯一确定.

换句话说, 如在区域  $(D)$  上的两个调和函数  $u_1, u_2$  在区域的边界  $(L)$  上有相同的值, 则它们在整个区域上恒等.

考察差  $u = u_1 - u_2$ , 我们便将问题变为证明: 在区域  $(D)$  上的调和函数, 如在区域边界  $(L)$  上为零, 则在整个区域上恒等于零.

在公式 3)(b) 中令  $v = u$ . 考虑到加在  $u$  上的条件, 得

$$\iint_{(D)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

于是推得, 在整个区域  $(D)$  上,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

就是说,  $u$  变成一常数了, 而既在  $(L)$  上为 0, 故到处都等于 0, 这就是所要证明的.

6) 设  $u$  是区域  $(G)$  上的一调和函数,  $(x_0, y_0)$  是这一区域的任一内点, 又  $(K_R)$  是半径为  $R$ , 中心在点  $(x_0, y_0)$  处的一圆周.<sup>①</sup>则有下一重要公式:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{(K_R)} u(x, y) ds, \quad (7)$$

<sup>①</sup>半径  $(R)$  假定如此地小, 使圆周  $(K_R)$  整个在区域  $(G)$  中.



故调和函数在中心处的值等于它在圆周上的“平均”值. 我们来证明这一点.

令  $v = \ln r$ , 其中  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ; 不难验证,  $v$  是从平面中挖掉点  $(x_0, y_0)$  后所得区域中的调和函数. 在这一点处函数变成无穷.

用一半径为  $\rho (\rho < R)$  的圆周  $k_\rho$  围住点  $(x_0, y_0)$ , 应用公式 3)(B) 到夹在圆周  $(K_R)$  及  $(k_\rho)$  间的区域  $(D)$  上; 边界  $(L)$  是由  $(K_R)$  及  $(k_\rho)$  在一起组成的. 因为在这一区域中函数  $u, v$  都是调和的, 故左端等于零. 右端的积分

$$\int_{(L)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

消失了, 因为, 例如, 在圆周  $(K_R)$  上  $v = \ln R = \text{常数}$ , 而 [由于 4)]

$$\int_{(K_R)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \frac{d \ln r}{dr} \bigg|_{r=R} = \frac{1}{R} \text{ 在 } (K_R) \text{ 上,} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \frac{d \ln r}{dr} \bigg|_{r=\rho} = -\frac{1}{\rho} \text{ 在 } (k_\rho) \text{ 上,} \end{aligned}$$

故最后得:

$$\frac{1}{\rho} \int_{(k_\rho)} u ds = \frac{1}{R} \int_{(K_R)} u ds.$$

对适当小的  $\rho$ , 函数  $u$  在圆周  $(k_\rho)$  上可与在中心处的值  $u(x_0, y_0)$  相差到任意地小, 故当  $\rho \rightarrow 0$  时左端有极限  $2\pi \cdot u(x_0, y_0)$ , 变到极限, 即得所要的等式.

7) 由 6) 中所证明的结果, 可推得一有趣的推论: 如函数  $u(x, y)$  在由闭路  $(L)$  所围的闭区域  $(D)$  上连续且在这区域的内部是调和函数, 则, 除掉它是常数的情形外, 函数在区域的内部不能达到其最大 (最小) 值.

事实上, 假如所讲到的函数  $u(x, y)$  不是常数, 而在内点  $(x_0, y_0)$  处达到了譬如说其最大值, 则容易得到一与公式 (7) 相违的矛盾.

现在, 在假定函数  $u$  在闭区域  $(D)$  上连续但仅在区域内面调和后, 我们可以强化 5) 中的结果. 这里只要证明, 如函数  $u$  在边界上为零则便恒等于零. 而这可由下面的观察中得出来: 如不是这样的话, 它就会在区域的内部达到它的最大或最小值, 与上面所作的注意点相矛盾.

## §4. 二重积分中的变量变换

**603. 平面区域的变换** 假定我们已知二平面, 一个关联于直角坐标轴  $x, y$ , 另一个关联于同样的坐标轴  $\xi, \eta$ . 在这两平面中考察两闭区域: 区域  $(D)$  在  $xy$  平面上, 区域  $(\Delta)$  在  $\xi\eta$  平面上. 这两区域的每一个都可是无界的, 特别, 可以包括整个平面. 我们将假定区域的边界 (如区域不包括整个平面) 为一简单的分段光滑的曲线, 对区域  $(D)$  用记号  $(S)$  来表示它, 对区域  $(\Delta)$  用记号  $(\Sigma)$  (图 61).



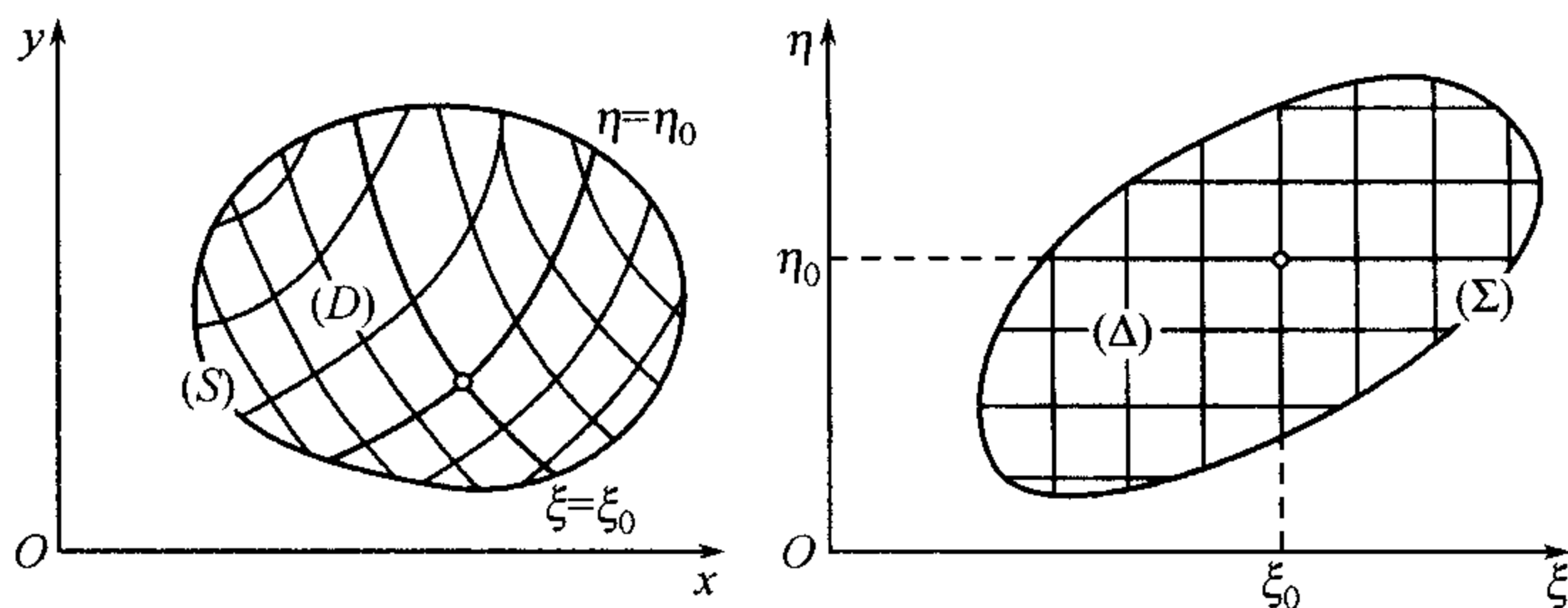


图 61

设在区域  $(\Delta)$  上给出一组函数:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

它使得区域  $(\Delta)$  的每一点  $(\xi, \eta)$  变换到区域  $(D)$  的一确定点  $(x, y)$ , 且  $(D)$  中没有一点  $(x, y)$  被漏掉了, 故每一个这样的点至少与  $(\Delta)$  中的一点  $(\xi, \eta)$  相对应. 如对于不同的点  $(\xi, \eta)$  对应着不同的点  $(x, y)$  (我们今后将假定如此), 故每一点  $(x, y)$  仅由一点  $(\xi, \eta)$  变来, 则公式 (1) 可唯一地对  $\xi$  及  $\eta$  解出来. 变数  $\xi, \eta$  反过来又是  $x, y$  在区域  $(D)$  上的单值函数:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

因此, 在区域  $(D)$  与  $(\Delta)$  间建立了一个相互唯一的或一对一的对应. 我们亦这样说, 公式 (1) 实现了区域  $(\Delta)$  到区域  $(D)$  的一变换, 而公式 (2) 给出区域  $(D)$  到区域  $(\Delta)$  的一逆变换.

如所谈的两区域充满了对应的平面, 则我们便得到一平面到另一平面的变换. 最后, 如这两平面重合, 即如将点  $(x, y)$  及  $(\xi, \eta)$  当作同一平面的点, 则出现了一个平面自身上的变换.

再则, 我们将假定函数 (1) 及 (2) 不仅连续且有连续的 (一阶) 偏导数. 则, 如大家所知 [203, (4)],

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 1,$$

故两个雅可比式皆不等于零, 并且, 由连续性, 符号保持不变.

由雅可比式

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (2)$$



在区域  $(\Delta)$  上异于 0 的事实, 得知区域  $(\Delta)$  的内点  $(\xi_0, \eta_0)$  必因公式 (1) 而有区域  $(D)$  的内点  $(x_0, y_0)$  与之对应, 因为由隐函数存在定理 [208], 用这些公式, 在点  $(x_0, y_0)$  的整个邻域内变数  $\xi$  及  $\eta$  确定为  $x$  及  $y$  的单值函数. 同样, 对于区域  $(D)$  的内点也永远对应于区域  $(\Delta)$  的内点. 由此可见, 闭路  $(S)$  的点对于闭路  $(\Sigma)$  的点, 反过来也是如此.

一般, 如在区域  $(\Delta)$  中取一简单的分段光滑的曲线  $(\Lambda)$ , 则用变换 (1) 能把它变成区域  $(D)$  中的类似的曲线  $(L)$ . 事实上, 设曲线  $(\Lambda)$  的方程为:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta \text{ 或 } \alpha \geq t \geq \beta), \quad (3)$$

且 (在曲线的一光滑段内) 可以认为函数  $\xi(t), \eta(t)$  有连续的不同时为零的导函数. 将这些函数代入变换公式 (1) 中, 我们得到对应曲线  $(L)$  的参数方程:

$$x = x(\xi(t), \eta(t)) = x(t), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)) = y(t). \quad (4)$$

容易看见, 这些函数同样也有连续的导函数:

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \eta'(t), \quad y'(t) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \eta'(t); \quad (5)$$

此外它们不会同时为零, 故在曲线  $(L)$  上没有奇点. 事实上, 在相反的情形下, 由于行列式  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$  不等于零, 由 (5) 就能得知, 同时  $\xi' = 0$  及  $\eta' = 0$ , 这是不可能的.

如点  $(\xi, \eta)$  在  $\xi\eta$  平面上例如以正向画出一闭路  $(\Lambda)$ , 则对应点  $(x, y)$  在  $xy$  平面上也画出某一闭路  $(L)$ , 但它的方向既可为正也可为负. 我们以后将看到 [606, 1°], 这一问题与雅可比式 (2) 的符号有关.

给出区域  $(\Delta)$  中变数  $\xi$  及  $\eta$  的一对值就唯一地确定在  $xy$  平面上区域  $(D)$  中的某一点 (反过来也是如此). 我们因而称数  $\xi, \eta$  为区域  $(D)$  的点的坐标. 实质上, 方程 (1)<sup>①</sup> 给我们平面图形  $(D)$  的一参数表示法, 是我们以往所谈曲面参数表示法 [228] 的特殊情形.

与那里一样, 由区域  $(D)$  的点构成的曲线, 其一个坐标保持常数值者, 称为坐标曲线. 例如, 在 (1) 中令  $\eta = \eta_0$ , 我们便得到坐标线的一参数表示:

$$x = x(\xi, \eta_0), \quad y = y(\xi, \eta_0)$$

(这里  $\xi$  做参数). 在方程 (2) 的第二式中令  $\eta = \eta_0$  时, 可得同一线的隐方程:

$$\eta(x, y) = \eta_0.$$

坐标线一般说来是曲线, 与此相关的, 说明点在  $xy$  平面上位置的数  $\xi, \eta$  在这种情况下 (在曲面情形时也是如此) 称为点的曲线坐标.

<sup>①</sup> 如在它上面再加一方程  $z = 0$ .



对坐标  $\eta$  给它各种 (可能的) 不同的常数值, 我们得到  $xy$  平面上的一完整的曲线族. 固定坐标  $\xi$  的值, 我们得到坐标线的另一族. 当在所考察的区域间为一对一的对应时, 同一族内的不同的线彼此不相交, 且通过区域  $(D)$  的任何一点, 在每一族中经过有一条线.

在  $xy$  平面上的整个坐标线网是  $\xi\eta$  平面上的直线网  $\xi = \text{常数}$  及  $\eta = \text{常数}$  的图像 (图 61).

**604. 例** 1) 曲线坐标的最简单也是最重要的例是极坐标  $r, \theta$ . 它们有很清楚的几何解释, 即位径向量与极幅角, 但也可形式地用熟知的关系式

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (r \geq 0)$$

引进来.

如将  $r$  及  $\theta$  的值放在两互相垂直的轴上, 例如,  $r$  当作横轴,  $\theta$  当作纵轴 (在坐标轴为右手定向时), 则对于半平面  $r \geq 0$  上的每一点由所述公式有  $xy$  平面上一个确定点相对应.

读者可能已想到在这一情形下的坐标线: 直线  $r = \text{常数}$  与半径为  $r$  中心在原点的圆相对应, 直线  $\theta = \text{常数}$  与自原点出发和  $x$  轴交于一角  $\theta$  的射线相对应 (图 62).

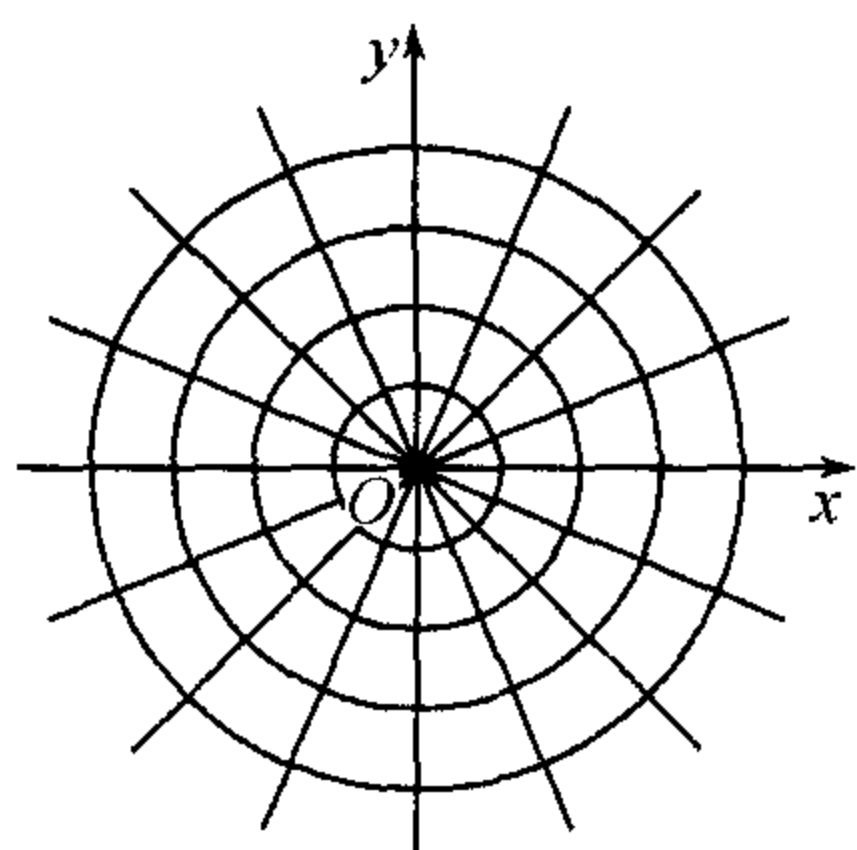


图 62

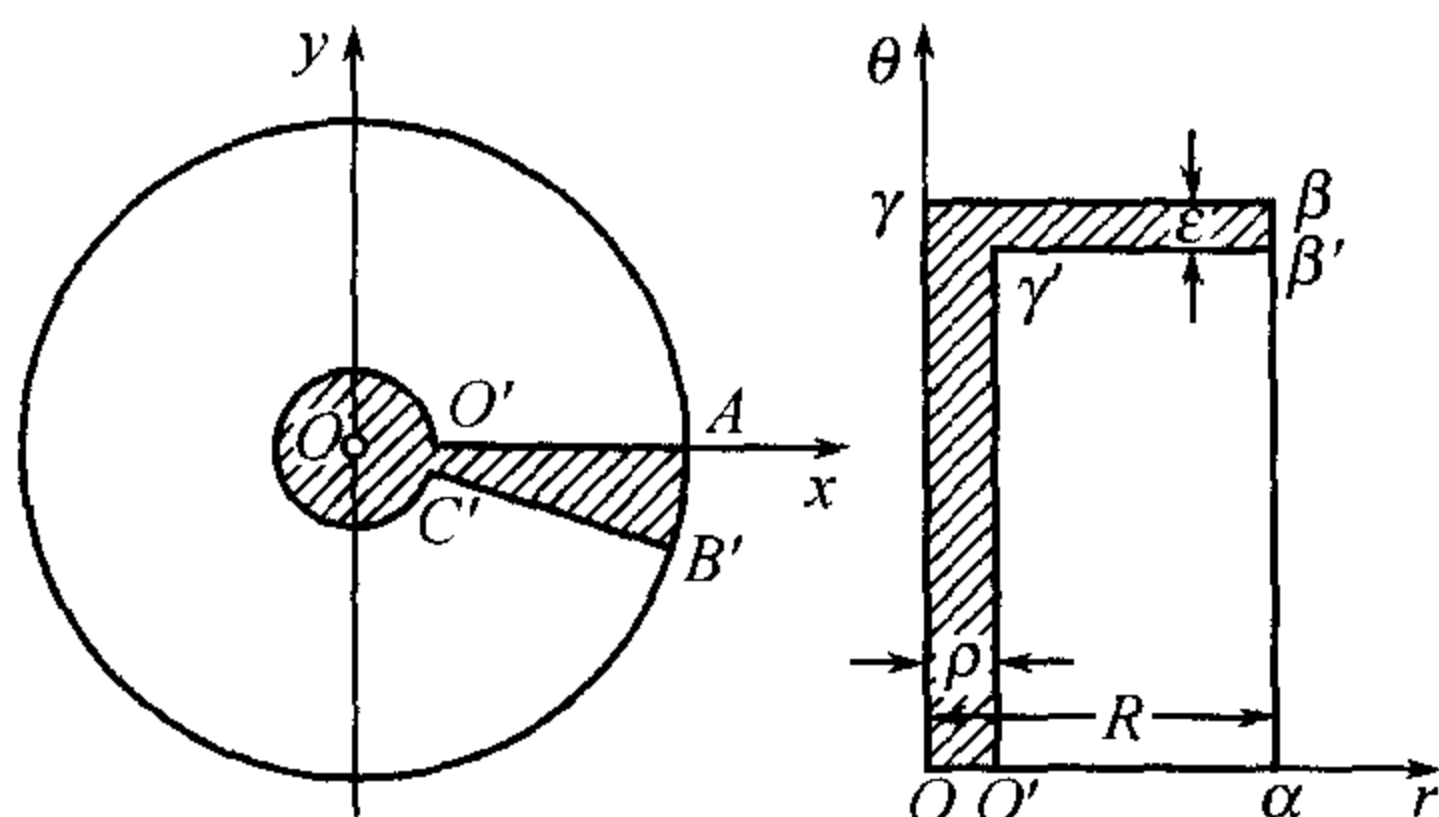


图 63

但是, 在所给的情形下变换公式不能唯一地解出来: 角  $\theta$  的大小改变  $2k\pi$  ( $k$  为整数) 时不影响  $x, y$  的值. 要想得到  $xy$  平面中的一切点, 只要将值限于

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

就可以了. 每一异于原点的点  $(x, y)$  与一个值  $r > 0$  及在所示范围内的一个值  $\theta$  相对应. 然由于坐标原点的关系, 对应的唯一性不可避免地要破坏: 点  $x = y = 0$  与  $r\theta$  平面上的整个  $\theta$  轴相对应 (或者, 如愿意的话, 与它的自  $\theta = 0$  到  $\theta = 2\pi$  的一线段相对应).

在  $r\theta$  平面上考察一闭矩形  $[0, R; 0, 2\pi]$  或  $o\alpha\beta\gamma$  (图 63); 易见, 在  $xy$  平面上它与围绕原点  $O$  半径为  $R = OA$  的闭的圆相对应. 但这一圆的全部边界仅对应于所述矩形的一边  $\alpha\beta$ ; 边  $o\alpha$  及  $\beta\gamma$  (两个同时!) 与圆的同一半径  $OA$  相对应; 最后, 整个边  $o\gamma$  仅与点  $O$  相对应. 这时显然在前目所述的条件下没有保持住!

然而, 如将边  $o\gamma$  移动一小量  $\rho = oo'$ , 而边  $\gamma\beta$  移动  $\varepsilon = \beta\beta'$ , 则新的矩形  $o'\alpha'\beta'\gamma'$  将与  $xy$  平面上的一图形  $O'AB'C'$  相对应, 这一图形是从圆内挖掉一半径为  $\rho$  的小圆及一中心角为  $\varepsilon$  的



扇形而得来的; 这样就能保持所有的要求. 当点在  $r\theta$  平面上沿线段  $\alpha\beta', \beta'\gamma', \gamma'o', o'\alpha$  移动时, 在  $xy$  平面上的对应点依次就描画出优弧  $AB'$  (半径为  $R$ ), 线段  $B'C'$ , 优弧  $C'O'$  (半径为  $\rho$ ) 及线段  $O'A$ . 顺便注意, 在  $r\theta$  平面上正向的环行与  $xy$  平面上也是正向的环行相对应.

在所给的情形下, 雅可比式等于

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

它永远保持 (除原点外) 正号.

2) 试讨论由公式

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

( $\xi, \eta$  不同时为零) 所定义的平面自身上的变换.

如将  $x$  轴及  $\xi$  轴,  $y$  轴及  $\eta$  轴放在一起, 则这一变换有一明显的几何解释. 因为

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta},$$

则很清楚, 对应点总在自原点出发的同一射线上, 且自原点到它们的距离的乘积为一.

这一变换称为反演法. 它是一对一的可逆的:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

( $x, y$  不能同时为零).

坐标线是通过原点的圆周:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{\xi_0}x &= 0, & x^2 + y^2 - \frac{1}{\eta_0}y &= 0, \\ (\xi_0 \neq 0) & & (\eta_0 \neq 0) \end{aligned}$$

其中心分别在  $x$  轴及  $y$  轴上 (图 64). 当  $\xi_0 = 0$  时得  $y$  轴 ( $x = 0$ ), 当  $\eta_0 = 0$  时得  $x$  轴 ( $y = 0$ ).

例如, 在  $\xi\eta$  平面上的正方形  $\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1\right]$  与在图 64 中打了斜线的区域相对应. 闭路环行的方向此时不一致.

因为

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{2\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

故雅可比式

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} < 0.$$

3) 如从变换公式

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta$$

出发, 则对任何的  $\xi, \eta$  从这里可一意地得到  $x, y$ . 将这些公式对  $\xi, \eta$  解出来, 求得

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad \eta = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}},$$



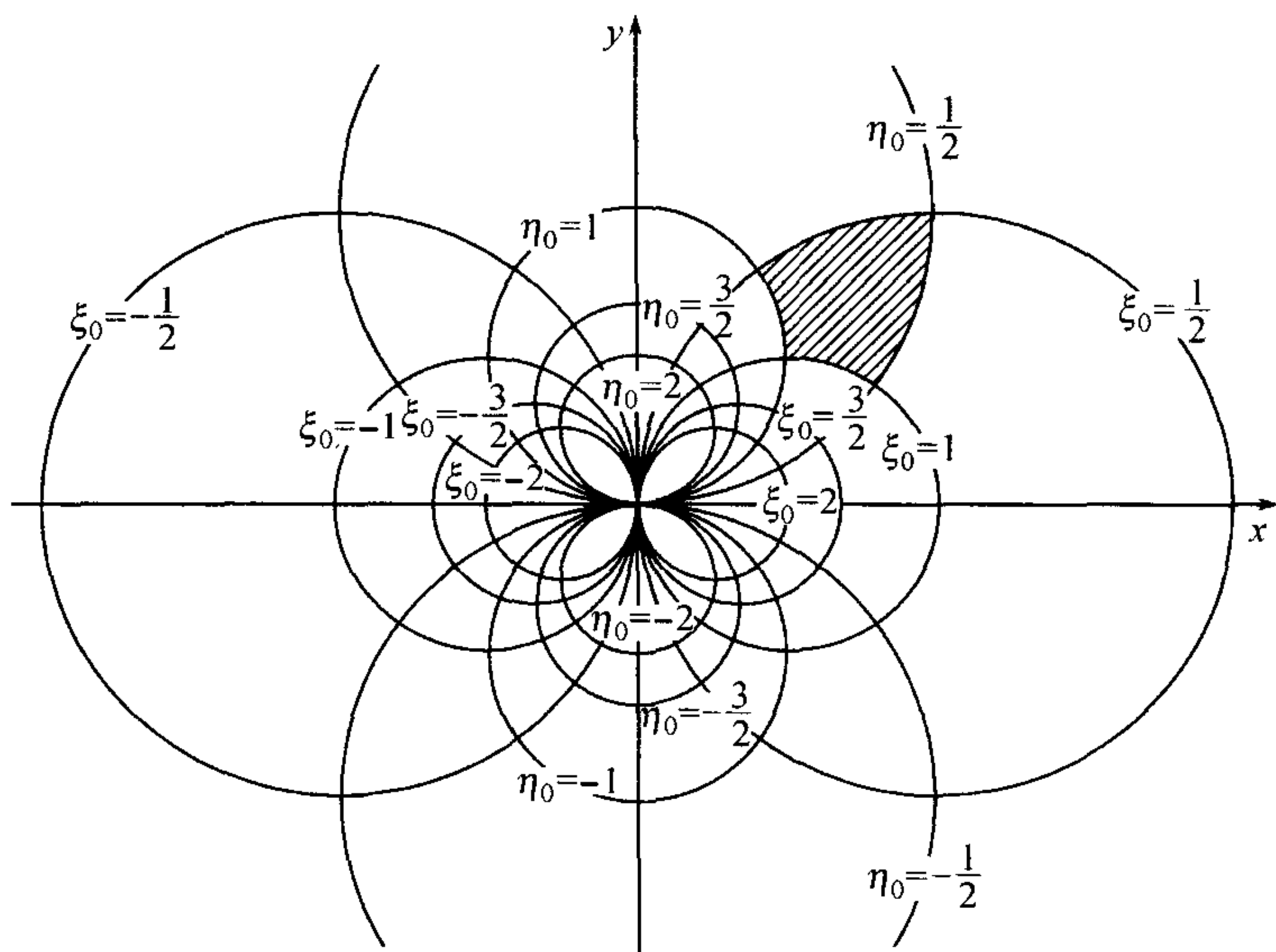


图 64

其中  $\xi$  及  $\eta$  的符号以条件  $\xi\eta = \frac{1}{2}y$  相关联. 因此, 除原点外, 每一点  $(x, y)$  与对称于原点的两点  $(\xi, \eta)$  相对应. 为了要恢复单值性, 例如, 可以限制于  $\xi\eta$  平面的上半部分 (包括  $\xi$  轴的总的部分, 但不包括它的负的部分).

这里坐标线是共焦点 (焦点在 origin) 且共轴的抛物线:

$$y^2 = 4\xi_0^2(\xi_0^2 - x) \quad \text{及} \quad y^2 = 4\eta_0^2(x + \eta_0^2)$$

$$(\xi_0 \neq 0) \qquad (\eta_0 \neq 0)$$

(图 65). 值  $\xi_0 = 0$  与  $x$  轴的负的部分相对应, 而值  $\eta_0 = 0$  与它的总的部分相对应. 雅可比式, 除原点外,

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{vmatrix} = 4(\xi^2 + \eta^2) > 0.$$

4) 有时候先给出坐标线的网再由它确立曲线坐标系要来得方便些.

例如, 考察两抛物线族(图 66):

$$y^2 = 2px \quad \text{及} \quad x^2 = 2qy,$$

每一族分别(如除掉坐标原点) 填满了整个  $xy$  平面.

很自然地, 引进  $\xi = 2p$  及  $\eta = 2q$  作为曲线坐标. 由等式  $y^2 = \xi x$  及  $x^2 = \eta y$ , 我们有

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \quad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad \text{及} \quad \xi = \frac{y^2}{x}, \quad \eta = \frac{x^2}{y} \quad (x, y \neq 0).$$



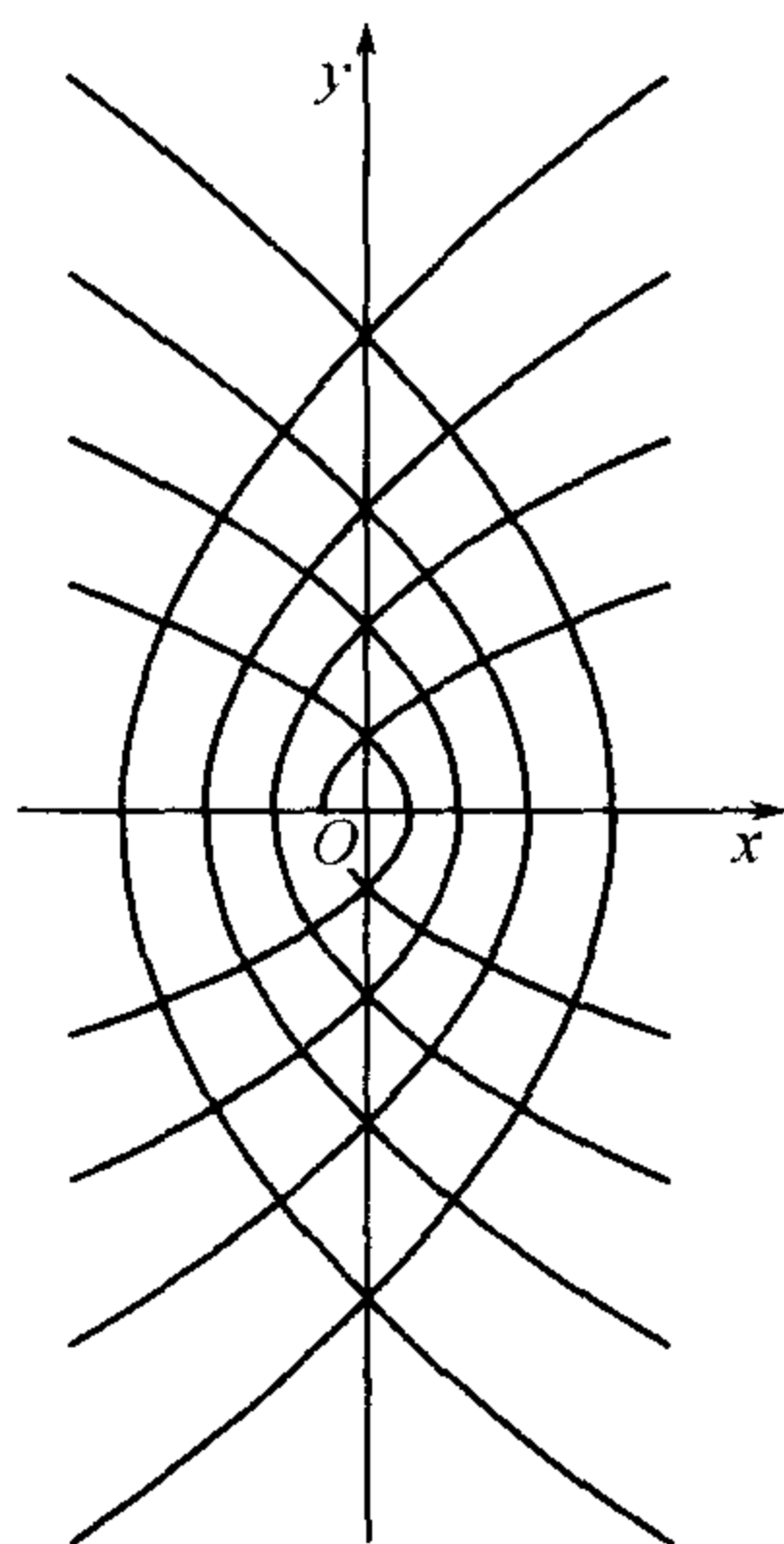


图 65

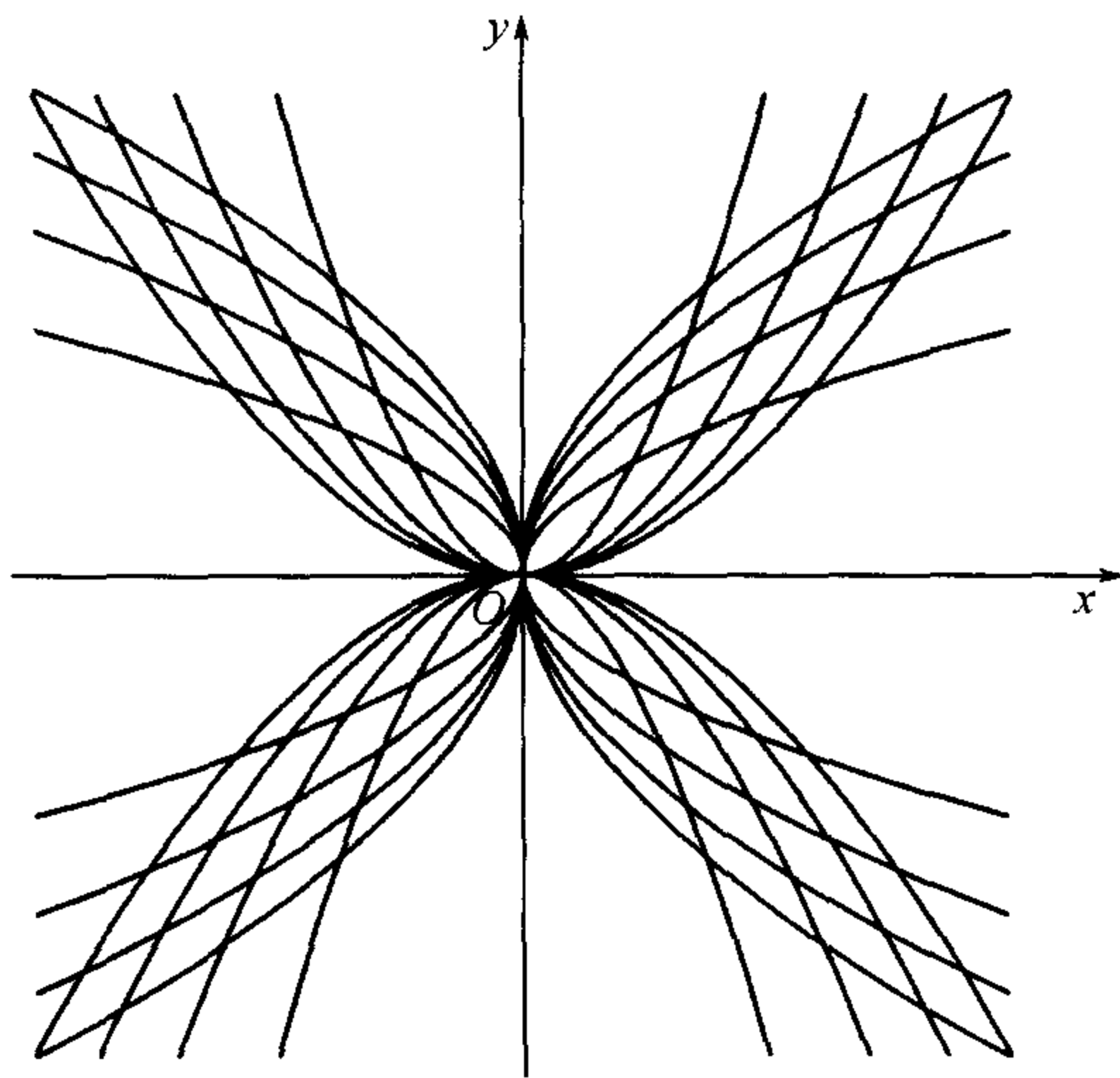


图 66

这里雅可比式等于

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

5) 我们现在将从共焦点及共轴的圆锥曲线族

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (6)$$

出发 (当  $\lambda > c$  时是椭圆, 当  $0 < \lambda < c$  时是双曲线; 图 67).

通过平面上不在坐标轴上的每一点  $(x, y)$ , 有这一族中的一个椭圆及一个双曲线. 事实上, 自 (6) 所得的方程

$$(\lambda^2)^2 - \lambda^2(x^2 + y^2 + c^2) + c^2x^2 = 0$$

的左端当  $\lambda = 0$  时符号为  $+$ , 当  $\lambda = c$  时符号为  $-$ , 又当很大的  $\lambda$  时符号又为  $+$ . 因此, 这方程有两正根: 一个  $\lambda > c$ , 另一个  $\mu < c$ ;<sup>①</sup> 这就证明了我们的断言.

如将前一方程视作对  $\lambda^2$  的二次方程, 则由根的熟知的性质我们有

$$\lambda^2 + \mu^2 = x^2 + y^2 + c^2, \quad \lambda^2 \mu^2 = c^2 x^2,$$

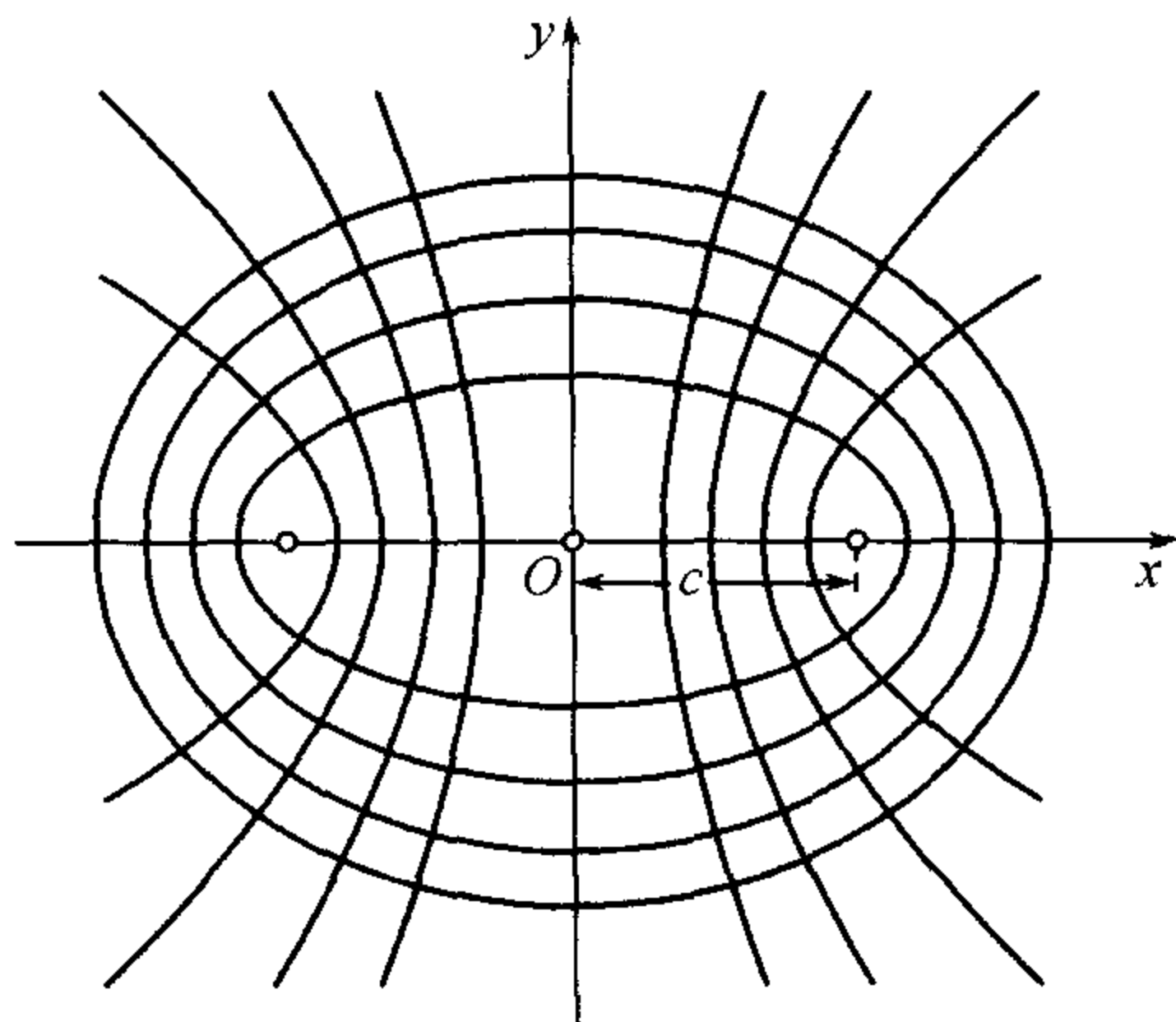


图 67

<sup>①</sup>为了不混淆这两个根, 对于大的一个我们保持记号  $\lambda$ , 而小的一个表作  $\mu$ .



而由此很容易用  $\lambda$  及  $\mu$  表示  $x$  及  $y$ :

$$x = \pm \frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

限制在第一象限时, 这里我们仅需保持正号. 可将数  $\lambda, \mu$  视作这一象限中点的曲线坐标; 它们称为椭圆坐标. 在这一情形下, 开始的圆锥曲线恰巧就是坐标线.

特别指出,  $\lambda$  自  $c$  变到  $+\infty$ , 而  $\mu$  自  $0$  变到  $c$ . 对于极端的值我们得到:

当  $\lambda = c$  时,  $x$  轴上自  $x = 0$  到  $x = c$  的线段,

当  $\mu = c$  时,  $x$  轴上自  $x = c$  到  $x = +\infty$  的线段,

当  $\mu = 0$  时,  $y$  轴上正的部分.

最后, 容易计算出雅可比式:

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} < 0.$$

**605. 曲线坐标中面积的表示法** 假定在  $xy$  平面上已给某一由分段光滑的且无奇点的闭路 ( $S$ ) 所围的区域 ( $D$ ). 设公式 (1) 确立一个在这一区域与  $\xi\eta$  平面上由类似的闭路 ( $\Sigma$ ) 所围成的区域 ( $\Delta$ ) 间的一对一的对应.

我们保留第 603 目中对于这一区域变换的全部假定, 此外, 还假定在区域 ( $\Delta$ ) 内, (1) 中两函数有一个的二阶混合导函数, 例如

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi},$$

存在且连续 (由连续性, 它们有相等的值, 190).<sup>①</sup>

在这些假定下, 我们的任务是要将所考察的在  $xy$  平面上的区域面积  $D$  表作  $\xi\eta$  平面上展布在区域 ( $\Delta$ ) 上的二重积分的样子.

我们将从下一公式出发, 即用沿着区域 ( $D$ ) 的边界 ( $S$ ) 而取的曲线积分表示面积  $D$  的公式

$$D = \int_{(S)} x dy \quad (7)$$

[参看 551(9)]出发.

以后变换的计划是这样的: 首先利用闭路的参数方程将曲线积分 (7) 变成普通的定积分. 其次, 将后者又变成一曲线积分, 但这一次是取在区域 ( $\Delta$ ) 的边界上了. 最后, 利用格林公式, 将所得曲线积分用在区域 ( $\Delta$ ) 上的二重积分来代替.

为了要实行这一计划, 我们必须要有闭路 ( $S$ ) 的参数方程. 因为以后我们要转换到闭路 ( $\Sigma$ ), 故我们宁可在现在就从这一闭路的参数方程出发. 设 (3) 给出了曲线 ( $\Sigma$ ) 的参数表示, 则显然 (4) 就将给出曲线 ( $S$ ) 的参数表示, 因为 [由我们的假定可

<sup>①</sup>这里我们注意, 这些补充假定对最后结果的真实性来说是不必要的, 这里引进来仅是为了简化证明.



得知,603] 它在  $xy$  平面上对应于闭路  $(\Sigma)$ .  $t$  的变化范围  $\alpha$  及  $\beta$  我们可以如此选择, 使当自  $\alpha$  变到  $\beta$  时, 曲线  $(S)$  以正向描画出来了; 这是永远做得到的.

因此, 按照 547 目公式 (5),

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt,$$

或者, 如注意 (4) 及 (5),

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t), \eta(t)) \left[ \frac{\partial y}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \eta'(t) \right] dt. \quad (8)$$

将这一积分与沿闭路  $(\Sigma)$  正向而取的曲线积分

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi, \eta) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right) \quad (9)$$

相比较. 如要想将后一积分按通常规则化为普通的定积分, 则此处必须以曲线  $(\Sigma)$  参数方程中的函数  $\xi(t)$  及  $\eta(t)$  来代替  $\xi$  及  $\eta$ , 我们就回到积分 (8).

不过, 必须还要注意到一点. 当  $t$  自  $\alpha$  变到  $\beta$  时闭路  $(S)$  以正向描画——我们就是这样选取了这个范围. 但闭路  $(\Sigma)$  此时既可能以正向描画, 也可能以负向描画; 因此, 积分 (8) 及 (9) 实际上可能相差一符号. 在任一情形下,

$$D = \pm \int_{(\Sigma)} x \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (10)$$

并且 (再一次强调), 如闭路  $(S)$  的正向环行与闭路  $(\Sigma)$  的正向环行相对应则取正号, 在相反的情形下就取负号.

最后所剩的, 就是要变换所得曲线积分为二重积分, 为此就要利用格林公式

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta = \iint_{(\Delta)} \left( \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta,$$

其中我们令

$$P(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}, \end{aligned}$$

而  $y$  的二阶混合导数彼此相等, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)},$$



我们就得到公式

$$D = \pm \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

在第 603 目中我们已看见, 在所作假定下雅可比式

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

在区域  $(\Delta)$  中保持一定符号. 故积分也有同一符号. 但积分前面还有一双重符号  $\pm$ , 因为结果须真正得一正数, 故显然积分前面的符号与雅可比式的符号一致. 如将这一符号放到积分号下的函数上, 则在那里显然就得到雅可比式的绝对值, 故面积的最后表示式为

$$D = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (11)$$

这就是我们所想建立的公式.

积分号下的表示式

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

通常称为曲线坐标下的面积元素. 我们看见过, 例如, 在变到极坐标情形时雅可比式等于  $r$ ; 因此在极坐标下面积元素为  $r dr d\theta$ .

**606. 补充说明** 1° 如将公式 (10) 中我们选取正负号的规则与这一符号必须与雅可比式符号一致的事实相比较, 则得一有趣的推论: 如雅可比式保持正号, 则闭路  $(S)$  及  $(\Sigma)$  的正向环行随变换公式而彼此对应; 而如雅可比式为负的, 则一个闭路上的正向与另一个闭路上的负向相对应.

显然, 这对于在区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  中的任何一对相互对应的简单闭路  $(L)$  及  $(\Lambda)$  也是如此. 所得结果容易用第 604 目中所举的例子来验明.

2° 将中值定理 [592(9)] 应用到公式 (11), 得关系式

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot \Delta, \quad (12)$$

其中  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  是区域  $(\Delta)$  中的某一点, 而  $\Delta$  是这一区域的面积.

将这一公式来与拉格朗日公式

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\bar{\xi})(\beta - \alpha) \quad (\alpha < \bar{\xi} < \beta)$$

相比较. 如  $x = f(\xi)$  是单调函数, 则它使区间  $\alpha \leq \xi \leq \beta$  一对一地与区间  $f(\alpha) \leq x \leq f(\beta)$  (或  $f(\beta) \leq x \leq f(\alpha)$ , 如  $f(x)$  是减少函数) 相关联. 以  $\delta$  及  $d$  表这两区间的长, 则拉格朗日公式就引导到与等式 (12) 相类似的等式

$$d = |f'(\bar{\xi})| \cdot \delta. \quad (13)$$



如在公式 (13) 中将区间  $(\delta)$  “收缩” 成点  $\xi$ , 则结果得关系式

$$|f'(\xi)| = \lim \frac{d}{\delta},$$

所以导数的绝对值好像是直线  $\xi$  当将它变换为直线  $x$  时 (在所给点处) 的延伸系数.

同样由公式 (12) 将区域  $(\Delta)$  “收缩” 成点  $(\xi, \eta)$ , 得

$$|J(\xi, \eta)| = \lim \frac{D}{\Delta}, \textcircled{1}$$

所以雅可比式的绝对值所起的作用是将  $\xi\eta$  平面变为  $xy$  平面时 (在所给点处) 的延展系数.

这一说明指出了导数与雅可比式间的深刻的类似处 (参看第六章).

3° 公式 (11) 指出, 当面积  $\Delta$  无限减少时, 其对应面积  $D$  也无限减少. 由此就很容易证明, 在第 603 目中所研究的区域变换具有下一重要性质: 它将区域  $(\Delta)$  中一面积为零的曲线  $(\Lambda)$  变换为区域  $(D)$  中某一面积也为零的曲线  $(L)$ . 逆变换具有类似的性质.

4° 公式 (11) 是在区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  一对一对应的假定以及函数 (1), (2) 与它们的偏导函数连续的假定下导得的. 然而在实际上往往会遇到这些假定在个别的一些点或沿个别的一些曲线上不成立的情况.

如这些点及曲线在两平面上可包含在任意小面积的区域  $(d)$  及  $(\delta)$  中, 则将它们丢开后, 公式就成为可应用的了:

$$D - d = \iint_{(\Delta) - (\delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (11^*)$$

设雅可比式在区域  $(\Delta)$  中有界:

$$|J(\xi, \eta)| \leq M,$$

则  $(11^*)$  中的积分与 (11) 中的积分相差一量

$$\iint_{(\delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq M\delta.$$

当  $d$  及  $\delta \rightarrow 0$  时将  $(11^*)$  变到极限, 又得公式 (11).

为了清楚解说起见, 我们回到第 604 目中的例 1) 及图 63 中所画的图形. 对矩形  $(\Delta) = [0, R; 0, 2\pi]$  及半径为  $R$  中心在原点的圆  $(D)$ , 这时具有形状

$$D = \iint_{(\Delta)} r dr d\theta$$

的公式 (11) 不能直接应用. 但如除掉打了斜线的部分 (其面积与  $\rho$  及  $\varepsilon$  同时趋近于零), 则这一公式就可应用到所得区域上; 再只要变到极限就行.

①其实我们是在点  $(\xi, \eta)$  处将积分 (11) 对区域微分 [593].



**607. 几何推演** 公式 (11) 是被我们用虽然是简单的但却是不明显的推理导得的. 我们认为用另一方法来导出这一公式是很有用的, 虽然这一方法比较不简单也不十分严格, 但从几何方面看来是十分明显的.

重新考察由公式 (1) 给出的  $\xi\eta$  平面到  $xy$  平面的变换. 在  $\xi\eta$  平面中取出一个无穷小矩形  $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ , 其边为  $d\xi$  及  $d\eta$ , 平行于  $\xi$  及  $\eta$  轴 (图 68,a)). 这一矩形在  $xy$  平面中的图像是曲四边形  $P_1P_2P_3P_4$  (图 68,b)), 我们来确定它的面积.

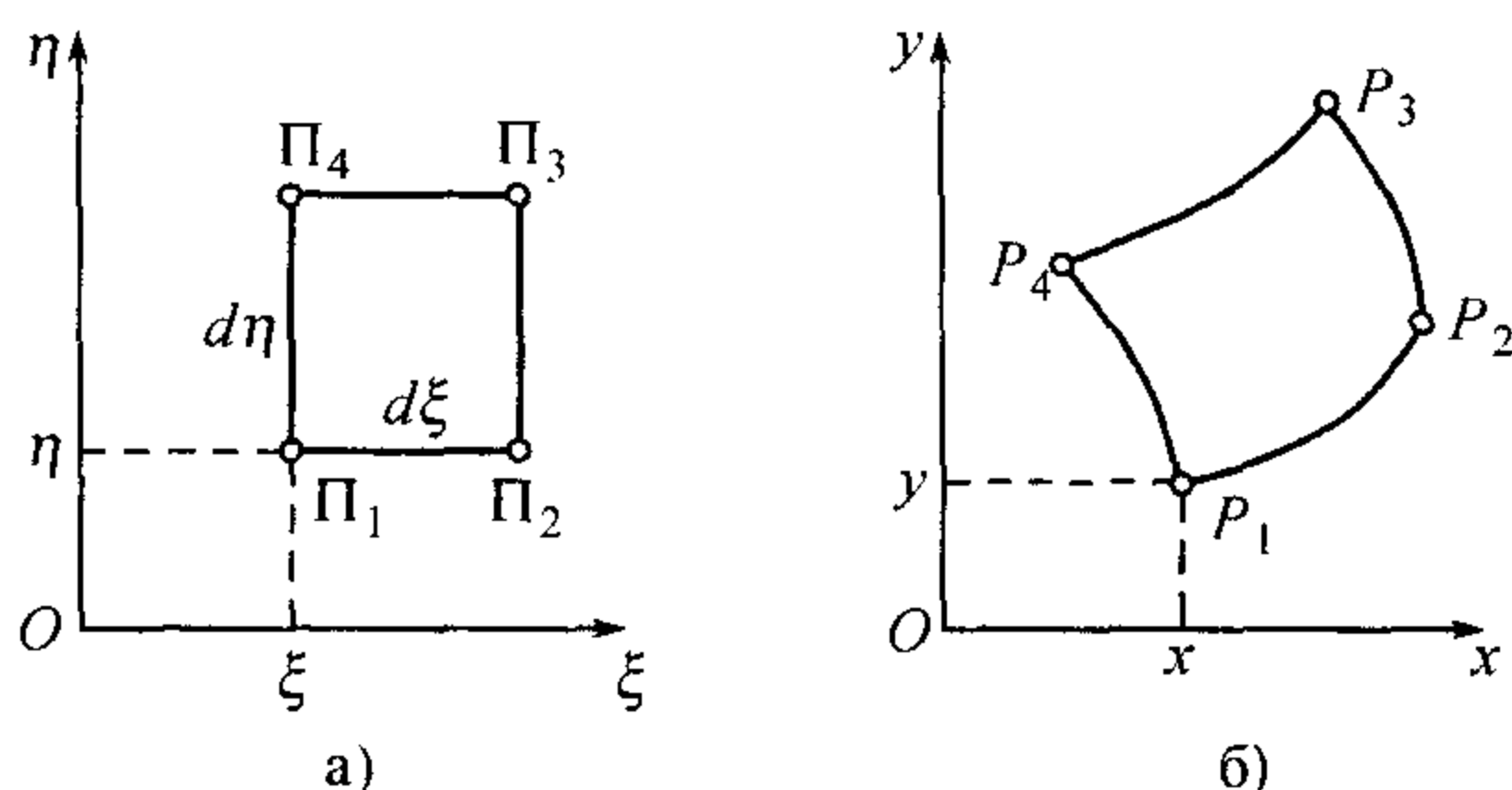


图 68

矩形的顶点有坐标

$$\Pi_1(\xi, \eta), \quad \Pi_2(\xi + d\xi, \eta), \quad \Pi_3(\xi + d\xi, \eta + d\eta), \quad \Pi_4(\xi, \eta + d\eta);$$

在这种情况下曲四边形的对应顶点有这样的坐标:

$$\begin{aligned} P_1(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ P_2(x(\xi + d\xi, \eta), y(\xi + d\xi, \eta)), \\ P_3(x(\xi + d\xi, \eta + d\eta), y(\xi + d\xi, \eta + d\eta)), \\ P_4(x(\xi, \eta + d\eta), y(\xi, \eta + d\eta)). \end{aligned}$$

如限制在  $d\xi, d\eta$  的一阶的项, 则近似地可以取点:

$$\begin{aligned} P_1(x, y), \quad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right), \\ P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right), \\ P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right), \end{aligned}$$

其中  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ , 且所有导数总是算作在点  $(\xi, \eta)$  处的. 因为线段  $P_1P_2$  及  $P_3P_4$  在两轴上的射影两两相等, 故这些线段平行且相等, 所以(准确到高阶的无穷小) 四边形  $P_1P_2P_3P_4$  是平行四边形.



它的面积等于三角形  $P_1P_2P_3$  面积的两倍. 由解析几何大家都知道, 顶点位于点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  处的三角形其面积的两倍等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

的绝对值. 将这一公式应用到我们的问题上来, 得所求面积 (又是准确到高阶的无穷小) 等于行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta$$

的绝对值.

这样,

$$\text{面积 } P_1P_2P_3P_4 \doteq \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

将  $\xi\eta$  平面上的图形 ( $\Delta$ ) 用平行于坐标轴的直线分为许多无穷小矩形 (将在边界处的“不规则”元素块忽略掉), 同时我们将  $xy$  平面上的图形 ( $D$ ) 分为前所考察形状的曲四边形. 将所得的它们面积的表示式相加, 又可得公式 (11).

因此, 所引用的推理着重指出了重要的几何思想: 公式 (11) 的实质是: 要确定图形 ( $D$ ) 的面积, 不将它分为许多矩形, 而用坐标线网将它分为许多曲边的元素块.

在一些简单情形下, 这一思想差不多不用计算就可寻求得曲线坐标下“面积元素”的表示式.

例如, 在变到极坐标情形时就可这样来推理. 在  $r\theta$  平面中边为  $dr, d\theta$  的元素矩形在  $xy$  平面上就与一图形相对应, 这一图形是由半径为  $r, r + dr$  的两圆弧及由原点出发与  $x$  轴交于角  $\theta, \theta + d\theta$  的二射线所围成的 (图 69). 将这一图形近似地当作边为  $dr$  及  $rd\theta$  的矩形, 立刻可得所求面积元素的表示式  $rdrd\theta$ .

**608. 例** 1) 计算由下列曲线所围成各图形的面积:

(a)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  (双纽线),

(б)  $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ,

(в)  $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$ .

**解** 在所有情形下二项式  $x^2 + y^2$  的出现促使我们想到变成极坐标, 令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

并且公式

$$D = \iint_{(\Delta)} r dr d\theta \quad (14)$$

来计算所求面积.



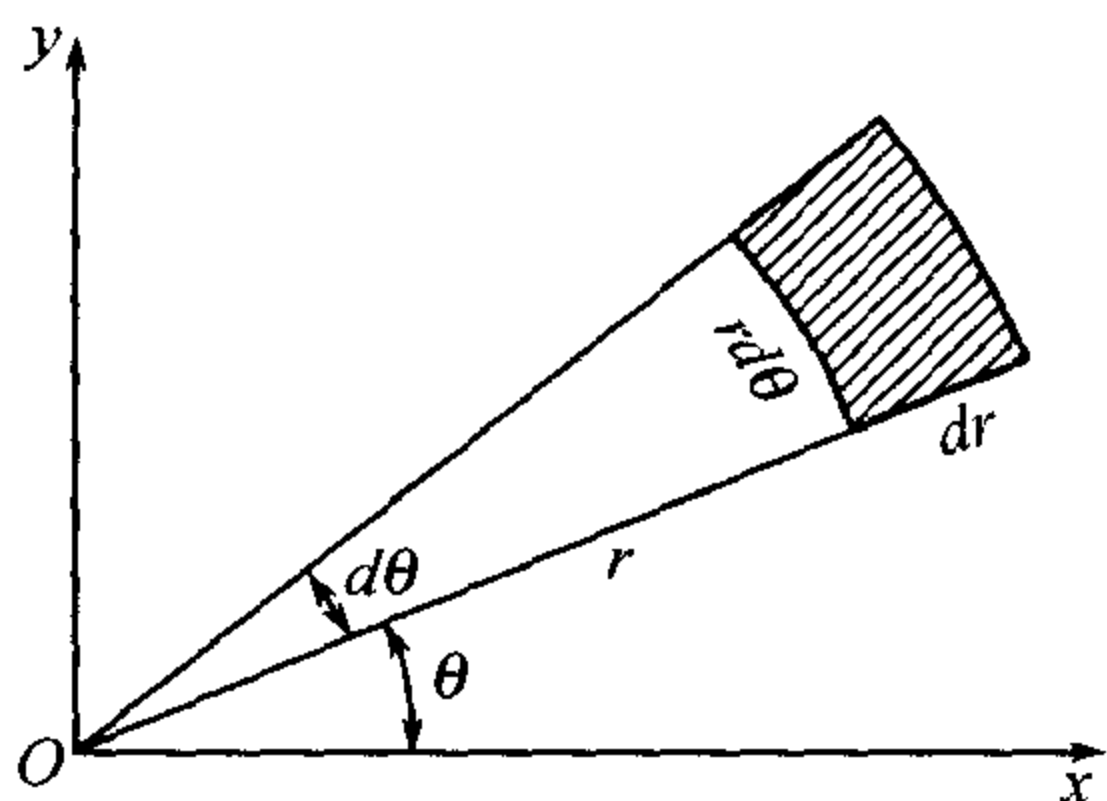


图 69

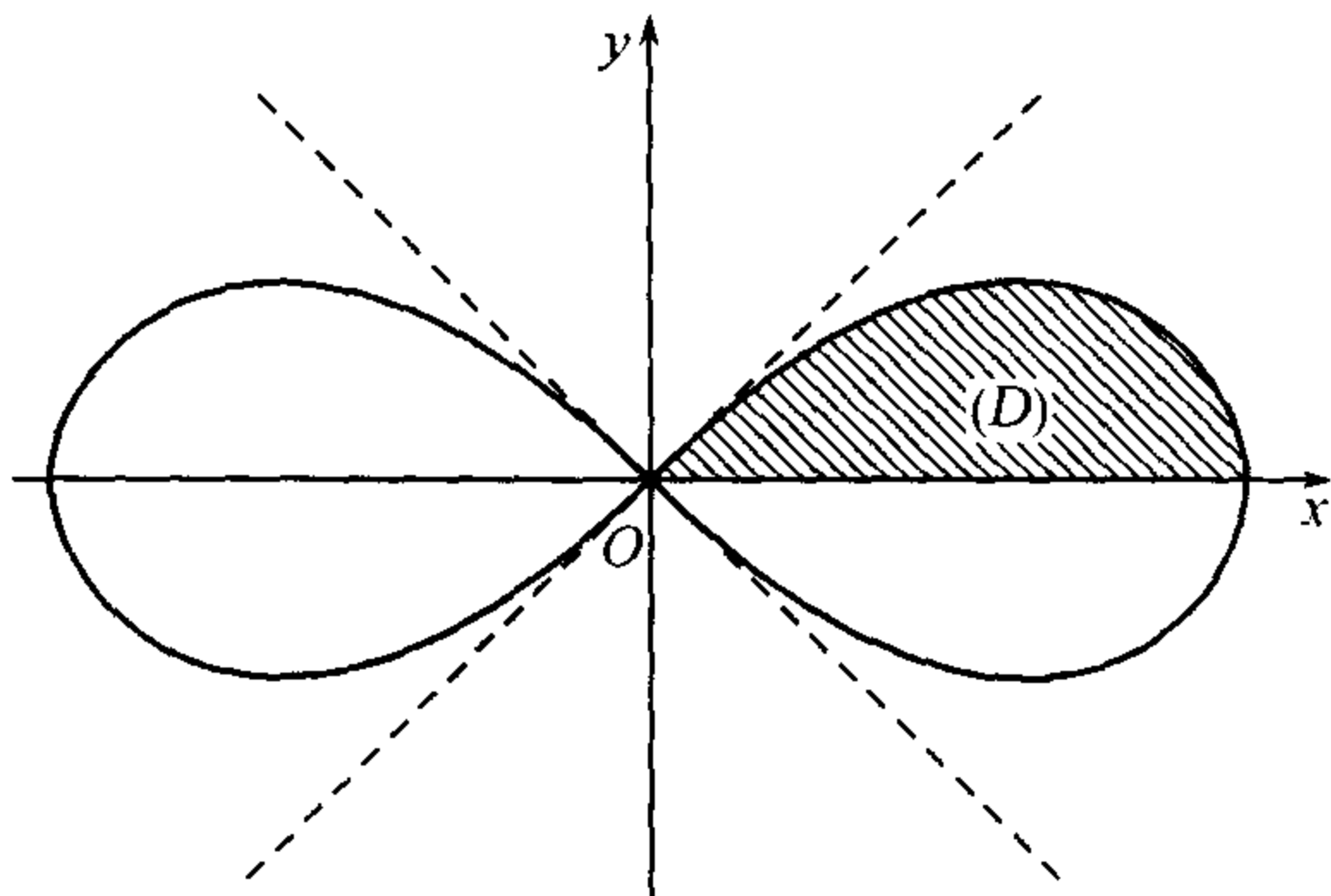


图 70

(a) 双纽线的形状为我们所熟知 (图 70). 曲线对坐标轴对称 (这从曲线方程中也容易观察得到, 因为当将  $x$  改作  $-x$  或  $y$  改作  $-y$  时它的样子不变). 所以只要确定图形的包含在第一象限内部分  $(D)$  的面积再将它四倍就行了.

双纽线的极坐标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,$$

且 (如限制在第一象限) 由于  $\cos 2\theta$  必须是正的缘故,  $\theta$  只能从 0 变到  $\frac{\pi}{4}$ . 因此,  $r\theta$  平面上对应于  $(D)$  的区域  $(\Delta)$  是由曲线

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(双纽线的像)、 $r$  轴的一段 (对应于  $x$  轴的一段) 及  $\theta$  轴自  $\theta = 0$  到  $\theta = \frac{\pi}{4}$  的一段 (仅仅在原点一点 —— 这里一对一对应破坏了<sup>①</sup>) 所围成的.

我们有

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2},$$

所以整个所求面积为  $2a^2$ .

(6) 最好事先对于曲线的形状有一大致的认识. 曲线对  $x$  轴是对称的 (将  $y$  换作  $-y$  时方程不变), 位于  $y$  轴的右边 ( $x$  不可能是负的); 当  $x = 0$  及  $x = 2a$  时它与  $x$  轴相交. 此外, 曲线是有界的: 由方程本身显然

$$x^4 \leq 2ax^3,$$

所以

$$x \leq 2a,$$

又因为  $y^4 \leq 2ax^3$ , 故亦  $|y| \leq 2a$ . 曲线的草图画在图 71 中.

曲线的极坐标方程为:  $r = 2a \cos^3 \theta$ , 其中  $\theta$  自  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $\frac{\pi}{2}$ . 由对称性, 可以写出

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos^3 \theta} r dr = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5}{8}\pi a^2.$$

<sup>①</sup>关于这一结论, 参看第 606 目中的说明 4°.



(B) 曲线对两轴皆对称. 虽然原点  $x = y = 0$  形式上“属于”这曲线, 因为它满足方程, 但这一点是一孤立点; 事实上, 当  $x \geq y > 0$  时由曲线方程易得

$$(2x^2)^3 \geq 2a^2x^4, \text{ 于是 } x \geq \frac{a}{2},$$

所以在原点附近没有曲线的点.<sup>①</sup> 对原点我们不予考虑. 易见, 曲线是有界的: 当  $x \geq y$  时, 显然,  $x^6 \leq 2ax^4, x^2 \leq 2a^2$ , 等等. 曲线的大致形状画在图 72 中.

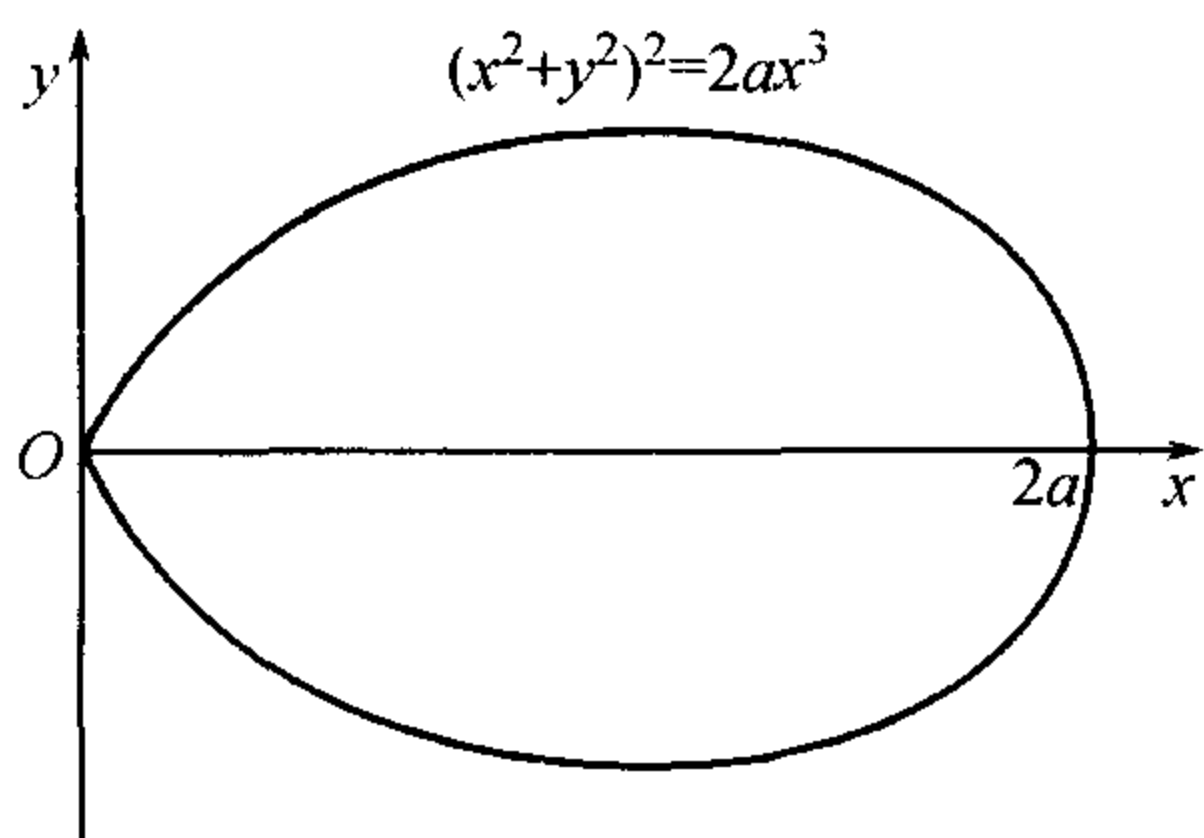


图 71

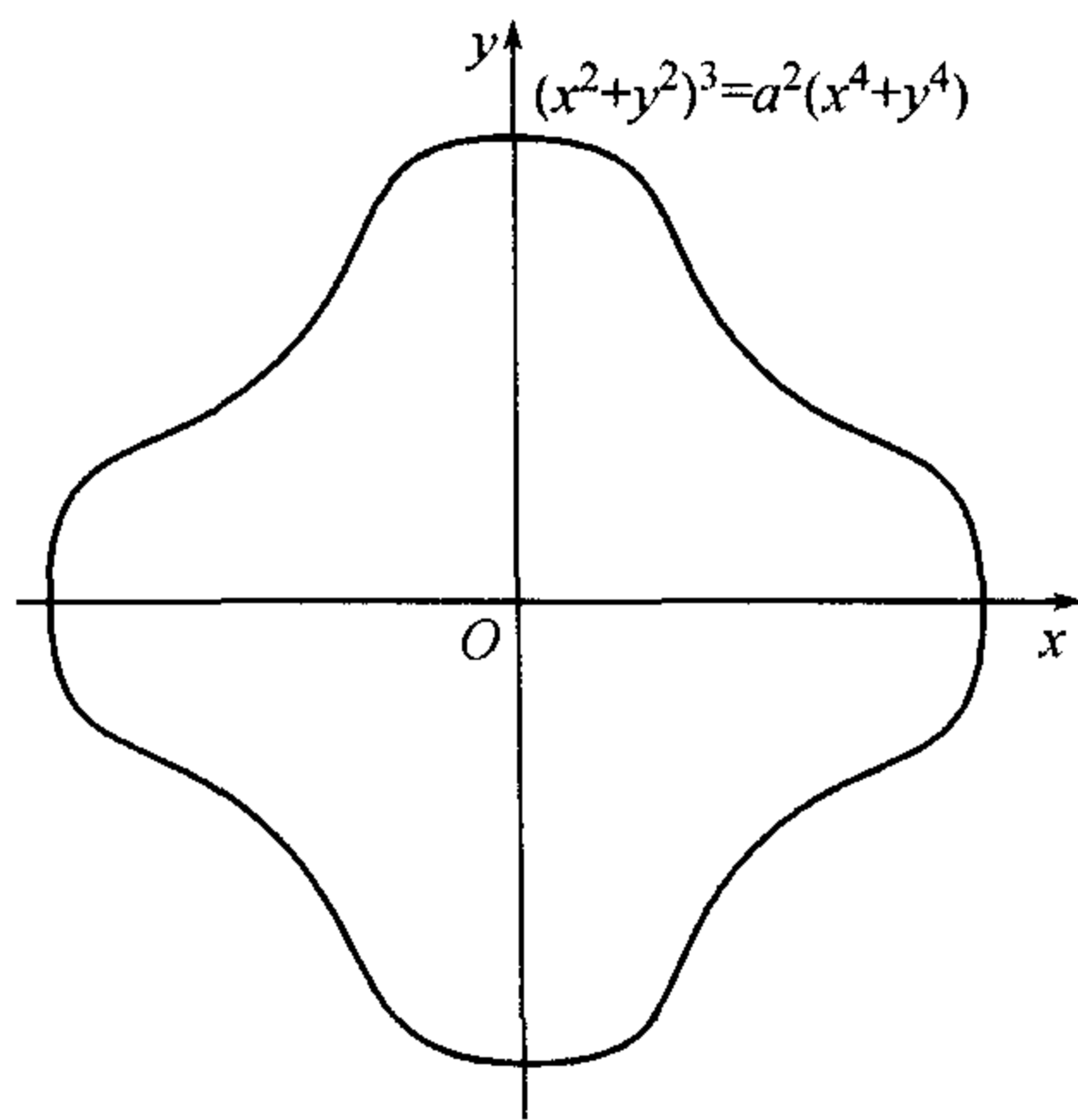


图 72

曲线的极坐标方程为:  $r^2 = a^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ . 注意对称性, 我们有

$$\begin{aligned} D &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}} r dr = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi a^2. \end{aligned}$$

2) 求证: 直接从公式 (14) 可引导得在极坐标下计算扇形面积的熟知公式 [338]:

$$D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta,$$

其中  $r$  看作曲线极坐标方程中所给的  $\theta$  的函数.

1) 中所有问题都可直接由这一公式来解决.

3) 求由下列曲线所围图形的面积:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 &= \frac{xy}{c^2}, & \text{(b)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 &= x^2 + y^2, \\ \text{(c)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 &= \frac{x^2}{c^2}, & \text{(d)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 &= \frac{x^2 y}{c^3}. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>这里, 当然, 用第 236 目的判定法也可以证明.



解 当曲线方程中有二项式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  时, 建议引用“广义的”极坐标, 与笛卡儿坐标以公式

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

相关联.<sup>①</sup> 这一变换的几何意义是将平面向两坐标方向压缩, 然后再经极坐标变换.

变换的雅可比式等于  $abr$ .

(a) 曲线有界, 对原点对称 (因为当同时用  $-x$  代  $x$  和  $-y$  代  $y$ , 方程样子不变); 两对称圈一个在第一象限内, 另一个在第三象限内 ( $xy \geq 0$ ); 原点是它与坐标轴相交的唯一一点.

在  $r\theta$  平面中我们曲线的像的方程为

$$r^2 = \frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta. \quad \textcircled{2}$$

考虑到对称性, 我们有

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta}} ab r dr = \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^2 b^2}{2c^2}.$$

(6) 曲线有界, 对坐标轴对称; 原点是它的仅有的孤立点. 我们有

$$\begin{aligned} D &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} r dr = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

(B) 曲线有界, 对坐标轴对称; 原点是它与  $y$  轴唯一的交点, 但它与  $x$  轴还交于点  $x = \pm \frac{a^2}{c}$ . 对于在  $y$  轴右面的一圈, 我们有  $r = \frac{a}{c} \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以

$$D = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{c} \cos \theta} r dr = \frac{2a^3 b}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}.$$

(r) 曲线有界, 对  $y$  轴对称, 在  $x$  轴的上面. 原点是与坐标轴唯一的交点, 所以曲线是由第一及第二象限中的两个圈组成的.

在新坐标下曲线方程为:

$$r = \frac{a^2 b}{c^3} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

答  $D = \frac{\pi}{32} \frac{a^5 b^3}{c^6}.$

4) 求下列曲线圈的面积:

$$(a) (x+y)^4 = ax^2y, \quad (b) (x+y)^3 = axy, \quad (B) (x+y)^5 = ax^2y^2.$$

解 如只考察曲线含在第一象限内的部分 (故  $x \geq 0, y \geq 0$ ), 则它们都是有界的, 这可以与 1)(6) 类似地证明. 曲线均通过原点, 与坐标轴无其它交点. 由此可见, 这些部分就是问题中所谈到的圈.

<sup>①</sup>当应用这些坐标时, 我们遇到了与极坐标情形时一样的情形, 对应的一对一性不成立. 参看 606, 4°.

<sup>②</sup>容易观察到, 曲线是一个好像压扁了的双纽线.



在以前各例中, 将曲线在笛卡儿坐标下的复杂方程转化为曲线坐标下的简单方程, 实质上是由于利用了恒等式  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . 二项式  $x + y$  同样也暗示了要利用这一恒等式的思想: 令 (仅对  $x \geq 0$  及  $y \geq 0$ !)

$$x = r \cos^2 \theta, \quad y = r \sin^2 \theta.$$

变换的雅可比式为:

$$J = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & -2r \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & 2r \sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 2r \sin \theta \cos \theta. \textcircled{1}$$

(a) 在新坐标下圆的方程为

$$r = a \cos^4 \theta \sin^2 \theta.$$

因此

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{a \cos^4 \theta \sin^2 \theta} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 \theta \sin^5 \theta d\theta = \frac{a^2}{210}.$$

$$(5) D = \frac{a^2}{60}, (B) d = \frac{a^2}{1260}.$$

5) 现在说明选取曲线坐标系的另一方法, 这在确定曲四边形面积时常常是有用的. 如组成这一四边形对边的两对曲线, 每一对皆属于充满在平面中 (且依赖于一个参数) 的一曲线族, 则自然地这两族就取为坐标线的网. 它们的参数通常也在所给情况下给出很方便的曲线坐标系.

举一例来说明这一方法. 设要去求出由抛物线

$$\begin{aligned} y^2 &= px, \quad y^2 = qx, \\ x^2 &= ay, \quad x^2 = by \end{aligned}$$

所围成图形的面积, 其中  $0 < p < q$  及  $0 < a < b$  (图 73).

这里很方便的是考察两抛物线族:

$$y^2 = \xi x \quad (p \leq \xi \leq q) \quad \text{及} \quad x^2 = \eta y \quad (a \leq \eta \leq b),$$

每一族都填满了我们的图形, 且由它们就组成了坐标线的网. 这就相当于, 把它们的参数  $\xi$  及  $\eta$  取作曲线坐标. 这全部由第 604 目, 4) 我们已经都知道; 由所写出的方程我们有:  $x = \sqrt[3]{\xi \eta^2}$  及  $y = \sqrt[3]{\xi^2 \eta}$ , 所以雅可比式

$$J = -\frac{1}{3}.$$

由此立得

$$D = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

6) 用同样的方法确定由下列各曲线所围成四边形的面积:

(a) 双曲线  $xy = p, xy = q$  及直线  $y = ax, y = bx$ ;

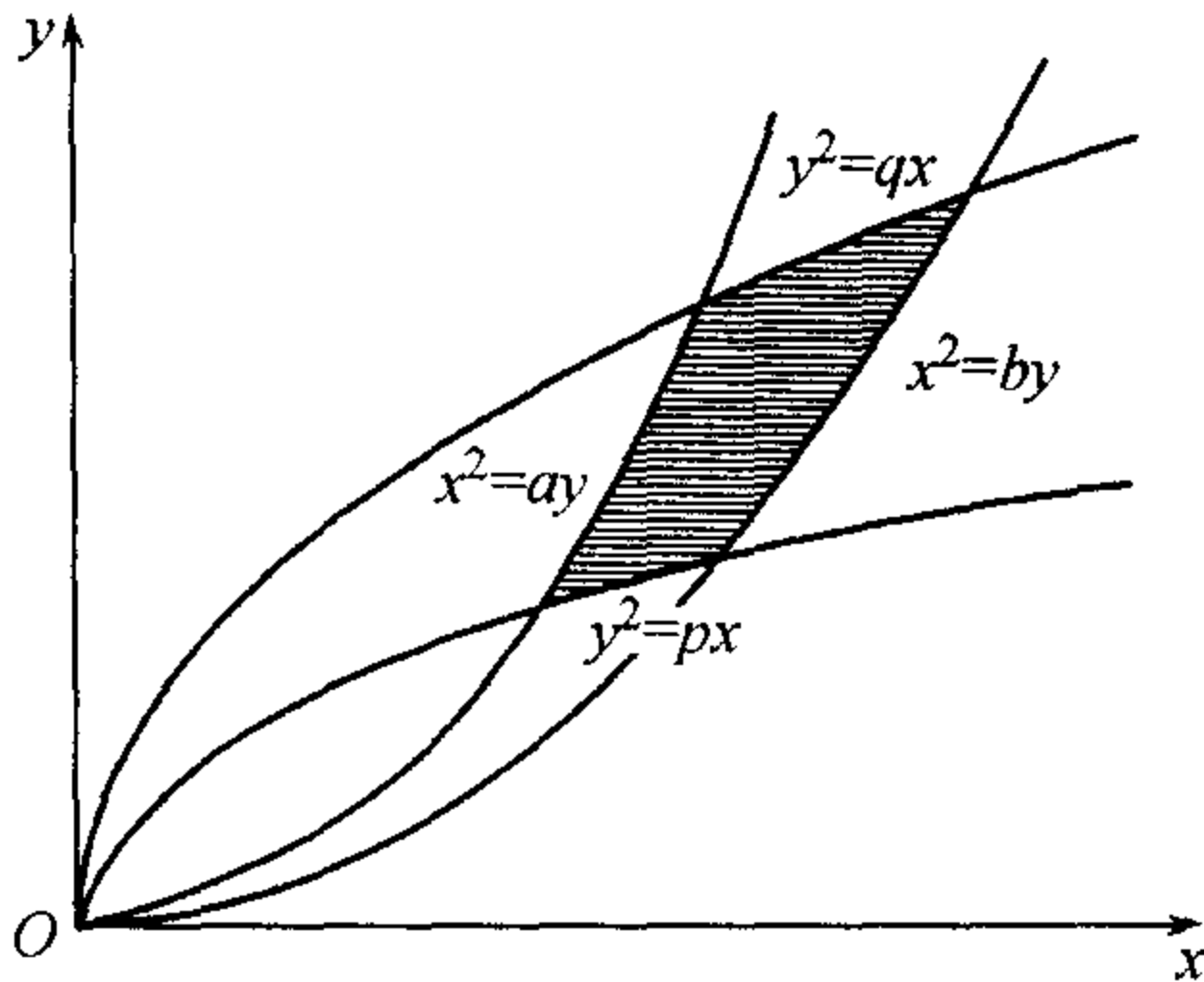


图 73

<sup>①</sup>这里, 606, 4° 中所述又获得了应用.



(б) 双曲线  $xy = p, xy = q$  及抛物线  $y^2 = ax, y^2 = bx$ ;

(в) 抛物线  $x^2 = py, x^2 = qy$  及直线  $y = ax, y = bx$ ;

(г) 直线  $x + y = p, x + y = q$  及  $y = ax, y = bx$ .

在所有情形下都假定  $0 < p < q$  及  $0 < a < b$ .<sup>95)</sup>

(a) 解 坐标线网为:

$$xy = \xi \quad (p \leq \xi \leq q), \quad y = \eta x \quad (a \leq \eta \leq b).$$

于是

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}$$

及

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\eta}.$$

最后,

$$D = \frac{1}{2} \int_p^q d\xi \int_a^b \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2}(q-p) \ln \frac{b}{a}.$$

(б)提示 令  $xy = \xi, y^2 = \eta x (p \leq \xi \leq q, a \leq \eta \leq b)$ ; 雅可比式  $J = \frac{1}{3\eta}$ .

答  $D = \frac{1}{3}(q-p) \ln \frac{b}{a}.$

(в) 答  $D = \frac{1}{6}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3).$

(г) 答  $D = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(q^2 - p^2)}{(1+a)(1+b)}.$

7) 求星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  的面积.

解 星形线的参数方程为:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

如这里以  $r$  换  $a (0 \leq r \leq a)$ , 则得一相似星形线族充满了我们的图形:

$$x = r \cos^3 t, \quad y = r \sin^3 t.$$

当  $t$  固定时, 显然, 这些方程给出自原点出发的一些射线段. 利用这些公式当作变换公式, 显然, 这里实质上是用的与前二题同样的思想. 雅可比式

$$J = 3r \sin^2 t \cos^2 t.$$

最后,

$$D = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

8) 考察由公式

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \sqrt{uv} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$$

<sup>95)</sup> 假设  $x$  与  $y$  也是正的.



确定的变换. 显然, 恒有  $x \geq y \geq 0$ , 故点  $(x, y)$  总在  $x$  轴的正向与第一象限的平分线  $y = x$  间所夹的角域内. 反过来, 在这角内的每一点  $(x, y)$  一般与两对非负值  $u, v$  相对应, 它们为二次方程

$$z^2 - 2xz + y^2 = 0$$

的根. 如永远限制在  $u \geq v$ , 即点  $(u, v)$  也取在  $uv$  平面上同样角域内, 则可得到对应的一对一性; 因此

$$u = x + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad v = x - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

容易计算出变换的雅可比式:

$$J = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right).$$

这里坐标线有奇怪的特性. 当  $u = \text{常数}$  时得:

$$y^2 = u(2x - u) = 2u \left( x - \frac{u}{2} \right),$$

同样当  $v = \text{常数}$  时有

$$y^2 = v(2x - v) = 2v \left( x - \frac{v}{2} \right).$$

因此, 在两种情况下我们得同一 (!) 抛物线族

$$y^2 = 2p \left( x - \frac{p}{2} \right),$$

其轴与  $x$  轴相重合, 而准线与  $y$  轴相重合. 每一这样的抛物线与直线  $y = x$  在点  $(p, p)$  处相切.

这种似是而非的说法可简单解答如下: 当  $u = p$  且  $v$  自 0 变到  $p$  时, 这一抛物线自它的顶点到所述切点的一部分描画出来了, 而当  $v = p$  且  $u$  自  $p$  变到  $+\infty$  时, 抛物线延伸到无穷远的其余部分描画出来了 (图 74).

如在  $xy$  平面上取一由  $x$  轴及二抛物线

$$y^2 = 2p \left( x - \frac{p}{2} \right), \quad y^2 = 2q \left( x - \frac{q}{2} \right) \quad (0 < p < q)$$

所围成的图形 ( $D_1$ ), 则在  $uv$  平面上它将与矩形  $(\Delta_1) = [p, q; 0, p]$  相对应, 且直线段  $u = p$  及  $v = p$  将与第一个抛物线上在切点处相接的两弧相对应. 同样(在  $xy$  平面上), 由三个抛物线, 即除所述两个外还有一抛物线

$$y^2 = 2r \left( x - \frac{r}{2} \right) \quad (r > q),$$

所围成的图形 ( $D_2$ ) 将与  $uv$  平面上的矩形  $(\Delta_2) = [q, r; p, q]$  相对应, 又直线段  $u = q$  及  $v = q$  与同一抛物线的两弧相对应.

用所述变换, 例如, 现在就很容易来求图形 ( $D_2$ ) 的面积. 我们有

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{4} \int_p^q \int_q^r \left( \sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right) dudv \\ &= \frac{1}{3} [(\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r^3} - \sqrt{q^3}) - (\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{q^3} - \sqrt{p^3})] \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{r} - \sqrt{p})(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}). \end{aligned}$$

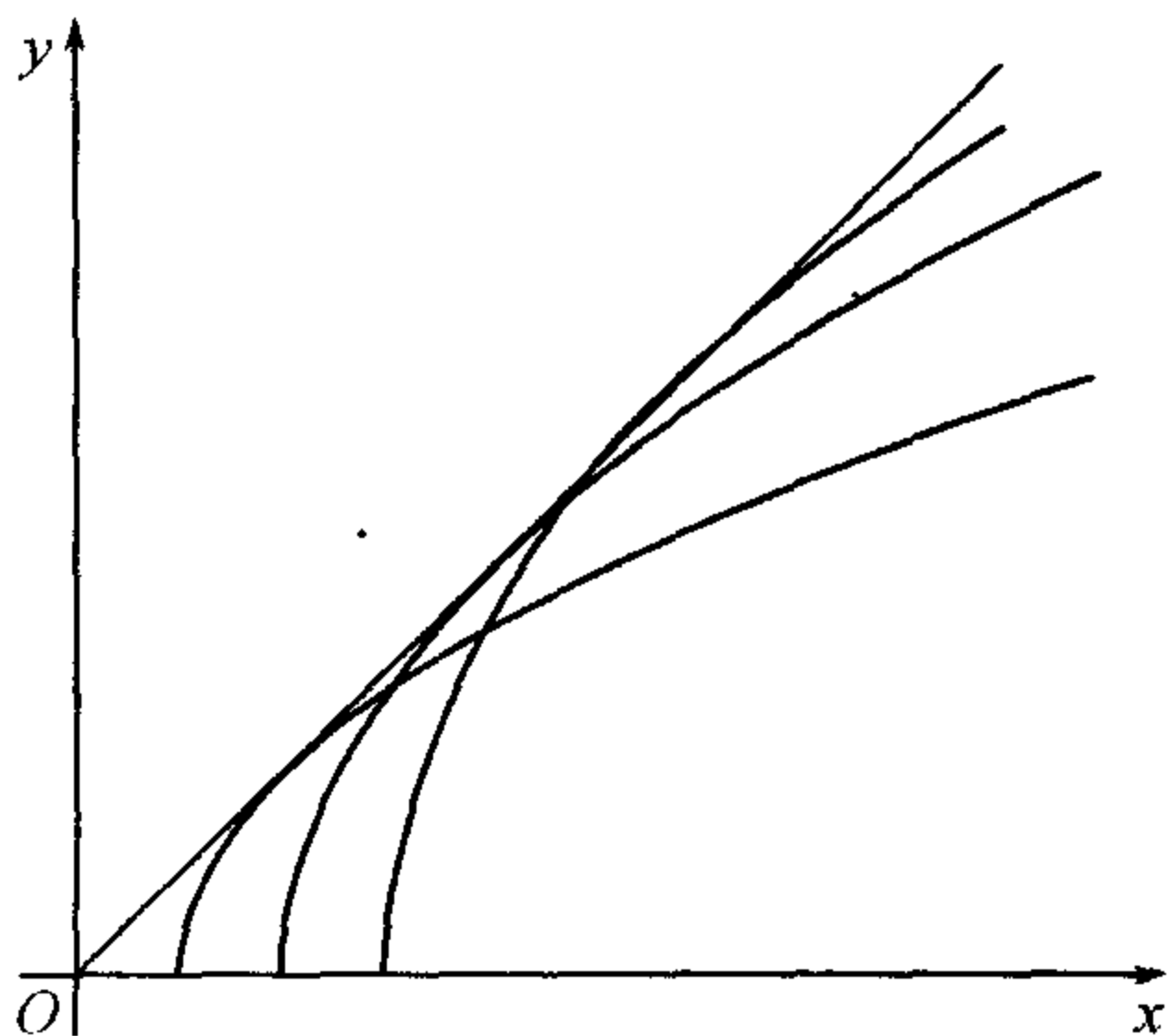


图 74



同样可以试求  $D_1$ , 但在这一情形下我们就遇到了广义的二重积分, 这时积分号下的函数沿  $u$  轴的一线段变成  $\infty$ . 以后将要谈到这种类似的积分 [参看 617,8)].

9) 要变换 (1) 能使彼此互变的二图形  $(\Delta)$  及  $(D)$  的面积永远相等, 显然, 条件

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| = 1$$

是必要且充分的.

我们的任务是: 寻求能保持面积不变的平面变换的一般形状.

此时我们可以在前面的条件中去掉绝对值符号而将它写成

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| = 1 \quad (15)$$

的形状, 因为在必要时将  $\xi$  及  $\eta$  的地位交换一下, 总可把结果化为这种样子.

此外, 为简单起见我们将假定, 在雅可比式中出现的四个偏导数之一, 例如,  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ , 在整个所考察的区域中异于零. 则可将方程 (1) 的第二个对  $\eta$  解出来, 并将所得式子代入 (1) 的第一个方程中后, 可将所考察的变换表如下形:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= f(\xi, y), \\ x &= x(\xi, f(\xi, y)) = g(\xi, y). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我们将从事于求出函数  $f$  及  $g$  的特征. 即, 我们将证明, 条件 (15) 相当于

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \xi}. \quad (17)$$

首先, 由隐函数的微分法则, 得

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

再, 将  $g$  当作复合函数, 微分, 得

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

由此并从 (18) 的第二个等式消去  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

最后, 两端减去 (18) 的第一等式, 得恒等式

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \left( \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} - 1,$$

这就证明了我们的断言.

由第 560 目的定理 2, 现在可以看见, 函数  $f$  及  $g$  能使变换 (16) 保持面积不变者其一般形状可由公式

$$f(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial \xi}, \quad g(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y}$$

给出来, 其中  $U$  是任意函数.



## 609. 二重积分中的变量变换 考察一二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy, \quad (19)$$

其中  $(D)$  是由一个分段光滑的闭路  $(S)$  所围成的, 而函数  $f(x, y)$  在这一区域上连续或至多沿有限个分段光滑的曲线上不连续 (这时要保持有界).

现在假定, 区域  $(D)$  用公式 (1):

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

与  $\xi\eta$  平面上某一区域  $(\Delta)$  相关联, 保持在第 605 目中我们推演用曲线坐标表示图形  $(D)$  的面积公式 (11) 时所有的条件. <sup>①</sup> 我们的目的是: 在积分 (19) 中更换变量, 使它表作展布在区域  $(\Delta)$  上的积分的形状.

为此我们就用某一个分段光滑的曲线网将区域  $(\Delta)$  分为许多部分  $(\Delta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则区域  $(D)$  被对应的 (也是分段光滑的) 曲线分为许多部分  $(D_i)$  (图 75, a), 6)). 在每一部分  $(D_i)$  中任取一点  $(x_i, y_i)$ , 最后, 作关于积分 (19) 的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) D_i,$$

它当区域  $(D_i)$  的最大直径趋近于零时以这一积分为其极限.

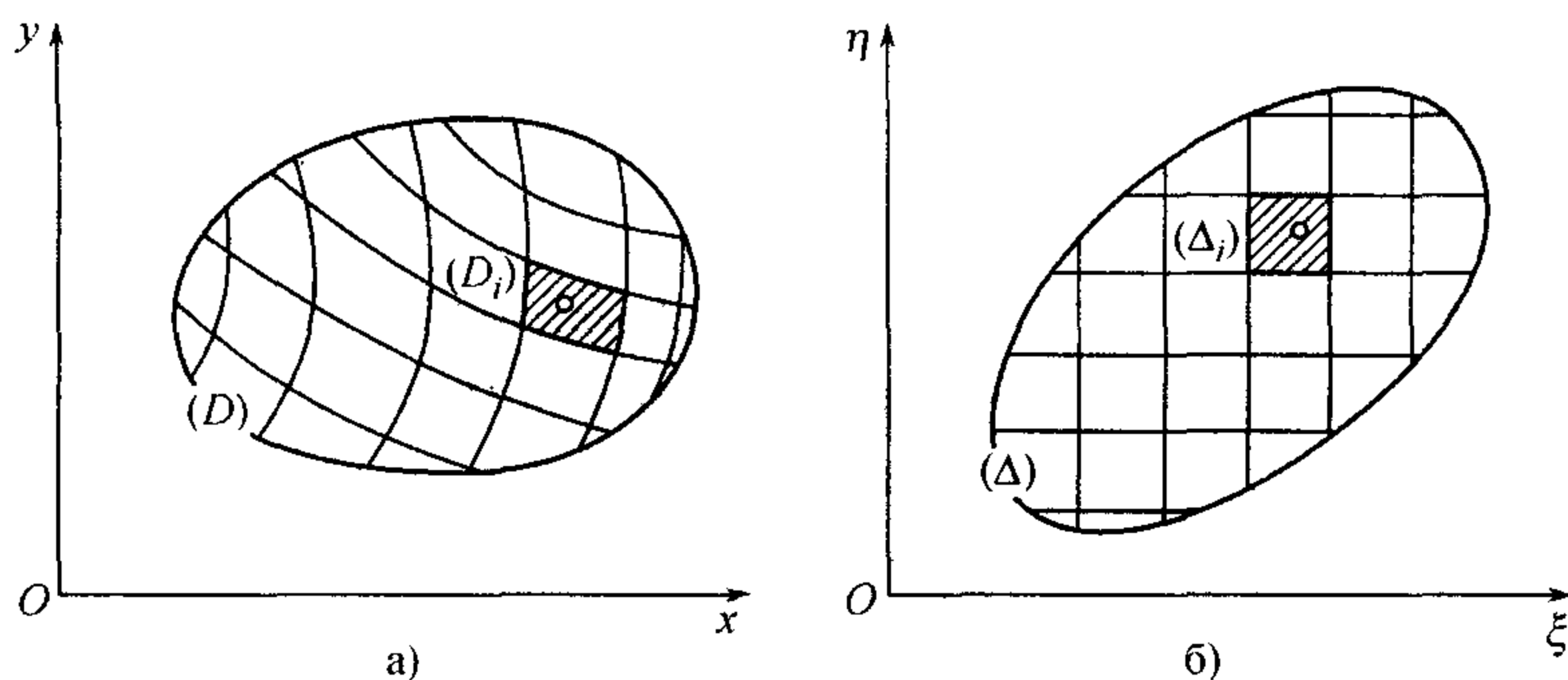


图 75

将第 606 目中的公式 (12) 应用到每一部分  $(D_i)$  上, 我们将有

$$D_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \cdot \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

其中  $(\xi_i^*, \eta_i^*)$  是区域  $(\Delta_i)$  的某一定点. 在和  $\sigma$  中将每一  $D_i$  用这式子来代替, 得

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta_i.$$

<sup>①</sup>因此, 我们同样假定二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$  及  $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi}$  存在且连续. 参看第 605 目的脚注.



点  $(\xi_i^*, \eta_i^*)$  须由中值定理得来, 不能任意选取, 而点  $(x_i, y_i)$  却是在区域  $(D_i)$  中完全任意地取出来的. 利用这一任意性, 我们可令

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*), \quad y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*),$$

亦即, 取区域  $(D_i)$  中与区域  $(\Delta_i)$  中的点  $(\xi_i^*, \eta_i^*)$  相对应者作为点  $(x_i, y_i)$ . 因此和  $\sigma$  有下形

$$\sigma = \sum_i f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*)) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta_i;$$

在这一形状之下它显然是积分

$$\iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (20)$$

的积分和. 这一积分的存在可由下面推得: 积分号下的函数或者是连续的, 或者 (同时保持有界性) 仅沿有限个分段光滑的曲线不连续, 这些曲线是函数  $f(x, y)$  的不连续处所成的曲线在  $\xi\eta$  平面上的图像.

如现在命所有区域  $(\Delta_i)$  的直径趋近于零, 则由函数 (1) 的连续性, 所有区域  $(D_i)$  的直径也同样将趋近于零. 因此, 和  $\sigma$  必须既趋近于积分 (19) 又趋近于积分 (20), 因为它同时是这两积分的积分和. 因此,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (21)$$

这一公式就解决了所提出的问题——二重积分中变量变换的问题. 公式 (11) 显然是它当  $f(x, y) \equiv 1$  时的特殊情形.

这样, 为了要实行二重积分 (19) 中变量的变换, 不仅应当在函数  $f$  中将  $x$  及  $y$  换为它们的表示式 (1), 而且应该将面积元素  $dx dy$  换作它在曲线坐标下的表示式.

用与第 606 目, 4° 中所引用的同样的讨论, 这里也容易证明, 在许多情况下, 当加在变换 (1) 上的条件在一些个别的点或沿一些个别的曲线被破坏时, 公式 (21) 依然成立.

**610. 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分** 二重积分中变量变换的公式非常类似于通常定积分中变量变换的公式:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi)) x'(\xi) d\xi. \quad (22)$$

但在公式 (22) 中没有绝对值符号, 这多少破坏了类似性. 这一差异将简单地加以解释. 通常定积分是沿定向区间而取的 [302]: 与  $\alpha$  可以小于或大于  $\beta$  一样,  $a$  也可小于或大于  $b$ . 而到现在为止我们所考察的二重积分仅仅是取在非定向区域上的.

不过, 在二重积分的情形下, 我们也可转而讨论定向区域. 定向区域的产生是由于给它的边界以一确定的环行方向——正的或负的 [548]; 同时对在区域内的所有简



单闭曲线附加了这样的方向. 如果取的是正的环行方向, 则就说区域被正的定向了, 在相反情形下, 就说它被负的定向了.

如区域正的定向, 很自然的, 对定向区域  $(D)$  同意取它的带正号的通常面积作为它的面积; 在相反的情形下如区域负的定向, 就取带负号的. 当区域  $(D)$  分为许多部分  $(D_i)$  时, 如前所述, 这些部分就按照整个区域的定向来定向; 对应地它们的面积也冠以符号.

现在, 对定向区域  $(D)$  可按第 588 目的样子建立二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

的概念; 并且如区域有正的定向时, 这一积分就与以前所确定的相一致, 在负定向的情况下就与它相差一符号.

这一二重积分的新观点首先可使第 605 目中在曲线坐标下表示面积的公式 (11) 对雅可比式不用绝对值符号改写如下:

$$D = \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \iint_{(\Delta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

只要区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  的定向是按规定而做的. 这直接可由 606, 1° 的说明推得.

在同样的规定下第 606 目中公式 (12) 也可不用绝对值符号写出来:

$$D = J(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot \Delta,$$

而在这种形式下它就是拉格朗日公式的一自然推广.

最后, 一般公式 (21) 对按规定定向的区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  现在可重写为下形:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

因此, 要使单积分与二重积分的类似处变得完全, 只要将它们加以一致的规定!

不过, 在以后的叙述中我们恒回到普通的观点, 只考察展布在非定向区域上的二重积分.

**611. 例** 因为在二重积分中变量的变换常常是以简化积分区域为目的, 所以在第 608 目中关于这所作的全部说明这里又得到了应用. 与此同时, 简化积分号下的式子也是变换的一自然目的.

1) 如区域是一圆 (中心在原点) 或一扇形, 则变成极坐标较为便利. 作为例子, 重新来解第 597 目的问题: 1); 17) (a); 18) (6).

对第二题我们有

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(D)} xy dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{8}. \end{aligned}$$



如同时积分号下式子含和  $x^2 + y^2$  时, 则更有理由希望应用极坐标来化简.

2) 求一球 (半径为  $R$ ) 被一直圆柱 (半径  $r < R$ ) 所割下部分的体积, 圆柱的轴通过球心.

解 取球心为坐标原点, 圆柱轴为  $z$  轴, 我们将有

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \left[ R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned}$$

3) 求旋转抛物面  $az = x^2 + y^2$  与平面  $z = a$  所围立体的体积.

答  $V = \frac{\pi a^3}{2}$ .

4) 求半径为  $R$  中心角为  $2\alpha$  的扇形的重心位置.

解 取中心角的平分线为极轴 (也即  $x$  轴) 后, 我们将有

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^R r^2 \cos \theta dr d\theta = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha.$$

如将这一式子除以扇形面积  $P = R^2 \alpha$ , 则求得重心的横坐标  $\xi$  为:

$$\xi = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

因为由对称性, 重心在平分线上, 故它的位置确定了.

5) 求一圆 (半径为  $R$ ) 的质量, 在每一点处它的密度等于自圆的边界到这点的距离.

答  $m = \frac{\pi}{3} R^3$ .

我们还举一些利用极坐标较便利的例子.

6) 求“维维亚尼立体”[597,20)]的体积.

解 我们已经有过

$$V = 4 \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中  $(P)$  是  $xy$  平面中第一象限内以球半径  $R$  为直径所作的半圆 (图 48). 在积分号下的函数中出现有式子  $x^2 + y^2$  就暗示引用极坐标.

$(P)$  的边界即半圆周其极坐标方程为  $r = R \cos \theta$ ,  $\theta$  自 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ . 因此,

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr = \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} R^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

可以看见, 这里的计算确乎特别简化了.<sup>①</sup>

7) 试求双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

一瓣的 (a) 重心的位置与 (6) 极惯矩.

<sup>①</sup>下面的可能性并没有除掉: 简化积分号下的式子会使积分的区域变复杂, 以致最后考虑起来变到极坐标并不便利.



解 (a) 曲线的极坐标方程为:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \left( -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right).$$

因此我们有

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2 \cos \theta dr d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \cdot \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

再令  $\sqrt{2}\sin \theta = \sin \omega$ :

$$M_y = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \omega d\omega = \frac{\pi}{4} a^3.$$

因为一瓣的面积  $P = a^2[339, 12)]$ , 故  $\xi = \frac{\pi a}{4}$ , 因而就确定了重心的位置.

(6) 我们有

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3 dr d\theta = \frac{\pi a^4}{4}.$$

8) 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  (所围面积) 对于极的极惯矩.

答  $I_0 = \frac{35}{16} \pi a^4$ .

9) 确定“维维亚尼立体”重心的位置 [参看 6)].

解 由对称性可见, 重心在  $x$  轴上, 算出它的静矩:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= 4 \iint_{(P)} xz dx dy = 4 \iint_{(P)} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr. \end{aligned}$$

里面的积分

$$\begin{aligned} \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr &= \frac{r}{8} (2r^2 - R^2) \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^4}{8} \arcsin \frac{r}{R} \Big|_{r=0}^{r=R \cos \theta} \\ &= \frac{R^4}{8} \left[ \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \frac{\pi}{2} - \theta \right], \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ (2 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta) \sin \theta + \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \theta \right] d\theta \\ &= \frac{R^4}{2} \left[ -\frac{2}{5} \cos^5 \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta + \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta - \cos \theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} R^4. \end{aligned}$$

于是, 最后,

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{12}{5(3\pi - 4)} R.$$

10) 求由椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



平面  $z = 0$  及下列曲面之一所围立体的体积:

(a) 平面  $z = \lambda x + \mu y + h$  ( $h > 0$ ),

(b) 椭圆抛物面  $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$  ( $c > 0$ ).

(B) 双曲抛物面  $cz = xy$  ( $c > 0$ ).

解 问题可变成计算展布在  $xy$  平面中椭圆上的积分, 与此相关, 令

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

变到广义极坐标较为合适; 此时变换的雅可比式  $J = abr$ .

例如, 对情形 (b) 我们将得

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{2} \iint_{(D)} \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right) dx dy = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left( \frac{a^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{q^2} \right) r^3 dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{8} abc \left( \frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} \right). \end{aligned}$$

同样对其它情形可求得

$$(a) V = \pi abh, \quad (B) V = \frac{a^2 b^2}{2c}. \textcircled{1}$$

11) 试求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

的体积.

提示 引用广义极坐标.

答  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

12) 计算积分

$$I = \iint_{(D)} xy dx dy,$$

它展布在曲线

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2 y}{c^3}$$

第一象限内的圈上 [参看 608,3)(r)].

提示 同 11).

答  $\frac{1}{840} \frac{a^{10} b^6}{c^{12}}$ .

13) 计算积分:

$$(a) I_1 = \iint_{(A)} \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy, \quad (b) I_2 = \iint_{(A)} x^n y^n dx dy$$

( $n$  为自然数), 其中  $(A)$  是由坐标轴及抛物线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  所范围的区域.

<sup>①</sup>在情形 (B) 下, 立体由四个对称部分组成, 其中两个位于  $xy$  平面的上面, 两个在下面.



**解** 曲线的参数方程为:  $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ). 很自然的, 考察一 (对原点) 位似的抛物线族:  $x = \rho \cos^4 t, y = \rho \sin^4 t$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ). 引进  $\rho$  及  $t$  作为新变数, 我们将有  $J = 4\rho \cos^3 t \sin^3 t$ , 所以

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{\rho} \cdot 4\rho \cos^3 t \sin^3 t d\rho dt = \frac{2}{15}, \\ I_2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^{2n+1} \cos^{4n+3} t \sin^{4n+3} t d\rho dt \\ &= \frac{2}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{4n+3} t \sin^{4n+3} t dt = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{[(4n+2)!!]^2}{(8n+6)!!}. \end{aligned}$$

最后一表示式可变化作下形

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)(2n+2)(2n+3)\cdots(4n+3)}.$$

特别, 当  $n=1$  时由此可得第 597 目问题 3) 的解答.

14) 计算积分

$$K = \iint_{(B)} \left( \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^3 dx dy,$$

其中  $(B)$  是由坐标轴及抛物线

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

所范围的区域.

**提示** 令  $x = a\rho \cos^4 t, y = b\rho \sin^4 t$  ( $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ).

**答**  $K = \frac{2}{21} ab$ .

15) 求积分

$$L = \iint_{(D)} \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy,$$

其中  $(D)$  是由四个抛物线  $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx$  ( $0 < a < b, 0 < p < q$ ) 所范围的区域.

**解** 引用在 604,4) 中所述的变量变换 [参看 608,5)], 变换积分成

$$L = \int_a^b \int_p^q \eta \sin \xi \eta d\xi d\eta$$

的样子. 现在经简易的计算就能给出:

$$L = \frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q}.$$

同样可以猜到在下列情形下合适的曲线坐标系:

16) 求积分

$$I = \iint_{(A)} xy dx dy.$$

如  $(A)$  是由下列曲线所围的四边形:



$$(a) \quad y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx;$$

$$(b) \quad y^3 = ax^2, y^3 = bx^2, y = \alpha x, y = \beta x.$$

提示 引进新坐标  $\xi, \eta$ , 令

$$(a) \quad y = \xi x^3, y^2 = \eta x;$$

$$(b) \quad y^3 = \xi x^2, y = \eta x.$$

答 (a)  $I = \frac{5}{48}(a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}})(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}});$

(b)  $I = \frac{1}{40}(b^4 - a^4)(\alpha^{-10} - \beta^{-10}).$

17) 设  $(D)$  是由不等式  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$  所确定的三角形. 假定  $p \geq 1, q \geq 1$ , 试直接证明刘维尔公式 [597, 16)]<sup>①</sup>

$$\iint_{(D)} \varphi(x+y)x^{p-1}y^{q-1}dxdy = B(p, q) \int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}du,$$

其中  $\varphi(u)$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数.

证 令

$$x = u(1-v), \quad y = uv$$

或

$$u = x+y, \quad v = \frac{y}{x+y}.$$

用这些公式就建立起  $xy$  平面上的三角形  $(D)$  与  $uv$  平面上的正方形  $(\Delta) = [0, 1; 0, 1]$  间的一个一对一的对应. [点  $x=0, y=0$  是一仅有的例外, 它对应于  $v$  轴的一段.] 此处

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = u.$$

变换变量, 得出二重积分等于

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}v^{q-1}(1-v)^{p-1}dudv$$

或

$$\int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}dv \cdot \int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}du.$$

因为第一因子恰恰就是  $B$  函数  $B(q, p) = B(p, q)$ , 故所需结果就被证明了.

18) 用同样的变量变换可证明一更一般的公式:

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \varphi(x+y) \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q}} dxdy = B(p, q) \int_0^1 \frac{\varphi(u)u^{p+q-1}du}{(\alpha u + \gamma)^p(\beta u + \gamma)^q}$$

(其中  $p, q \geq 1; \alpha, \beta \geq 0, \gamma > 0; \varphi(u)$  连续). 这里应利用已知的结果: 534, 2).

<sup>①</sup>以前它是由狄利克雷公式导得的, 它是这里的特殊情形 (当  $\varphi \equiv 1$  时).



19) 如应用替换

$$\alpha = \frac{1-x-y}{1-y}, \quad \beta = 1-y,$$

且若  $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ , 则公式

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{p-1}\beta^p(1-\beta)^{q-1}d\alpha d\beta = B(p,q) \int_0^1 f(v)(1-v)^{p+q-1}dv$$

就化成刘维尔公式. 雅可比式  $J = \frac{1}{1-y}$ .<sup>①</sup>

20) 用变量变换求证恒等式 (对任何的  $z = \text{常数}$ )

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda \right\}^2$$

[参看 595, 7].

证 在二重积分中按公式

$$\varphi = \frac{u+v}{2}, \quad \theta = \frac{u-v}{2}$$

变换变量可将它导致下形

$$\frac{1}{2} \iint_{(\Delta)} [\cos(z \cos u) \cos(z \cos v) + \sin(z \cos u) \sin(z \cos v)] du dv,$$

其中  $(\Delta)$  是一斜放着的正方形, 如图 76 所示. 但第二项积分等于零 (替换  $u = \pi - u'$ ), 而展布在正方形  $(\Delta)$  上的第一项积分直接可变成取在正方形  $[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}]$  上类似的积分的两倍. 由此就容易得出所需结果.

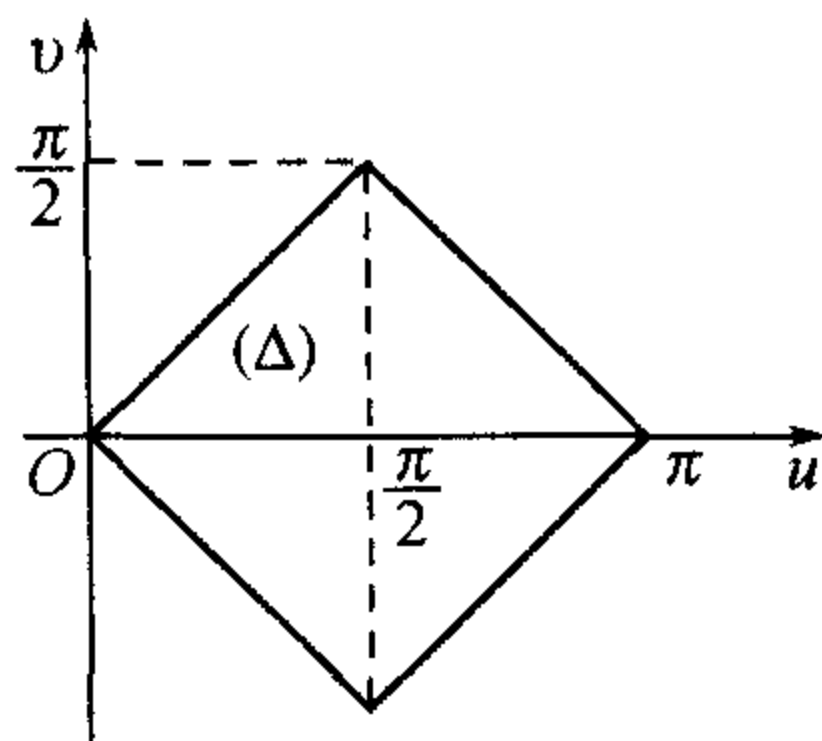


图 76

## §5. 反常二重积分

**612. 展布在无界区域上的积分** 二重积分概念可推广到无界区域即延伸到无穷的区域的情形, 或推广到无界函数的情形, 这与第十三章中对单积分所做的一样.

首先我们来讨论无界区域  $(P)$ <sup>②</sup>的情形. 这种区域的例子有整个平面、在某一圆或其它有界平面图形外面的部分、任何一角域等等. 对于这种区域的边界, 假定其每一有界部分有面积 0 (例如, 由一些分段光滑曲线所组成). 设在区域  $(P)$  中已给某一函数  $f(x, y)$ , 假定它在正常意义下在区域  $(P)$  的每一有界可求面积部分上可积.

引用一辅助曲线  $(K')$  (面积亦为 0), 自区域  $(P)$  割下它的一有界连通部分  $(P')$ , 由假设在它上面积分

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在. 现在将曲线  $(K')$  及其上所有的点移到无穷远去, 使自原点到这曲线上的点的最小距离  $R$  增大到无穷. 则被它所割下的变动区域  $(P')$  就逐渐笼罩住区域  $(P)$  的所有点:  $(P)$  的每一点对适当大的  $R$  将属于  $(P')$ .

<sup>①</sup>并且, 点  $x=0, y=1$  这里需加限制.

<sup>②</sup>我们恒假定这一区域为连通的.



如积分 (1) 当  $R \rightarrow \infty$  时存在一确定的有限极限, 则称它为在无界区域  $(P)$  上函数  $f(x, y)$  的(反常)积分, 并表作

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{(P')} f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

在函数  $f(x, y)$  为正时, 只要当考察任一变远到无穷的固定曲线序列

$$(K_1), (K_2), \dots, (K_n), \dots$$

及被它们所割下的区域序列

$$(P_1), (P_2), \dots, (P_n), \dots,$$

假定有限的界

$$I = \sup_n \left\{ \iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy \right\}$$

存在, 就已能推出积分 (2) 的存在.

事实上, 不论被曲线  $(K')$  自  $(P)$  所分出的部分  $(P')$  如何, 当  $n$  相当大时这一区域将整个含在  $(P_n)$  内, 所以

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \leq \iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy,$$

因此更加

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \leq I. \quad (3)$$

另一方面, 对已给  $\varepsilon > 0$  可求得一  $n_0$ , 使

$$\iint_{(P_{n_0})} f(x, y) dx dy > I - \varepsilon.$$

对相当大的  $R$ ,<sup>①</sup> 区域  $(P')$  又可包括  $(P_{n_0})$ , 因此更有

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy > I - \varepsilon. \quad (4)$$

等式 (3) 及 (4) 合起来就证明了数  $I$  适合二重积分的定义.

由这一观察容易证明与第 474 目中定理相似的积分比较定理. 其次, 如保留对函数  $f(x, y)$  以前的假定, 则由展布在无界区域  $(P)$  上  $|f(x, y)|$  的积分的存在就可以推得函数  $f(x, y)$  的同样积分存在.

<sup>①</sup>我们一直是将原点到曲线  $(K')$  的点的最小距离记作  $R$ .



为了要证明这, 我们来考察两非负函数:

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2},$$

$$f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2};$$

显然,

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{如 } f(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{在相反情形下,} \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), & \text{如 } f(x, y) \leq 0, \\ 0, & \text{在相反情形下.} \end{cases}$$

由函数  $|f(x, y)|$  的可积性推得出函数

$$f_+(x, y) \leq |f(x, y)| \quad \text{及} \quad f_-(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

因而函数

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y)$$

积分的存在.

反过来的事实很值得注意: 由展布在无界区域  $(P)$  上函数  $f(x, y)$  积分的存在能推得  $|f(x, y)|$  的积分也存在. 这一命题就与简单反常积分的理论不相像了: 我们知道 [475], 在那里可以有非绝对收敛的积分.

我们将在下一目中给出证明.

### 613. 反常二重积分的绝对收敛性定理 每一收敛积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy \tag{5}$$

必然也绝对收敛, 即与它同时积分

$$\iint_{(P)} |f(x, y)| dx dy \tag{6}$$

也收敛.

设不是如此. 取一区域序列  $\{(P_n)\}$ , 使越往后时它们逐渐能笼罩整个区域  $(P)$ , 而我们将有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy = +\infty.$$

不失一般性我们可以设, 对每一值  $n$ , 不等式

$$\iint_{(P_{n+1})} |f(x, y)| dx dy > 3 \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + 2n$$



适合, 这是办得到的, 只要 (在必要时) 割裂序列  $\{(P_n)\}$ , 即从它里面去掉一个部分序列再重新将它记数就可以了.

以  $(p_n)$  表区域  $(P_{n+1})$  及  $(P_n)$  的差, 显然我们有

$$\iint_{(p_n)} |f(x, y)| dx dy > 2 \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + 2n.$$

但

$$|f(x, y)| = f_+(x, y) + f_-(x, y),$$

所以

$$\iint_{(p_n)} |f(x, y)| dx dy = \iint_{(p_n)} f_+(x, y) dx dy + \iint_{(p_n)} f_-(x, y) dx dy.$$

设右端两积分中例如第一个是大的一个, 则

$$\iint_{(p_n)} f_+(x, y) dx dy > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n.$$

将左端的二重积分代以与它相当近似的达布下和, 不等式依然成立:

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n. \textcircled{1}$$

在这一和中可只留下与  $m_n^{(i)} > 0$  相对应的项; 以  $(\tilde{p}_n)$  表对应元素  $(p_n^{(i)})$  的集合, 我们更可得

$$\iint_{(\tilde{P}_n)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\tilde{P}_n)} f_+(x, y) dx dy > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n.$$

以  $(\tilde{P}_n)$  表由  $(P_n)$  及  $(\tilde{p}_n)$  组成的区域, 因为

$$\iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy \geq - \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy,$$

故将这一不等式与前一不等式两端相加时便得

$$\iint_{(\tilde{P}_n)} f(x, y) dx dy > n.$$

区域  $(\tilde{p}_n)$  同时  $(\tilde{P}_n)$  可以稍为变一下使从后者可得出—连通区域  $(P'_n)$ , 且其面积与  $(\tilde{P}_n)$  相差如此地小使不等式

$$\iint_{(P'_n)} f(x, y) dx dy > n$$

①这里  $(p_n^{(i)})$  是区域  $(p_n)$  分割成的元素部分, 而  $m_n^{(i)}$  是函数  $f_+(x, y)$  的对应下确界.



还保持成立. 这很容易做到, 只要将区域的孤立部分用一些狭的“走廊”其总面积任意小者连接起来就行了<sup>96)</sup>.

由此已经清楚, 积分 (5) 不可能存在, 与假设相违; 这一矛盾就证明了定理.

注意, 所引推理的最后部分涉及了一维及二维情形间的主要区别. 由一些分离的区间组成的不连通线性区域就不能用一任意小的变形变成连通的 (即变成一整个的区间).

所证定理以及前目中的一些注意点, 将任意函数的反常积分的存在与计算问题化为正 (非负) 函数的同一问题. 以下我们将主要地从事于后一问题.

**614. 化二重积分为逐次积分** 开始我们假定函数  $f(x, y)$  为非负的. 如这函数给出在一任何形状的无界区域中, 则补充地令它在这一区域的外面等于零时, 恒可化为无界矩形区域的情形. 譬如说, 设我们谈到在一个方向无穷的矩形  $[a, b; c, +\infty]$  ( $a, b, c$  是有限数且  $b > a$ ). 我们将假定在每一有限矩形  $[a, b; c, d]$  (对任何的  $d > c$ ) 上, 二重积分及对  $y$  的单积分在正常的意义下皆存在, 所以 [594] 公式

$$\iint_{[a, b; c, d]} f dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f dy \quad (7)$$

成立.

要想建立对无穷矩形即  $d = +\infty$  的情形类似公式, 假定逐次积分

$$I = \int_a^b dx \int_c^\infty f dy$$

存在. 因为对任何的  $d > c$  我们有

$$\iint_{[a, b; c, d]} f dx dy \leq I,$$

则按 612 中所述由此就得出二重积分

$$\iint_{[a, b; c, +\infty]} f dx dy = \lim_{d \rightarrow +\infty} \iint_{[a, b; c, d]} f dx dy \quad (8)$$

存在, 它显然不会超过  $I$ . 剩下来只要证明事实上二重积分等于  $I$ .

如积分  $\int_c^\infty f dy$  是  $x$  在正常意义下可积分的函数, 因此被某一常数  $L$  所限制住, 则更有

$$\int_c^d f(x, y) dy \leq L.$$

在这种情形下由第 526 目定理 2,

$$I = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^b dx \int_c^d f dy.$$

<sup>96)</sup> 细节留给读者.



将这与 (7) 及 (8) 相比较, 便得所需结果.

如积分  $I$  作为反常的存在时, 它依然成立. 例如, 设  $b$  是  $x$  的函数  $\int_c^\infty f dy$  的唯一奇点. 则由已证的, 对  $0 < \eta < b - a$ ,

$$\iint_{[a, b-\eta; c, +\infty]} f dx dy = \int_a^{b-\eta} dx \int_c^{+\infty} f dy, \quad (9)$$

等式的两端当  $\eta \rightarrow 0$  时趋近于  $I$ . 注意到

$$I \geq \iint_{[a, b; c, +\infty]} f dx dy \geq \iint_{[a, b-\eta; c, +\infty]} f dx dy$$

时, 又可作出矩形  $[a, b; c, +\infty]$  上二重积分及逐次积分的等的结论.

我们注意, 如无穷逐次积分有无穷大值, 则由前面两关系式可看出, 二重积分的值也是如此.

这样, 与 (7) 相似我们有

$$\iint_{[a, b; c, +\infty]} f dx dy = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f dy, \quad (10)$$

且由右端逐次积分的存在就推得二重积分的存在. 甚至在右端的积分等于  $+\infty$  的情形下等式仍成立.

最后, 我们考察在两个互相垂直方向延伸到无穷的矩形  $[a, +\infty; c, +\infty]$ . 这里我们也将假定在每一有限矩形  $[a, b; c, d]$  (对任何的  $b > a$  及任何的  $d > c$ ) 上二重积分及对  $y$  的单积分在正常的意义下皆存在.

对所考察的情况同样可建立公式

$$\iint_{[a, +\infty; c, +\infty]} f dx dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f dy, \quad (11)$$

其中假定右端的逐次积分存在. 与上面我们自 (9) 得到 (10) 时相像, 当  $b \rightarrow +\infty$  变到极限时这可由 (10) 很容易得来. 这里也是如此, 如逐次积分的值等于  $+\infty$ , 则二重积分也是这样.

现在对函数  $f(x, y)$  变号的情形谈几句, 为明确起见我们限于讨论公式 (10). 在有限矩形  $[a, b; c, d]$  (对  $d > c$ ) 中我们保留前面的假定, 但与函数本身的逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

存在的同时这一次我们又设它的绝对值的逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$$



存在.

因此对第 612 目末所提到的函数  $f_+(x, y)$  及  $f_-(x, y)$  同样的逐次积分也将存在. 分别应用已证的公式 (10) 到这两非负函数上并将结果相减, 我们就能证明这一公式对已知函数  $f(x, y)$  的正确性.

**615. 无界函数的积分** 设函数  $f(x, y)$  已给在有界区域  $(P)$  上, 但它本身在个别的点  $M_1, M_2, \dots$  的邻域中为无界的; 在区域  $(P)$  的任何不包含这些点的部分中假定函数在正常的意义下可积.

现在用曲线  $(k_1), (k_2), \dots$  将奇点  $M_1, M_2, \dots$  围起来后把它们割离下来. 如从区域  $(P)$  拿掉由这些曲线所围的这些奇点的邻域, 则得一区域  $(P')$ , 由假设, 对于它积分

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \quad (1^*)$$

存在. 将曲线  $(k_1), (k_2), \dots$  在所述各点处“收缩”使这些闭路  $(k)$  的点到对应点  $M$  的最大距离——以  $\rho$  表之——趋近于零.<sup>①</sup>我们可以看到此时所考察的各邻域的面积 (小于  $\pi\rho^2$ ) 亦将趋近于零.

无界函数  $f(x, y)$  对区域  $(P)$  的 (反常) 积分定义为当  $\rho \rightarrow 0$  时积分  $(1^*)$  的极限:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{(P')} f(x, y) dx dy, \quad (2^*)$$

奇点也可能形成某些奇线, 我们将永远假定其面积为 0. 在这种情况下就必须将这些线用向它们“收缩”的邻域围起来, 这时原则上没有什么新的东西.

然而, 这里所被说的极限过程其确切特征还需要加以若干说明. 设奇线  $(l)$  被一边界为  $(k)$  的邻域所围. 如在  $(k)$  上取一点  $A$ , 则自  $(l)$  上各不同点  $B$  到这一点的距离中有一最小者  $\rho_A$  存在; 另一方面, 如变动  $(k)$  上  $A$  的位置, 则所有的  $\rho_A$  中必定有一最大者  $\rho$ . 这一数在某种意义上就说明了闭路  $(k)$  离曲线  $(L)$  远近的程度, 而极限过程是以条件  $\rho \rightarrow 0$  为准绳的 (当有若干个曲线存在时,  $\rho$  应了解为同样数中的最大者.) 这里同样可以证明, 与  $\rho$  同时, 所考察的邻域的面积也趋近于零.

最后, 反常积分定义很容易推广到无界区域及在其中定义的函数在有限距离处可有一些奇点的情形.

**附注** 如在建立反常积分时, 除奇点 (或奇线) 外, 我们又分离出若干事实上不是奇异的点 (或线) 来, 则积分中出现的极限, 无论它的存在或大小都不会有任何影响. 实际上, 例如, 设在奇点外另加上一非奇点  $A$ , 并且, 超过反常积分确切意义的需要, 我们还分离出这一点  $A$  的一邻域. 但在  $A$  近傍函数是有界的, 对所述邻域上的积分与其面积同时趋近于 0.

<sup>①</sup>不用此而假设所有被闭路  $(k)$  所包区域的直径趋近于零, 也可以得到同样结果.



在第 612~614 目中所叙述的都可移到上所列举的反常积分的一切情形.

首先, 下一著名定理此处也成立: 反常二重积分如果收敛, 则必然也绝对收敛. 证明可如第 613 目中一样作出来.

至于谈到化二重积分为逐次积分的问题, 则这里同样只要讨论 (有限) 矩形  $[a, b; c, d]$  是区域  $(P)$  的情形就够了. 可以证明, 对非负函数  $f(x, y)$ , 在逐次积分存在的假定下 (二重积分的存在由此已能推出), 公式 (7) 成立.

然而, 这时应该还要确定一下函数奇点<sup>①</sup>的假定的分布. 开始设它们在一水平直线上 (例如,  $y = d$ ), 或更一般地, 在一可用形如

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

的显方程表出的曲线上. 对于这种情形其证明与第 614 目中当  $d = +\infty$  时的相像. 于是我们转到另一情形: 奇点在某一垂直直线上 (例如,  $x = b$ ), 与上面当  $b = +\infty$  时相像地进行推理. 如所讨论的函数变号, 则必须还要假定  $|f(x, y)|$  的逐次积分存在.

推广到几个曲线或直线的情形或推广到无穷矩形而奇点在有限距离内的情形都很明显.

**616. 反常积分中的变量变换** 设在  $xy$  及  $\xi\eta$  平面中分别有二有界区域  $(D)$  及  $(\Delta)$ , 它们以变换公式

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

或其逆变换

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

相联系, 并保有在第 603 目中所详细限制的全部条件.

又设在区域  $(D)$  中给出一函数  $f(x, y)$ , 除去有限个个别的点甚或线<sup>②</sup>它在那里变成无穷外, 到处连续.

我们求证, 在这些条件下, 等式

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (13)$$

成立, 只要这两积分之一存在; 另一个的存在就能推得出来.

事实上, 如将第一个积分在区域  $(D)$  中的奇点及奇线用它们的邻域分开来, 则第二个积分的奇点及奇线就被在区域  $(\Delta)$  中的对应的邻域分开来了. 设这样得到  $xy$  平面上的一区域  $(D')$  及  $\xi\eta$  平面上的一区域  $(\Delta')$ . 因此由第 609 目公式 (21),

$$\iint_{(D')} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta')} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (14)$$

<sup>①</sup>在任一无奇点的部分矩形中, 形如 (7) 的公式假定正确.

<sup>②</sup>在本目中所谈到的一切曲线都假定为分段光滑的.



由于区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  间对应关系的连续性, 并且为两方面连续的,<sup>①</sup> 容易看见, 当“收缩” $xy$  平面上的邻域到被它们所围的点或线时, 对在  $\xi\eta$  平面上的邻域同样的过程也将发生, 反过来也是如此. 由此可见, 将前面的关系式变到极限时, 由一个积分的存在我们事实上就能断定另一个的存在, 且同时也能断定等式 (13) 成立.

甚至还可设在区域  $(\Delta)$  的一些个别的点处或沿它里面的一些个别的线 (与前面所讨论的在这一区域上的奇线不相交) 上雅可比式  $J(\xi, \eta)$  成为无穷, 因此同时第二个积分的积分号下函数也成为无穷. 虽然在  $xy$  平面上的对应点及线对第一个积分来说不是奇异的, 但将它们分离出来, 按前目的附注, 并不产生什么困难, 所以在新的假设下上面的结论依然有效.

还要注意, 在所考察的情况下常常会遇到在一些个别点处或沿一些个别的线上关系式的连续性或对应的一对一性被破坏了. 在这种情形下第 606 目 4° 的讨论可以应用 [参照第 609 目之末].

最后, 我们转到至少区域  $(D), (\Delta)$  之一为无界的情形.

如这两区域都延伸到无穷且它们的位于有限距离的点以关系式 (12) 或 (12\*) 相关联, 则用 (对应的) 曲线分离出这两区域的有界部分  $(D')$  及  $(\Delta')$  后, 当上面所述条件保留时我们将有等式 (14). 因为所提到的这些曲线显然只在同时才可能移到无穷远处, 故要得到 (13), 只需在 (14) 中变到极限, 且又由积分之一的存在得出另一个的存在.

现设, 例如, 区域  $(D)$  延伸到无穷而区域  $(\Delta)$  不延伸到无穷, 且区域  $(D)$  的点与区域  $(\Delta)$  的所有点, 除一个别的点 (或曲线) 对应于区域  $(D)$  的边界的无穷远部分者外, 相互对应. 用曲线将区域  $(D)$  的有界部分分离出来后, 我们用在区域  $(\Delta)$  中的对应曲线就拣出了上述的点 (或曲线), 同时就得区域  $(D')$  及  $(\Delta')$ , 对它们前述推理已可应用了, 再这样下去.

注意, 变量的变换与变成逐次积分同时是确立反常二重积分存在性的非常方便的工具. 关于这一点, 读者在下一目中可见到许多例题.

**617. 例** 1) 确立下面积分存在的条件 ( $m > 0$ ):

$$(a) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}, \quad (b) \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}, \quad (B) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m}.$$

**解** 在极坐标下这些积分化为下形:

$$(a) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{rdr}{r^{2m}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad (b) 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad (B) 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{(1-r^2)^m}.$$

显然, 存在条件是:

$$(a) m < 1, \quad (b) m > 1, \quad (B) m < 1.$$

<sup>①</sup>我们指函数 (12) 及 (12\*) 的连续性.



2) 对下面各积分解同样的问题 ( $\alpha, \beta, m > 0$ ):

$$(a) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m}, \quad (b) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geq 1}} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m}, \quad (B) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{dx dy}{(1 - x^\alpha - y^\beta)^m}.$$

提示 采用替换

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}} \cos^{\frac{2}{\alpha}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{\beta}} \sin^{\frac{2}{\beta}} \theta.$$

答 (a)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > m$ ; (b)  $\frac{1}{-\alpha} + \frac{1}{-\beta} < m$ ; (B)  $m < 1$ .

当在问题 1), 2) 中变量的变化被限制在射线  $\theta = \theta_0$  及  $\theta = \theta_1$  间的扇形内时, 可得同样的答案.

3) 如变量  $x, y$  变化的区域 ( $D_1$ ) 是由  $x$  轴的线段  $AO$ , 抛物线  $y = x^2$  的弧  $OB$  及圆周  $x^2 + y^2 = 1$  的弧  $BA$  所围成的曲线三角形  $AOB$  (图 77) 时, 则与前面一样以原点为奇点的积分

$$\iint_{(D_1)} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

一样也存在 (虽然对圆并不存在!). 事实上, 当变到极坐标时, 积分就变成<sup>①</sup>

$$\int_0^\delta d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = \int_0^\delta \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta,$$

由此就推得所述的.

4) 同样, 取三角形  $AOC$  (同一图) 作为区域 ( $D_2$ ) 后, 可以证明以点  $A$  及  $C$  为奇点的积分

$$\iint_{(D_2)} \frac{dx dy}{1 - x^2 - y^2}$$

亦存在.

因为在极坐标下, 直线  $AC$  的方程为  $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$ , 故上述积分就可化为下形:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{r dr}{1 - r^2} = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} d\theta = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} d\varphi,$$

它显然存在.

5) 在对照 1) 中所考察的积分后, 可得下一收敛判定法:

如 ( $D$ ) 是: (a) 包含原点的一有界区域, 或 (b) 不包含原点而延伸到无穷远的区域, 则函数  $f(x, y)$  在 ( $D$ ) 上的积分存在, 只要  $f(x, y)$  在 ( $D$ ) 中可表作下形:

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + y^2)^m},$$

<sup>①</sup>以  $\delta$  表射线  $OB$  与极轴的交角.

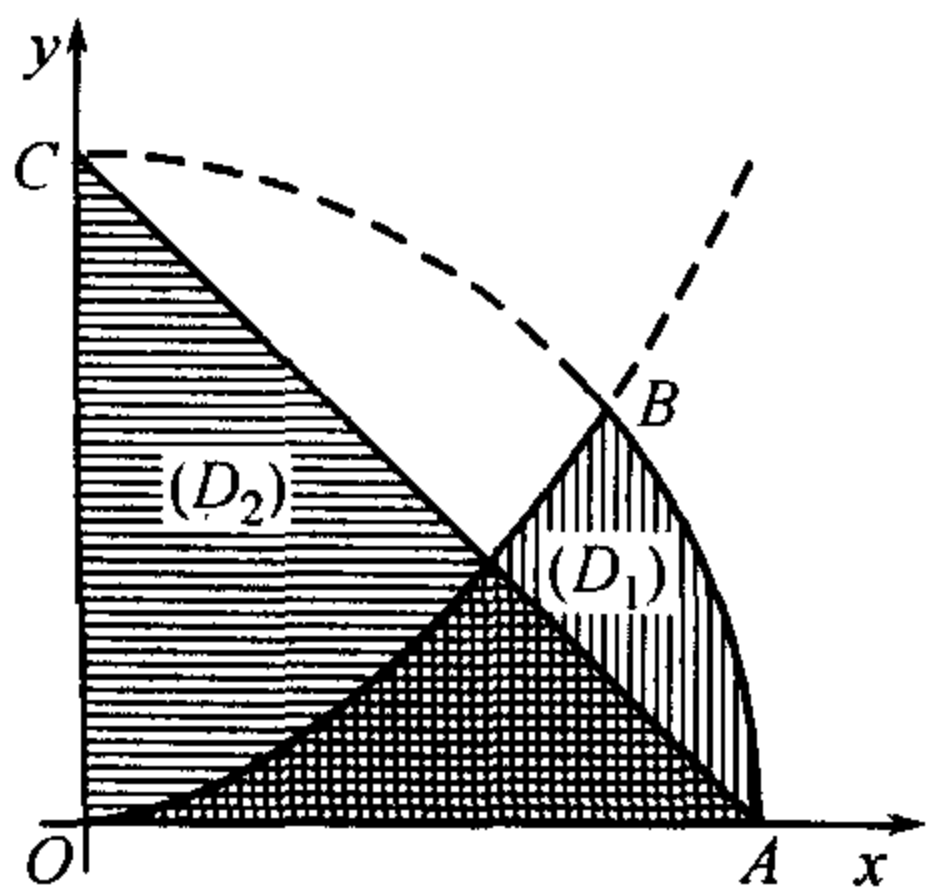


图 77



其中  $\varphi$  是有界的, 且在分别的情况下, (a)  $m < 1$  或 (б)  $m > 1$ .

很容易将这个判定法变到原点换作任何一点  $(x_0, y_0)$  的情形.

6) 验证展布在下列图形上的函数

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

的二重积分存在与否: (a) 三角形  $OBC$  (图 78), (б) 正方形  $OABC$ , (в) 无穷的长带  $YCBE$ , (г) 无穷三角形  $EBG$ , (д) 无穷正方形  $EBF$ .

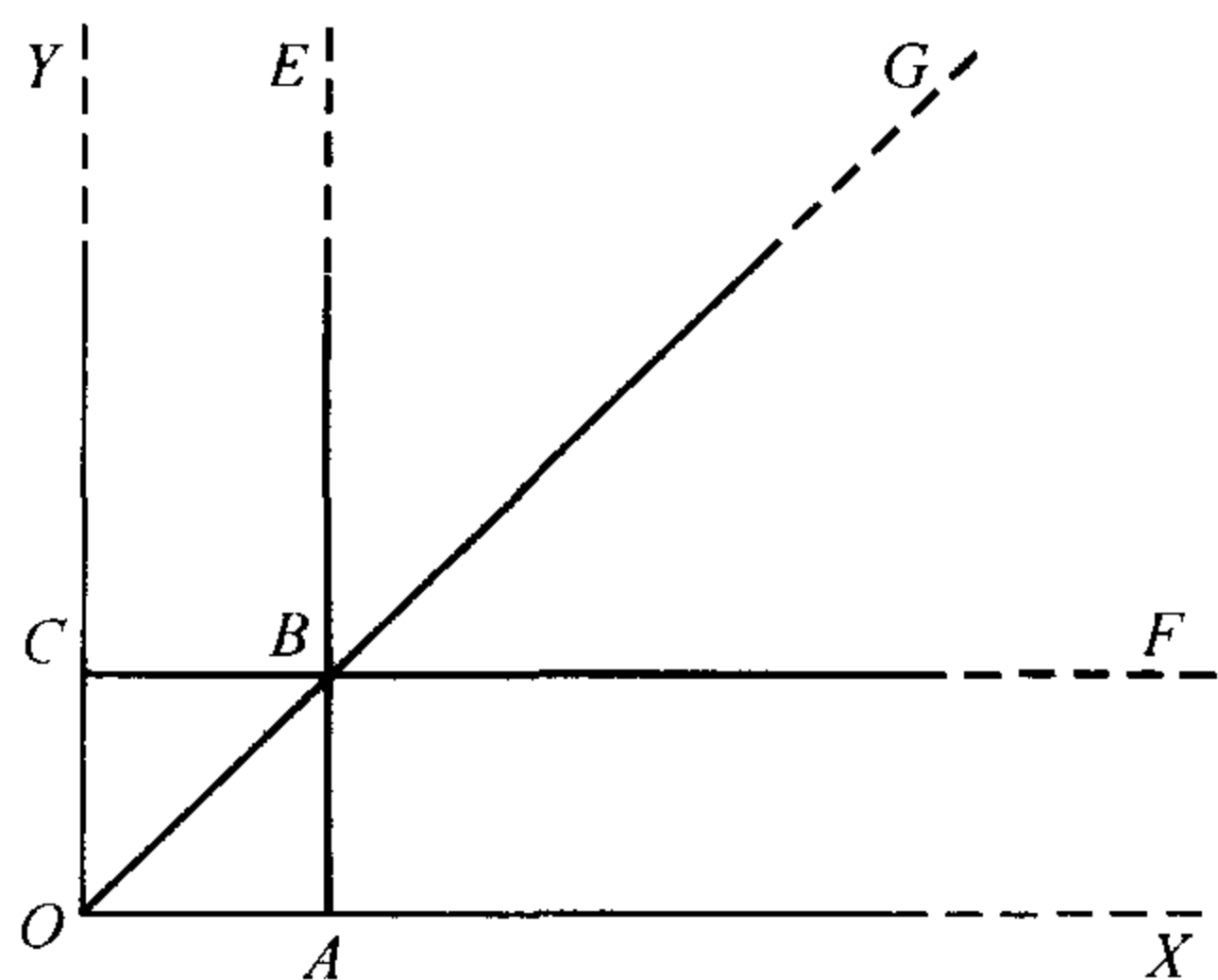


图 78

答 在情形 (a), (г) 下积分不存在 (在情形 (б), (д) 下更是如此!); 在情形 (в) 下积分存在, 它等于  $\frac{\pi}{4}$ .

7) 设函数  $f(x)$  及  $g(y)$  绝对可积 —— 第一个在区间  $[a, b]$  上, 而第二个在区间  $[c, d]$  上 (每一区间都可为有限的或无穷的). 求证: 二重积分

$$\iint_{[a, b; c, d]} f(x)g(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

也存在 [参照 595, 9)].

问题很容易化为非负函数的情形, 我们就限于这一假定.

例如, 如两区间都是有限的且  $b$  及  $d$  分别为唯一的奇点, 则如我们所已知道的, 常义二重积分 ( $\delta$  及  $\varepsilon > 0$ )

$$\iint_{[a, b-\delta; c, d-\varepsilon]} f(x)g(y)dx dy = \int_a^{b-\delta} f(x)dx \cdot \int_c^{d-\varepsilon} g(y)dy$$

存在; 再只要令  $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$  时变到极限.

除二积分

$$\int_a^b |f(x)|dx, \int_c^d |g(y)|dy$$

之一等于零的情况外, 对函数  $f$  及  $g$  的所述条件也对二重积分的存在是必要的条件.

8) 求由抛物线  $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$  及  $y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$  与  $x$  轴间所围的图形 ( $D_1$ ) 的面积 [参看 608, 8)].

解 引用在该处用过的曲线坐标, 我们就有:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{4} \int_0^p \int_p^q \left( \sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right) du dv \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^p \frac{dv}{\sqrt{v}} \cdot \int_p^q \sqrt{u} du - \int_0^p \sqrt{v} dv \cdot \int_p^q \frac{du}{\sqrt{u}} \right\} = \frac{4}{3} (q - p) \sqrt{pq}. \end{aligned}$$

面积的计算导数反常积分 (奇线是  $u$  轴的一段). 因为变量的变换也可放到反常积分的情形上去, 所采用计算的合理性毋庸置疑.



9) 计算积分 ( $0 < c < a$ )

$$R = \int_0^1 \int_0^c \sqrt{a^2 - x^2 - (c^2 - x^2)y^2} \sqrt{c^2 - x^2} dx dy.$$

应用变换

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}, \quad y = \frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}},$$

其中  $(u, v)$  变动于无穷矩形  $[0, +\infty; 0, c]$  中; 雅可比式等于  $-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$ .

我们有:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^c \int_0^\infty \frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2} du dv = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \cdot \int_0^c v\sqrt{a^2-v^2} dv \\ &= \frac{\pi}{6} [a^3 - (a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}]. \end{aligned}$$

这里将显示出常义积分化成更易计算的反常积分的便利.

10) 二重积分

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$$

存在, 因为逐次积分

$$P = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left\{ \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right\}^2$$

存在.

如将它变为极坐标, 则就易于计算; 此时  $xy$  平面上的第一象限就变成  $r\theta$  平面上的由直线  $\theta = 0, r = 0$  及  $\theta = \frac{\pi}{2}$  所围的长带. 因此,

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这一简洁的计算方法是属于泊松的.

11) 如在这同一积分  $P$  中按公式

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}, \quad x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2 - c^2, \\ \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} &= \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} \end{aligned}$$

变为椭圆坐标[604,5)], 则得

$$P = \int_c^\infty \int_0^c \frac{e^{-(\lambda^2 + \mu^2 - c^2)} (\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\mu d\lambda = \frac{\pi}{4}$$

或

$$\int_c^\infty \frac{e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} - \int_c^\infty \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-\mu^2} \mu^2 d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = \frac{\pi}{4} e^{-c^2}.$$



如取  $c = 1$  并作替换  $\lambda = \sqrt{v+1}, \mu = \sqrt{v}$  则得一奇特的关系式:

$$\int_0^\infty e^{-v} \sqrt{\frac{1+v}{v}} dv \cdot \int_0^1 \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{v(1-v)}} - \int_0^\infty \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{v(1+v)}} \cdot \int_0^1 e^{-v} \sqrt{\frac{v}{1-v}} dv = \pi.$$

12) 借广义极坐标

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

之助易于求出二重积分的值

$$J = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\pi}{2} ab.$$

如变到刚才所谈过的椭圆坐标 (取  $c^2 = a^2 - b^2$ , 故所给椭圆对应于  $\lambda = a$ ), 则对此积分得

$$J = ab \int_0^c \int_c^a \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2)(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\lambda d\mu.$$

因此,

$$\int_0^c \int_c^a \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2)(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\lambda d\mu = \frac{\pi}{2}.$$

在这里令  $a = 1, c = k < 1, k' = \sqrt{1 - k^2}$ , 最后,  $\lambda = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}, \mu = k \sin \varphi (0 \leq \varphi, \psi \leq \frac{\pi}{2})$ , 我们将这一积分化为下一积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k'^2 \sin^2 \psi) + (1 - k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)(1 - k'^2 \sin^2 \psi)}} d\varphi d\psi = \frac{\pi}{2}.$$

这又可表作下形

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi} d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}} \\ & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

读者此处看到了为我们已经所遇见过的勒让德关系式 [参看 511, 12) 及 534, 10)].

13) 试引导在第一种与第二种欧拉积分间属于雅可比的熟知关系式来.

因为 (当  $a > 0$  及  $b > 0$ )

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy, \quad \Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx,$$

故显然,

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{b-1} y^{a-1} dx dy.$$

在这里令

$$x = u(1-v), \quad y = uv.$$



故  $xy$  平面上的第一象限与  $uv$  平面上由直线  $v=0, u=0, v=1$  所围的长带相对应. 变换的雅可比式等于  $u$ . 所以

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} \cdot v^{a-1} (1-v)^{b-1} du dv \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} du \cdot \int_0^1 v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv = \Gamma(a+b)B(a, b),\end{aligned}$$

这就是所要证明的.

14) 以前我们导出过许多公式, 现在这些公式的应用范围可加以推广. 例如, 对狄利克雷公式

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

[597,12)]及更一般的刘维尔公式

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \varphi(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du$$

[611,17)]都可如此, 它们对任何  $p$  及  $q > 0$  都成立. 证明依然一样.

还可以更进一步: 到现在为止在刘维尔公式中我们假定函数  $\varphi(u)$  当  $u$  自 0 变至 1 时是连续的, 现在可允许它在这一区间中于一个或几个点处变为无穷, 只要右端的积分绝对收敛 (否则左端的积分根本不收敛).

最后, 在刘维尔公式中可将二重积分展布到由不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \geq 1$$

所定义的无穷区域上去, 只需将右端的积分自 1 取到  $+\infty$  (仍假定它绝对收敛).

在整个证明中不需有任何实质上的改变.

15) 如在狄利克雷及刘维尔公式中将  $p$  及  $q$  换作  $\frac{p}{\alpha}$  及  $\frac{q}{\beta}$ , 再实行替换  $x = \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha, y = \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta$ , 则这些公式就得更一般的形状:

$$\iint_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \leq 1}} \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta = \frac{a^p b^q}{\alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1\right)}.$$

$$\iint_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \leq 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\right) \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta = \frac{a^p b^q}{\alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1\right)} \int_0^1 \varphi(u) u^{\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - 1} du,$$



$$\iint_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \geq 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\right) \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta = \frac{a^p b^q}{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - 1} du. \textcircled{1}$$

作为例题, 试确定下列积分的存在条件并计算之 ( $m > 0$ ):

$$(a) \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m} dx dy, \quad (b) \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m} dx dy,$$

$$(B) \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(1 - x^\alpha - y^\beta)^m} dx dy.$$

答 (a)  $\frac{B\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta \left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - m\right)} \left(\text{在条件 } \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} > m \text{ 下}\right);$

(b)  $\frac{B\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta \left(m - \frac{p}{\alpha} - \frac{q}{\beta}\right)} \left(\text{在条件 } \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} < m \text{ 下}\right);$

(B)  $\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma(1-m)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1 - m\right)} \left(\text{在条件 } m < 1 \text{ 下}\right).$

[参照问题 1)].

16) 第 597 目, 15) 中所推演的卡塔兰公式:

$$\iint_{n \leq g(x, y) \leq M} f(x, y) \varphi[g(x, y)] dx dy = \int_n^M \varphi(u) d\psi(u),$$

其中

$$\psi(u) = \iint_{m \leq g(x, y) \leq u} f(x, y) dx dy.$$

在引入反常积分时可推广到  $M = +\infty$  的情形, 只需在此处了解  $\int_m^{+\infty}$  为  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_m^M$ .

17) 求积分

$$L = \iint_{(A)} \ln \sin(x - y) dx dy$$

的值, 其中 (A) 是由直线  $y = 0, x = \pi, y = x$  所围成的三角形 (图 79, a)).

令

$$x = \frac{u+t}{2}, \quad y = \frac{u-t}{2},$$

<sup>①</sup>所有的常数  $a, b, \alpha, \beta, p, q$  此处都假定为正的.



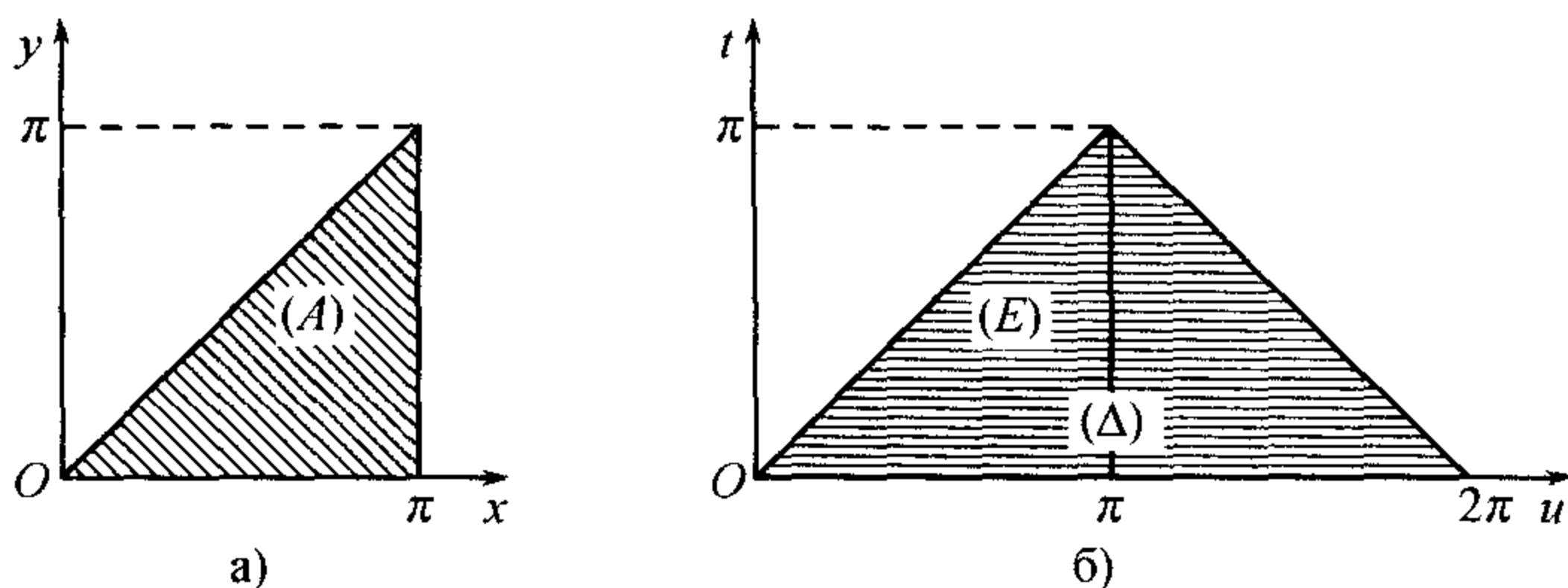


图 79

将区域 (A) 变换为  $ut$  平面上由直线  $u = t, u + t = 2\pi, t = 0$  所围的三角形  $(\Delta)$  (图 79, 6)). 因为变换的雅可比式等于  $\frac{1}{2}$ , 故

$$L = \frac{1}{2} \iint_{(\Delta)} \ln \sin t dt du = \iint_{(E)} \ln \sin t dt du,$$

其中 (E) 表由直线  $u = t, u = \pi, t = 0$  所围的三角形 (见图), 再又可写:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^\pi \ln \sin t dt du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \ln \sin t dt = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

18) 计算 (对任意的自然数  $m$  及  $n$ ) 积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_m(x)P_n(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

其中  $P_n$  表第  $n$  个勒让德多项式.

解 我们回忆到, 奇 (偶) 附标的勒让德多项式只含  $x$  的奇 (偶) 次项. 由此立刻可见, 只要附标  $m$  或  $n$  中至少有一个是奇数时就有  $I = 0$ .

设它们两个都是偶数:  $m = 2\mu, n = 2\nu$ . 考虑积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_{2\nu}(x)y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 P_{2\nu}(x) dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy.$$

由熟知的公式

$$\int_{-a}^a \frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}} dy = 2 \int_0^a \frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}} dy = 2a^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta d\theta = \pi a^{2p} \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}.$$

所以我们的积分就化成

$$\pi \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \int_{-1}^1 P_{2\nu}(x) \cdot (1-x^2)^p dx;$$

因此, 当  $p < \nu$  时它等于 0 [由勒让德多项式的基本性质; 320, (8)]. 于是, 当  $n = 2\nu \neq m = 2\mu$  时,



上述积分  $I = 0$ . 还剩下当  $n = m = 2\mu$  的情形. 在这一情形下,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_{2\mu}(x)P_{2\mu}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_{2\mu}(x)y^{2\mu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 P_{2\mu}(x)(1-x^2)^\mu dx \\ &= (-1)^\mu \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 P_{2\mu}(x)x^{2\mu} dx \\ &= (-1)^\mu \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 P_{2\mu}(x)P_{2\mu}(x) dx = (-1)^\mu 2\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \frac{1}{4\mu+1} \end{aligned}$$

[320(10)]. 这样, 最后,

$$I = \begin{cases} 0, & \text{除 } n = m = 2\mu \text{ 的情形外,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2\pi \frac{(n-1)!!}{(n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}, & \text{如 } n = m = 2\mu. \end{cases}$$

读者试验证所作运算的正确性.

19) 试计算积分 (刘维尔)

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} dx dy \quad (\lambda > 0).$$

利用莱布尼茨规则求得它对参数  $\lambda$  的导数:

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3\lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})} x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} \frac{dx dy}{xy}. \textcircled{1}$$

此处只换一个变数  $x$ , 令 (当  $y = \text{常数}$  时)  $z = \frac{\lambda^3}{xy}$ , 所以  $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$ ; 我们得

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y+z+\frac{\lambda^3}{yz})} y^{\frac{1}{3}-1} z^{\frac{2}{3}-1} dy dz = -3R.$$

积分这一简单微分方程, 得  $R = Ce^{-3\lambda}$ . 如令  $\lambda = 0$  就可决定常数  $C$ :

$$R(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

因此, 最后,

$$R = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3\lambda}.$$

20) 试计算积分

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} dx dy$$

<sup>①</sup> 建议读者验证积分  $R$  的存在及允许应用莱布尼茨规则. 后者可如在单积分情形时用同样的观察而处理.



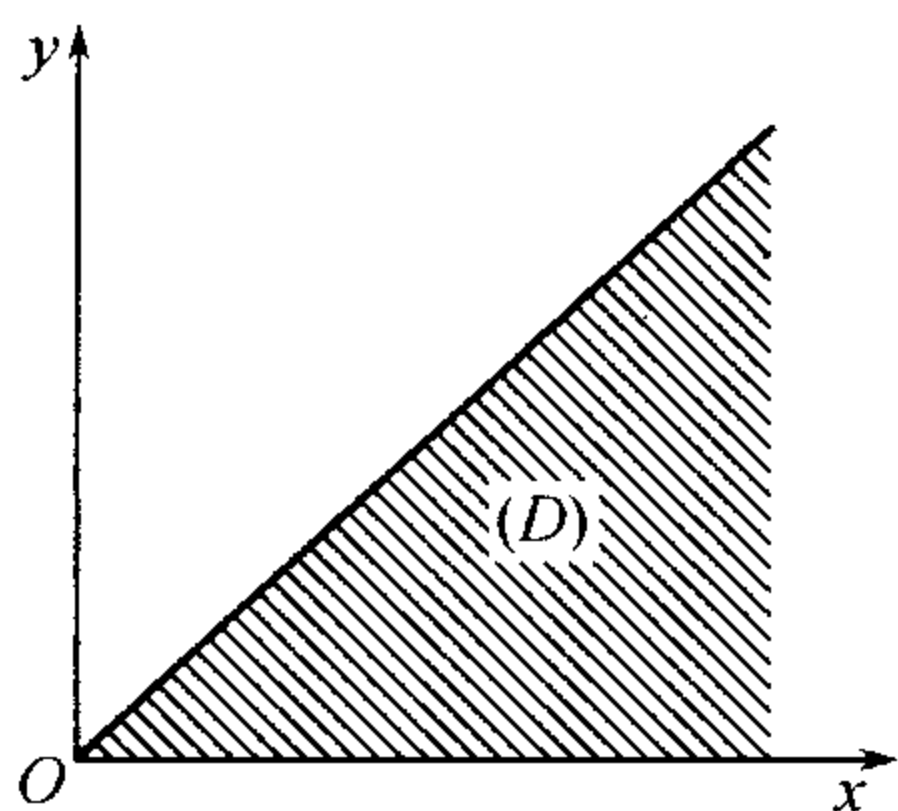


图 80

(其中  $k = \text{常数}$ ).

因为积分号下的函数其绝对值不超过函数

$$\frac{e^{-x-y}}{\sqrt{xy}},$$

当然它在第一象限内的积分是有的 [参看 7)], 故积分  $A$  的存在得以保证.

以  $(D)$  表第一象限中  $x \geq y$  的部分 (在图 80 中打了斜线), 显然, 我们有

$$A = 2 \iint_{(D)} e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} dx dy.$$

现在按公式

$$u = x + y, \quad v = 2\sqrt{xy}$$

进行变量变换, 点  $(u, v)$  在  $uv$  平面上描画出与  $(D)$  相对应的区域  $(\Delta)$ , 故  $u \geq v$ . 同时

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{x - y}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \quad \text{及} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{v}{2\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

在代入后得

$$A = 2 \iint_{(\Delta)} e^{-u} \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2 - v^2}} du dv = 2 \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^u \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2 - v^2}} dv.$$

为了计算里面的积分, 我们令

$$v = u \sin \theta, \quad dv = u \cos \theta d\theta = \sqrt{u^2 - v^2} d\theta,$$

而它就化为积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ku \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} J_0(ku)$$

[440,12)]. 利用熟知的结果 [524,3)], 最后得:

$$A = \pi \int_0^\infty e^{-u} J_0(ku) du = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

21) 试计算积分

$$B = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta dx dy,$$

其中  $a, \xi$  及  $\eta$  是常数且  $a > 0$ .

显然,

$$B = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots dx dy.$$

令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

变到极坐标; 同时为了简化计算起见, 又令

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi.$$



代入并略加改变后得

$$B = \frac{1}{8} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-ar} \cos[r\rho \cos(\theta - \varphi)] \cdot r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-ar} \cos[r\rho \cos(\theta + \varphi)] \cdot r dr \right\}.$$

令  $\theta \mp \varphi = \lambda$  并利用周期性, 我们将这两个逐次积分化为同样的一个:

$$B = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\infty e^{-ar} \cos(r\rho \cos \lambda) \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda \int_0^\infty e^{-ar} \cos(r\rho \cos \lambda) \cdot r dr.$$

容易计算出 (例如, 分部积分)

$$\int_0^\infty e^{-ar} \cos br \cdot r dr = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} \quad (a > 0).$$

此时,

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 - \rho^2 \cos^2 \lambda}{(a^2 + \rho^2 \cos^2 \lambda)^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{(b^2 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

在更一般形状下也可证明 (用同一方法): 如积分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos x\xi \cos y\eta dx dy$$

存在, 则它恒仅与  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  相关, 即有  $f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$  的形状.

22) 设  $(D)$  是由不等式  $0 \leq x \leq \alpha$  及  $y \leq x$  所指的三角形  $OAB$  (图 81), 而  $f(x)$  是任意一自 0 到  $\alpha$  的连续函数, 将二重积分

$$\iint_{(D)} \frac{f(y) dx dy}{\sqrt{(\alpha - x)(x - y)}}$$

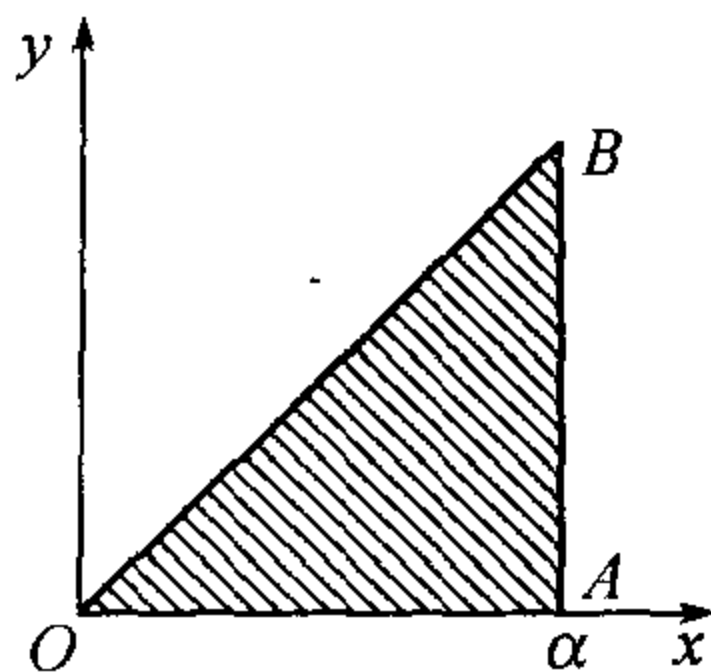


图 81

用两种方法化为逐次积分以证公式

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{x - y}} = \pi \int_0^\alpha f(y) dy. \quad (15)$$

[实质上, 这是狄利克雷公式 597,10) 的一特殊应用, 不过这一次应用到反常积分上罢了; 这里的奇线是:  $x = \alpha$  及  $y = x$ ].

我们利用公式 (15) 来解一个属于阿贝尔的有趣问题.

设  $\varphi(x)$  是一已给函数, 在区间  $[0, a]$  上它及其导函数皆连续, 且  $\varphi(0) = 0$ . 要来确定在同一区间上的连续函数  $f(x)$ , 使对所有的  $x$ , 下一条件适合:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{x - y}}. \quad (16)$$

[这种类型的方程其未知函数在积分号下面者, 称作积分方程. 阿贝尔方程是积分方程原始例题之一, 现在积分方程已出现有广泛发展的理论.]



在等式 (16) 两端同乘上  $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$ , 将它对  $x$  自 0 积分到任一  $\alpha (0 < \alpha \leq a)$ ; 由 (15) 我们得

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}} = \pi \int_0^\alpha f(y)dy.$$

如利用我们所已知的结果 511,14), 在左端及右端对  $\alpha$  取导数, 则就得到所求函数的表示式:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

剩下还要验证: 所得函数满足提出的条件. 它对  $\alpha$  的连续性容易借在 511,14) 中所述变换来证明. 如将这一函数代入方程 (16), 则依靠公式 (15), 得

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \int_0^y \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{y-t}} dt = \int_0^x \varphi'(t) dt = \varphi(x) \quad [\varphi(0) = 0],$$

这就是所要证的.

最后我们还讨论两三个能说明某些原则性东西的例题.

23) 首先我们证明: 对于 (甚至非负函数的) 反常积分, 第 594 目中自二重积分的存在可推得逐次积分存在的定理一般不成立.

设在正方形  $[0,1;0,1]$  中函数  $f(x,y)$  定义如下:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^n, & \text{如 } x = \frac{2m-1}{2^n} \text{ 及 } 0 < y \leq \frac{1}{2^n} \\ & (n=1,2,\dots; m=1,2,\dots,2^{n-1}), \\ 0, & \text{在其它各点.} \end{cases}$$

当  $y = \text{常数}$  时, 只有有限个  $x$  的值能使  $f \neq 0$ . 这就是说,

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0 \quad \text{及} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

现在, 若  $x = \text{常数}$  且不是  $\frac{2m-1}{2^n}$  的形状, 则  $f = 0$  且  $\int_0^1 f(x,y)dy = 0$ . 而若  $x = \text{常数} = \frac{2m-1}{2^n}$ , 则  $\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f dy = 1$ . 由此可见, 逐次积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$  不存在.

[对函数  $f(x,y) + f(y,x)$ , 显然, 两个逐次积分没有一个存在!]

至于二重积分, 则我们首先注意, 奇点填满了  $x$  轴上的线段  $[0,1]$ . 对任何的  $\varepsilon > 0$  在矩形  $[0,1;\varepsilon,1]$  上函数  $f$  只在有限个直线段即对  $\frac{1}{2^n} \geq \varepsilon$  的  $x = \frac{2m-1}{2^n}$  上异于 0. 故

$$\iint_{[0,1;\varepsilon,1]} f(x,y)dx dy = 0;$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  变到极限时, 就可见到

$$\iint_{[0,1;0,1]} f(x,y)dx dy = 0.$$

24) 不难确证, 二重积分

$$(a) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx dy, \quad (b) \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dx dy$$



都不存在(在第 612 目所给出定义的意义下).

在情形 (a) 下很清楚, 积分号下函数绝对值的积分不存在, 因为否则逐次积分

$$\int_0^\infty |\sin x| dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

将有有限值, 但事实上不是如此 [477]. 于是, 由 613, 就得出断言.

在情形 (6) 下, 如以  $(K_R)$  表中心在原点半径为  $R$  的圆的四分之一, 则变到极坐标时将有

$$\iint_{(K_R)} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \sin r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{4} (1 - \cos R^2).$$

当  $R$  增大到无穷时这一式子没有确定的极限, 也就解决了问题.

很奇怪的我们注意, 在所讨论的两例中的每一个, 其两种逐次积分均存在 (甚且彼此相等):

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \int_0^\infty \sin x dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{\pi}{2} \quad [522, 2^\circ],$$

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dy = \frac{\pi}{4} \quad [522, 5^\circ].$$

因此, 对于变号的函数, 逐次积分之一的存在还不足保证二重积分的存在 (我们回忆一下, 在 614 中我们补充要求了函数绝对值逐次积分的存在!)

25) 因为无穷矩形  $[0, +\infty; 0, +\infty]$  不能当作任意无穷伸展的区域 (如在第 612 目中定义所要求者) 来概括, 而只能当作形如  $[0, A; 0, B]$  的特殊矩形区域的极限, 故在上所考察的两情形下仍可证得: 积分

$$\iint_{[0, A; 0, B]} \cdots dx dy$$

当  $A, B \rightarrow +\infty$  时有一确定的有限极限存在.

这立刻可以从积分

$$\begin{aligned} & \iint_{[0, A; 0, B]} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^A \sin x^2 dx \cdot \int_0^B \cos y^2 dy + \int_0^A \cos x^2 dx \cdot \int_0^B \sin y^2 dy \end{aligned}$$

看出来, 它在所述极限过程下趋近于极限  $\frac{\pi}{4}$  [522, 5°].

现在我们来考察积分

$$\iint_{[0, A; 0, B]} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^A \frac{e^{-Bx} \sin x}{x} dx.$$

右端的第一个积分 (当  $A \rightarrow +\infty$  时) 趋近于  $\frac{\pi}{2}$ , 而第二个 (当  $A, B \rightarrow +\infty$  时) 有极限 0, 因为其绝对值不超过积分

$$\int_0^A e^{-Bx} dx = \frac{1 - e^{-AB}}{B}.$$

这样, 最后取极限时得  $\frac{\pi}{2}$ .<sup>①</sup>

<sup>①</sup>这一极限与两逐次积分的值相一致, 在两情形下都如此, 当然不是偶然的 [参照 168].



与极限过程特殊化相关的类似极限好像反常积分的“主值”[484]一样. 在任意伸展到无穷的区域的情况下也可考察它们, 如在区域的外面令函数等于零. 有些数学家认为将这些极限就放在反常二重积分概念的定义本身中很为合适 (这与在我们的叙述中所采用的定义本质上相异). 在这种观点下, 24) 中所考察的两个积分就是收敛的且非绝对收敛.

**附注** 类似的情况发生在二重级数中. 因为我们在那里总是从无穷长方矩阵出发, 所以不断用加边的有限长方矩阵来概括它是很自然的. 这已被我们安置在二重级数和的定义中 [394]. 因此之故, 二重级数既能绝对收敛, 也能非绝对收敛. 然而, 也另有一种观点存在, 按照这种观点, 从一个无穷矩阵中可以用任何形式的一些曲线分离出有限块来, 只要这些曲线能够所有的点到无穷远去就行了 [612]. 如站在这种观点上的话, 则二重级数也可与反常二重积分一样能仅仅绝对收敛.



# 第十七章 曲面面积 · 曲面积分

---

## §1. 双侧曲面

**618. 曲面的侧** 让我们首先来建立在以后讨论中占重要地位的曲面的侧这一概念.

在许多情形中, 这个概念是通过直觉就可以了解的. 如果曲面是由形如  $z = f(x, y)$  的显方程给出, 那就可以说到这曲面的上侧或下侧.<sup>①</sup> 如果曲面范围着一个立体, 那也容易想象到它的两侧 —— 朝向立体的内侧, 与朝向立体的周围空间的外侧.

从这直觉的概念出发, 我们现在要对曲面的侧这个概念给以确切的定义.

考虑一个光滑的曲面  $(S)$ , 它是封闭的或者是由分段光滑的边界所围成的, 并且它上面没有奇点; 因此, 在这曲面的各点上都有确定的切面, 它的位置随着切点位置的改变而连续地改变.

在曲面上取一定点  $M_0$ , 并在这点引一法线, 这法线有两个可能的方向 (它们可用方向余弦的符号来区别), 我们认定其中一方向. 沿曲面画一个起自  $M_0$  而又回到  $M_0$  的闭路, 并假定它不越过曲面的边界. 令点  $M$  沿着这闭路环行, 并在其各个接续的位置上给予法线一个方向; 这些方向就是由我们在起点  $M_0$  处所选定的那个法线方向连续地转变来的. 这时下面两种情形必有一种发生: 令点  $M$  环行一周再回到  $M_0$  时, 法线的方向或与出发时所定者相同, 或与出发时所定者相反.

如果对于某一点  $M_0$  及某一通过  $M_0$  的闭路  $M_0AM_0$ , 后一种情形发生, 则对于其它任一点  $M_1$  也容易作出一个起自  $M_1$  而又回到  $M_1$  的闭路, 使回到  $M_1$  时

---

<sup>①</sup> 我们常采用这类说法, 这时是指  $z$  轴本身垂直向上.



法线的方向与起初所定者相反. 例如, 假若我们理解  $M_1M_0$  为曲面上连接  $M_1$  与  $M_0$  两点但不越过曲面的边界的任一曲线, 而  $M_0M_1$  为与其方向相反的另一曲线, 则  $M_1M_0AM_0M_1$  就是这样的一个闭路.

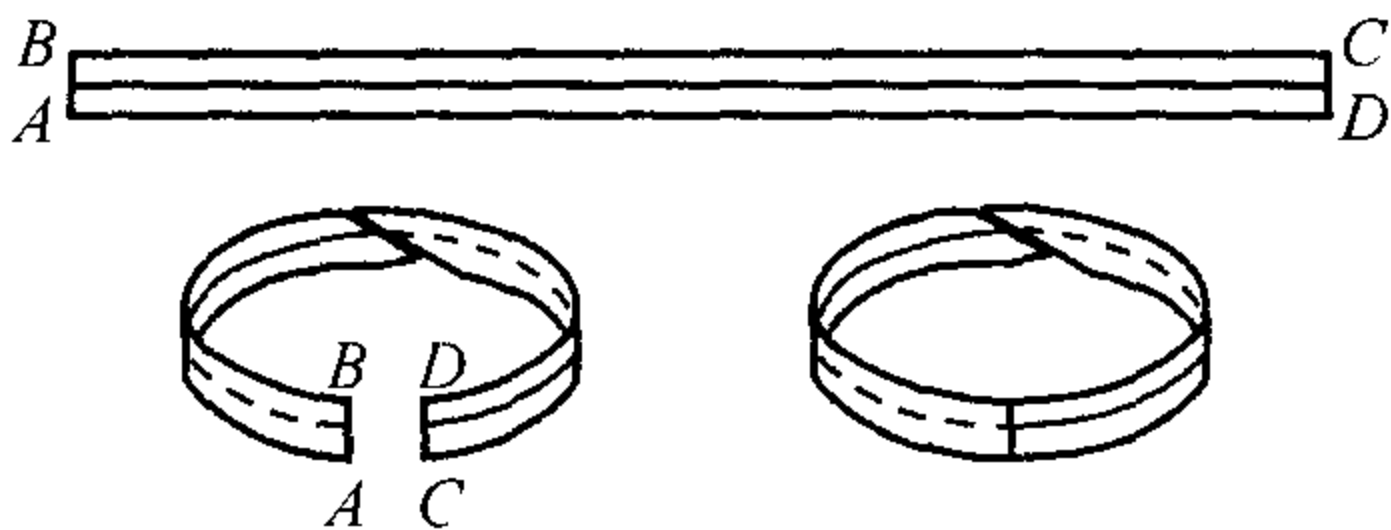


图 82

在这种情况下曲面叫做单侧的. 所谓的默比乌斯带(图 82) 就是这类曲面的一个典型的例子. 如果我们把一长方形纸条  $ABCD$  先扭一次, 再粘起来, 使  $A$  点与  $C$  点相合,  $B$  点与  $D$  点相合, 我们就可得到它的一个模型. 假若用一种颜色来涂这个扭成的环带, 那就可以不越过它的边界而用这种颜色涂遍环带的全部. 像这一类的曲面不在我们今后讨论之列.

现在我们假定不论  $M_0$  是怎样的点, 不论通过  $M_0$  而不越过曲面边界的线是怎样的闭路, 沿此线进行一周再回到起点  $M_0$  时, 法线的方向与起初所定者相同. 在这些条件下的曲面叫做双侧的.

设  $S$  是一个双侧曲面. 在  $S$  上任取一点  $M_0$ , 并给这点的法线一个确定的方向. 取这曲面的其它任一点  $M_1$ , 我们用任一个在曲面上但不越过曲面边界的道路 ( $K$ ) 来连接  $M_0$  与  $M_1$ , 并令点  $M$  沿这道路从  $M_0$  进行到  $M_1$ . 如果这时法线的方向连续地改变, 则点  $M$  到达  $M_1$  的位置时就带着一个完全确定的法线方向, 不依赖于道路 ( $K$ ) 的选择. 实际上, 假若说  $M$  沿着两个不同的道路 ( $K_1$ ) 与 ( $K_2$ ) 从  $M_0$  进行到  $M_1$  时, 我们会到  $M_1$  点得到两个不同的法线方向, 则闭路  $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$  就会使得回到  $M_0$  时所带的法线方向不同于起初的法线方向. 这和双侧曲面的定义相矛盾.

由此可见, 在双侧曲面上, 选定了一个点上的法线方向便唯一地决定全部点上的法线方向的选择. 曲面上全部点的集合连同那按指定的规则对这全部点上的法线所给予的方向, 叫做曲面的一个定侧<sup>97)</sup>.

**619. 例** 1) 最简单而又最重要的双侧曲面的例子是用显方程  $z = f(x, y)$  表达的曲面, 这里假定函数  $z$  在某一平面区域 ( $D$ ) 内连续, 并且在这区域内有连续的偏导数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{与} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

<sup>97)</sup> 特别是, 从所引入的定义与前面对此所作的说明, 可以作出对今后来说重要的结论. 首先, 曲面的侧完全由此曲面上在每一点的法线方向 (两个可能的方向中的一个) 所确定. 第二, 前面所提到的选择不是随意的, 所考察的曲面上相应于点  $M$  的法线方向应当连续地依赖于点  $M$  的位置. [这一要求只有表为方向余弦的说法才是方便的: 在点  $M$  选择的法线方向与坐标轴夹角的余弦—— $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ ——应是  $M$  的连续数值函数. 这后一连续性条件的表述在今后常常会用到. 应指出, 正是由于连续性条件, 在定侧时, 仅在曲面的一点上确定法线方向才是可以的——曲面在其余点的方向已经成为确定的了.]

最后, 第三, 由单侧曲面与双侧曲面的定义得出, 事实上单侧曲面不可能有侧, 同时易见双侧曲面总是有且仅有两侧, 前面所说也证实名词“双侧曲面”本身是有道理的.



在这种情况下曲面的法线方向余弦具有表达式:

$$\cos \lambda = \frac{-p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \mu = \frac{-q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \nu = \frac{1}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

在根式前选取一确定的符号后, 就在曲面的全部点上都建立了确定的法线方向. 因为根据假设, 方向余弦是点的坐标的连续函数, 故它所定的法线方向也连续地依赖于点的位置. 由此显然可见, 在  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  的公式中根式前符号的选择, 正是在以前所说的曲面的侧这个概念的意义之下, 确定了曲面的一侧.

如果我们在根式前选取正号, 则在曲面的全部点上

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的, 就是说所选一侧的对应法线和  $z$  轴作成的角是锐角. 因此, 由这选定的符号所确定的曲面的一侧是上侧. 反之, 在法线方向余弦的表达式中选取负号就显示出曲面的下侧 (全部法线都和  $z$  轴交成钝角).

2) 我们现在考虑, 更一般地, 任意一个由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

给出的非封闭的光滑曲面  $(S)$  并且参数  $u, v$  在  $uv$  平面上某一有界区域  $(\Delta)$  内变化. 光滑性要求(1)中各函数及其偏导数都在  $(\Delta)$  内连续, 并且曲面没有奇点. 此外 (特别着重地指出), 我们假定重点不出现, 所以曲面的每一点只能从参数  $u, v$  的一对值得到.

如果像寻常一样用  $A, B, C$  表示矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

中三个行列式<sup>98)</sup>, 再假设恒有  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , 则曲面的法线方向余弦可用熟知的公式来表达:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \mu = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

并且在这情况下根式前选定一种符号便决定曲面的一侧, 所以曲面是双侧的. 实际上, 如果符号已选定, 则对于曲面的每一点 (因为只有  $u, v$  的一对值对应于它!) 公式 (2) 和一个确定的法线方向相对应. 当点移动时, 法线方向连续地改变<sup>99)</sup>.

没有无重点的假定时, 那就不能无条件地肯定说这曲面是双侧的. 因为和曲面的重点  $M_0$  对应至少有参数的两对不同的值  $u_0, v_0$  与  $u_1, v_1$ , 而对于这两对值即使把根式前的符号取得一样, 公式 (2) 仍可能对  $M_0$  处的法线定出两相反的方向. 如果真是这样, 则这曲面一定是单侧的. 实际

<sup>98)</sup> 我们记得

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

<sup>99)</sup> 在公式 (2) 的每一个根式前都取正号所确定的曲面  $(S)$  的侧称为用所考察的参数表示产生的侧; 今后我们有时用记号  $(S_+)$  来表示, 而与该侧相反的一侧用记号  $(S_-)$  表示.



上, 我们连接点  $m_0(u_0, v_0)$  与点  $m_1(u_1, v_1)$  成为  $uv$  平面上一个曲线  $m_0m_1$ ; 于是沿这曲线我们得到曲面  $(S)$  上一个起自  $M_0$  而再回到  $M_0$  的闭曲线: 若一个点带着一个法线方向从  $M_0$  出发, 则沿这曲线环行一周而回到  $M_0$  时, 它所带的法线方向已与出发时所定者相反!

3) 若一光滑曲面  $(S)$  是封闭的, 围着某一个立体, 则它具有两侧——内侧与外侧——是很明显的. 设这曲面是由 (1) 中各参数方程表达. 这时, 虽然关于曲面上的点与区域  $(\Delta)$  上的点成——对应的假设不完全能实现, 但是公式 (2) 中符号的选择却全然确定曲面的一侧. 事实上像刚才上面说过的那种情形在这里是根本不可能的.

**620. 曲面和空间的定向** 设  $(S)$  是由简单闭路  $(L)$  所范围的一个非封闭的光滑双侧曲面; 选取这曲面的一个定侧. 我们现在按下面的规则对闭路  $(L)$  记上一确定的环行方向作为正向: 这一个方向由观察者看来必须是依反时针方向进行的; 这时假想观察者依这方向沿着这界线进行, 且与选定的一侧对应的曲面的法线同向地站着. “反时针方向” 的含义, 确切地说, 就是观察者必须在他左边看见与他紧接的曲面的部分. 对于曲面上每一个围着一部分曲面的简单闭曲线来说, 它的正向由这同一个规则同时建立起来.<sup>①</sup> 与正向相反的环行方向叫做负向, 总之, 这就是曲面的定向概念的内容. 如果从曲面的另一侧出发, 则法线要改其方向为相反的方向, 观察者的位置也要变更; 因此按照我们的规则必须重新布置闭路  $(L)$  的正负向以及曲面上其它各闭路的正负向: 曲面改变其定向. 由此可见, 如果始终保持这个确立了的规则, 则选定了曲面的一侧就确定了曲面的定向; 反之, 选定了曲面边界的正向, 就唯一地确定了曲面的一侧.

在封闭的光滑曲面  $(S)$  范围着某一个立体的情况下, 这里所能谈到的是对于这个立体来说曲面的外侧或内侧. 要对于任一个简单的闭曲线用上述的规则来确立它的正向, 这时不能做到, 其原因是双重的. 首先是这种曲线 (例如在环面上的任一经线或纬线) 简直可以 “不分割” 曲面, 那时曲面从双方紧接着曲线: 我们的规则不能给出什么. 然而即使闭路 “分割” 曲面成两区域, 它也同样地 “范围着” 这两区域, 并且我们的规则要看选取的是哪一个区域来定这闭路的两方向中哪一个作为正向. 以 “分割” 曲面的那种闭路为限, 我们开头把一个区域和边界一同指出, 然后正向就完全而唯一地建立起来<sup>②</sup>. <sup>100)</sup> 于是曲面的两定向之一就全靠所选取的一侧决定.

<sup>①</sup> 当在闭路上确定正向时, 必须只考虑这个部分.

<sup>②</sup> 如果考虑平面上由同样的方向所确定的开的或闭的曲线, 则在第一种情形下可以说出曲线上的任意两点哪个在前与哪个在后, 而在第二种情形下只有指出了那两个点及由它们所限制的弧线以后, 才能够那样地说, 可以看出这里所说的与正文所说的相类似之处.

<sup>100)</sup> 这样一来, 例如, 确定了球面的定侧以后, 我们可以谈论沿此球面的上半球面的边界环行方向的正负; 同样可以谈论沿下半球面边界环行的正负方向. 然而不能谈沿球面赤道本身环行的正负方向.

总体上可以说, 给曲面定向是选择 (相应于所考虑的曲面的侧) 沿着每个位于曲面上, 由简单分段光滑闭路所范围的区域的边界环行的正方向. 上述进行选择的规则可以比此前课文中所说的表述得更为正式一些. 事实上, 更为正式的表述在下一目中. 同样可参看下页上的脚注 101).



如果对于每一个这样的曲面,把那个和曲面的外侧对应的定向规定作正的定向,而把和它相反的当作负的定向,则空间本身由此而产生了某种确定的定向.这完全类似于平面上任一简单闭曲线的正向(可以说是正的定向)的选取,可以表征平面的定向[548].

现在定义的那个空间定向,归根到底是以反时针方向的旋转作为它的基础的,叫做**右手定向**.若所持的出发点是顺时针方向的旋转,则得到空间的**左手定向**.为了避免混乱起见,我们今后在空间定向起作用的那些问题上总是预定右手的空间定向.

必须指出,空间坐标轴的安排要由所规定的空间定向去决定.在右手定向下,坐标轴要安排得这样,当我们从正的  $z$  轴望它们时,由正的  $x$  轴到正的  $y$  轴的旋转是按反时针方向

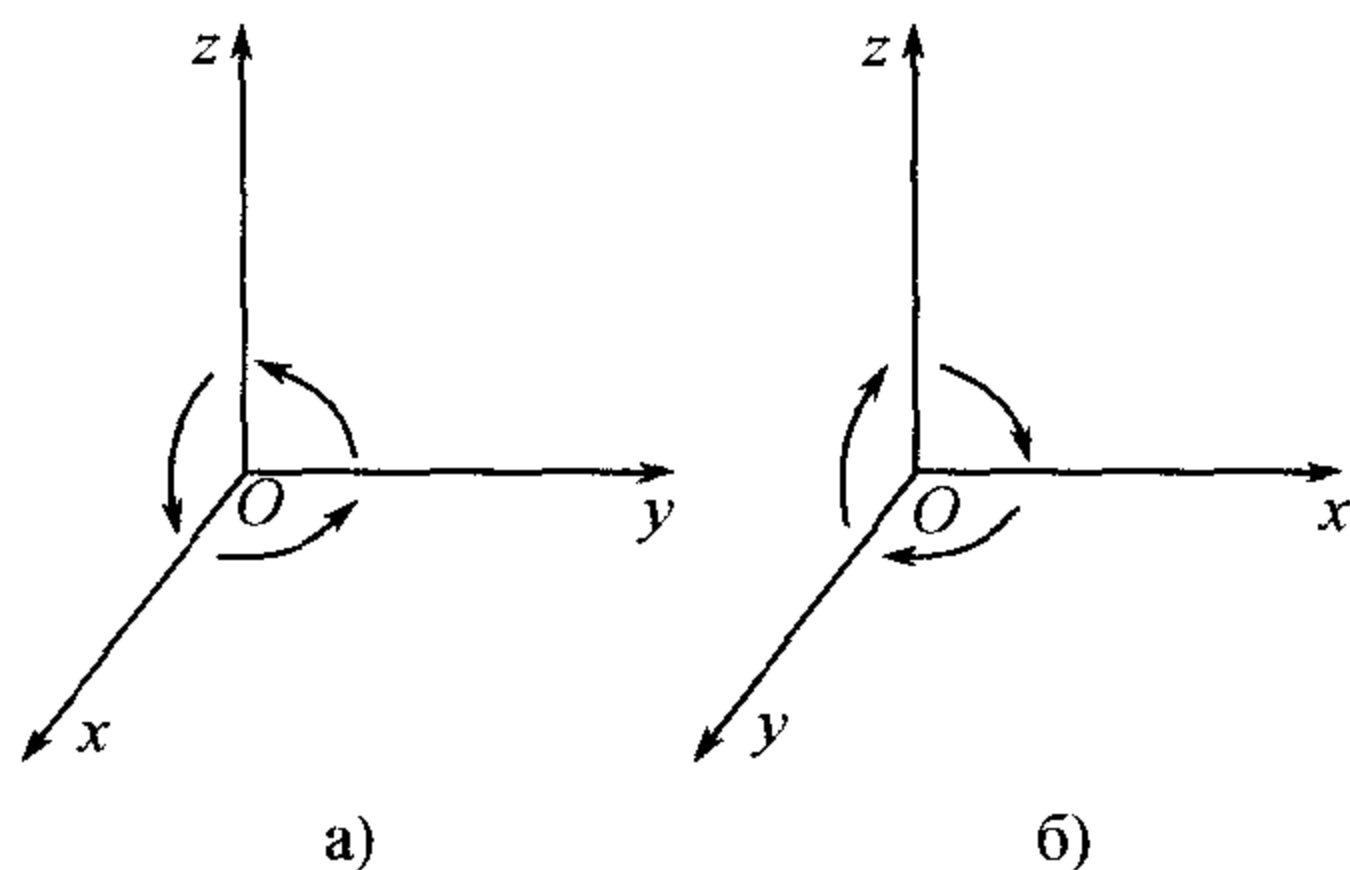


图 83

进行的(当字母  $xyz$  循环轮换时这也保持有效)(图 83, a));在左手定向下,所说的旋转就顺时针方向进行(图 83, b)).在第一种情形下坐标系  $Oxyz$  叫做右手的,而在第二种情形下叫做左手的.遵照上面所定的条件,我们今后在所指的各情况下采用右手坐标系.

**621. 法线方向余弦公式中符号的选择** 我们现在要对前面说过的概念,即曲面的一个侧的选择和其一个定向的建立两者之间的关系,给出一个在以后极重要的应用.

我们再考虑简单的非闭的光滑曲面  $(S)$ ,并选取它的一个定侧(跟着也选好了定向!).设  $(\Lambda)$  是  $uv$  平面上的区域  $(\Delta)$  的边界,而  $(L)$  是我们的曲面上和它对应的边界.我们假定(这总容易实现),边界  $(L)$  的正向对应于边界  $(\Lambda)$  的正向.于是对于两个彼此对应的在区域  $(\Delta)$  内的闭路  $(\lambda)$  和在曲面  $(S)$  上的闭路  $(l)$ ,也有同样的情形:  $(\lambda)$  的正向引出  $(l)$  的正向.<sup>①</sup>

在这些条件下为了显示所选的曲面一侧,必须选取法线方向余弦公式(2)中根式前的正号<sup>101)</sup>.

<sup>①</sup>因为一闭路的方向可以由它的任一部分的方向来判断,所以对于和  $(\Lambda)$  有一公共部分的闭路  $(\lambda)$  来说,所下的断言是显明的,然后容易变到一般场合.

<sup>101)</sup>从楷体字所述的假定推出,范围曲面  $(S)$  上某一区域的边界  $(L)$  的环行方向,可按下述规则确定.首先确定曲面  $(S)$ ,或至少是  $(S)$  上的一部分区域连同范围这个区域的边界  $(L)$  的参数表示  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ .其次,求出在  $uv$  平面上与曲线  $(L)$  及其所范围的区域相应的、互相单值确定的曲线  $(\Lambda)$  与区域  $(\Delta)$ .现在假定,  $uv$  平面补上与坐标轴  $u$  与  $v$  的配置相应的定向[参看 548].我们可以按下述方式确定与曲面  $(S)$  所选的侧相应的边界  $(L)$  的环行方向.如果所选曲面  $(S)$  的侧是  $(S_+)$  侧,那么对  $(L)$  的正向是这样的环行方向:它与边界  $(\Lambda)$  的正的环行方向相对应;反之,在  $(S_-)$  侧的情形对  $(L)$  的正环行方向对应于边界  $(\Lambda)$  的负的环行方向.



要证明这个断语只要查明,至少有一点处由这些带正号的公式所确定的方向和所要求的法线方向相一致. 取曲面上任意一个内点  $M_0$ ; 在区域  $(\Delta)$  内有和它对应的点  $m_0(u_0, v_0)$ .

设在这点处, 譬如说, 行列式

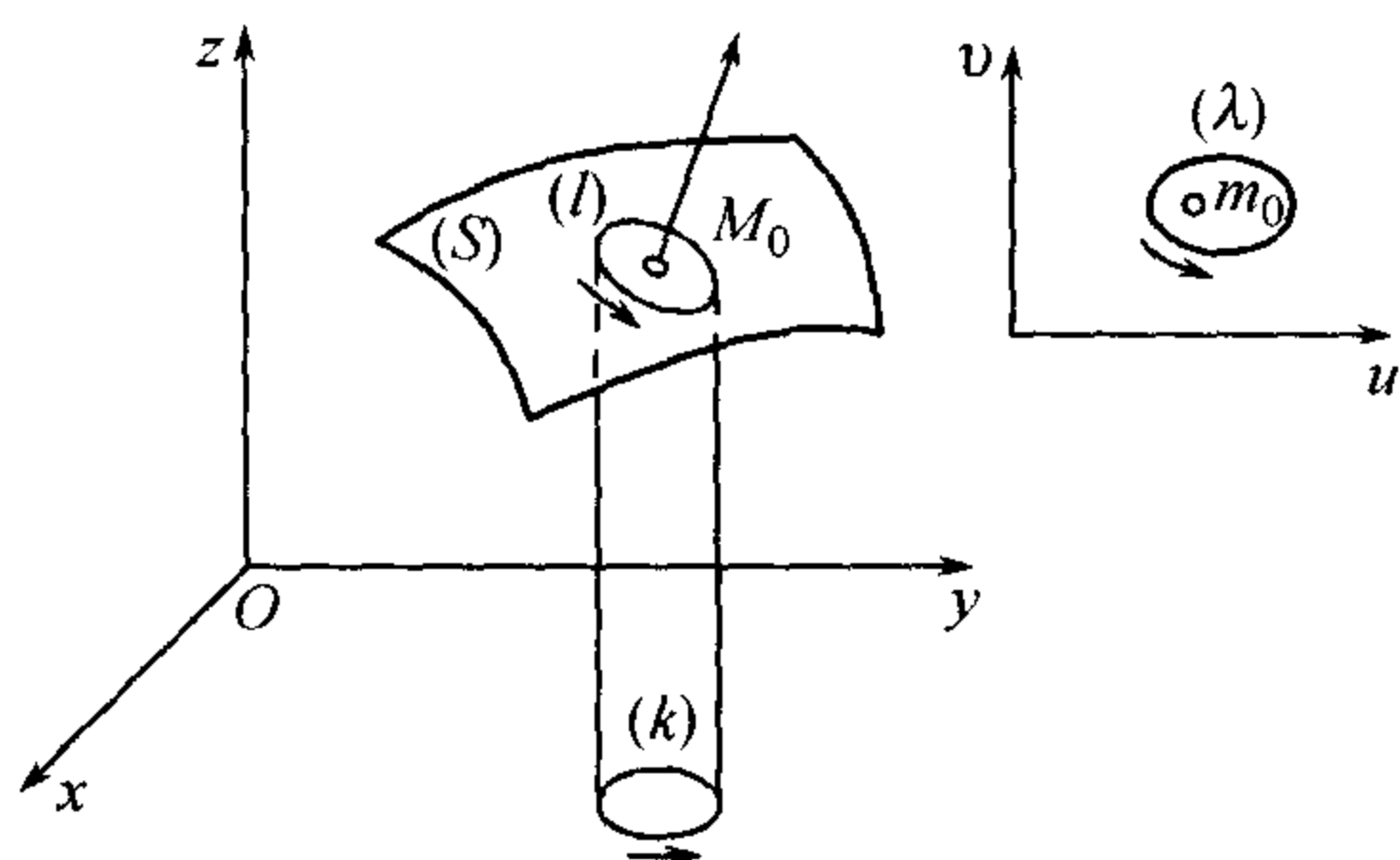


图 84

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不为零. 于是在  $uv$  平面上找得到点  $m_0$  的一个这样小的邻域 (其边界为  $(\lambda)$ ), 使得在曲面  $(S)$  上和它对应的点  $M_0$  的邻域 (其边界为  $(l)$ ) 是一一对应地射影到  $xy$  平面上. 用  $(k)$  表这射影在  $xy$  平面上的闭路 (图 84).

如果在所考虑的点处以及在它的邻域内  $C > 0$ , 则对应于闭路  $(\lambda)$  的正向有闭路  $(k)$  的正向 (即在所选择的坐标轴的排列下其方向是反时针方向)[参看 606, 1°]. 从图形中显然可见, 要曲面上和  $(k)$  对应的闭路  $(l)$  的方向也是反时针方向, 就必须从上面朝它看, 因此在这情况下点  $M_0$  处的法线应该是向上的, 即应该与  $z$  轴交成锐角. 如果在公式 (2) 中取正号, 则由公式 (2) 就正有这情形, 因为当  $C > 0$  时  $\cos \nu > 0$ . 反之,  $C < 0$  时法线应该与  $z$  轴交成钝角, 这在上述选取的符号下一样地成立, 因为  $C < 0$  时  $\cos \nu < 0$ .

若光滑的曲面  $(S)$  是闭的而且范围着某一个立体 [参看 619, 3°], 则对于它来说就有类似的情形发生. 假设我们已认定了曲面的一个定侧, 并且假设对应于区域  $(\Delta)$  内任一闭路  $(\lambda_0)$  的正向有曲面  $(S)$  上由它定义的闭路  $(l_0)$  的正向, 只要  $(l_0)$  所范围的那个在曲面  $(S)$  上的区域是与  $uv$  平面上由闭路  $(\lambda_0)$  所范围的区域相对应. 在这种情况下, 上面对于开曲面所证明的命题这时也是正确的.

**622. 分片光滑曲面的情形** 在 620 目中所发展的概念, 也为曲面的侧的概念推广到分片光滑的曲面的情形提供了一个便利的方法. 第 618 目中所叙述的一些见解不能直接地应用到这里, 因为沿着那些连接各片光滑曲面的“棱”没有确定的切面, 而且通过这些棱时谈不到法线方向的连续变化.

设给定的分片光滑的曲面  $(S)$  是由各光滑的曲面  $(S_1), (S_2), \dots$  所组成, 它们是沿着棱 (即它们边界的公共部分) 一个接着一个的. 首先假设这些面片中各片分开来都是双侧的. 可是, 要能够把整个曲面  $(S)$  看作是双侧的, 这个假设自然是不充分的; 不难看出默比乌斯曲面是由两片光滑的双侧曲面作成的.

在每片曲面  $(S_i) (i = 1, 2, \dots)$  的边界  $(K_i)$  上选取其两方向中之一作为正向; 我们已知道, 这可以确定曲面  $(S_i)$  的一侧. 若这选择法能够进行到这样, 使得相接的



两边界的公共部分<sup>①</sup>总是在两边具两个相反的方向(图 85), 则只有这时曲面 ( $S$ ) 是双侧的. 曲面 ( $S$ ) 的一侧定义为由所述方法选出来的它的各部分的侧的总和.

如果就在一个地方把一个边界的方向改为相反的方向, 则为了遵守我们的条件必须对所有的边界都这样做. 于是所选的各片曲面 ( $S_i$ ) 的侧都要用与它们相反的侧来替代; 这些相反的侧的总和就组成曲面的第二侧.

为了要掌握所作的一些规定, 向读者建议: 1) 用一立方体的面 (图 86) 作为例子, 选择其六个面的边界的应有方向来实现这些规定, 2) 假若企图对一已分解成为两个或多个双侧曲面的默比乌斯带也这样做, 试了解当中会有那些困难发生, 最后, 3) 指出上面所给的关于曲面侧的定义与曲面被分解为怎样的光滑面片无关.

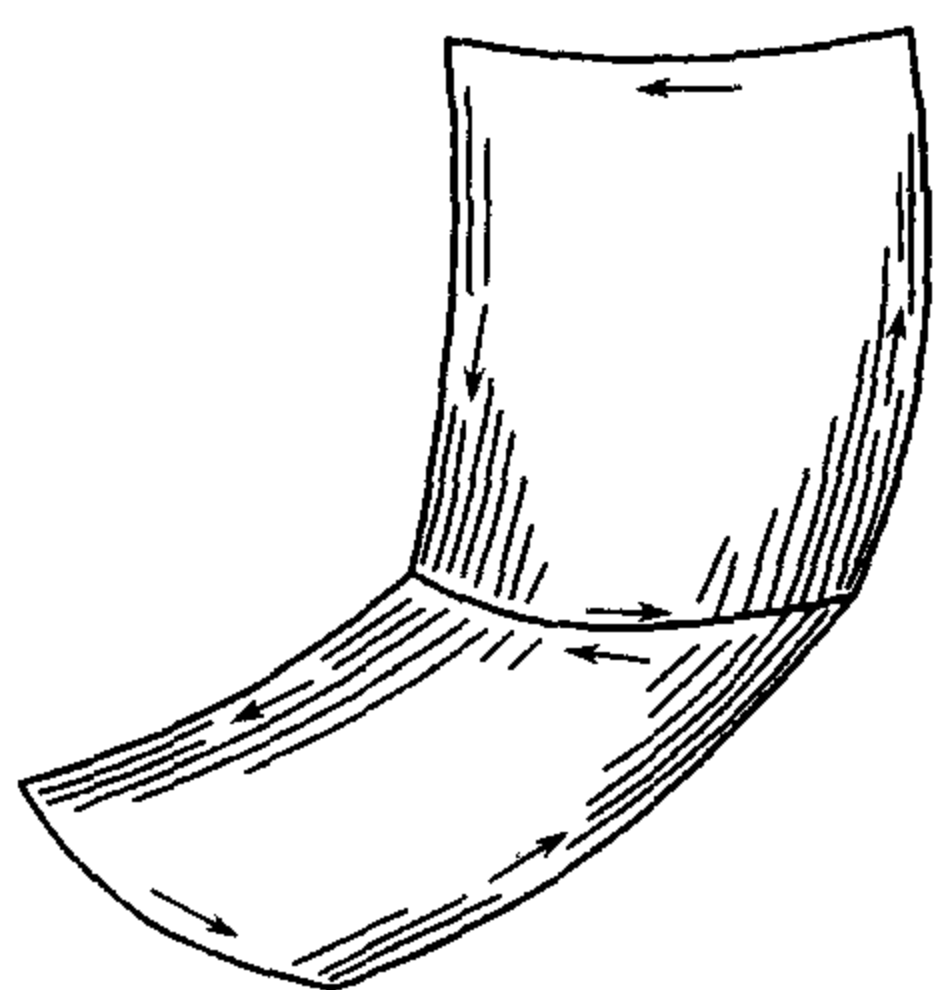


图 85

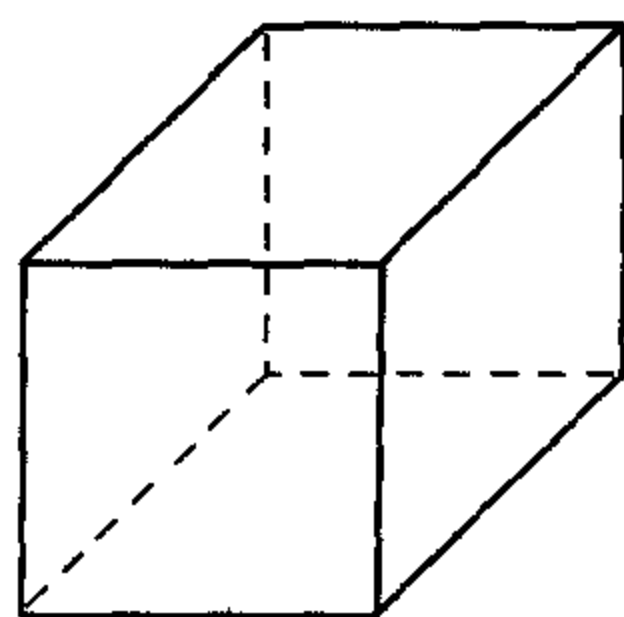


图 86

## §2. 曲面面积

**623. 施瓦茨的例子** 曲面面积的概念与曲线长的概念有相似的地方. 我们已定义 (开口) 弧长为内接于这弧的折线的周界当其各个边长趋于零时的极限. 在曲面 (譬如说也是开的) 的情况下, 很自然地会去考虑内接于它的多面形, 并且定义曲面面积为这多面形的面积当其各个面的直径趋向于零时的极限.

可是在 19 世纪末这个定义的缺陷已被揭露出来. 那就是施瓦茨 (H. A. Schwarz) 证明了上述极限甚至对于简单的直圆柱面都可以不存在! 我们来给出这一具启发性的例子.

设给出一个半径为  $R$  与高为  $H$  的圆柱面. 用下面的方法画内接于这柱面的多面形. 将柱面的高分为  $m$  等分, 过每一分点作垂直于这柱面的轴的平面, 于是在这曲面上得到  $m+1$  个圆周 (包括柱面两底上的圆周在内). 将每一圆周分为  $n$  等分, 使上一圆周的分点位于其下一圆周的弧的中点上头.

<sup>①</sup>这个部分也可以由一些单独的面片组成.



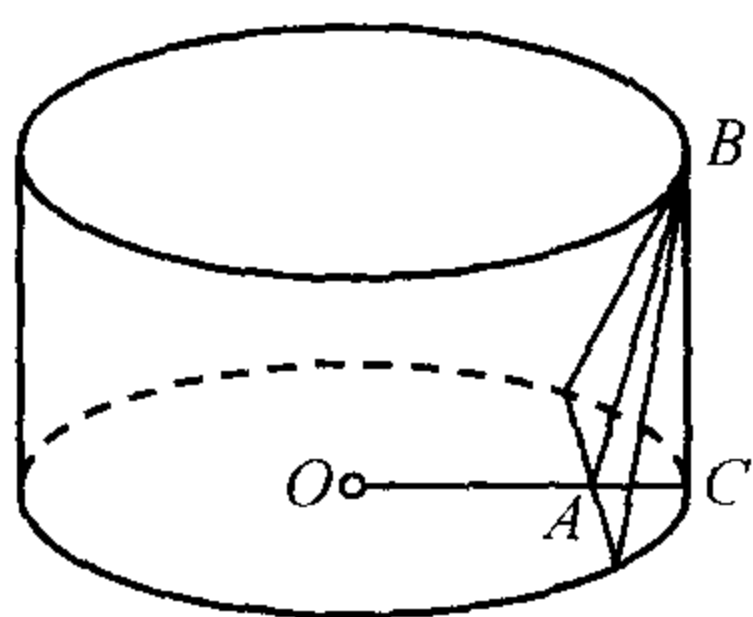


图 87

由所有这些弧的弦以及连接每一弦的端点到其上一圆周上和下一圆周上的分点 (它们恰巧分别地安置在对应弧的中点上头和下头) 的线段作成三角形 (图 87). 这些三角形的总数是  $2mn$  个, 并且都是全等形. 它们总合起来就构成我们所需要的一个多面形 ( $\Sigma_{m,n}$ ); 图 88 就代表它的一个模型.

我们现在来计算每个三角形的面积  $\sigma$ . 取弦做底, 其长等于

$$2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

求三角形的高  $AB$  (参看图形), 要我们注意  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ , 其中

$$AC = OC - OA = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right), \quad BC = \frac{H}{m}.$$

因此, 这一三角形的面积等于

$$\sigma = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

而多面形的全面积等于

$$\begin{aligned} \Sigma_{m,n} &= 2mn\sigma = 2R \cdot n \sin \frac{\pi}{n} \\ &\quad \times \sqrt{R^2 m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + H^2}. \end{aligned}$$

当  $m$  与  $n$  无限增加时, 所有三角形的直径趋向于零, 但面积  $\Sigma_{m,n}$  没有极限. 实际上, 若令  $m$  与  $n$  这样地增加, 使得比值  $\frac{m}{n^2}$  趋向于一个确定的极限  $q$ :

$$\lim \frac{m}{n^2} = q,$$

则因我们原有

$$\lim n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \pi,$$

而另一方面根据所作的假设又有

$$\lim m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \lim m \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} = \lim \frac{\pi^2}{2} \frac{m}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} q,$$

所以

$$\lim \Sigma_{m,n} = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4} q^2 + H^2}.$$

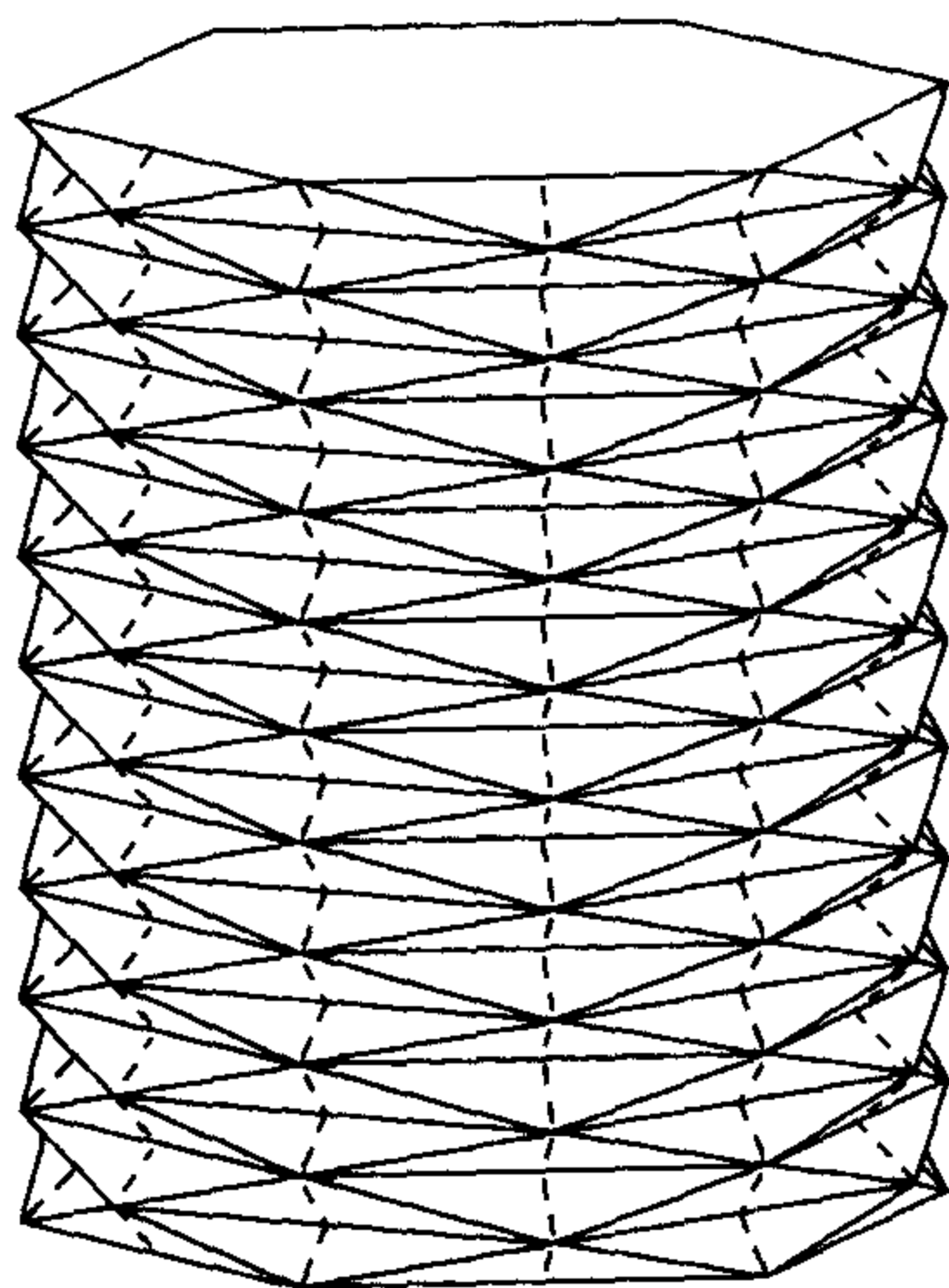


图 88



我们看到, 这个极限实质上依赖于  $q$  的大小, 即依赖于  $m$  与  $n$  同时增加的方式. 当  $q = 0$  时而且只有在这时, 所说的极限等于  $2\pi RH$  (这是在几何学教程中所已求出的面积的大小), 但它甚至可以和  $q$  同时为无穷大. 因此, 当  $m$  与  $n$  两数各自独立地变到无穷大时, 面积  $\Sigma_{m,n}$  确实没有确定的极限. 由此可见, 如果站在上述定义的观点上, 则柱面是没有面积的.

重要的是要了解, 在内接于曲线的折线情况与内接于曲面的多面形情况间有些什么区别. 为了简便起见, 我们把所说的曲线与曲面都算作光滑的. 在曲线上, 只要所作折线的各个弦足够小, 则每个弦的方向与其对应弧上任一点处的切线方向要相差多小就多小. 所以这种无穷小的弦可以越来越加准确地当作其对应的弧的元素. 相反, 要多小就可多小的那种顶点落在曲面上的多角形的面, 可以完全地按自己在空间的位置不与曲面的切面接近; 在这种情形下它显然不能替代曲面的元素. 这种情形很好地说明了刚才所考虑的例子: 柱面的切面全是直立的, 而内接于柱面的各个三角形的面当  $q$  很大时几乎都变成水平的, 而构成一些微小的皱纹.

**624. 曲面面积的定义** 整个以上所述, 引使我们想到预先要求于所给曲面的内接多面形的, 不仅是它的各个面的直径要趋向于零, 而且这些面在空间的位置要无限地接近于曲面的各个切面的位置.

可是这种想法要完全实现很简单, 我们只好放弃它 [参看第 627 目]. 我们要以另一种但也完全出乎自然的想法做基础, 来给出**曲面面积**概念的定义.

我们将考虑一个由分段光滑的闭路 ( $L$ ) 所范围的开的光滑曲面 ( $S$ ). 设这曲面被一个分段光滑的曲线网分成许多部分

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n),$$

并在每一部分 ( $S_i$ ) 内任意地选取一点  $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . 把元素 ( $S_i$ ) 垂直地射影到曲面在点  $M_i$  处的切面上, 我们得到在射影内的平面图形 ( $T_i$ ), 其面积为  $T_i$ .

这些面积  $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的和在各个元素 ( $S_i$ ) 的直径趋于零时的极限  $S$  叫做曲面 ( $S$ ) 的面积.

若用  $\lambda$  表示上述的各个直径中最大者, 则可写

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i T_i.$$

读者无论用“ $\epsilon$ - $\delta$  说法”或用“序列的说法”不难看新订出对这一极限步骤的精确说明.

具有面积的曲面叫做**可求积的曲面**.

**625. 附注** 为了使所说的定义得到确切的意义, 我们要建立下面的辅助断语:

曲面 ( $S$ ) 上每个直径足够小的部分 ( $S'$ ) 是一一对应地射影到这部分的任一点  $M'$  处的切面上.



因此, 如果前一目所指的曲面的一切元素  $(S_i)$  的直径都足够小, 则它们在其对应切面上的射影  $(T_i)$  都是完全确定的平面图形. 这些图形都是由分段光滑的曲线所围成的, 而且显然是可求面积的: 和数  $\sum T_i$  具有意义.

我们来证明这断语. 设曲面  $(S)$  是由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

给出, 其中  $(u, v)$  在  $uv$  平面上一个由分段光滑的边界  $(\Lambda)$  所围的区域  $(\Delta)$  内变化. 同时假定在  $(S)$  的点与  $(\Delta)$  的点之间有一一对应关系, 并且  $(S)$  的边界  $(L)$  上的点对应于边界  $(\Lambda)$  上的点.

为了消除与边界上的点联系着的一些困难, 宜在事先把 (1) 中各函数扩充到某一更大的区域  $(\tilde{\Delta})$  上, 但保存其可微性 [261], 从而就得到作为曲面  $(S)$  的延展的一个曲面  $(\tilde{S})$ .

曲面  $(S)$  的每一点  $M_0$  可用曲面  $(S)$  的这样的一块面  $(s)$  来覆盖 [如果所说的点是在  $(S)$  的边界上, 则  $(s)$  算是属于  $(\tilde{S})$  的], 使得这一块面是由 [228] 目中三个显方程之一来表达并且射影到对应的坐标面上某一圆内. 除此以外, 可以假定在  $(s)$  的两个点处的法线无论何时也不会互相垂直 (这不难用缩小区域直径的办法来达到). 于是我们肯定说, 面块  $(s)$ ——对应地射影到它的任一点处的切面上.

要证明这一断言, 我们用反证法. 假设这个断言不成立, 于是在  $(s)$  上就有这样的三个点  $M_1, M_2, M_3$ , 使得弦  $M_1 M_2$  平行于曲面在点  $M_3$  处的法线 (图 89). 设这时曲面  $(s)$  本身, 譬如说, 是由形如

$$z = f(x, y)$$

的显方程表达, 这里点  $(x, y)$  在  $xy$  平面的圆  $(k)$  内变动. 通过弦  $M_1 M_2$  作平行于  $z$  轴的平面; 它沿着某一弧  $\widehat{M_1 M_2}$  与曲面  $(s)$  相交.<sup>①</sup> 我们知道 [112, 114], 在这弧上必有一点  $M_4$ , 在这点的切线平行于这个弦. 但是, 这时在  $M_4$  处的法线一定是垂直于这个弦的, 也就是垂直于在点  $M_3$  处的法线的, 这与我们的假设相矛盾.

于是我们的断言得到了证明.

由此出发我们现在进行证明起初所作的断语. 对于曲面  $(S)$  的每一点  $M_0$  我们用它的一个更小的“邻域” $(s')$  来替代上面所提到的它的“邻域” $(s)$ , 使得它们的边界没有公共点. 在  $uv$  平面上有点  $m_0$  及它的邻域  $(\delta')$  对应于点  $M_0$  及面块  $(s')$ ; 不要把  $(s')$  与  $(\delta')$  的边界列入  $(s')$  与  $(\delta')$  之内, 就是说它们都算作开的区域. 把博雷尔

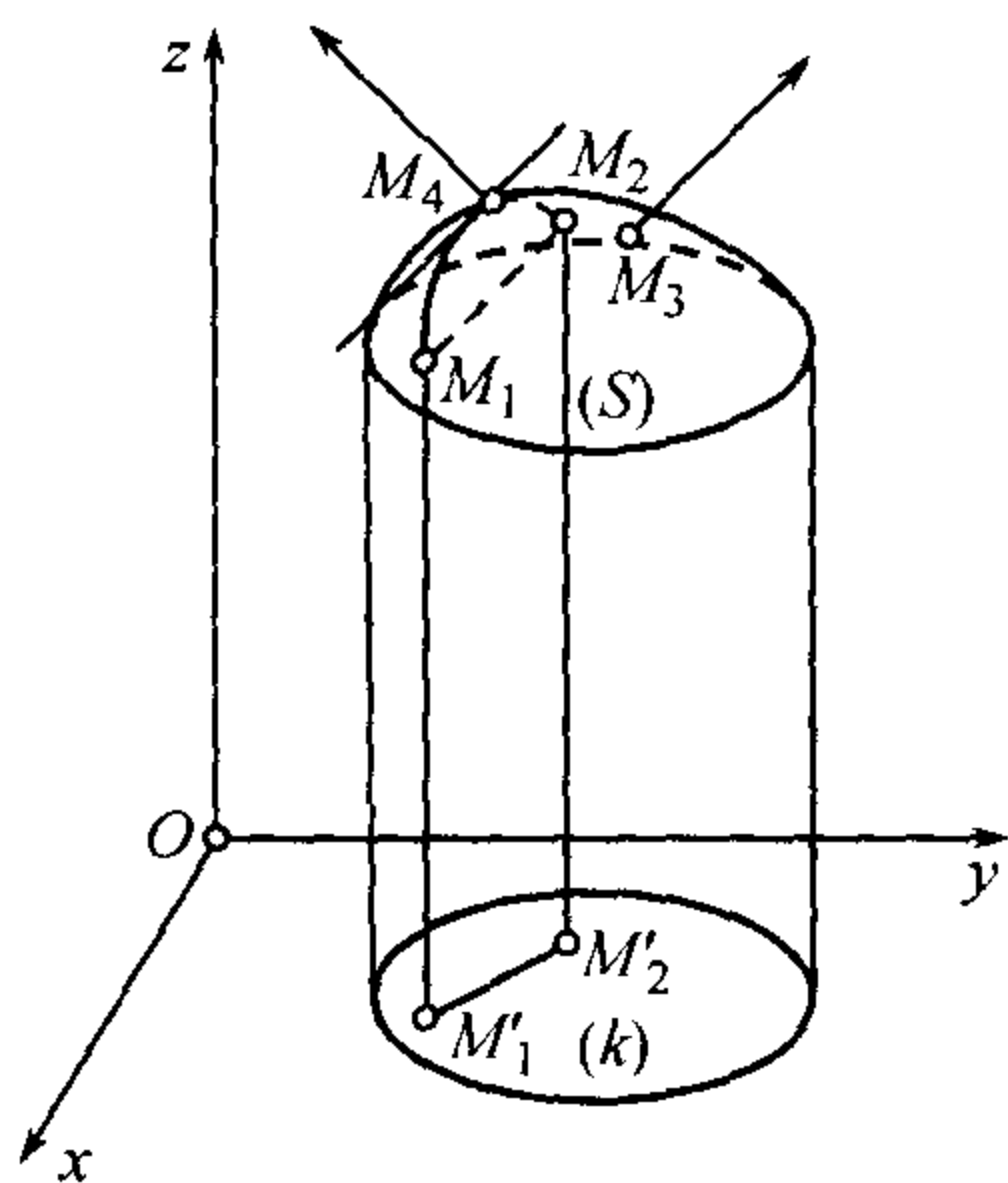


图 89

<sup>①</sup>弦  $M_1 M_2$  在  $xy$  平面上的射影线段  $M'_1 M'_2$  全部属于圆  $(k)$ , 这点情况在这里发生了作用.



的引理 [175] 应用到覆盖着全部区域  $(\Delta)$  的开域的集合  $\{(\delta')\}$  上, 我们可选出其中有限多个开域来覆盖  $(\Delta)$ ; 回到曲面  $(S)$  上, 也就不难得到有限多个面块

$$(s'_1), (s'_2), \dots, (s'_m),$$

用来覆盖全部曲面  $(S)$ . 与此同时, 我们还要考虑起初所提到的较大的对应区域:

$$(s_1), (s_2), \dots, (s_m).$$

对每个  $i$  言我们取出由曲面的部分  $(S) - (s_i)$  上所有点到  $(s'_i)$  上所有点的距离的下确界, 并用  $\eta$  表这些下确界中最小的一个. 设我们的曲面部分  $(S')$  的直径小于  $\eta$ . 如果它的某一点落在某一个确定的  $(s'_i)$  内, 则全部  $(S')$  整个地包含在对应的  $(s_i)$  内; 因此  $(S')$  和  $(s_i)$  同时具有所要求的特性.

**626. 曲面面积的存在及其计算** 我们要证明在前面所给的一些假设下曲面 (1) 是可求面积的, 并且我们要建立一个计算它的面积的方便公式.

设  $(S')$  是  $(S)$  的任一部分, 具有在前一目开头所述的特性者, 而  $M'(x', y', z')$  是它的任一点. 把坐标原点移到这点上, 我们就转到新坐标系  $\xi\eta\zeta$  的上面来: 就是说, 取曲面在点  $M'$  处的切面作为  $\xi\eta$  平面, 而对应的法线作为  $\zeta$  轴 (图 90). 坐标变换的公式为:

$$\begin{cases} \xi = (x - x') \cos \alpha_1 + (y - y') \cos \beta_1 + (z - z') \cos \gamma_1, \\ \eta = (x - x') \cos \alpha_2 + (y - y') \cos \beta_2 + (z - z') \cos \gamma_2, \\ \zeta = (x - x') \cos \lambda' + (y - y') \cos \mu' + (z - z') \cos \nu', \end{cases}$$

其中  $\alpha_1, \beta_2, \dots, \nu'$  依照下表

	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
$\eta$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$
$\zeta$	$\lambda'$	$\mu'$	$\nu'$

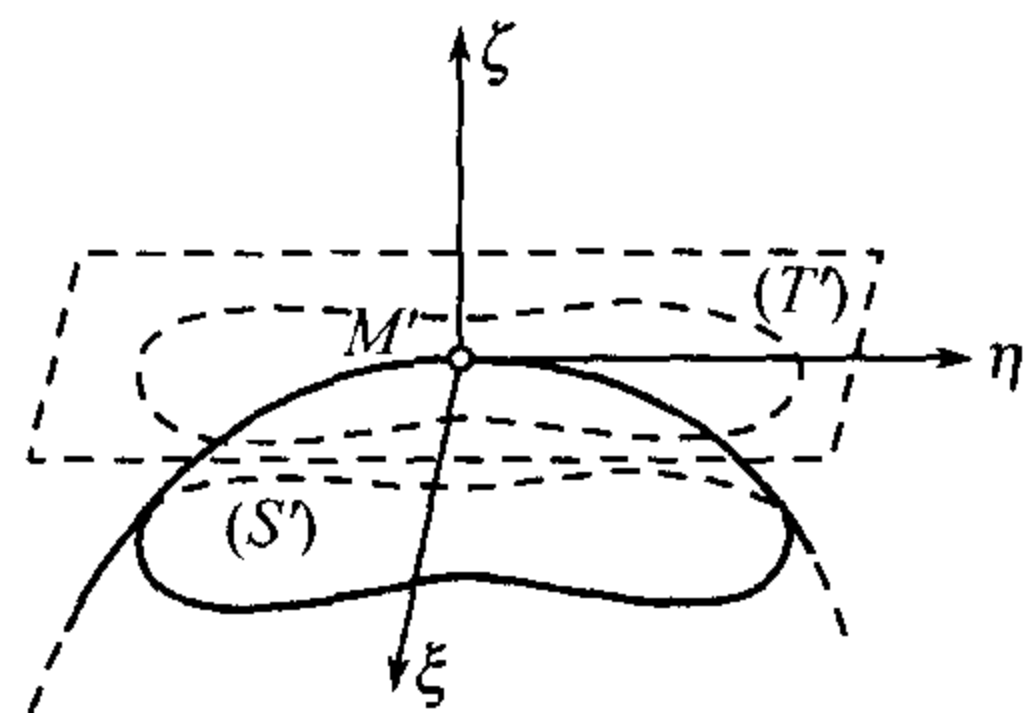


图 90

表示新旧坐标轴间的夹角.

因为  $(S')$  是一一对应地射影到  $\xi\eta$  平面的某一区域  $(T')$  内, 而另一方面,  $(S')$  的点与区域  $(\Delta)$  的某一部分  $(\Delta')$  的点又是一一对应地联系着的, 所以在  $(T')$  的点与  $(\Delta')$  的点之间也具有同样的对应关系. 这可以用变换公式中前二式来实现, 只要把  $x, y, z$  理解为函数 (1). 应用曲线坐标的面积表示式 [605], 我们有

$$T' = \iint_{(\Delta')} \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (2)$$



但是雅可比式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u \cos \alpha_1 + y'_u \cos \beta_1 + z'_u \cos \gamma_1 & x'_v \cos \alpha_1 + y'_v \cos \beta_1 + z'_v \cos \gamma_1 \\ x'_u \cos \alpha_2 + y'_u \cos \beta_2 + z'_u \cos \gamma_2 & x'_v \cos \alpha_2 + y'_v \cos \beta_2 + z'_v \cos \gamma_2 \end{vmatrix}$$

是与两矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{pmatrix}$$

的乘积相对应的行列式, 并且由代数学中熟知的定理知, 它等于每两个对应的二阶行列式的乘积之和

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 \\ \cos \gamma_2 & \cos \alpha_2 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \end{vmatrix} = A \cos \lambda' + B \cos \mu' + C \cos \nu'. \end{aligned}$$

在这里我们利用了行列式

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \lambda' & \cos \mu' & \cos \nu' \end{vmatrix} (= 1)$$

中各个元的代数余子式恰好等于各个元自身这一性质. 例如, 这可由  $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ ,  $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$ ,  $(\cos \lambda', \cos \mu', \cos \nu')$  中的任一个是其它二个的向量乘积 [参看 664(2)] 而得来.

另一方面, 如果用  $A', B', C'$  表示行列式  $A, B, C$  在点  $M'$  的值, 则

$$\begin{aligned} \cos \lambda' &= \frac{A'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, & \cos \mu' &= \frac{B'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \\ \cos \nu' &= \frac{C'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \end{aligned}$$

(在一切情况下取同一种符号), 因此

$$\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

右端是一个在区域  $(\Delta) \times (\Delta)^{\text{①}}$  内的含四个自变量  $u, v, u', v'$  的连续函数, 当  $u' = u, v' = v$  时它变为

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

<sup>①</sup>我们是用它来表示点  $(u, v, u', v')$  的四维区域, 其中  $(u, v)$  与  $(u', v')$  则各自属于二维区域  $(\Delta)$ .



并且它与这式相差一个量  $\alpha = \alpha(u, v, u', v')$ . 依据上述函数的一致连续性, 只要点  $(u, v)$  与  $(u', v')$  的距离足够小时, 这个量  $\alpha$  就可变得任意地小, 而与点  $(u', v')$  的位置无关.

于是由 (2) 得到

$$T' = \iint_{(\Delta')} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon' \Delta',$$

其中  $\varepsilon'$  与  $\Delta'$  的直径同时为无穷小量, 也可以说, 与  $S'$  的直径同时为无穷小量. 把这结果应用到曲面  $(S)$  被割成的各部分  $(S_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  上去, 我们得到一系列同样形式的等式

$$T_i = \iint_{(\Delta_i)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon_i \Delta_i;$$

在这里  $(\Delta_i)$  是区域  $(\Delta)$  中与  $(S_i)$  对应的部分. 相加, 得

$$\sum_i T_i = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon,$$

其中

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \Delta_i$$

显然与  $\lambda$  同时为无穷小量. 因此, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时  $\sum_i T_i$  的极限确实存在:

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \quad (3)$$

按定义这就是**曲面面积**.

如果把矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

“自乘”起来而作出行列式

$$\begin{vmatrix} x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{vmatrix},$$

则由代数学中熟知的定理它正好等于  $A^2 + B^2 + C^2$ , 通常令

$$x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = E, \quad x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F, \quad x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = G,$$

这就是所谓曲面的**高斯系数**, 在微分几何学中起重要的作用. 用这种记号, 得到

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$



于是公式 (3) 也可写为:

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (3^*)$$

表示式

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \equiv \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4)$$

叫做在曲线坐标下的面积元素.

直到现在止我们都是讨论开的光滑曲面情形. 如果曲面不是这种情况, 但可分成有限多个开的光滑面块, 则各块曲面的面积和就叫做这曲面的面积. 同时不难证明, 这样定义的面积实际上不依赖于如何将给定的曲面分成所需要形状的面块. 如果整个给定的曲面是由参数方程表示, 则它的面积在上述一般情形下仍然是由公式 (3) 或 (3\*) 来表示.

最后说到最简单的特殊情形, 就是曲面 (S) 是由显方程

$$z = f(x, y)$$

给出, 其中  $(x, y)$  在  $xy$  平面上的区域 (D) 内变动. 变量  $x$  与  $y$  具有参数  $u$  与  $v$  的功用. 像平常一样, 令

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

我们按照矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

作出行列式  $A = -p, B = -q, C = 1$ ; 因此在所考虑的情况下

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (5)$$

回忆对于法线与  $z$  轴作成的锐角  $\nu$  有

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

面积的公式也可写为:

$$S = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\cos \nu}. \quad (5a)$$

最后, 如果不特别要求  $\nu$  为锐角, 则

$$S = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{|\cos \nu|}. \quad (5b)$$

[参看第 544 目中由显方程  $y = f(x)$  给出的曲线的弧长公式 (7). ]



**627. 用内接多面形的接近法** 虽然我们放弃了以曲面的内接多面形作基础的曲面面积概念的定义, 但现在我们又回到这上面来, 并且要证明至少可以如何作一个内接多面形, 它的面积确乎趋向于所给曲面的面积.

我们主要研究一个当区域  $(\Delta)$  本身是一个矩形, 而它的边是与坐标轴平行的情形.

选取曲面  $(S)$  的确定一侧, 因而就规定了它的边界的正环行方向. 这个方向可以算作对应于矩形  $(\Delta)$  的边界的正方向. 我们知道 [621], 在这些条件下曲面的法线方向余弦是由公式

$$\cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

给出, 其中根式取正值.

用和矩形  $(\Delta)$  的边平行的线把它分成许多小矩形, 再用对角线把每个小矩形分成两个直角三角形 (图 91,a)). 于是我们实行上区域  $(\Delta)$  的一三角剖分法. 设元素三角形之一为  $\Delta m_0 m_1 m_2$ , 它的顶点为

$$m_0(u_0, v_0), \quad m_1(u_0 + h, v_0), \quad m_2(u_0, v_0 + k),$$

其中  $h$  与  $k$  为同号的数. 在曲面  $(S)$  上和它们对应的三个点

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \quad M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

确定空间内某一三角形  $\Delta M_0 M_1 M_2$  (图 91,b)). 所有这样的三角形组成一个内接于  $(S)$  的多面形  $(\Sigma)$ ; 它就是我们要研究的对象. 若使每一个这样的三角形的边界的方向恰好按方向  $M_0 M_1 M_2 M_0$  对应于  $\Delta m_0 m_1 m_2$  的边界的正向, 则依照 622 目中所规定的一些条款, 多面形  $(\Sigma)$  的一侧就这样地被确定了.

如果把  $\Delta M_0 M_1 M_2$  射影到  $xy$  平面上, 则得到顶点为

$$N_0(x_0, y_0), \quad N_1(x_1, y_1), \quad N_2(x_2, y_2)$$

的  $\Delta N_0 N_1 N_2$ . 这一三角形的面积, 我们从解析几何学中知道, 其大小以及符号 (考虑到它的定向!) 都由行列式

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

来表示. 按有限增量的公式,

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0) = x'_u(u_0 + \theta h, v_0) \cdot h \\ &= [x'_u(u_0, v_0) + \varepsilon_1] \cdot h, \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_1$  与  $h$  一起为任意小的量, 不依赖于点  $(u_0, v_0)$  的位置.<sup>①</sup> 同样有

$$y_1 - y_0 = (y'_u + \varepsilon_2) \cdot h,$$

$$x_2 - x_0 = (x'_v + \varepsilon_3) \cdot k, \quad y_2 - y_0 = (y'_v + \varepsilon_4) \cdot k,$$

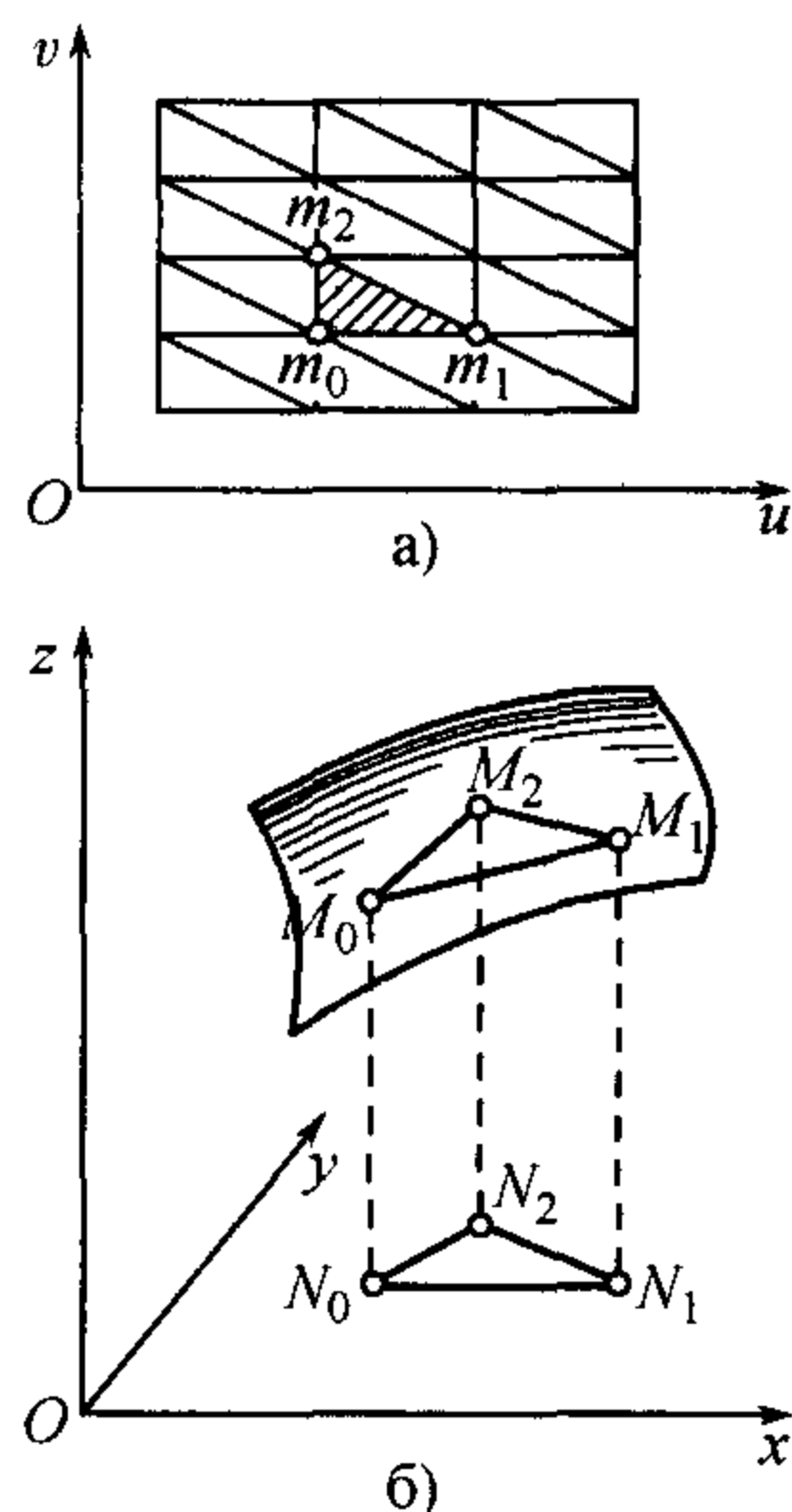


图 91

<sup>①</sup>我们在这里利用到导数  $x'_u$  的一致连续性. 类似的讨论后面也用到.



其中各个导数都是在  $u = u_0, v = v_0$  时计算的, 而各个附有标记的字母  $\varepsilon$  在这里 (和以后) 都是表示与  $h$  和  $k$  一起同为任意小的量, 不依赖于点  $(u_0, v_0)$  的位置. 于是这一个量  $\sigma_{xy}$  可写为

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{2}hk \begin{vmatrix} x'_u + \varepsilon_1 & y'_u + \varepsilon_2 \\ x'_v + \varepsilon_3 & y'_v + \varepsilon_4 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}hk(C + \varepsilon_5) = (C + \varepsilon_5) \cdot \delta, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\delta$  是  $\triangle m_0 m_1 m_2$  的面积. 同样, 对于其它两坐标平面上的射影我们又得到:

$$\sigma_{yz} = (A + \varepsilon_6) \cdot \delta, \quad \sigma_{zx} = (B + \varepsilon_7) \cdot \delta. \quad (6a)$$

现在  $\triangle M_0 M_1 M_2$  本身的面积  $\sigma$  可按照公式

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}$$

来计算, 于是又得到表示式

$$\sigma = \left\{ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \varepsilon_8 \right\} \cdot \delta. \quad (7)$$

不难看出, 比值

$$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma}, \frac{\sigma_{zx}}{\sigma}, \frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$$

表示  $\triangle M_0 M_1 M_2$  平面法线上对应于平面定向的方向余弦. 由 (6), (6a) 与 (7) 看来, 当  $h$  与  $k \rightarrow 0$  时这三个比值趋向于所给曲面的法线方向余弦, 并且对于多面形  $(\Sigma)$  的所有的面都是一样. 同样可见, 在所述的极限过程中多面形  $(\Sigma)$  所有的面的直径一致趋向于零.

最后, 把属于形式 (7) 的一些等式加起来, 不难看出多面形  $(\Sigma)$  的面积

$$\Sigma = \sum \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \delta + \sum \varepsilon_8 \cdot \delta,$$

当  $h$  与  $k \rightarrow 0$  时恰趋向于曲面的面积 (3).

这一结果自然可推广到当区域  $(\Delta)$  是由多个矩形组成时的情形. 要对于任意一个区域也施行三角剖分法, 那就需要很精密的 (虽然也是很基本的) 理论; 这我们不去讨论了.

**628. 面积定义的特殊情况** 再设所给的光滑曲面没有重点. 它具有由公式 (3) 或 (3\*) 所表示的面积  $S$ . 我们假定  $(s)$  是在曲面  $(S)$  上划出来的某一个由分段光滑的曲线  $(l)$  所范围的部分; 与它相应, 有区域  $(\Delta)$  内一个也由分段光滑的曲线  $(\lambda)$  所范围的部分  $(\delta)$ . 分出  $(s)$  后所剩下的曲面部分  $(S')$  的面积, 以及  $(s)$  本身的面积, 显然分别等于

$$S' = \iint_{(\Delta) - (\delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad s = \iint_{(\delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

如果现在图形  $(s)$  在曲面上集结于一点或一线, 则同样的情形也发生于平面图形  $(\delta)$ , 于是它的面积  $\delta$  趋于零. 与此同时  $s$  也趋于零, 所以

$$\lim S' = S. \quad (8)$$



我们现在假想这同一个曲面是由另一种表示式

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*)$$

给出的, 在它上面个别的点处或沿着个别的线有“奇点”出现 (特别是, 在这函数表示式下出现的导数变为无穷大). 把这个点或线用它的邻域划分出来, 所余下部分 ( $S'$ ) 的面积像平常一样表为:

$$S' = \iint_{(\Delta^*) - (\delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du^* dv^*,$$

这里星号表示相应于第二表示式的各量. 但我们已经知道 [见 (8)], 当 ( $s$ ) 集结于上述的一点或一线时,  $S'$  应趋于  $S$ ; 因此, 要得到  $S$  我们可在上面的公式中令区域  $\delta^*$  集结于一点或一线而取其极限, 于是又得到寻常形式的公式

$$S = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du^* dv^*,$$

只是这积分可能成为反常的.

甚至在这样一种情形, 即当曲面 ( $S$ ) 一般地是光滑的, 但在个别的点处或沿着个别的线具有不可除去的 (即不依赖于它的表示方法的) 奇点, 我们还是利用积分 (3\*) 来表示它的面积, 尽管这积分是反常的但只要它存在就行. 显然, 这时我们实际上定义面积  $S$  为面积  $S'$  的极限, 即我们把上面已证明了的等式 (8) 在这里当作我们起初的定义的简单扩张.

**629. 例** 1) 求下列各个被割下的曲面部分的面积;

- (a) 双曲抛物面  $z = xy$  被柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $x, y > 0$ ) 所割;  
 (б) 椭圆抛物面  $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$  被柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$  所割;  
 (B) 双曲抛物面  $xy = az$  被柱面  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  所割;  
 (Г) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = \rho^2$  ( $\rho < R$ ) 所割.

**解** (a) 我们有  $p = y, q = x$ , 因此按公式 (5),

$$S = \iint_{\substack{x, y > 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

换为极坐标, 我们求得

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{\pi}{6} \left[ (1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

(б)提示 利用广义极坐标. 答  $S = \frac{2}{3} \pi ab \left[ (1 + c^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$ .

(B)提示 换为极坐标. 用极坐标表示的柱面的准线方程为  $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ . 我们得到

$$S = \frac{2}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ (1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\theta.$$

利用变换  $\theta = \frac{\pi}{4} + \lambda \left( -\frac{\pi}{4} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{4} \right)$ .

答  $S = \frac{2}{3} a^2 \left( \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$ .



(r) 答  $S = 4\pi R(R - \sqrt{R^2 - \rho^2})$ .

2) 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  所割下的部分的面积 (“维维亚尼立体”的上下底的面积, 参看 597, 20), 图 48).

解 对于上底来说, 我们有

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad p = -\frac{x}{z},$$

$$q = -\frac{y}{z}, \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

于是

$$S = 2R \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

并且由圆周  $x^2 + y^2 = Rx$  所范围的圆就是这积分的区域.

换为极坐标, 我们得到 [参看 611, 6)]

$$S = 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

实行积分, 最后求得  $S = 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$ .

因为半球的面积等于  $2\pi R^2$ , 所以半球被 “维维亚尼立体” 割去后所剩下的那部分的面积等于  $4R^2$ , 因而可用半径  $R$  表示而不涉及任何无理数; 参看 597, 20) 中与这相关的关于 “维维亚尼立体” 的体积公式的附注.

附注 当然, 在区间  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  上的积分不能用在区间  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  上的积分的二倍去替代. 可是, 一开始计算由  $-\frac{\pi}{2}$  到  $\frac{\pi}{2}$  的积分时, 就必须记住里面的积分表示式

$$\int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = [-\sqrt{R^2 - r^2}] \Big|_{r=0}^{r=R \cos \theta} = R - R\sqrt{\sin^2 \theta}.$$

对于  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  应写成这一个形式:  $R(1 - \sin \theta)$ , 而对于  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$  应写成另一个形式:  $R(1 + \sin \theta)$  [因为根式总为正的, 而在第一种情况下正弦具有正号, 但在第二种情况下正弦具有负号]. 如果不注意这点, 就会得到错误的结果.

3) 求 (a) 锥面  $y^2 + z^2 = x^2$  落在柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  内的部分的面积; (b) 锥面  $z^2 = 2xy (x, y \geq 0)$  包含在平面  $x = a$  与  $y = b$  之间的部分的面积; (B) 前一题中的锥面落在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  内的部分的面积.

提示 (a)  $S = 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 2\pi R^2$ .

(b)  $S = \sqrt{2} \int_0^b dy \int_0^a \left( \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab}$ .

(B) 两曲面的交线落在平面  $x + y = \pm a$  内. 于是,

$$S = 2\sqrt{2} \iint_{\substack{x, y > 0 \\ x + y \leq a}} \left( \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy$$

$$= 4\sqrt{2} \int_0^a \sqrt{x} dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 8\sqrt{2} \int_0^a \sqrt{x(a-x)} dx = \pi\sqrt{2}a^2.$$



4) 证明任意一个在旋转锥面

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

的一腔上 (譬如说, 上面一部分的一腔) 的图形的面积  $S$  与它在平面  $xy$  上的射影的面积成比例.

提示 从显方程  $z = \frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$  着手并利用公式 (5).

5) 给定曲面  $z = \arcsin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)$ ; 求它包在平面  $x = a$  与  $x = b$  ( $0 < a < b$ ) 中间的部分的面积.

解 我们有

$$p = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}, \quad q = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}, \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}.$$

积分的区域由条件

$$a \leq x \leq b, \quad |\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y| \leq 1$$

来确定, 作变换  $\operatorname{sh} x = \xi, \operatorname{sh} y = \eta$ ; 于是新变量的变化区间是

$$\operatorname{sh} a \leq \xi \leq \operatorname{sh} b, \quad -\frac{1}{\xi} \leq \eta \leq \frac{1}{\xi}.$$

由此可见,

$$S = \int_{\operatorname{sh} a}^{\operatorname{sh} b} d\xi \int_{-\frac{1}{\xi}}^{\frac{1}{\xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 \eta^2}} = \pi \int_{\operatorname{sh} a}^{\operatorname{sh} b} \frac{d\xi}{\xi} = \pi \ln \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}.$$

6) 求柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  包在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  内的部分 [“维维亚尼立体”的侧面] 的面积.

解 曲面的前面一部分的方程为  $y = \sqrt{Rx - x^2}$ . 自变量  $(x, z)$  的变域是由  $z$  轴与抛物线  $z = \sqrt{R^2 - Rx}$  所围成的区域. 因为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}R - x}{\sqrt{Rx - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} S &= R \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2 - Rx}}^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{dz dx}{\sqrt{Rx - x^2}} \\ &= 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R^2. \end{aligned}$$

[参照 347, 4).]

7) 求一锥面的侧面积, 它的高等于  $c$ , 它的底是一个半轴为  $a$  与  $b$  ( $a > b$ ) 的椭圆, 并且高通过底的中心.

解 若把坐标原点取在锥的顶点, 并作  $xy$  平面平行于它的底 (图 92), 则锥面的方程为

$$z = c \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$



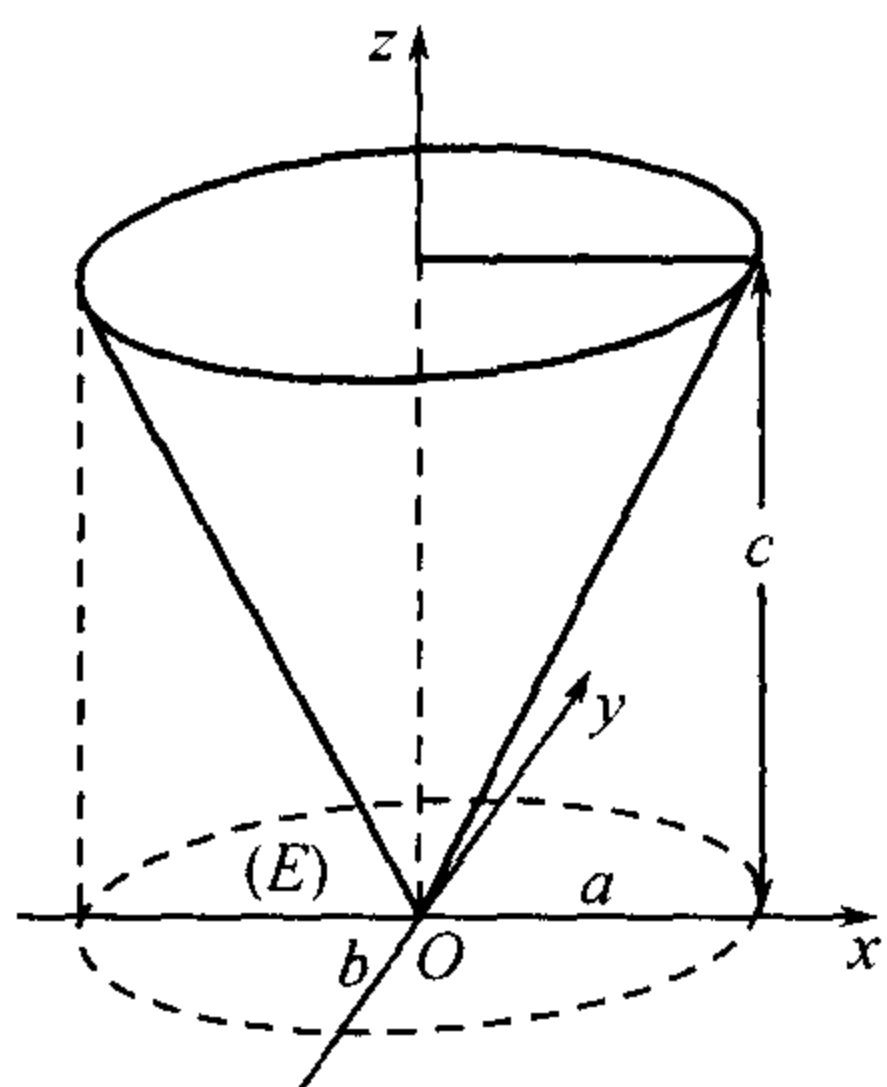


图 92

而所求的面积

$$S = \iint_{(E)} \sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} dx dy,$$

其中 (E) 表椭圆盘

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

并且

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b}.$$

改用广义极坐标, 我们得到

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

这一结果不难化为第二型全椭圆积分:

$$S = 2a\sqrt{b^2 + c^2}E(k), \quad \text{其中 } k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

8) 求曲线  $y = f(x) (a \leq x \leq b, f(x) \geq 0)$  绕  $x$  轴旋转所成的旋转面的面积.

解 不难看出旋转面的方程是

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2,$$

而它的上半部的方程是

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}.$$

由此, 得

$$p = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = f(x) \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

于是所求的面积由积分

$$S = 2 \iint_{(D)} f(x) \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}} dx dy$$

来表示, 其中 (D) 是由  $xy$  平面上的线  $x = a, x = b, y = f(x)$  和  $y = -f(x)$  所围成的区域.

化为逐次积分, 我们求得

$$S = 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

因为里面的积分等于  $\pi$ , 故又得到我们熟知的公式 [344, (22)]:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



读者大概已发觉, 在问题 2)~8) 中我们全部时间用在计算第 628 目中已讲过的特殊情形下的面积.

9) 利用球面的球坐标参数表示式

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

来解决问题 2).

按导数的矩阵

$$\begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

容易求到球面的高斯系数:

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \varphi,$$

因此

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi.$$

我们只考虑落在第一卦限内的所要研究的曲面的四分之一. 对于“维维亚尼曲线”(即球面与柱面的交线)上的点(在第一卦限范围内)有  $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$ .

实际上, 把  $x$  与  $y$  用  $\varphi$  与  $\theta$  表示的式子代入柱面方程  $x^2 + y^2 = Rx$ , 我们得到  $\sin \varphi = \cos \theta$ . 但因在所考虑的点上显然有  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  与  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 于是推得  $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$ .

根据上述, 把参数  $\varphi$  与  $\theta$  的变化范围确定出来, 我们按公式 (3\*) 得到

$$S = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \sin \varphi d\varphi = 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

由此可见, 我们得到了业已知道的结果而这时却避免了积分号下函数的不连续性.

10) 考虑所谓的一般螺旋曲面[229,5)], 它是由曲线

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \quad [\varphi(u) \geq 0]$$

(落在  $xy$  平面内) 绕着  $z$  轴转并顺着  $z$  轴作螺旋运动时所画成的. 它的方程 (如果用  $v$  表示它的转动角度) 是

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) + cv.$$

按导数的矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u) \cos v & \varphi'(u) \sin v & \psi'(u) \\ -\varphi(u) \sin v & \varphi(u) \cos v & c \end{pmatrix}$$

作成曲面的高斯系数:

$$E = [\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2, \quad F = c\psi'(u), \quad G = [\varphi(u)]^2 + c^2.$$

因此, 表示式

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\{[\varphi(u)]^2 + c^2\} \{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2\} - c^2[\psi'(u)]^2}$$

只依赖于  $u$ , 一般说来, 简化了计算.



11) 利用这些结果来确定下述部分的面积:

a) 寻常的螺旋曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv$$

被柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  与平面  $z = 0$  及  $z = 2\pi c$  (因此  $0 \leq v \leq 2\pi$ ) 割下的部分;

6) 螺旋曲面

$$x = \operatorname{tgu} \cos v, \quad y = \operatorname{tgu} \sin v, \quad z = \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \ln \sqrt{\frac{1 + \sin u}{\cos u}} + v$$

上与参数在矩形

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

中变化相对应的部分.

(a)解 在这种情况下

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + c^2},$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{u^2 + c^2} du dv \\ &= 2\pi \left[ \frac{a}{2} \sqrt{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c} \right]. \end{aligned}$$

6)答  $S = \frac{8}{3}\pi$ .

12) 如果在曲线作螺旋运动的问题上令  $c = 0$ , 就是说没有前进的运动, 则得到旋转曲面:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) \\ (\alpha &\leq u \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 2\pi). \end{aligned}$$

于是

$$\sqrt{EG - F^2} = \varphi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2},$$

而这曲面的面积就可用下列公式表示:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2} du.$$

这公式推广了问题 8) 的结果, 但已无需引用反常积分 [参照 344(21)].

13) 从一般的公式 (3\*) 出发, 证明第 346 目中推出的关于柱面的部分的面积公式 (25) 是正确的.

14) 有时候适宜用极坐标或球坐标  $r, \theta, \varphi$  来给出曲面, 它们与寻常的直角坐标的联系就是熟知的公式:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

这时, 假定向径  $r$  是用角度  $\theta$  与  $\varphi$  的函数给出:

$$r = r(\varphi, \theta)$$



(曲面的极坐标方程), 求曲面在这种情形下的面积表示式.

解 只要取  $\varphi$  与  $\theta$  当作参数就可以利用一般表示式 (3\*). 上面所写的公式恰好给出曲面的参数表示, 只要认为  $r$  已由曲面的极坐标方程中  $\varphi$  与  $\theta$  所表示的式子所替代.

按照导数的矩阵

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \cos \theta & \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \sin \theta & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) \sin \varphi & \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin \theta + r \cos \theta \right) \sin \varphi & \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

容易求出

$$E = \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2, \quad F = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad G = \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi,$$

$$EG - F^2 = \left[ \left( r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2.$$

因此, 最后有

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{\left( r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2} \cdot r d\varphi d\theta, \quad (9)$$

其中  $(\Delta)$  是变元  $\varphi, \theta$  的变化区域.

在球坐标下的面积元素是这样的:

$$dS = \sqrt{\left( r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2} \cdot r d\varphi d\theta.$$

15) 计算曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy$$

的面积.

解 这里正适宜运用公式 (9), 曲面的极坐标方程是:

$$r = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}.$$

于是

$$\sqrt{\left( r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2} = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

再由公式 (9) 得到

$$S = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 a^2.$$

16) 考虑半径为  $R$  的球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,$$

它与  $xy$  平面相切于坐标原点. 试求它包在顶点为原点的锥面  $z^2 = Ax^2 + By^2$  内的部分的面积 (图 93).



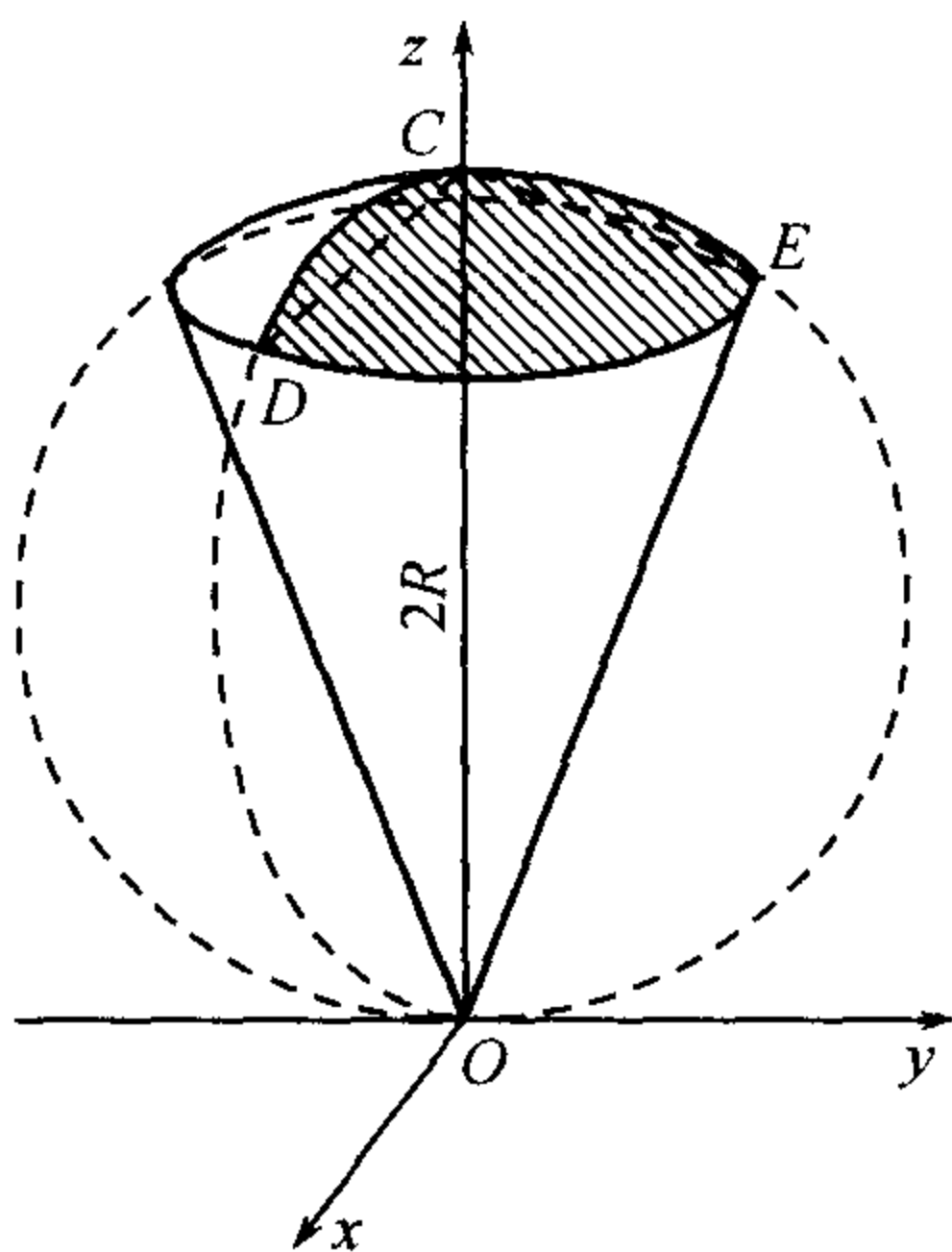


图 93

**解** 从球面的极坐标方程  $r = 2R \cos \varphi$  出发, 这里也可以利用公式 (9), 我们有

$$S = \iint_{(\Delta)} 4R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta,$$

其中对  $\varphi$  与  $\theta$  积分的区域  $(\Delta)$  是由曲线

$$(A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi$$

所围成的. 如果归结为求曲面落在第一卦限内的那个部分的面积, 则对于  $0$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间的任一个  $\theta$ , 角度  $\varphi$  由  $0$  变到角度  $\varphi_0 = \varphi_0(\theta)$ , 而

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta}.$$

显然,

$$S = 16R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

但

$$\int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta},$$

于是最终得

$$S = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(A+1) \cos^2 \theta + (B+1) \sin^2 \theta} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}.$$

有趣得很, 这个面积与以  $DC$  及  $EC$  为半轴的椭圆 (见图) 的面积相同.

17) 证明曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$$

的面积与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的面积相同, 如取

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

**证明** 在球坐标下这曲面的方程是:

$$r^2 = \alpha^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \varphi,$$

于是按公式 (9) 它的面积等于

$$S_1 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\alpha^4 \cos^2 \theta + \beta^4 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi + \gamma^4 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

另一方面, 如果从椭球面的寻常的参数表示式

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



出发, 则导数矩阵的行列式等于

$$A = cb \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad B = ac \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad C = ab \sin \varphi \cos \varphi,$$

而按公式 (3) 椭球面的面积得表为:

$$S = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(c^2 b^2 \cos^2 \theta + c^2 a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi} d\varphi d\theta.$$

我们看出,  $S_1$  与  $S$  的表示式实际上是全同的, 只要令

$$cb = \alpha^2, \quad ca = \beta^2, \quad ab = \gamma^2$$

或

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

这就是所要证明的.

18) 我们现在来确定三轴椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$$

的面积.

把曲面在第一卦限内的方程写成显式:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

我们有

$$p = -c \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad q = -c \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

因此

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

为简便起见, 我们令

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2, \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \beta^2,$$

于是所求的面积, 由公式 (5), 可由积分

$$S = 8 \iint_{\substack{z, y \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \frac{x^2}{a^2} - \beta^2 \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy$$



来表示. 利用变换  $\frac{x}{a} = \xi, \frac{y}{b} = \eta$ , 上面的积分可变为下面的形状:

$$S = 8ab \iint_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \xi^2 + \eta^2 \leq 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta.$$

在这里需要利用卡塔兰的二重积分变换公式[参考 597,15) 与 617,16)]. 我们注意, 曲线

$$\sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} = u = \text{常数} \quad (u \geq 1)$$

不是别的, 恰是椭圆

$$\frac{\frac{\xi^2}{u^2 - 1}}{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \alpha^2}} + \frac{\frac{\eta^2}{u^2 - 1}}{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \beta^2}} = 1,$$

因此它的面积的四分之一是

$$\iint_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} \leq u}} d\xi d\eta = \frac{\pi}{4} \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

于是按卡塔兰公式,

$$S = 2\pi ab \int_1^\infty u d \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

我们来变换这个椭圆积分.

首先用分部积分法:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} u d \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} \\ &= \left\{ \frac{u(u^2 - 1)}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} - \int \frac{(u^2 - 1)du}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} \right\} \Big|_1^{+\infty}. \end{aligned}$$

再实行变换

$$u = \frac{\alpha}{\sin \varphi}, \quad du = -\frac{\alpha \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi,$$

并令  $\varphi$  由  $\mu = \arcsin a$  变到 0. 因此, 一方面有

$$\frac{u(u^2 - 1)}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} = \frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

如果令  $k = \frac{\beta}{\alpha}$  ( $k < 1$ ). 另一方面又有

<sup>①</sup>注意在这里无论是积分外面的项的双重代入也好, 由 1 到  $+\infty$  的单积分也好, 单独起来就都没有意义. 当  $u = +\infty$  时出现不定型  $\infty - \infty$ !



$$\begin{aligned}
 -\frac{(u^2-1)du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} &= \left( \frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \\
 &= \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi \\
 &= \left( \alpha \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi,
 \end{aligned}$$

可见在双重代入记号下的积分成为下形

$$\alpha \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

把第一项分部积分, 逐次地将这式化为:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k^2 \alpha \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\
 &= -\alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{1 - k^2 \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\
 &= -\alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.
 \end{aligned}$$

然后把在积分以外的两项合并起来, 有:

$$\frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \textcircled{1}$$

按  $\varphi$  由  $\mu = \arcsin \alpha$  到 0 作双重代入, 得到这式的这样的一结果:  $\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}$ . 再对积分作双重代入的计算, 最后得到由勒让德首先给出的公式

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi ab \left\{ \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} F(\mu, k) + \alpha E(\mu, k) \right\} \\
 &= 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \{ c^2 F(\mu, k) + (a^2 - c^2) E(\mu, k) \},
 \end{aligned}$$

这里

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad k = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

19) 高斯对于曲面曾引进过在一所给点处的全曲率概念, 它与平面曲线的曲率概念完全类似 [250].

设给定一曲面及其上一点, 取这曲面上围着这一点的任一部分 ( $S$ ), 并考虑在 ( $S$ ) 的各个点处所有法线的集合. 画一个以原点为中心的单位球面, 并由原点出发作平行于上述所有法线的射线; 它们割下球面的某一部分 ( $\Sigma$ ). 它的面积  $\Sigma$  是所画的一切射线填满了的立体角的度量; 这同第 250 目定义中所说的角  $\omega$  相当. 比值  $\frac{\Sigma}{S}$  当 ( $S$ ) 收缩为所给的点时的极限叫做这曲面在这点处的全曲率. 我们提出计算这曲率的问题.

<sup>①</sup>这样, 我们最后就避免了上述的它在  $\varphi = 0$  时的不定性.



假定曲面由方程

$$z = f(x, y)$$

给出, 并且函数  $f$  具有连续的一阶及二阶导数

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

此外, 设行列式

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 \quad (10)$$

不为零 (在所考虑的点处及其附近).

按公式 (56) 有

$$S = \iint_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|}, \quad \Sigma = \iint_{(D')} \frac{dx'dy'}{|\cos \nu|},$$

其中  $(D)$  与  $(D')$  分别为  $(S)$  与  $(\Sigma)$  在  $xy$  平面上的射影, 并且对于这两曲面上的对应点  $(x, y, z)$  与  $(x', y', z')$  角度  $\nu$  是相同的.

用变数  $x, y$  来变换第二个积分. 因为显然有

$$\begin{aligned} x' = \cos \lambda &= \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ y' = \cos \mu &= \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \left( z' = \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{D(x', y')}{D(p, q)} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

只要注意 (10) 式, 最后就得到

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

在这种情形下, 按照变量变换公式, 得

$$\Sigma = \iint_{(D)} \frac{|rt - s^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2} \frac{dxdy}{|\cos \nu|}.$$

把  $S$  与  $\Sigma$  都对于区域  $(D)$  来微分 [593], 现在不难得到

$$\lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\Sigma}{S} = \frac{|rt - s^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

这就是所要求的全曲率的表示式.

20) 公式 (56) 可以很简单地得到, 只要从曲面面积的另一定义出发 (这里是对曲面  $(S)$  由显方程表示的情形而言).

分割曲面  $(S)$  成多个部分  $(S_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ ; 按照这分法它在  $xy$  平面上的射影  $(D)$  被分割成许多部分  $(D_i)$ . 在  $(S_i)$  的某一点  $(M_i)$  处作曲面的切面并把面积  $(S_i)$  平行于  $z$  轴地射影到这切面上. 用  $T_i$  表这所得的平面图形的面积, 显然有

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|,$$



其中  $\nu_i$  是曲面在点  $M_i$  处的法线与  $z$  轴作成的角. 只要把曲面的面积  $S$  理解为这些平面圆形的面积之和的极限, 则立得结果

$$S = \lim \sum_i T_i = \lim \sum_i \frac{D_i}{|\cos \nu_i|} = \iint_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|},$$

因为所写出来的和显然是对最后这一积分的积分和.

我们要着重指出, 从这个改变了的曲面面积的定义, 虽然很简单地在这里导出了最终的公式, 但有着本质上的缺点: 它在形式上是与坐标三面形的选择有关 (射影要平行于  $z$  轴!), 而且只能应用到个别形式的曲面上.

21) 设由光滑曲面  $(S)$  的参数表示式

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad ((u, v) \in (\Delta))$$

借公式<sup>①</sup>

$$u = U(u^*, v^*), \quad v = V(u^*, v^*), \quad ((u^*, v^*) \in (\Delta^*))$$

之助, 我们得到它的另一个表示式

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*),$$

就这表示式而言, 它同样地没有奇异性. 不难直接证明, 关于曲面面积  $S$  的公式 (3) 这时变为类似的公式

$$S = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}} du^* dv^*$$

(对于新的表示式我们用星号记在所有各个量上).

实际上, 令

$$I = \frac{D(u, v)}{D(u^*, v^*)},$$

我们由所熟悉的函数行列式性质得

$$A^* = AI, \quad B^* = BI, \quad C^* = CI.$$

由此便看出, 在  $(\Delta^*)$  内  $I$  异于零; 因为不这样, 则在新的表示式下曲面就会有奇异性. 按照变量变换公式, 立即得到

$$\begin{aligned} \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv &= \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot |I| du^* dv^* \\ &= \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}} du^* dv^*, \end{aligned}$$

这就是所需要证明的.

<sup>①</sup>函数  $U$  与  $V$  连同它们的偏导数都假定是连续的.



### §3. 第一型曲面积分

**630. 第一型曲面积分的定义** 第一型的曲面积分是二重积分同样自然的推广, 正像第一型曲线积分对于简单定积分一样.

这一推广是这样建立的. 设  $(S)$  是某一个由分段光滑的边界所围成的光滑的 (或分片光滑的) 双侧曲面, 函数  $f(M) = f(x, y, z)$  定义于  $(S)$  的点上. 用任意画的一些分段光滑的曲线把曲面分成  $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$  诸部分. 在各个部分  $(S_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  上各任取一点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , 计算函数在这点的值

$$f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i),$$

并用对应的曲面部分的面积  $S_i$  来乘它. 作出所有这样的乘积的和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)S_i,$$

像对以前讨论过的许多和一样, 我们称这个和为积分和.

若尔当各个部分  $(S_i)$  的直径趋于零时, 积分和有一个确定的有限极限而不依赖于曲面  $(S)$  的分法及点  $M_i$  的选择, 则这极限叫做函数  $f(M) = f(x, y, z)$  沿曲面  $(S)$  的(第一型<sup>①</sup>)曲面积分, 并用记号

$$I = \iint_{(S)} f(M) dS = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS \quad (1)$$

来表示, 其中  $dS$  表示面积  $S_i$  的元素.

**631. 化为寻常的二重积分** 我们只讨论没有重点的不封闭的光滑曲面  $(S)$  [619, 2°].

设  $f(x, y, z)$  是任何一个定义于曲面  $(S)$  上的点函数并有界:

$$|f(x, y, z)| \leq L, \quad (2)$$

则等式

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned} \quad (3)$$

在这两个积分中有一个存在 (也就引起另一个存在) 的假定下是成立的.

因此, 要化第一型曲面积分为寻常的二重积分, 只需用坐标  $x, y, z$  的参数表示式来代替它们, 而用面积元素  $dS$  在曲线坐标下的表示式来代替  $dS$ .

<sup>①</sup>不同于以后 [634] 将要讨论的第二型曲面积分.



我们来给出所说的这个断语的证明.

像曾经指出过的情形一样, 与用分段光滑的一些曲线来分割曲面  $(S)$  的方法相对应, 有区域  $(\Delta)$  的同样分法, 反转过来也是如此.

用对应的方法分割曲面  $(S)$  成  $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$  诸部分, 而分区域  $(\Delta)$  成  $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$  诸部分, 并在每个部分  $(S_i)$  上与每个部分  $(\Delta_i)$  上分别地取彼此对应的点  $(x_i, y_i, z_i)$  与  $(u_i, v_i)$ , 使得

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \quad (4)$$

作关于积分 (1) 的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

按照第 626 目中一般的公式 (3\*), 有

$$S_i = \iint_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

应用中值定理, 得

$$S_i = [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

其中  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  是区域  $(\Delta_i)$  的某一个点.

利用  $S_i$  的这个表示式并记住 (4) 式, 我们可以写和  $\sigma$  为:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i.$$

在这个形状下它相像于 (3) 中第二个积分的积分和:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

在和  $\sigma$  与  $\sigma^*$  之间的区别是这样的, 在后一个和中复合函数  $f(\dots)$  与根式  $\sqrt{\dots}$  都恰好是在同一个 (任意取的) 点  $(u_i, v_i)$  处计算的, 而在第一个和中复合函数  $f(\dots)$  是在点  $(u_i, v_i)$  处计算的, 但表示式  $\sqrt{\dots}$  则是在点  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  处计算的 (点  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  要由中值定理来规定而不是任意的).

考虑这两个和的差:

$$\sigma - \sigma^* = \sum_i f(\dots) \left\{ [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right\} \Delta_i.$$

设  $\varepsilon > 0$  为任意小的一个数. 由函数  $\sqrt{EG - F^2}$  的 (一致) 连续性, 我们知道当所有的区域  $(\Delta_i)$  的直径足够小时, 有

$$\left| [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon.$$



把条件 (2) 估计进去, 不难得到

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon L \Delta,$$

因此

$$\lim(\sigma - \sigma^*) = 0.$$

由此可见, 从这两个和中一个和的极限存在可推到另一个和的极限存在并与它相等. 这就证明了我们的断语.

特别, (3) 式右端的二重积分, 也就是说左端的曲面积分, 在函数  $f(x, y, z)$  沿曲面  $(S)$  的连续性的假定下是存在的.

如果曲面  $(S)$  是由显方程

$$z = z(x, y)$$

给出, 则公式 (3) 具有如下形式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad (5)$$

其中  $(D)$  表曲面  $(S)$  在  $xy$  平面上的射影.

因为  $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{|\cos \nu|}$  (其中的  $\nu$  像寻常一样是曲面的法线与  $z$  轴之间的角), 所以公式 (5) 又可写为:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{|\cos \nu|}. \quad (5^*)$$

直到这里我们都假定了在它上面展布积分的曲面  $(S)$  是光滑的而且是开的. 我们的结果容易推广到分片光滑的曲面情形, 无论这曲面是开的或是闭的.

### 632. 第一型曲面积分在力学上的应用

1° 当质点以一定的密度分布在一曲面的各点处时, 我们可以利用所说的积分来确定这块物质的曲面的质量、矩、重心的坐标以及其它类似的量.

因为和以前讨论过的质量在平面形上分布的情形比较起来, 这里并没有什么新的东西, 所以我们只在习题中去讲这些问题.

2° 单层的引力 在研究分布于曲面上的质量引力时, 自然要考虑到第一型曲面积分.

设沿着一曲面  $(S)$  连续地分布有质量, 它在曲面的每一点  $M(x, y, z)$  处都有给定的密度  $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ .<sup>①</sup> 再设在点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  处 (在曲面之外) 有一单位质量. 如果以牛顿引力定律 (万有引力定律) 为根据, 试确定点  $A$  被曲面  $(S)$  吸引的力  $\vec{F}$  的大小与方向.

假若点  $A$  仅被一个质点  $M(x, y, z)$  所吸引, 集中在  $M$  上的质量是  $m$ , 则引力的大小等于

$$F = \frac{m}{r^2}, \quad \textcircled{2}$$

<sup>①</sup>在这情形下说的是单层 (与我们不考虑的双层不同).

<sup>②</sup>像寻常一样, 为了书写简便计, 我们用  $\gamma$  来代替 “引力常数”, 即在牛顿公式 (与单位的选择有关系) 中的比例乘数.



其中  $r$  表距离  $AM$ , 即

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (6)$$

因为这力是朝着由  $A$  到  $M$  的方向, 所以它的方向余弦是

$$\frac{x - \xi}{r}, \quad \frac{y - \eta}{r}, \quad \frac{z - \zeta}{r},$$

于是引力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影可表为:

$$F_x = m \frac{x - \xi}{r^3}, \quad F_y = m \frac{y - \eta}{r^3}, \quad F_z = m \frac{z - \zeta}{r^3}. \quad (7)$$

在吸引的质点为一系时, 这些表示式各应以类似的一些表示式的和来代替; 最后, 当质量是连续地沿着曲面分布时, 积分就代替和而出现.

应用寻常的讲述方法, 可以把具有质量  $\rho dS$  的曲面元素  $dS$  看作集中在它的一个点  $M(x, y, z)$  上. 这一个点对  $A$  所发生的引力在坐标轴上具有射影 [参照 (7)]:

$$dF_x = \rho \frac{x - \xi}{r^3} dS, \quad dF_y = \rho \frac{y - \eta}{r^3} dS, \quad dF_z = \rho \frac{z - \zeta}{r^3} dS,$$

其中  $r$  是由公式 (6) 表示的距离  $AM$ . 现在只要把这些表示式“加”起来, 便得到单层的引力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影公式:

$$F_x = \iint_{(S)} \rho \frac{x - \xi}{r^3} dS, \quad F_y = \iint_{(S)} \rho \frac{y - \eta}{r^3} dS, \quad F_z = \iint_{(S)} \rho \frac{z - \zeta}{r^3} dS. \quad (8)$$

于是力  $\vec{F}$  的大小方向都已完全确定.

假若被引点  $A$  本身也在曲面  $(S)$  上, 则引力在坐标轴上的射影仍然由积分 (8) 来表示, 不过这时积分是反常的, 因为在点  $A$  的近邻各积分号下的函数不再是有界的.

3° 单层的位势 在一个吸引点  $M(x, y, z)$  的情况下, 我们已知道引力在坐标轴上的射影具有表示式 (7). 不难看出, 这三个射影是函数

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{m}{r}$$

对于  $\xi, \eta, \zeta$  的偏导数, 这一函数叫做点  $M$  的场对于点  $A$  的**牛顿位势**[参照 566, 1)].

如果场由质点系形成, 则位势是由这种形式的分式的和来表示, 并且位势对于  $\xi, \eta, \zeta$  的导数仍然给出引力在坐标轴上的射影.

于是我们很自然地得到, 以密度  $\rho$  分布在曲面  $(S)$  上而作用于点  $A$  的**单层位势**的表示式:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{(S)} \rho \frac{dS}{r}. \quad (9)$$

问题只发生在, 对于这位势来说, 基本性质

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z \quad (10)$$

是否能够保持不变, 其中  $F_x, F_y, F_z$  是单层的引力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影并且是由公式 (8) 确定的.

如果点  $A$  不在曲面上, 就是说连续性毫无破坏, 则不难证明, 在积分 (9) 对于  $\xi, \eta$ , 或  $\zeta$  施行微分时, **莱布尼茨**的法则是可用的 (这只需要重演一遍我们已熟悉的推理). 用这种方法, 在所考虑的质量分布的情况下关系式 (10) 可得到证实.



633. 例 1) 计算曲面积分:

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} dS,$$

$$(b) I_2 = \iint_{(S)} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

其中  $(S)$  表示椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

解 (a) 如果采用这椭球面的表示式:

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

则 [629,17)] 曲面元素可表为下面的形状

$$dS = abc \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

另一方面, 积分号下的函数为

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}}.$$

由对称性, 我们的计算可化到第一卦限内, 因此

$$\begin{aligned} I_1 &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2} \right) \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

(b) 同样,

$$I_2 = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{(a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

要计算里面的对于  $\varphi$  的积分, 我们令  $\cos \varphi = z$ , 得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{dz}{\{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - c^2)z^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \times \frac{z}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - c^2)z^2}} \Big|_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{1}{c} \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

最后得到

$$I_2 = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = 4\pi.$$

2) 计算积分

$$L = \iint_{(S)} (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS,$$



其中  $(S)$  是锥面  $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$  被柱面  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  截下的上部一块曲面.

解 把曲面的方程写成  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ , 我们得到  $dS = \sqrt{1 + k^2}dxdy$ , 并由公式 (5) 得到

$$L = \sqrt{1 + k^2} \iint_{(D)} [k^2(x^2 + y^2)^2 + x^2y^2]dxdy,$$

其中  $(D)$  是  $xy$  平面上的圆周  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  所围的圆域. 化为极坐标, 我们求得

$$L = \frac{1}{24}(80k^2 + 7)\pi a^6 \sqrt{1 + k^2}.$$

3) 试推演 (泊松的) 公式:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(m \sin \varphi \cos \theta + n \sin \varphi \sin \theta + p \cos \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2})du, \end{aligned}$$

(其中  $m^2 + n^2 + p^2 > 0$  并且  $f(t)$  于  $|t| \leq \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$  时为连续函数).

解 用  $P$  表左端的积分, 不难把它表为曲面积分的形状

$$P = \iint_{(S)} f(mx + ny + pz)dS,$$

其中  $(S)$  表半径为 1 而中心为原点的球面.

换为新坐标系  $uvw$ , 取平面  $mx + ny + pz = 0$  当作  $vw$  平面, 并令  $u$  轴垂直于它 (图 94); 于是

$$u = \frac{mx + ny + pz}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

在  $uvw$  坐标下这同一积分可写为:

$$P = \iint_{(S)} f(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2})dS.$$

如果把球面  $(S)$  的参数表示式取作下面的形状

$$\begin{aligned} u &= u, \quad v = \sqrt{1 - u^2} \cos \omega, \quad w = \sqrt{1 - u^2} \sin \omega \\ &(-1 \leq u \leq 1; 0 \leq \omega \leq 2\pi), \end{aligned}$$

则  $dS = dud\omega$ , 而最后得到

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2})dud\omega = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2})du.$$

令  $u = \cos \lambda (0 \leq \lambda \leq \pi)$ , 则泊松公式常可写成下形

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(m \sin \varphi \cos \theta + n \sin \varphi \sin \theta + p \cos \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi f(\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cos \lambda) \sin \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

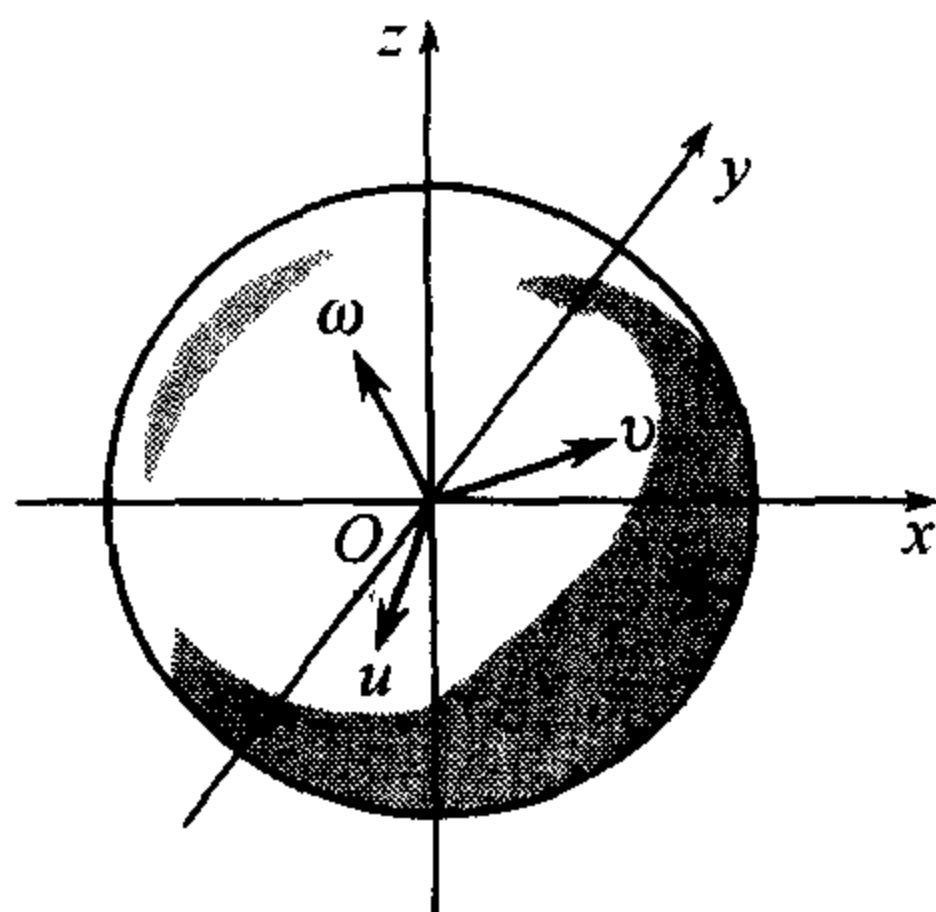


图 94



4) 设一质量是沿曲面  $(S)$  分布的, 具有密度  $\rho = \rho(x, y, z)$ . 试用展布在  $(S)$  上的曲面积分来表示: (a) 质量的总值  $m$ ; (b) 它对于坐标平面的静矩  $M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}$  与惯矩  $I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}$ ; (c) 质量重心的坐标  $\xi, \eta, \zeta$ .

5) 试求球面的质量, 如果在它上面各点处的密度等于 (a) 这点到铅垂直径的距离, (b) 这距离的平方.

(a)解 取球心当作坐标原点, 并把铅垂线定为  $z$  轴. 令

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi,$$

其中  $R$  是球的半径, 我们变到球坐标  $\varphi$  与  $\theta$ . 于是

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \varphi,$$

因此

$$m = \iint_{(S)} \rho dS = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi d\theta = \pi^2 R^3.$$

(b)答  $m = \frac{8}{3} \pi R^4.$

6) 当质量分布的情形分别地和前题中的 (a) 与 (b) 一样时, 试求球面的上半部重心的位置.

(a)解 如果像刚才一样选取坐标轴, 则由对称性立刻知道  $\xi = \eta = 0$ .

计算静矩:

$$M_{xy} = \iint_{(S)} z \rho dS = R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta = \frac{2}{3} \pi R^4.$$

我们已知 [见问题 5)] 质量的全部大小  $m = \frac{1}{2} \pi^2 R^3$ . 于是

$$\zeta = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4}{3\pi} R.$$

(b)答 在同样安排坐标轴时,  $\xi = \eta = 0, \zeta = \frac{3}{8} R$ .

7) 试求 (a) 均匀的 ( $\rho =$  常数) 锥面

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq R^2)$$

重心的位置, (b) 它对于坐标平面的惯矩.

解 (a) 显然,  $\xi = \eta = 0$ , 其次, 有

$$dS = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \frac{l}{R} dx dy \quad (l = \sqrt{h^2 + R^2}),$$

于是

$$M_{xy} = \frac{hl}{R^2} \rho \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{2\pi hl}{R^2} \rho \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi hl R \rho.$$

因为  $m = \pi l R \rho$ , 所以  $\zeta = \frac{2}{3} h$ .

(b)

$$I_{xy} = \iint_{(S)} \rho z^2 dS = \frac{2\pi h^2 l}{R^3} \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi h^2 l R}{2} \rho.$$



同样

$$I_{yz} = I_{zx} = \frac{\pi l R^3}{4} \rho.$$

8) 已给一个半径为  $R$ , 高为  $h$  的直圆柱面. 设它的侧面是均匀的 ( $\rho = 1$ ). 试求 (a) 底的中心感受到的曲面侧面的引力, (6) 这曲面对于底的中心的位置.

解 (a) 如果取底的中心当作坐标原点, 柱面的轴当作  $z$  轴, 则显然有  $F_x = F_y = 0$ . 将柱面用参数表示为

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = z$$

时有  $dS = R dz d\theta$ , 于是

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{z R dz d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi R \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

(6) 我们有

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R dz d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 2\pi R \ln \frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R}.$$

9) 就问题 7) 中的锥面求出 (a) 这曲面对于锥底的中心的位置及 (6) 对于它的顶点的位置, 又 (B) 锥底的中心感受到的引力及 (r) 它的顶点感受到的引力.

解 (a) 令

$$l = \sqrt{R^2 + h^2},$$

得

$$\begin{aligned} W &= \frac{l}{R} \rho \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} \\ &= 2\pi l \rho \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} \\ &= \frac{2\pi}{l} \rho \int_0^R \frac{l^2 r - Rh^2}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} dr + \frac{2\pi Rh^2}{l} \rho \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} \\ &= \frac{2\pi \rho}{l} \sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2} \Big|_{r=0}^{r=R} \\ &\quad + \frac{2\pi Rh^2 \rho}{l^2} \ln [l^2 r - Rh^2 + \sqrt{l^2 (l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2)}] \Big|_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{2\pi R \rho}{l} (R - h) + \frac{2\pi Rh^2 \rho}{l^2} \ln \frac{R l + R}{h l - h}. \end{aligned}$$

(6)

$$W = \frac{l \rho}{R} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi R \rho.$$

(B) 按对称性,  $F_x = F_y = 0$ . 其次,

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{l \rho}{R} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}} dxdy \\ &= 2\pi h l R \rho \int_0^R \frac{(r-R)r dr}{[l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$



这一积分可化为三积分的和:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^2} \int_0^R \frac{dr}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R(h^2 - R^2)}{l^4} \int_0^R \frac{l^2 r - Rh^2}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{3}{2}}} dr \\ & - \frac{2R^4 h^2}{l^4} \int_0^R \frac{dr}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = \frac{1}{l^3} \ln \frac{Rl + R}{h} \frac{1}{1-h} + \frac{h^2 - R^2}{Rh l^4} (R - h) - \frac{2}{l^4} (R + h). \end{aligned}$$

整理所有的结果, 最后我们得到:

$$F_z = \frac{2\pi h R \rho}{l^2} \ln \frac{Rl + R}{h} \frac{1}{1-h} - \frac{2\pi \rho (R + h)}{l}.$$

(r) 这时反常积分是发散的:

$$F_z = \frac{Rh}{l^2} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = +\infty.$$

10) 设分布在一锥面上的质量在各点的密度等于这点到顶点的距离, 试求 (a) 这曲面对于顶点的位势, (6) 顶点受到的曲面侧面的引力.

答 (a)  $W = \pi Rl = S$ ; (6)  $F_x = F_y = 0, F_z = \frac{2\pi Rh}{l}$ .

11) 求均匀的 ( $\rho = 1$ ) 球层上的点的引力.

解 设球心位于坐标原点, 被引点 (质量为 1) 位于正的  $z$  轴上离球心距离为  $a$  处. 这个引力在  $x$  与  $y$  轴上的射影  $F_x$  与  $F_y$  显然等于零, 其次, 我们有

$$F_z = \iint_{(S)} \rho \frac{z-a}{r^3} dS$$

( $r$  是球面上任一点  $M$  与点  $A$  的距离). 如果换为球坐标:

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi,$$

则

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta, \quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi},$$

而

$$F_z = 2\pi R^2 \rho \int_0^\pi \frac{(R \cos \varphi - a) \sin \varphi d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

用变换  $R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi = t^2$  将这表示式改为

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\pi R}{a^2} \rho \int_{|R-a|}^{R+a} \left( \frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1 \right) dt \\ &= -\frac{\pi R^2}{a^2} \rho \left( 2R - \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} - |R-a| \right). \end{aligned}$$

我们现在要讨论两种情形.

(1) 设  $a < R$ , 则  $|R-a| = R-a$ , 而括号内的值为零, 于是

$$F_z = 0.$$



因此,凡在一均匀球层里面的点,都不感受球层表面的任何引力.

(2) 若  $a > R$ , 则  $|R - a| = -(R - a)$ , 于是

$$F_z = -\frac{4\pi R^2 \rho}{a^2}.$$

因此,在均匀球层外面的点感受到的球层表面的引力,与集中球层的全部质量  $m = 4\pi R^2 \rho = S\rho$  于球心时它感受到的引力一样.

特别来讨论  $a = R$  的情形. 在这情形下点  $A$  在球面上, 而积分 (11) 成为反常的, 经过很明显的简化手续后, 它作下面的形状:

$$F_z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \rho \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = -2\pi \rho.$$

当  $a$  从比  $R$  小的值或比  $R$  大的值趋近于  $R$  时,  $F_z$  分别地有极限值  $0$  与  $-4\pi \rho$ . 由此可见, 当被引点通过球面时, 引力的连续性遭到破坏, 并且它对于球面上的点的值是上述两个极限值的算术平均数.

12) 求均匀球层对于任意一点的位势.

解 在前面的记法下, 我们有

$$\begin{aligned} W(a) &= \iint_{(S)} \rho \frac{dS}{r} = 2\pi R^2 \rho \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi}} \\ &= \frac{2\pi R}{a} \rho \int_{|R-a|}^{R+a} dt = \frac{2\pi R}{a} \rho (R + a - |R - a|). \end{aligned}$$

若  $a > R$ , 则

$$W(a) = 4\pi R \rho,$$

所以,在均匀球层里面, 它的位势是一常数.

反之, 当  $a < R$  时, 则

$$W(a) = \frac{4\pi R^2 \rho}{a},$$

也就是说,如果把球层的全部质量集中于球心, 球层在其外部空间的位势不起变化.

在  $a = R$  的情形下, 表达位势的反常积分具有值

$$W(R) = 4\pi R \rho.$$

由此可见, 当被引点通过球的表面时位势保持其连续性.

## §4. 第二型曲面积分

**634. 第二型曲面积分的定义** 这一新积分的形成是按照第二型曲线积分的样子建立的.

在那里我们从有向(定向)曲线出发, 并把它分成一些元素后, 再把这种各有方向的元素射影到坐标轴上来. 射影也是有方向的, 而我们则取其长带正号或负号, 依其方向是否与转的方向相同而定.



用类似的方法我们现在来考虑光滑的或分片光滑的双侧曲面  $(S)$ , 并且取定其两侧中某一侧; 如已所知 [620], 这等于说选取曲面的一个确定的定向.

为明确起见, 我们首先假定这曲面由显方程

$$z = z(x, y)$$

给出, 并且点  $(x, y)$  是在  $xy$  平面上由分段光滑的闭路所范围的区域  $(D)$  内变动. 于是在曲面的上侧与下侧<sup>①</sup>之间可以加以选择. 在第一种情况下曲面上的闭曲线, 如果从上面去看, 要记以反时针的方向, 而在第二种情况下则记以相反的方向.

如果把曲面分割为许多元素并把这种各有定向的每个元素射影到  $xy$  平面上来, 则被射影的图形边界的环行方向决定着它的射影闭路的环行方向. 若曲面  $(S)$  的上侧是固定的, 则这一方向和反时针方向的转动相一致, 也就是与  $xy$  平面本身的定向一致; 在这种情况下我们对射影的面积要取正号. 在下侧的情形转动是相反的, 而我们对射影的面积要取负号 [参考 610].

现在设在所给曲面  $(S)$  的点上定义有某一函数  $f(M) = f(x, y, z)$ . 用分段光滑的曲线网把这曲面分成许多元素

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$$

后, 在每个元素  $(S_i)$  内选取一点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ . 再算出函数的值  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  并用元素  $(S_i)$  在  $xy$  平面上的射影的面积  $D_i$  去乘它,  $D_i$  所带的符号是按照上面所说的规则来给的. 最后作出和 (也是一种积分和)

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) D_i. \quad (1)$$

如果当各个小块  $(S_i)$  的直径趋于零时这个和有一个确定的有限极限, 则这极限叫做

$$f(M) dxdy = f(x, y, z) dxdy$$

展布在曲面  $(S)$  这个选定的侧上的(第二型)曲面积分, 并用记号

$$I = \iint_{(S)} f(M) dxdy = \iint_{(S)} f(x, y, z) dxdy \quad (2)$$

来表示 (在这里  $dxdy$  象征曲面元素在  $xy$  平面上的射影的面积).

但是在这记号中恰恰没有包含着一种记号说明曲面是取的哪一侧, 因此每次必须把这一说明特别提出来. 从定义本身可见, 当所考虑的曲面的一侧换为和它相反的一侧时, 积分要改变符号.

<sup>①</sup>参看第 618 目中的脚注.



如果曲面  $(S)$  不具备所说的特别形状, 则曲面积分的定义也可以照样完全建立起来, 只是各个射影的面积  $D_i$  无需全部带同样的符号, 譬如说, 如果曲面元素中有些在上面而其余的在下面(图 95), 那就要带不同的符号.

如果元素在曲面的具有平行于  $z$  轴的母线的柱面部分上, 则它的射影集结于一线, 面积成为零, 而用不着去谈它的符号.

可是这里会遇到这样的情形, 就是一个元素部分地落在上面, 部分地落在下面, 或者是一个元素不是按一一对应的方式射影到  $xy$  平面上.

因为在实际上这类“不规则的”元素不起什么作用, 所以我们在积分和中可以不把与这些元素的对应项加进去. 以后我们要证实这样做法, 无论是在曲面积分的计算中或是在它的应用中都不会引起任何紊乱.

若替代  $xy$  平面把曲面的各元素射影到  $yz$  或  $zx$  平面上, 则我们得到另外两个第二型曲面积分:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dydz \quad \text{或} \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dzdx. \quad (2^*)$$

在应用中常常遇到这几个形状的面积联结在一起:

$$\iint_{(S)} P dydz + Q dzdx + R dxdy,$$

其中  $P, Q, R$  是  $(x, y, z)$  的函数, 定义于曲面  $(S)$  的点处. 我们再一次着重指出, 在各种情况下曲面  $(S)$  都假定是双侧的并且积分是展布在它的确定的一侧上.<sup>102)</sup>

**635. 最简单的特殊情形** 1° 再回到积分 (2) 当曲面  $(S)$  是由显方程

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \text{ 属于 } (D))$$

给出的情形, 并且函数  $z$  与它的偏导数  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  及  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$  都是连续的.

如果积分 (2) 是沿曲面的上侧取的, 则在积分和 (1) 中所有  $D_i$  都是正的. 在这和中用  $z$  的值  $z(x_i, y_i)$  来代替  $z_i$ , 我们就把它化为下面的形状

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) D_i,$$

<sup>102)</sup> 在分析教程中可能有另外的方法引入第二型曲面积分, 这样, 为了定义第二型积分可以应用将其归结为第一型积分或通常的二重积分的公式; 特别, 第二型积分可借助 636 目的公式 (9) 或 (10) 来定义.

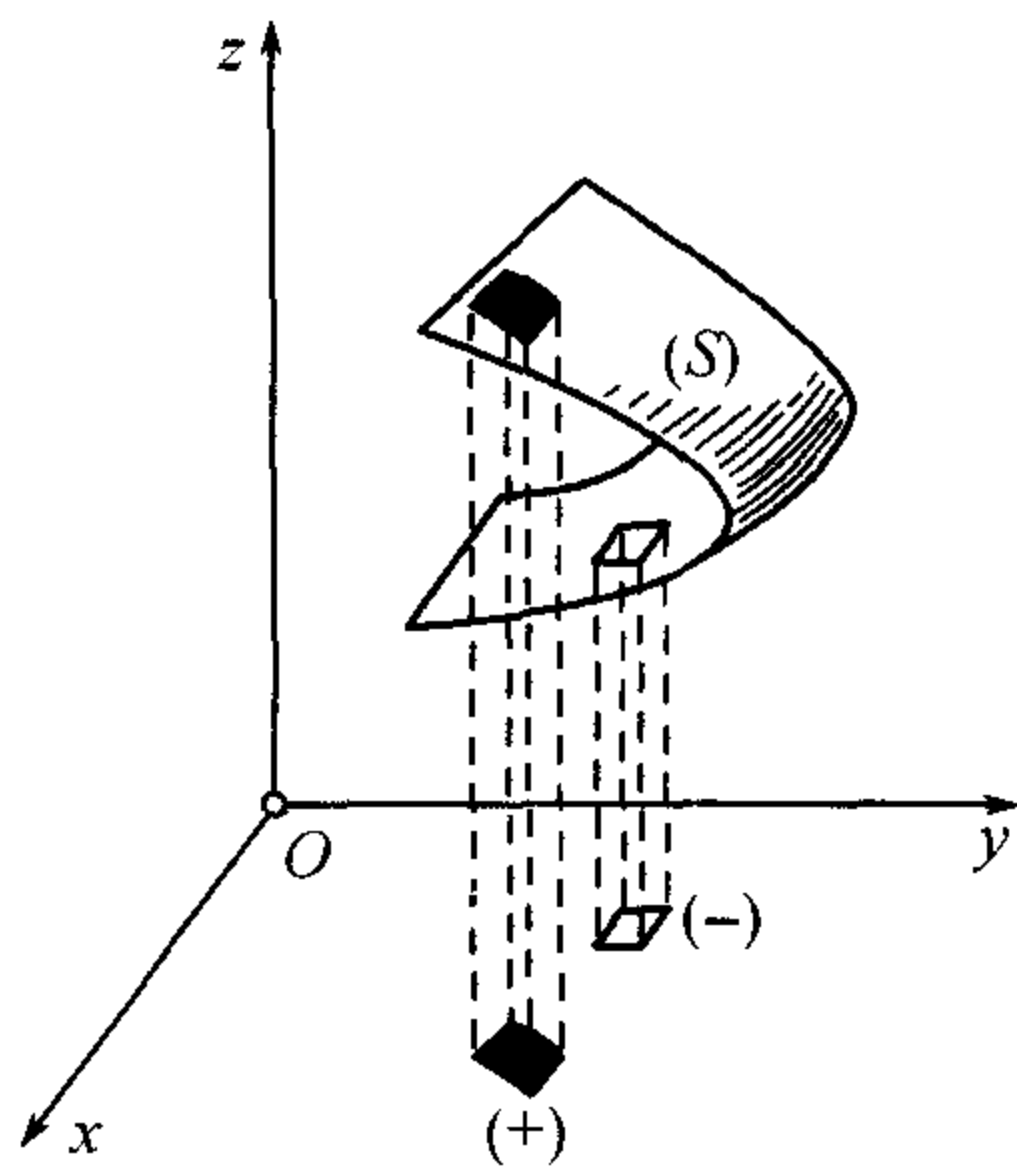


图 95



不难看出这就是寻常的二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

的积分和. 取极限, 我们就确立了等式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (3)$$

并且这两个积分中一个存在就能推出另一个的存在. 特别, 如果函数  $f$  是连续的, 则这两个积分一定存在.

若积分展布在曲面  $(S)$  的下侧, 则显然有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (3^*)$$

**附注** 在各种情况下公式 (3) 可以保持不变, 只要认为右端二重积分所展布的区域  $(D)$  有其应有的定向[参看 610].

我们现在要证明 (在所考虑的情况下), 第二型曲面积分可化为第一型曲面积分. 在选定曲面上侧的假设下, 就是说所有的  $D_i > 0$ , 我们来重新考虑和 (1). 按照第 626 目中公式 (5a),

$$S_i = \iint_{(D_i)} \frac{dx dy}{\cos \nu},$$

其中  $\nu$  是曲面的法线与  $z$  轴之间夹的锐角. 应用中值定理, 我们得到

$$S_i = \frac{D_i}{\cos \nu_i^*} \quad \text{或} \quad D_i = S_i \cos \nu_i^*;$$

这里的  $\nu_i^*$  代表在元素  $(S_i)$  的某个 (但不是任意选择的) 点处的曲面法线与  $z$  轴所成的角. 把  $D_i$  的这个值代入  $\sigma$  中, 我们得到

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$

与这个和相应自然地有一个和

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i,$$

其中  $\nu_i$  是与任意选好了的点  $(x_i, y_i, z_i)$  相对应的; 最后这个和显然是第一型曲面积分

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu dS$$

的积分和.



由函数

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

的连续性, 如果把曲面  $(S)$  分成足够小的一些元素, 则这余弦在各个元素范围内的振动都会小于任意一个预先给定的数  $\varepsilon > 0$ . 假定函数  $f$  是有界的:  $|f| \leq M$ , 我们估计这两个和  $\sigma$  与  $\bar{\sigma}$  的差:

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i, z_i)| |\cos \nu_i^* - \cos \nu_i| S_i < M S \varepsilon;$$

所以  $\sigma - \bar{\sigma} \rightarrow 0$ . 很明显, 这两个和的极限同时存在并且相等. 于是我们得到等式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu dS. \quad (4)$$

并且从这两积分中一个的存在就得出另一个的存在. 我们又看到, 特别在函数  $f$  连续性的假定下这两个积分都存在.

把曲面的上侧换为下侧, 我们同样要改变等式 (4) 左端的符号. 如果与此同时把  $\nu$  理解为方向朝下的法线与  $z$  轴所成的角, 则余弦照样改变符号, 而右端的积分也跟着它改变符号, 所以等式仍然可以保持不变.

2° 如果  $(S)$  是柱面的一部分, 其棱平行于  $z$  轴, 则各元素的射影都成为零, 所以在这种情况下:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = 0. \quad (5)$$

显然, 在这里公式 (4) 也成立: 因为  $\cos \nu = 0$ , 所以这公式的右端也为零.

**636. 一般情形** 我们再回到简单、非闭的光滑曲面的一般情形. 在积分和

$$\sigma' = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) D_i$$

中, 像我们规定过的情形一样, 没有把曲面上那些“不规则”元素 (它们或者是部分地在上而部分地在下面的元素, 或者是不按一一对应的方式射影到  $xy$  平面上的元素) 的对应项加进去. 在和的记号上的撇号表明着这种情况.

把  $\nu$  总认为是按照曲面选定的一侧而定向的法线与  $z$  轴所成的角, 我们恒有连符号在内都正确的等式:

$$D_i = S_i \cos \nu_i^*$$

( $\nu_i^*$  具有以前所说的同样意义). 因此,

$$\sigma' = \sum f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$



把这个和与和

$$\bar{\sigma}' = \sum' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i.$$

( $\nu_i$  对应于所选取的点) 相比较. 像以前一样, 不难证实

$$\lim(\sigma' - \bar{\sigma}') = 0. \quad (6)$$

如果再把那个与抛弃了的“不规则的”元素相对应的和

$$\bar{\sigma}'' = \sum'' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i$$

合并到  $\bar{\sigma}'$  中, 则完全得到了关于第一型曲面积分

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu dS$$

的积分和  $\bar{\sigma}$ .

可以证明 (我们宁可在下面 637 中来做) 当所有元素 ( $S_i$ ) 的直径趋向于零时,

$$\bar{\sigma}'' \rightarrow 0. \quad (7)$$

于是根据 (6), 我们在 (4) 中两个积分有一个存在的假定下 (因而推出另一个的存在) 重新得到等式 (4).

从曲面 ( $S$ ) 的参数表示式出发, 可以把 (4) 中右端的积分化为展布在参数的变化区域 ( $\Delta$ ) 上的寻常二重积分, 而根据已证明的, 也就同时可以把右端积分化为这二重积分. 就是说, 因为

$$\cos \nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

所以有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv. \quad (8)$$

正负符号对应于曲面 ( $S$ ) 的两个侧; 特别, 如果  $uv$  平面的定向对应于曲面 ( $S$ ) 上所选一侧的定向, 则应取正号 [621]. 而且在这里, 两个积分中一个的存在能导出另一个的存在.<sup>103)</sup>

用类似的处理方法, 可以得出与曲面在另外两个坐标平面上的射影相关的另外两个第二型曲面积分. 把这些结果全部结合起来, 可以写成

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS. \quad (9)$$

<sup>103)</sup> 换句话说, 如果所考虑的曲面 ( $S$ ) 的侧是在参数公式中确定而产生的一侧, 即 ( $S_+$ ) 侧, 则在公式 (8) 中选正号. [参看 620 目中的脚注 99]. 在所考虑的曲面 ( $S$ ) 的侧是 ( $S_-$ ) 侧时, 则公式 (8) 中积分前取负号.



这是化第二型曲面积为第一型曲面积分的一般公式. 在这里  $P, Q, R$  是定义于曲面  $(S)$  的点处的有界函数, 而  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  是按照曲面的选定的一侧而定向的法线方向余弦.

最后, 我们导出化第二型曲面积为寻常二重积分的一般公式:

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iint_{(\Delta)} (PA + QB + RC) du dv. \quad (10)$$

在右端所指的是, 函数  $P, Q, R$  中的  $x, y, z$  是由其用  $u, v$  表示的式子来代替的. 关于符号可以重用前面的说明.

所得的各个结果都可推广到更一般的情况——分片光滑的闭的或开的曲面的情况(因为这样的曲面是由一些一个接着一个的开的光滑曲面所组成的).

**637. 证明的细节** 现在回过头来证明关系式 (7). 我们可以断定, 对于任一预先给定的  $\varepsilon > 0$ , 找得到这样的一个  $\eta > 0$ , 只要各个元素的直径小于  $\eta$  时, 在“不规则的”各个元素的各处都有不等式

$$|\cos \nu| < \varepsilon. \quad (11)$$

假设这个断语不成立; 于是就有这样的一个  $\varepsilon_0 > 0$  及这样的由“不规则的”而直径渐缩为零的一些元素  $(S_k)$  组成的序列存在, 使得在每个  $(S_k)$  的某一点处都有

$$|\cos \nu| \geq \varepsilon_0. \quad (12)$$

如果用  $(\delta_k)$  表区域  $(\Delta)$  中对应于  $(S_k)$  的元素, 则元素  $(\delta_k)$  的直径也趋于零. 由布尔查诺-魏尔斯特拉斯定理 [172], 从序列  $\{(\delta_k)\}$  中可取出这样一个部分序列, 它的元素集结于区域  $(\Delta)$  的某一点  $(u_0, v_0)$ ; 但是, 不失一般性不妨假定这就是序列  $\{(\delta_k)\}$  本身.

对于与参数  $u, v$  的值  $u = u_0, v = v_0$  相对应的角  $\nu = \nu_0$ , 必定有

$$\cos \nu_0 = 0. \quad (13)$$

因为, 如果不然, 则对于参数的这一对值我们就该有

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是在点  $(u_0, v_0)$  的一个邻域内,  $u, v$  便可考虑作  $x, y$  的单值函数, 并且当  $u, v$  用  $x, y$  表示的式子代入函数  $z = z(u, v)$  中时, 曲面便由显方程

$$z = f(x, y)$$

来表示<sup>①</sup>. 除此以外, 若把这近邻取得足够小, 则在其内  $\cos \nu$  保持一定的符号, 因为当  $k$  足够大时  $(\delta_k)$  势必落到这个邻域之内, 所以它也就不能够对应于“不规则的”元素  $(S_k)$ .

<sup>①</sup>如果点  $(u_0, v_0)$  在区域  $(\Delta)$  的边界上, 则对于上面所述这点的邻域和区域  $(\Delta)$  的公共部分这话仍是正确的. 参考第一卷中的附录 [262].



由此可见等式 (13) 成立. 这样, 当  $(\delta_k)$  足够地接近于点  $(u_0, v_0)$  时, 对于这些区域我们就到处有

$$|\cos \nu| < \varepsilon_0,$$

这和假设 (12) 相反. 这一矛盾的产生, 就证实了我们对于不等式 (11) 所下的断语.

现在设曲面  $(S)$  被分成的各个元素的直径都小于  $\eta$ . 于是对于“不规则的”元素 (假若有的话) 不等式 (11) 成立, 并且与它们对应的和  $\sigma''$  的绝对值小于  $MS\varepsilon$ ,  $M$  表  $|f|$  的一个上界. 由此可见 (7) 式成立.

**638. 用曲面积分表立体体积** 立体体积可用展布在范围着这立体的曲面上的积分来表示, 好像平面图形的面积可用沿着这图形的边界的积分来表示一样 [551]. 考虑一立体  $(V)$ , 它是由分片光滑的曲面

$$\begin{aligned} (S_1) \quad z &= z_0(x, y), & (z_0 < Z) \\ (S_2) \quad z &= Z(x, y) \end{aligned}$$

及母线平行于  $z$  轴的柱面  $(S_3)$  所围成的 (图 96). 在  $xy$  平面上, 范围一个平面区域  $(D)$  的分段光滑的闭路  $(K)$  是这柱面的准线. 在特殊情形下, 等式  $z_0(x, y) = Z(x, y)$  可以在曲线  $(K)$  上成立; 那时曲面  $(S_3)$  缩成一线.

这立体的体积  $V$  显然等于两积分的差

$$V = \iint_{(D)} Z(x, y) dx dy - \iint_{(D)} z_0(x, y) dx dy.$$

引入曲面积分, 这等式可写为 [参看 (3) 与 (3\*)]:

$$V = \iint_{(S_2)} z dx dy + \iint_{(S_1)} z dx dy,$$

并且这两积分是沿曲面  $(S_2)$  的上侧及沿曲面  $(S_1)$  的下侧来取的. 把展布在柱面  $(S_3)$  的外侧上的积分

$$\iint_{(S_3)} z dx dy$$

加到右端. 由 (5) 式知这积分等于零, 所以这积分的加入并不破坏原来的等式. 这样, 最终有

$$V = \iint_{(S)} z dx dy, \quad (14)$$

它是展布在范围着这立体的曲面  $(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3)$  的外侧上的.

公式 (14) 只是由我们就那种有确定定向的柱形长条建立起来的. 但是, 显然, 对于宽广得多的一类立体, 能够利用母线平行于  $z$  轴的一些柱面把它分成所研究过的形状的部分, 这个公式仍是正确的. 实际上, 实行这个分法, 我们可以应用公式 (14)

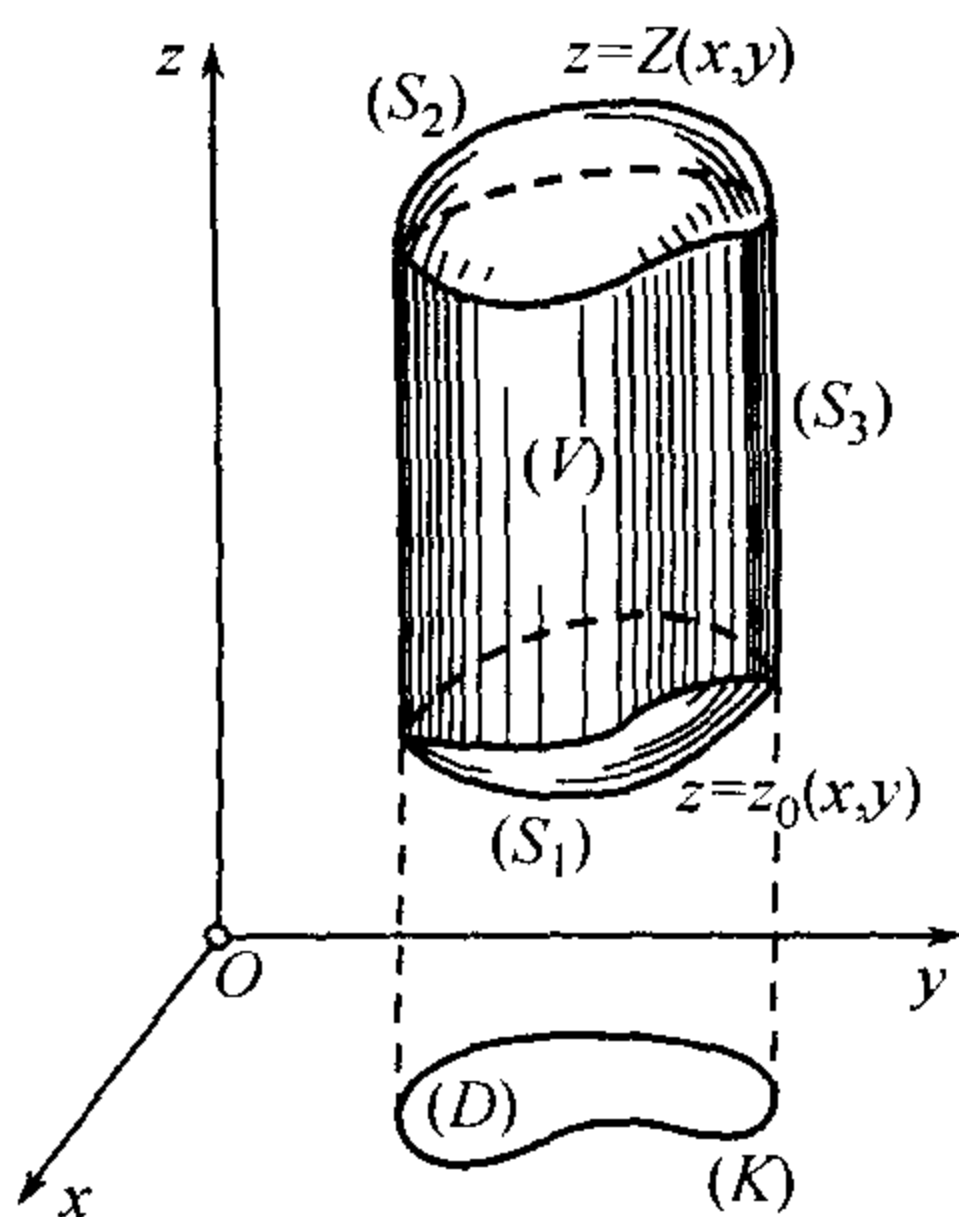


图 96



到各个部分, 然后把各个结果加在一起. 因为展布在各个辅助柱面上的积分等于零, 所以我们重新得到公式 (14).

我们现在要指出, 对于最常见的极广的一类立体, 就是说, 对于由任意一个分片光滑的曲面所范围的立体, 这公式成立.

设  $(V)$  是这样的一个立体. 首先用有限多个长方体<sup>①</sup>将这立体的表面  $(S)$  上所有的“棱”包进去, 并且不仅要它们的总体积任意小, 还要它们包在曲面  $(S)$  的部分的面积也任意小, 而同时展布在这部分上的积分  $\iint z dx dy$  也如此.

现在我们在曲面上任取一个不在“棱”上的点  $M_0(u_0, v_0)$ . 因为这点不是奇点, 所以在这点处  $A, B, C$  三行列式中至少有一个不为零. 若  $C \neq 0$ , 则我们知道, 在点  $M_0$  的一个邻域内曲面  $(S)$  的对应部分可用形如

$$z = f(x, y)$$

的显方程来表示. 当  $A \neq 0$  或  $B \neq 0$  时, 我们就得到另外两种形状的显方程:

$$x = g(y, z), \quad y = h(z, x).$$

因此, 点  $M_0$  可以被这样的—个长方体所包含, 它从立体  $(V)$  上割下的部分是由五个平面和这样三片曲面 (图 97) 之一所围的“棱条”.

把博雷尔引理 [175] 应用到我们的曲面上,<sup>②</sup>我们从这种长方体的无穷集合中可选出有限多个长方体来. 结果除掉那些包着了“棱”的各个长方区域以外, 立体  $(V)$  的其余部分  $(V_1)$  被分成有限多个“棱条”及简单的长方体. 假若对于所有这些元素立体能够证明公式 (14) 的正确性, 则用加法立即证实这公式对于它们的和的正确性, 然后取极限 (与缩小各个“棱”的邻域相联系) 也就知道这公式对于原来的立体  $(V)$  是正确的.

但是对于第一种形状的柱形长条, 因而对于长方体, 这公式是在前面已证明了的. 现在我们要讲到例如  $(V)$  的第二种形状的“棱条”, 它是由平面  $x = x_0, y = y_0, y = y_1, z = z_0, z = z_1$  以及曲面  $(s): x = g(y, x)$  所范围的.

仿照在第 551 目中为了扩大平面图形面积公式的应用范围我们曾经用过的方法, 这时替代内接于曲线的折线我们来画内接于曲面  $(s)$  的多面形  $(\sigma)$ . 我们知道 [627], 利用适当的三角剖分法来分我们的立体在  $yz$  平面上的射影所构成的矩形

$$(d) = [y_0, y_1; z_0, z_1],$$

<sup>①</sup> 在这里和下面我们指的是各面分别平行于三个坐标平面的平行六面体.

<sup>②</sup> 不难知道它是一个闭集合.

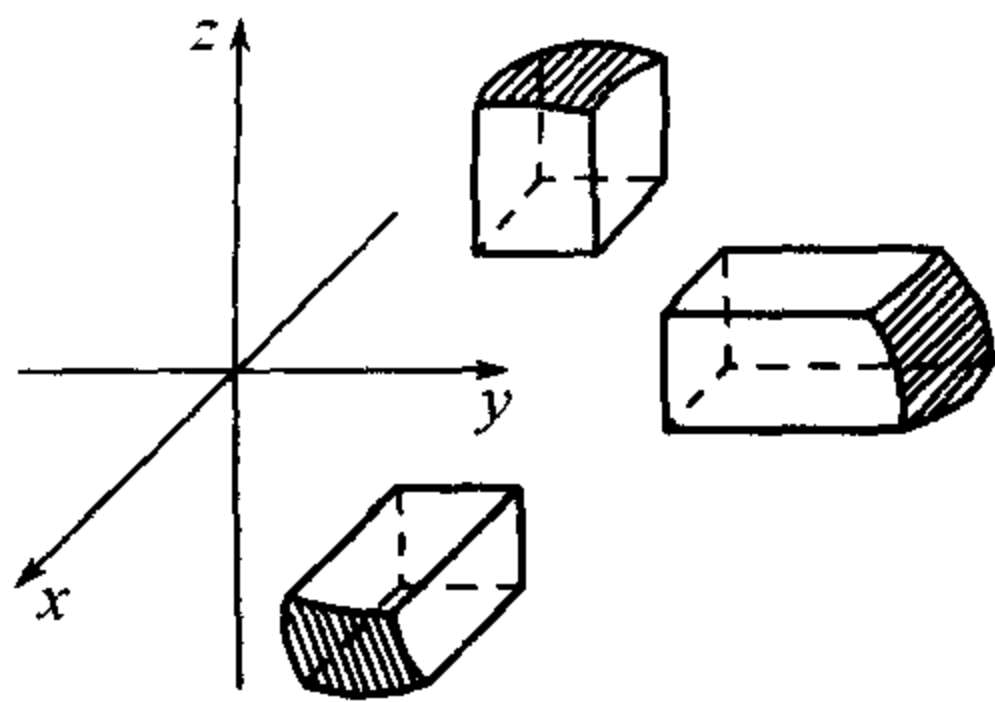


图 97



可以做得使曲面  $(\sigma)$  的各面上的法线方向随意地接近于曲面  $(s)$  在其对应部分各点处的法线. 用多面形  $(\sigma)$  代替了曲面  $(s)$ , 我们能够对于这改变了的立体  $(\tilde{V})$  写出公式

$$\tilde{V} = \iint_{(\tilde{S})} z dx dy, \quad (15)$$

其中  $(\tilde{S})$  是用来表示范围着多面体  $(\tilde{V})$  的整个表面. 实际上, 这个多面体容易分成许多像我们的公式对它们已取得证明的那种形状的立体. 要得到公式 (14) 现在只要在 (15) 中取极限 (当多面形的各棱无限地缩小而其各面上的法线方向与所给曲面上的法线方向无限地接近时).

为了证明所说的两公式的右端的近似, 我们将它们的差表如下形

$$\iint_{(s)} z dx dy - \iint_{(\sigma)} z dx dy + \alpha,$$

其中  $\alpha$  表示沿立体  $(V)$  与  $(\tilde{V})$  的那些侧面 (即用以使这两曲面分开者) 上的积分. 显然,  $\alpha \rightarrow 0$ . 把这两积分化为第一型的积分, 它们的差首先可写成

$$\iint_{(s)} z \cos \nu ds - \iint_{(\sigma)} z \cos \tilde{\nu} d\sigma,$$

其次, 再转到第二型的积分

$$\iint_{(s)} z \frac{\cos \nu}{\cos \lambda} dy dz - \iint_{(\sigma)} z \frac{\cos \tilde{\nu}}{\cos \tilde{\lambda}} dy dz.$$

在这里  $\cos \lambda, \cos \nu, \cos \tilde{\lambda}, \cos \tilde{\nu}$  是这两曲面的外法线的方向余弦. 注意在  $(s)$  上

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + g_y'^2 + g_z'^2}}$$

是连续函数, 不趋向于零, 因此, 是以正数为其下界的; 当曲面  $(s)$  与  $(\sigma)$  的法线足够接近时, 对于多面形  $(\sigma)$  的  $\cos \tilde{\lambda}$  来说, 这也是一样正确的.

最后, 引用多面形  $(\sigma)$  的方程  $x = \tilde{g}(y, z)$ , 可以把最后两积分的差用展布在矩形  $(d)$  上的寻常二重积分写成下形:

$$\iint_{(d)} \left\{ \left[ z \frac{\cos \nu}{\cos \lambda} \right]_{x=g(y,z)} - \left[ z \frac{\cos \tilde{\nu}}{\cos \tilde{\lambda}} \right]_{x=\tilde{g}(y,z)} \right\} dy dz.$$

考虑到了不仅曲面  $(s)$  与  $(\sigma)$  的对应点相接近, 而且这两曲面在对应点处的法线也相接近, 于是就显然可见, 所写出的积分在上述极限过程中趋向于零. 这就完成了我们的证明.

与公式 (14) 同时, 立体的体积也可用公式

$$V = \iint_{(s)} x dy dz \quad \text{或} \quad V = \iint_{(s)} y dz dx \quad (14^*)$$



来表示,这可由简单改换轴的地位而得到.把三个结果合在一起,可以得到更对称的公式

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(S)} x dy dz + y dz dx + z dx dy. \quad (16)$$

在所有情况下,积分都是沿着包围这个立体的曲面  $(S)$  的外侧而取的.

再引入外法线的方向余弦  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ , 最后的表示式可写成第一型曲面积分:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(S)} (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) dS. \quad (17)$$

**639. 斯托克斯公式** 再设  $(S)$  是由分段光滑的闭路  $(L)$  所范围的一个简单的光滑的双侧曲面. 面上的点借公式

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

与平面区域  $(\Delta)$  的点成一一对应,  $(\Delta)$  是由  $uv$  平面上分段光滑的闭路  $(\Lambda)$  所范围的. 此外, 总有  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ .

选取曲面的确定一侧, 并与此相应选取它的定向[620]. 为明确起见, 我们把闭路  $(L)$  算作按正环行方向对应于闭路  $(\Lambda)$  的正环行方向. 于是像我们在 621 目中规定的一样, 公式

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos \mu &= \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

正好显示出曲面  $(S)$  被选取的一侧.

注意这些事项以后, 我们将推演一重要公式, 它联系着曲面积分与曲线积分, 且为我们所熟知的格林公式 [600] 的推广.

设在某一个包含曲面  $(S)$  本身在内的空间区域内, 给出一个函数

$$P = P(x, y, z),$$

它和它的偏导数在这区域内都是连续的. 于是有公式

$$\int_{(L)} P dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (19)$$

并且闭路  $(L)$  的环行方向对应于右端积分所展布曲面  $(S)$  的那一侧.

首先改变沿曲线  $(L)$  的曲线积分, 用沿曲线  $(\Lambda)$  的积分来代替:

$$\int_{(L)} P dx = \int_{(\Lambda)} P \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right). \quad (20)$$



关于这等式, 只要引进曲线  $(\Lambda)$  的参数表示式, 并通过它引进曲线  $(L)$  的参数表示式, 便可以将这两个积分化为同一个对参数的寻常积分. 于是证明了等式 (20) 成立.

现在我们应用格林公式于 (20) 中的右端积分, 得

$$\int_{(\Lambda)} P \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \iint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right\} dudv.$$

因为最后一个积分号下的式子可以展开成下形

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\ & - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ & = \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

所以我们得到二重积分

$$\iint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right\} dudv.$$

按照公式 (10) 我们容易把它改为曲面积分

$$\iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy;$$

最后这一积分是沿所选的曲面一侧而取的, 因为公式 (18) 正好表示的是这一侧. 这样就完成了等式 (19) 的证明. ①

这个公式是就光滑的曲面建立起来的; 但它也容易推广到分片光滑曲面的情形: 只要就每片光滑的面单独地把它写出来, 然后把所得的各等式加在一起.

用循环轮换字母  $x, y, z$  的方法, 再得到两个类似的等式:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(L)} Q dy &= \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz, \\ \int_{(L)} R dz &= \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx, \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

其中  $Q$  与  $R$  为  $x, y, z$  的两个新函数, 满足  $P$  所适合的同样的各条件.

合并 (19) 与 (19\*) 三个等式, 我们得到所要求的结果, 即最普遍的公式:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} P dx + Q dy + R dz &= \iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &\quad + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (21)$$

①应当指出, 在推演中导数  $\frac{\partial P}{\partial x}$  和  $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$  的存在性与连续性我们都利用到了, 但在最后的结果中它们并未出现. 实际上没有这些假设这个公式也能成立.



这个等式叫做斯托克斯(G.G.Stokes)公式. 我们再一次着重指出, 曲面的这一侧和它的边界的方向彼此是由620目中所建立的规则来决定的.

若取  $xy$  平面上的平面区域  $(D)$  作为曲面  $(S)$  这一块面, 则因  $z = 0$  而得到公式

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

这是读者所知道的格林公式; 因此, 后者为斯托克斯公式的特例.<sup>①</sup>

最后我们指出, 在斯托克斯公式中第二型曲面积分可以用第一型曲面积分来代替. 于是这公式取下面的形式

$$\begin{aligned} \int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \lambda \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \mu + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \nu \right\} dS, \end{aligned} \quad (21^*)$$

并且  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  表示恰与所选的曲面一侧相对应的法线方向余弦.

640. 例 1) 计算积分

$$I = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) dxdy,$$

它展布在圆  $x^2 + y^2 = R^2$  的下侧.

提示 因为积分所展布的曲面与它在  $xy$  平面上的射影重合, 所以注意到侧时, 我们就有

$$I = - \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dxdy.$$

答  $I = -\frac{\pi}{2} R^4$ .

2) 计算积分

$$J = \iint_{(S)} x^2 y^2 z dxdy,$$

它是沿着球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的下半部的上侧而取的.

提示 半球在  $xy$  平面上的射影是由圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  所范围的圆域  $(D)$ . 下半部球面的方程是  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 所以

$$J = - \iint_{(D)} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy.$$

答  $J = -\frac{2\pi}{105} R^7$ .

3) 计算积分

$$K = \iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

它展布在球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外侧.

<sup>①</sup>为了便利记忆斯托克斯公式, 我们指出, 右端积分中第一项与格林公式中的是一样的, 而其余二项可由  $x, y, z$  与  $P, Q, R$  的循环轮换得到.



解 我们来讨论积分

$$K_3 = \iint_{(S)} z^2 dx dy$$

的计算. 因为球面的显方程为

$$z - c = \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$$

(其中正号对应于上半球, 而负号对应于下半球), 所以该把被积函数  $z^2$  表为下形

$$z^2 = (z - c)^2 + c^2 + 2c(z - c).$$

前两项的和沿上半球面的上侧与下半球面的下侧来积分时给出不同符号的结果, 它们彼此相消. 最后一项由上半球面转到下半球面时本身改变符号, 因而沿这两半球积分时得出相等的两结果, 所以

$$K_3 = 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy = \frac{8}{3} \pi c R^3.$$

同样可得到另二积分:

$$K_1 = \iint_{(S)} x^2 dy dz, \quad K_2 = \iint_{(S)} y^2 dz dx.$$

答  $K = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).$

4) 求积分

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} dx dy, \quad (b) I_2 = \iint_{(S)} z dx dy, \quad (c) I_3 = \iint_{(S)} z^2 dx dy,$$

它们展布在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的外侧.

答 (a)  $I_1 = 0$ ; (b)  $I_2 = \frac{4}{3} \pi abc$ ; (c)  $I_3 = 0$ .

5) 计算积分

$$(a) L_1 = \iint_{(S)} x^3 dy dz, \quad (b) L_2 = \iint_{(S)} yz dz dx,$$

它们是沿着这同一个椭球面的上半部的上侧而取的.

解 (a)

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}},$$

$$L_1 = 4a^3 \iint_{(D_1)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz,$$

其中  $(D_1)$  是椭圆  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  在第一象限内的部分. 换为广义极坐标, 不难求得

$$L_1 = \frac{2}{5} \pi a^3 bc.$$



从曲面的参数表示式

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\right) \quad (22)$$

出发, 同样容易地可以得到这个结果.

因为  $A = bc \sin^2 \varphi \cos \theta$ , 故按照公式 (10),

$$L_1 = a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2}{5} \pi a^3 bc.$$

(曲面的上侧对应于所指公式中的正号.)

(6) 在这里也利用参数表示式, 我们看出  $B = ac \sin^2 \varphi \sin \theta$ . 所以

$$L_2 = abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

6) 求积分

$$\iint_{(S)} \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z},$$

它是沿着上面所指的椭球面的外侧而取的.

**提示** 这积分是反常的, 因为积分号下的式子变为无穷大 (在椭球面与坐标平面的截口上). 利用参数表示式我们得到常义的二重积分.

**答**  $4\pi \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right).$

7) 若把关于体积  $V$  的表示式 (16) 按照公式 (10) 改为常义的二重积分, 则得

$$V = \pm \frac{1}{3} \iint_{(\Delta)} (Ax + By + Cz) dudv. \quad (23)$$

视  $A, B, C$  的值为行列式, 很容易地把这结果表成下面的形成

$$V = + \frac{1}{3} \iint_{(\Delta)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$$

这时符号规定是正的, 只要  $A, B, C$  具有外法线的方向余弦的符号; 在相反的情形下符号规定是负的.

8) 从参数表示式 (22) ( $0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 出发, 用这个公式来计算椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的体积  $V$ .

**提示** 这时的行列式等于  $abc \sin \varphi$ .

**答**  $V = \frac{4}{3} \pi abc.$

9) 若范围着一个立体的曲面是由极坐标方程

$$r = r(\varphi, \theta)$$



给出, 则像在 [629, 14)] 中一样, 可以变到曲面的参数表示式, 并且  $\varphi, \theta$  起着参数的作用. 再从这表示式出发就可由公式 (23) 导出体积的一个简洁表示式

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(\Delta)} r^3 \sin \varphi d\varphi d\theta, \quad (24)$$

这时  $(\Delta)$  是参数  $\varphi, \theta$  的变域.

10) 计算由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy$$

所范围立体的体积.

**解** 从曲面的极坐标方程

$$r = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}$$

出发, 我们利用公式 (24) 会得到:

$$V = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \cos^{\frac{3}{2}} \theta d\theta.$$

按照 [312, 1)] 中的公式 (8) 计算第一个积分, 按照 [534, 4)(B)] 中的公式计算第二个积分, 最后我们求得

$$V = \frac{\sqrt{2\pi}}{48} a^3 \Gamma^2 \left( \frac{1}{4} \right).$$

11) 设闭路  $(L)$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ , 而曲面  $(S)$  为半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)$ . 同时在曲面上我们取其上侧, 并给闭路以反时针方向 (如果是从上面来看它). 试就函数  $P = x^2 y^3, Q = 1, R = z$  来验证斯托克斯公式 (21).

积分

$$\int_{(L)} x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

显然可简化为只具第一项的积分

$$\int_{(L)} x^2 y^3 dx = -a^6 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{8} a^6.$$

其次, 我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

计算积分

$$-3 \iint_{(S)} x^2 y^2 dx dy = -3 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} x^2 y^2 dx dy = -\frac{\pi}{8} a^6,$$

我们得到同样的结果.

12) 试就函数

$$P = y, \quad Q = z, \quad R = x$$

来验证斯托克斯公式, 如果  $(L)$  是圆周

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a\sqrt{2} \sin t \cos t, \quad z = a \sin^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi),$$



而  $(S)$  是由它所范围的圆.

(这一个圆是平面  $x+z=a$  被球面  $x^2+y^2+z^2=a^2$  截下的部分, 它的半径等于  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .)

曲线积分

$$\int_{(L)} ydx + zdy + xdz = a^2 \int_0^\pi (-\sqrt{2} \sin^2 t + 2 \cos^3 t \sin t) dt = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi a^2,$$

曲面积分

$$-\iint_{(S)} dxdy + dydz + dzdx$$

等于上述的圆在各坐标平面上射影的面积的和, 但取相反的符号, 即

$$-2 \frac{\pi a^2}{2} \cos 45^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi a^2.$$

13) 假定

$$P = y^2 + z^2, \quad Q = z^2 + x^2, \quad R = x^2 + y^2,$$

并把球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  ( $R > r, z > 0$ ) 被柱面  $x^2 + y^2 = 2rx$  割下的曲面当作  $(S)$ , 试验证斯托克斯公式.

采用曲线的参数表示式

$$x = r(1 + \cos t), \quad y = r \sin t, \quad z = \sqrt{2r(R-r)} \sqrt{1 + \cos t} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad ①$$

则对于曲线积分, 我们得到一个很复杂的用常义积分写出的表示式:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ [r^2 \sin^2 t + 2r(R-r)(1 + \cos t)](-r \sin t) - \right. \\ & + [2r(R-r)(1 + \cos t) + r^2(1 + \cos t)^2]r \cos t \\ & \left. + [r^2(1 + \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t] \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2r(R-r)}{1 + \cos t}} (-\sin t) \right\} dt. \end{aligned}$$

可是大括号内的第一项及第三项各与  $dt$  相乘都具有  $f(\cos t)d\cos t$  的形式, 它们的积分由余弦的周期性应等于零, 实行剩下的计算, 我们得到  $2\pi Rr^2$ .

至于曲面积分

$$2 \iint_{(S)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy,$$

它是展布在上述的曲面的上侧的, 我们首先把它改为另一形式:

$$2 \iint_{(S)} [(y-z) \cos \lambda + (z-x) \cos \mu + (x-y) \cos \nu] dS.$$

因为

$$\cos \lambda = \frac{x-R}{R}, \quad \cos \mu = \frac{y}{R}, \quad \cos \nu = \frac{z}{R},$$

① 如果令  $x-r = r \cos t, y = r \sin t$ , 则参数  $t$  的几何意义很清楚; 把这二表示式代入球面的方程中, 我们可求得  $z$  与  $t$  的关系.



所以,把这三式代入后,经过简化即把所要求的积分化为下面的积分:

$$2 \iint_{(S)} (z - y) dS.$$

依据这曲面对于  $xz$  平面的对称性,积分  $\iint_{(S)} y dS$  为零. 再把剩下的积分化为第二型的积分,得到

$$2 \iint_{(S)} z dS = 2 \iint_{(S)} \frac{z}{\cos \nu} dx dy = 2R \iint_{(S)} dx dy = 2\pi R r^2.$$

14) 验证斯托克斯公式

$$\int_{(L)} (z^2 - x^2) dx + (x^2 - y^2) dy + (y^2 - z^2) dz = 2 \iint_{(S)} x dx dy + y dy dz + z dz dx,$$

其中取螺旋曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv \quad (a \leq u \leq b; 0 \leq v \leq 2\pi)$$

作为  $(S)$ , 它是由两个螺旋线及两个直线段作成的闭路  $(L)$  所范围的.

答 如果把曲面积分展布在所述曲面的上侧, 而依对应的方向取曲线积分, 则两积分都等于  $\pi c(b^2 - a^2)$ .

**641. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用** 设在开区域  $(T)$  内所给出的函数  $P, Q, R$  和它们的导数

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

都是连续的.

利用斯托克斯公式, 对于沿着任一个在  $(T)$  内而不穿过其自身的闭路  $(L)$  而取的积分

$$\int_{(L)} P dx + Q dy + R dz, \quad (25)$$

我们不难建立使得它为零的必要而且充分的条件.

可是, 为了要能够利用斯托克斯公式, 必须预先对于我们所讨论的三维区域  $(T)$  给以自然的限制. 就是说, 必须要求, 不管  $(L)$  是区域  $(T)$  内什么样的简单闭路, 总可以“画出”一个以  $(L)$  本身为边界而且也全部包含在  $(T)$  内的曲面  $(S)$ . 这个性质类似于平面区域单连通性的性质; 在具备这性质的情形下, 空间区域  $(T)$  也叫做 (“曲面”<sup>①</sup>) 单连通区域. 譬如说, 由两同心球面所范围的立体是在这意义下的单连通区域, 而环面体则不是.

设  $(T)$  就是一 (曲面) 单连通区域. 在边界  $(L)$  上, 如前所说, 画一曲面  $(S)$ , 我们按斯托克斯公式用曲面积分

$$\iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

<sup>①</sup>与后面 [652] 将要说的空间区域的另一种单连通性不同.



来代替曲线积分 (25). 要使这积分为零, 其充分条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (\text{E})$$

这些条件同时也是必要的, 这我们不难予以证实 (像第 601 目中一样), 只要考虑轮流落在各坐标平面的平行面上的平面图形 ( $S$ ).

读者可以看出, 我们在这里利用了斯托克斯公式, 完全像在 601 目中一样, 为了类似的目的利用了格林公式.

容易证明, 这些条件 (E) 是使得积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz \quad (26)$$

与连接区域 ( $T$ ) 内任意两点  $A$  与  $B$  的曲线 ( $AB$ ) 的形状无关的必要充分条件; 由假设, 当然, 这区域是 (曲面) 单连通区域.

**必要性** 如果假定积分 (26) 与路径无关, 那么 (如 561 目一样) 由此推出沿简单闭路 ( $L$ ), 积分 (25) 变为零, 而这意味着条件 (E) 成立.

**充分性** 由 (E) 推出沿简单闭路 ( $L$ ), 积分 (25) 为零. 如果曲线 ( $AIB$ ) 与 ( $AIIB$ ) 除  $A$  和  $B$  之外没有公共点, 那么 (如 561 目一样) 容易得出等式

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}, \quad (27)$$

如果不是这样, 所取的曲线相交, 那么这里的问题比平面情形更简单: 在连通的空间区域 ( $T$ ) 总可以取这样的第三条曲线 ( $AIIB$ ), 使得它与前述两条曲线不相交, 于是

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}, \quad \int_{(AIIB)} = \int_{(AIIB)},$$

由此得出 (27) 式.

从这讨论当中可以联系到这样一个问题, 即微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad (28)$$

是否为某一个三变量的单值函数的全微分. 为了要它是一个全微分, 条件 (E) 的必要性可以直接验证, 参看第 564 目. 可是在那里条件 (E) 的充分性只是就基本区域 ( $T$ ) 是长方体的情形来建立的, 现在不难推到 (曲面) 单连通区域的一般情况. 于是原函数立可写成曲线积分的形式

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

它——当条件 (E) 成立时——与路径无关. 因此, 对于所述类型的区域 ( $T$ ), 条件 (E) 是使表示式 (28) 为一全微分的必要且充分的条件.



## 第十八章 三重积分及多重积分

---

### §1. 三重积分及其计算

**642. 立体质量计算的问题** 设有充满质量的某一立体  $(V)$ , 并已知在它的每点  $M(x, y, z)$  处, 这种质量的密度分布为

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z).$$

要求确定立体的全部质量  $m$ .

为了解答这一问题, 将立体  $(V)$  分成许多小块:

$$(V_1), (V_2), \dots, (V_n),$$

并在每一小块的范围内取一点

$$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i).$$

近似地认为在小块  $(V_i)$  的范围内密度是常数且恰等于所选取的点处的密度  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 则这一小块的质量  $m_i$  可近似地表作:

$$m_i \doteq \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i,$$

而整个立体的质量将为

$$m \doteq \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i.$$

如所有小块的直径趋近于零, 则变成极限时这一近似等式就成为准确的了, 故

$$m = \lim \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i, \quad (1)$$



而问题得以解决.

我们由此看到, 解决这问题也引导到要考察一特殊和的极限, 这种和是我们在全书中屡屡遇见的各种积分和的类型.

这种类似类型的极限在力学及物理学中必会常常考虑到, 它们称为三重积分. 用一种为它们而取的记法, 以上结果可写作:

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dV. \quad (2)$$

本章主要讨论三重积分的理论及其重要应用. 因为对二重积分所建立的一系列命题与它们的证明都可同时移到三重积分的情形上来, 故我们通常将这些命题表述出来就算了, 而请读者再复述一下以前的证明.

**643. 三重积分及其存在的条件** 在建立新的积分构造 —— 三重积分 —— 的一般定义时, 如同平面图形面积概念是二重积分定义的基础一样, 立体体积概念起着主要的作用.

在第一卷中我们已熟识了体积概念且不止一次遇见过它. 对于一已给立体, 其体积存在的条件在于范围它的曲面有体积 0 [341]. 我们将只考察这种曲面, 所以在一切所论的情形下体积的存在就由此得以保证. 特例, 如我们所知, 分片光滑的曲面就属于所述曲面类中.

现设在某一空间区域  $(V)^{104)}$  中已给一函数  $f(x, y, z)$ . 用一曲面网将这一区域分成有限个部分  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$  分别有体积  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . 在第  $i$  个元素  $(V_i)$  的范围内任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 将这一点处的函数值  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  乘上体积  $V_i$  并作积分和

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

当所有区域  $(V_i)$  的最大直径趋于零时, 这一和的极限  $I$  就称为函数  $f(x, y, z)$  在区域  $(V)$  中的三重积分, 用记号表为

$$I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

这样的有限极限仅对有界函数存在; 对于这种函数, 除积分和  $\sigma$  外, 还可引进达布和:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i V_i,$$

其中

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}.$$

<sup>104)</sup> 在不作特别的预先声明时, 都假定区域  $(V)$  是有界的且是闭的, 而且也是连通的.



用普通的方法可证明积分存在的必要充分条件为

$$\lim(S - s) = 0$$

或

$$\lim \sum_{i=1}^n \omega_i V_i = 0,$$

其中  $\omega_i = M_i - m_i$  是函数  $f$  在区域  $(V_i)$  上的振动. (注意, 当积分存在时, 两个和  $s, S$  均以它为极限.)

由此立刻得出, 任一连续函数  $f$  为可积的.

可以将这些条件略为放宽些, 即: 任一有界函数, 它的所有不连续点在有限个体积为 0 的曲面上时, 是可积的.

这一断语的证明 [参照 590] 建立于下一引理上:

如一区域  $(V)$ , 含有体积为 0 的曲面  $(S)$ , 被分为许多元素区域, 则那些与曲面  $(S)$  相遇的部分其体积和与所有部分区域的直径同时趋近于零.<sup>105)</sup>

**644. 可积函数与三重积分的性质** 只需将这些性质逐条写出来就够了 [它们可与在 592 中所述的相像地证明].

1° 三重积分的存在及大小与函数在有限个体积为 0 的曲面上所取的值无关.

2° 如  $(V) = (V') + (V'')$ <sup>106)</sup>, 则

$$\iiint_{(V)} f dV = \iiint_{(V')} f dV + \iiint_{(V'')} f dV,$$

且由左端积分的存在就能推出右端两积分的存在, 反过来也是如此.

3° 如  $k =$  常数, 则

$$\iiint_{(V)} k f dV = k \iiint_{(V)} f dV,$$

且由右端积分的存在就得出左端积分的存在.

4° 如在区域  $(V)$  中函数  $f$  及  $g$  皆可积, 则函数  $f \pm g$  也可积分, 且

$$\iiint_{(V)} (f \pm g) dV = \iiint_{(V)} f dV \pm \iiint_{(V)} g dV.$$

5° 如在区域  $(V)$  中可积函数  $f$  及  $g$  适合不等式  $f \leq g$ , 则

$$\iiint_{(V)} f dV \leq \iiint_{(V)} g dV.$$

<sup>105)</sup> 换句话说, 与这些直径中最大者同时趋近于零.

<sup>106)</sup> 我们记得, 记号  $(V) = (V') + (V'')$  意味着, 区域  $(V')$  与  $(V'')$  没有公共内点, 它们连同各自的边界合并在一起给出区域  $(V)$ .



6° 在函数  $f$  可积时, 函数  $|f|$  也可积, 且有不等式

$$\left| \iiint_{(V)} f dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f| dV.$$

7° 如在  $(V)$  中可积函数  $f$  满足不等式

$$m \leq f \leq M,$$

则

$$mV \leq \iiint_{(V)} f dV \leq MV.$$

换句话说, 中值定理成立:

$$\iiint_{(V)} f dV = \mu V \quad (m \leq \mu \leq M)$$

在函数  $f$  连续时这一公式可写成

$$\iiint_{(V)} f dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})V \quad (3)$$

的形状, 其中  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是区域  $(V)$  的某一点.<sup>107)</sup>

又, 很容易将第 593 目的内容推广到三维的情形: 和那里一样, 可建立 (三维的) **区域函数** 的概念, 特别, **可加函数** 的概念. 对变动区域  $(v)$  的积分就是这种函数的一重要例子 (参看 2°):

$$\Phi((v)) = \iiint_{(v)} f dv. \quad (4)$$

与以前相似可引进函数  $\Phi((v))$  在一已知点  $M$  处对区域的导数概念, 那就是当包含点  $M$  的区域  $(v)$  缩到这点时我们这样称呼极限

$$\lim_{(v) \rightarrow M} \frac{\Phi((v))}{v}.$$

8° 如积分号下函数连续, 则积分 (4) 在点  $M(x, y, z)$  处对区域的导数恰等于积分号下函数在这一点处的值, 即  $f(M) = f(x, y, z)$ .

因此, 在所述假定下积分 (4) 在某种意义下是函数  $f$  的“原函数”, 且与平面情形相似, 可证明, 是唯一的可加原函数.

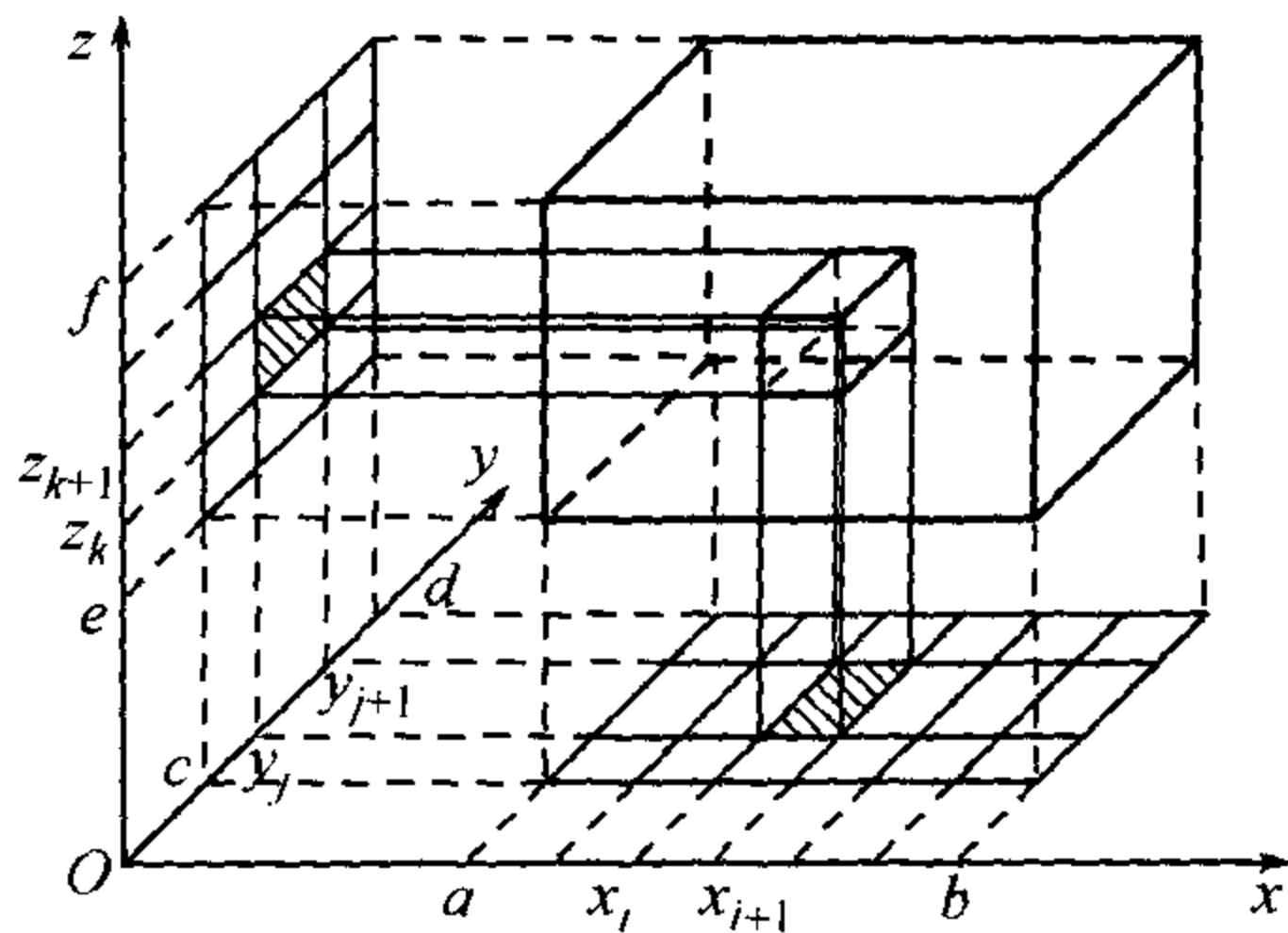


图 98

<sup>107)</sup> 参看 643 目中的脚注 104).



**645. 展布在平行六面体上的三重积分的计算** 我们以下一情形开始来叙述三重积分计算的问题, 即当在其中函数  $f(x, y, z)$  有定义的立体是一长方体  $(T) = [a, b; c, d; e, f]$  (图 98), 它在  $yz$  平面上射影于矩形  $(R) = [c, d; e, f]$ .

**定理** 如对函数  $f(x, y, z)$  三重积分

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT \quad (5)$$

存在, 且若对  $[a, b]$  中每一固定的  $x$ , 二重积分

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (6)$$

存在, 则逐次积分

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (7)$$

也存在且适合等式

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR. \quad (8)$$

**证明** 与在第 594 目中所作者相似. 用点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b,$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_m = d,$$

$$z_0 = e < z_1 < \cdots < z_k < \cdots < z_l = f$$

将区间  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  及  $[e, f]$  各分成许多部分, 这样就将长方体  $(T)$  分成许多元素长方体

$$(T_{i,j,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n-1; j = 0, 1, \cdots, m-1; k = 0, 1, \cdots, l-1),$$

且同时矩形  $(R)$  也分成许多元素矩形

$$(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

(其中  $j$  及  $k$  取与刚才所取相同的值).

令

$$m_{i,j,k} = \inf_{(T_{i,j,k})} \{f\}, \quad M_{i,j,k} = \sup_{(T_{i,j,k})} \{f\},$$



由 644,7°, 对  $[x_i, x_{i+1}]$  中一切的值  $x$  我们有

$$m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq \iint_{(R_{j,k})} f(x, y, z) dy dz \leq M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k.$$

在这一区间中固定一任意值  $x = \xi_i$ , 将对所有的值  $j$  及  $k$  的类似不等式相加, 我们得不等式

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k &\leq I(\xi_i) = \iint_{(R)} f(\xi_i, y, z) dy dz \\ &\leq \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k. \end{aligned}$$

最后, 将这些不等式逐端乘上  $\Delta x_i$ , 这次并对记号  $i$  相加:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k &\leq \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i \\ &\leq \sum_i \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \end{aligned}$$

两端是积分 (5) 的达布和, 当所有的差  $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$  趋近于零时, 趋近于这积分为极限. 这就意味着, 在中间的积分和也趋近于同一极限. 这就同时既证明了积分 (7) 的存在, 又证明了等式 (8).

如再假定对  $[a, b]$  的任何值  $x$  及  $[c, d]$  的任何值  $y$ , 单积分

$$\int_e^f f(x, y, z) dz \quad (9)$$

存在, 则等式 (8) 中的二重积分可用逐次积分来替代 [594], 而最后得:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz. \quad (10)$$

因此, 三重积分的计算就化为逐一计算三个单积分. 当然, 公式 (10) 中变数  $x, y, z$  的地位可以任意颠倒.

读者不妨自己论证: 由三重积分 (5) 及单积分 (9) 的存在可推得公式:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \iint_{(Q)} dx dy \int_e^f f(x, y, z) dz, \quad (11)$$

其中  $(Q) = [a, b; c, d]$ . 这里变量的次序也可以颠倒.

特别, 对连续函数  $f(x, y, z)$  的情形, 显然所有的公式 (8), (11), (10) 及将变量颠倒得出的与它们相似的公式皆成立.

**646. 在任何区域上的三重积分的计算** 与第 596 目中一样, 展布在任何形状立体  $(V)$  上的积分其一般情形可很容易变到刚才考察的情形. 即若函数  $f(x, y, z)$



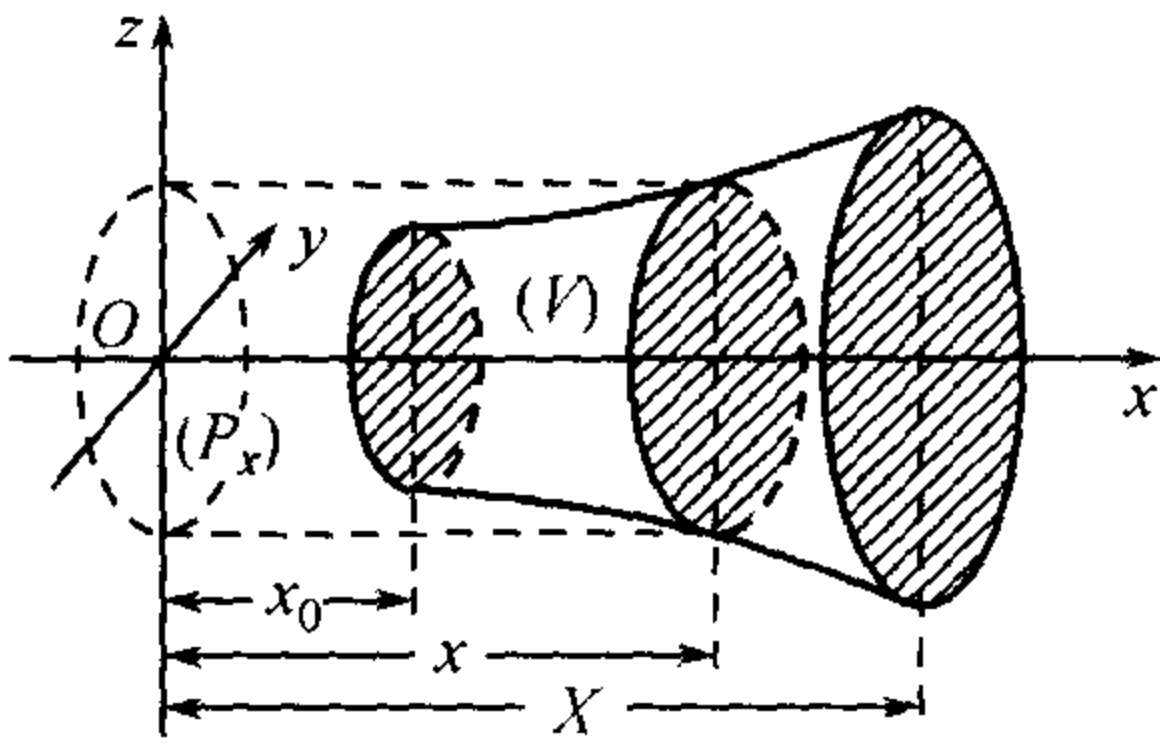


图 99

定义于区域  $(V)$  中, 则只要引进一函数  $f^*(x, y, z)$  以代替它, 这一函数定义于一容纳  $(V)$  的长方体  $(T)$  中, 令

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{在 } (V) \text{ 中,} \\ 0, & \text{在 } (V) \text{ 外.} \end{cases}$$

用这种方法就可得到全部以后所引导的公式.

我们来讨论一些最有趣味的情形.

设立体  $(V)$  限制在平面  $x = x_0$  及  $x = X$  间, 且用每一个对应于一固定值  $x (x_0 \leq x \leq X)$  的与它平行的平面截于某一有面积的图形; 以  $(P_x)$  表它在  $yz$  平面上的射影 (图 99). 则

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \iint_{(P_x)} f(x, y, z) dy dz, \quad (8^*)$$

当然是在三重积分及二重积分皆存在的假定之下得出的. 这与公式 (8) 相似.

再设立体  $(V)$  是一“柱形长条”, 其上下分别为曲面

$$z = z_0(x, y) \quad \text{及} \quad z = Z(x, y)$$

所围住, 这两曲面在  $xy$  平面上射影于某一被面积为 0 的曲线  $(K)$  所范围的一图形  $(D)$ ; 立体  $(V)$  的侧面被一柱面所围住, 这柱面的母线平行于  $z$  轴并以曲线  $(K)$  为准线 (图 96). 则与公式 (11) 相似, 有

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz; \quad (11^*)$$

此时假定了三重积分及右端 —— 里面的 —— 单积分存在.

如区域  $(D)$  是由两曲线 (图 100)

$$y = y_0(x) \quad \text{及} \quad y = Y(x) \quad (x_0 \leq x \leq X)$$

以及两直线  $x = x_0, x = X$  所围成的曲边梯形, 则立体  $(V)$  适合于上所考察的两种样子. 在公式  $(8^*)$  内或在公式  $(11^*)$  内将二重积分换作逐次积分, 得

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (10^*)$$

这一公式推广了公式 (10).

与在前节中讨论过的最简单情形一样, 函数  $f(x, y, z)$  的连续就保证了所有公式  $(8^*), (11^*), (10^*)$  及由它们将变量  $x, y, z$  颠倒所得的与它们相类似公式皆可应用.



**647. 反常三重积分** 常积分区域延伸到无穷远或积分号下的函数在一些奇点、线或面附近不为有界时, 从常义积分出发, 借一个附加的极限过程之助可得到反常三重积分. 多维情况与线性情况相比较的特征已经在研究反常二重积分时讲过了, 而现在不要再添加什么.

反常三重积分同样必须是绝对收敛的. 这一情况就将这种积分的存在及计算的全部问题化为正的(非负的)积分号下函数的情形.

在这一假定下, 与二重积分情形时一样, 也可确立各种样子的三重积分与逐次积分间的联系. 我们不预备讨论这一点了.

**648. 例** 1) 计算积分

$$I = \iiint \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

它展布在由平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  所围成的四面体 ( $V$ ) 上 (图 101).

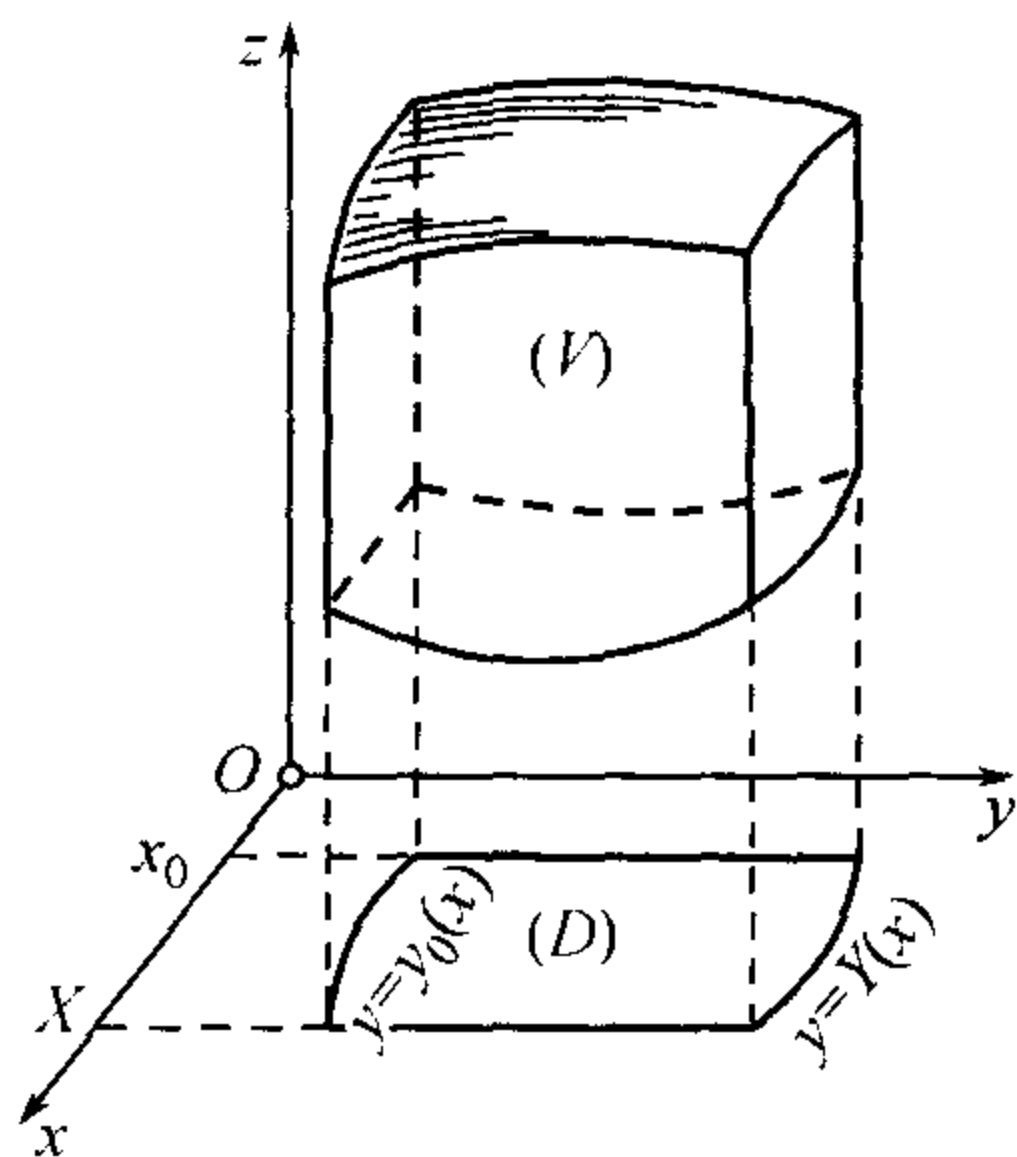


图 100

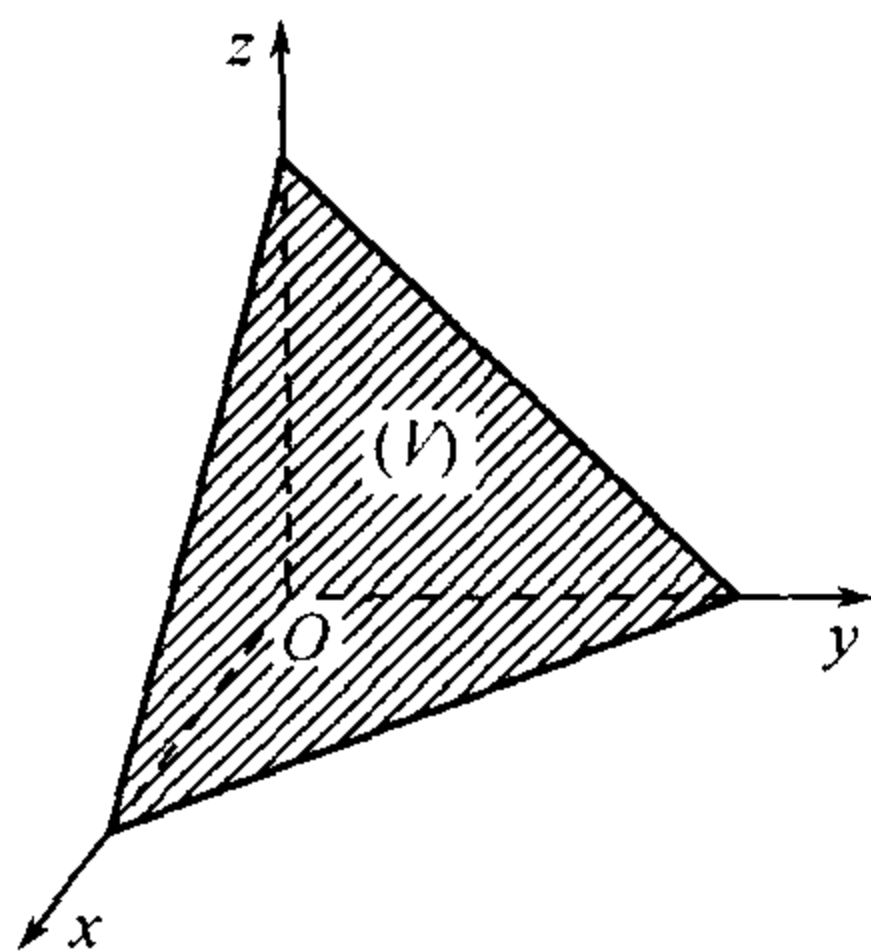


图 101

**解** 立体在  $xy$  平面上的射影为由直线  $x=0, y=0$  及  $x+y=1$  所组成的三角形, 显然,  $x$  变化的界限是数 0 与 1, 而当  $x$  固定于这两个界之间时, 变量  $y$  自 0 变到  $1-x$ . 如  $x, y$  都固定, 则点可沿垂线自平面  $z=0$  移到平面  $x+y+z=1$ ; 因此,  $z$  的变动范围为 0 及  $1-x-y$ .

由公式 (10\*), 我们有

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

从里面开始, 逐一计算出各积分:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right], \\ \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right), \end{aligned}$$



最后,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

## 2) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} z dx dy dz,$$

其中  $(V)$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的上面一半.

解 立体在  $xy$  平面上的射影是椭圆盘  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ . 故  $x$  的变动范围是数  $-a$  及  $+a$ , 而当  $x$  固定时, 变量  $y$  自  $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$  变到  $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ . 立体在下面为  $xy$  平面所限住, 而上面为椭球面所限住, 故当  $x$  及  $y$  都固定时  $z$  的变动范围是

$$0 \quad \text{及} \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

由同一公式 (10\*),

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z dz \\ &= \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &= c^2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy^{\textcircled{1}} = \frac{2bc^2}{3a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4bc^2}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{4} abc^2. \end{aligned}$$

也可用另一法来进行计算. 即, 由公式 (8\*), 但在它里面将变数  $x$  及  $z$  的地位交换, 我们将有

$$I = \int_0^c dz \iint_{(R_z)} z dx dy = \int_0^c z dz \iint_{(R_z)} dx dy,$$

其中  $(R_z)$  是椭球体被平面  $Z = z$  所交的截面在  $xy$  平面上的射影 (射影时不发生变形). 但二重积分

$$\iint_{(R_z)} dx dy$$

不是别的, 恰为这一射影的面积  $R_z$ . 因为射影的边界在  $xy$  平面上有方程

$$\frac{x^2}{a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)} = 1,$$

亦即是一有半轴

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

<sup>①</sup>由于积分号下函数为偶函数.



的椭圆, 所以, 如我们已经知道的,

$$R_z = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

因此,

$$I = \pi ab \int_0^c z \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

计算是简化得多了, 不过只是因为利用了为我们所熟知的椭圆面积的大小.

3) 计算积分

$$L = \iiint_{(T)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz,$$

其中  $(T)$  是整个椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

解 应用在前题解答中所述的第二方法, 得

$$L = \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{(P_x)} dy dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{(Q_y)} dz dx + \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{(R_z)} dx dy.$$

于是,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx + \frac{\pi ca}{b^2} \int_{-b}^b y^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &\quad + \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c z^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{4}{5} \cdot \pi abc. \end{aligned}$$

4) 计算积分

$$I = \iiint_{(A)} z dx dy dz,$$

其中立体  $(A)$  是由锥面  $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$  及平面  $z = h$  所围成的 (图 102).

解 (a) 锥体在  $xy$  平面上的射影  $(Q)$  为圆盘  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . 由公式 (11\*)

$$I = \iint_{(Q)} dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz = \frac{1}{2} \iint_{(Q)} \left[ h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] dx dy,$$

或变到极坐标时,

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(6) 用另一解法, 可写

$$I = \int_0^h z dz \iint_{(D)} dx dy,$$

其中  $(D)$  是锥体被一平面所交的截面在  $xy$  平面上的射影, 这一平面平行于  $xy$  平面且在它上面高  $z$  处. 这一射影是一半径为  $\frac{Rz}{h}$  的圆, 所以表明它面积的二重积分等于  $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$ . 于是

$$I = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

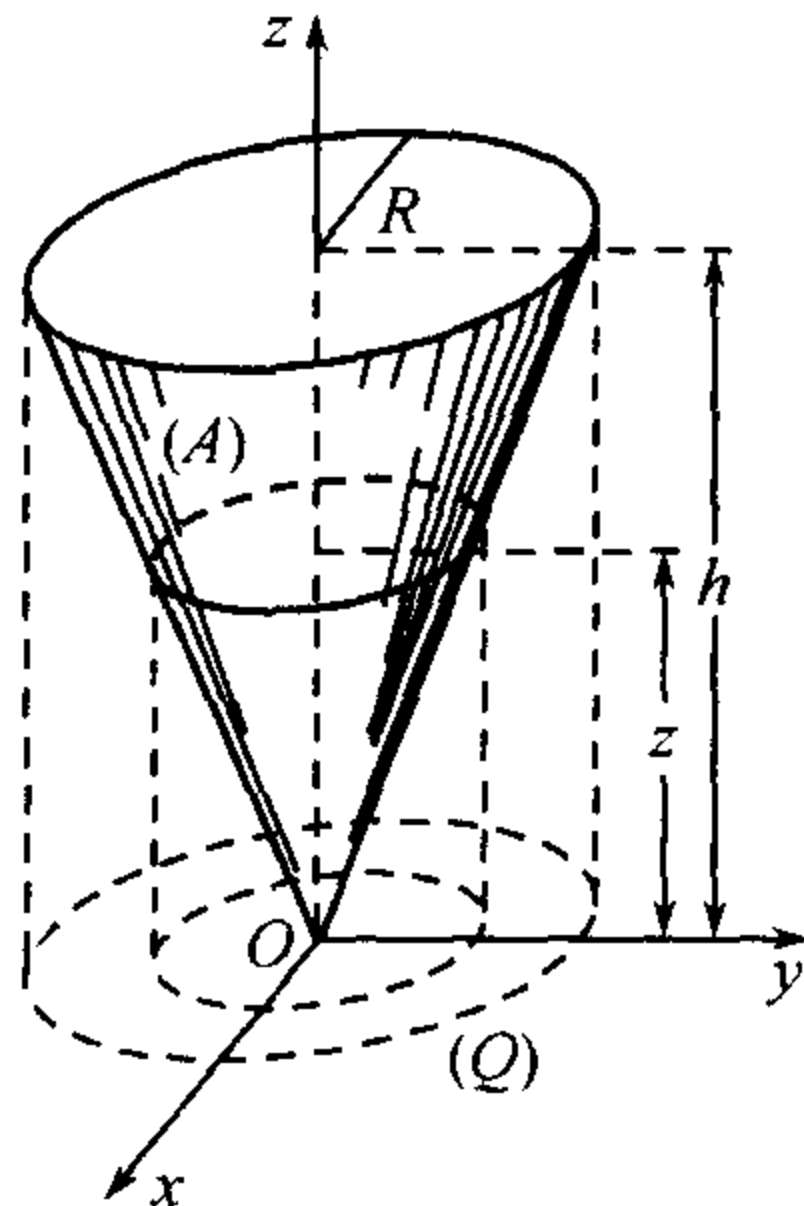


图 102



## 5) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} x dx dy dz,$$

其中  $(V)$  是由平面  $x=0, y=0, z=0, y=h$  及  $x+z=a$  所围成的三角柱.

提示 利用公式 (8\*),  $(P_x)$  是边为  $h$  及  $a-x$  的矩形.

答  $K = \frac{a^3 h}{6}.$

## 6) 求积分

$$J = \iiint_{(T)} z^2 dx dy dz$$

的值, 其中  $(T)$  是两个球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{及} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$$

的公共部分 (图 103).

解 它们表面的交线位于平面  $z = \frac{R}{2}$  上. 立体  $(T)$  被平行于  $xy$  平面的面所交的截面为圆. 在这里变成逐次积分——自二重积分变到单积分, 得

$$J = \pi \int_0^{\frac{1}{2}R} z^2 (2Rz - z^2) dz + \pi \int_{\frac{1}{2}R}^R z^2 (R^2 - z^2) dz = \frac{59}{480} \pi R^5.$$

## 7) 计算积分

$$S = \iiint_{(V)} (x+y+z)^2 dx dy dz,$$

其中  $(V)$  是抛物体  $x^2 + y^2 \leq 2az$  及球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$  的公共部分.

解 首先, 将积分号下的式子展开, 可以看到,  $2xy, 2xz, 2yz$  诸项的积分由对称性都消失了.<sup>①</sup> 因此,

$$S = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

由公式 (8\*) (将  $x$  及  $z$  的位置交换)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2az} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \\ &\quad + \int_a^{a\sqrt{3}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 3a^2 - z^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy. \end{aligned}$$

变成极坐标时这些二重积分便容易计算出来:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\sqrt{2az}} (r^2 + z^2) r dr &= 2\pi (a^2 z^2 + az^3), \\ 2\pi \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (r^2 + z^2) r dr &= \frac{1}{2} \pi (9a^4 - z^4). \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 这 (在引用逐次积分后) 可只用单积分及二重积分的性质来论证.

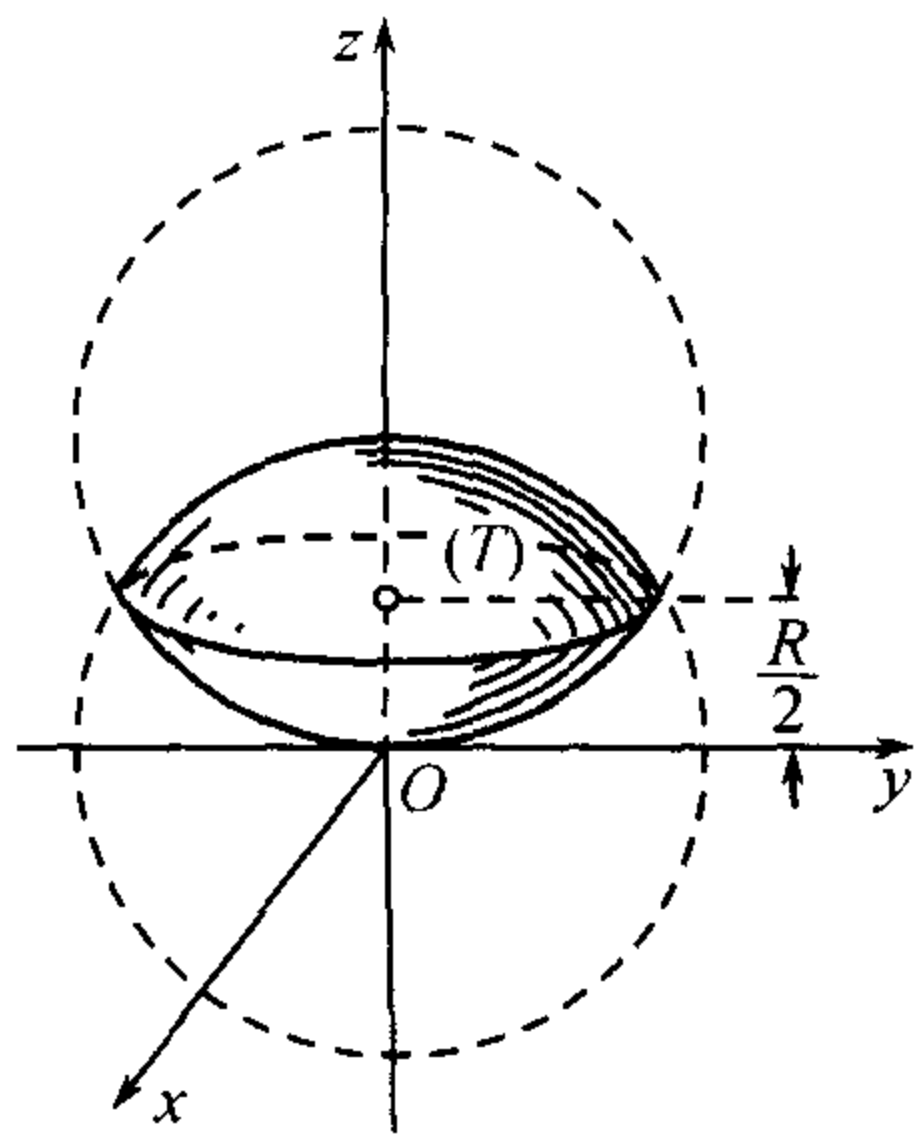


图 103



于是,

$$S = 2\pi \int_0^a (a^2 z^2 + az^3) dz + \frac{1}{2}\pi \int_a^{a\sqrt{3}} (9a^4 - z^4) dz = \frac{\pi a^5}{5} \left( 18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right).$$

8) 计算积分

$$I = \iiint_{(T)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中  $(T)$  是锥体  $y^2 + z^2 \leq x^2$  及球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  的公共部分 ( $x \geq 0$ ).

答  $I = \frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2}).$

9) 设已知一锥面  $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ ; 它与平面  $z = c$  相交于一椭圆, 这椭圆在  $xy$  平面上的射影其方程为  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ . 考察在第一卦限内的一立体  $(V)$ , 它是由上述锥面、平面  $z = c$  以及二坐标面  $x = 0$  与  $y = 0$  所围成的 (图 104).

试计算展布在这一立体上的积分

$$A = \iiint_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz.$$

(a) 先对  $z$  积分, 再对  $y$ , 最后对  $x$ , 我们得变化的界限如下:

对  $x: 0$  及  $a$ ; 对  $y: 0$  及  $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$

对  $z: c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$  及  $c.$

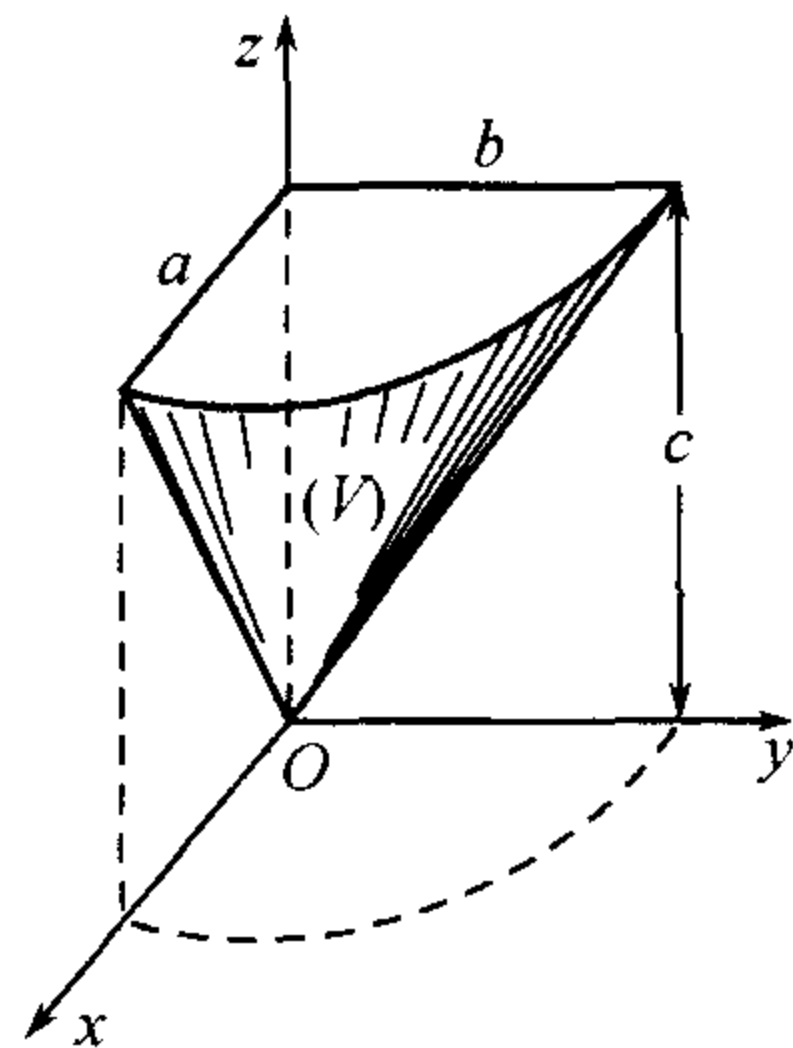


图 104

则

$$A = \int_0^a x dx \int_0^{b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} y dy \int_{c\sqrt{(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2}}^c \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{c\sqrt{(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2}}^c \frac{dz}{\sqrt{z}} &= 2\sqrt{c} \left[ 1 - \sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right], \\ 2\sqrt{c} \int_0^{b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} \left[ 1 - \sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right] y dy \\ &= \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2} (a^2 - x^2) - \frac{4}{5} b^2\sqrt{c} \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \right], \\ A &= \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}. \end{aligned}$$

(6) 如以相反的次序积分, 计算略为简单一些. 我们的立体在  $yz$  平面上射影于由直线  $y = 0, z = c$  及  $y = \frac{b}{c}z$  所围成的三角形. 所以变化的界限将为:

对  $z: 0$  及  $c$ , 对  $y: 0$  及  $\frac{b}{c}z,$

对  $x: 0$  及  $a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2},$



而所求积分可重写为:

$$A = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{\frac{b}{c}z} y dy \int_0^a \sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} x dx.$$

这时,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} x dx &= \frac{a^2}{2} \left[ \left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right], \\ \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{b}{c}z} \left[ \left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] y dy &= \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c^4} z^4 \\ A &= \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^c z^{\frac{7}{2}} dz = \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}. \end{aligned}$$

10) 试求积分

$$(a) I_1 = \iiint_{(V)} z^m dx dy dz, \quad (b) I_2 = \iiint_{(V)} x^m dx dy dz,$$

其中立体  $(V)$  与前题同 ( $m$  是自然数).

提示 将积分安置成与 9)(6) 中相同的次序. 在第二个情形下, 积分

$$\int_0^{\frac{b}{c}z} \left[ \left(\frac{bz}{c}\right)^2 - y^2 \right]^{\frac{m+1}{2}} dy$$

可化成熟知的积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} \theta d\theta$  [300, 1)].

答 (a)  $I_1 = \frac{\pi abc^{m+1}}{4(m+3)}.$

$$(b) I_2 = \begin{cases} \frac{a^{m+1}bc}{m+3} \frac{(m-1)!!}{(m+2)!!} \frac{\pi}{2} & (\text{当 } m \text{ 为偶数时}), \\ \frac{a^{m+1}bc}{m+3} \frac{(m-1)!!}{(m+2)!!} & (\text{当 } m \text{ 为奇数时}). \end{cases}$$

11) 计算积分

$$H = \iiint_{\substack{x,y,z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2}} \frac{xyz dx dy dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > 0).$$

解 我们有

$$\begin{aligned} H &= \int_0^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{z dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}}; \\ \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \cdots dz &= \frac{1}{\gamma^2} [\sqrt{\gamma^2 R^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + (\beta^2 - \gamma^2)y^2} - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}], \\ \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [\cdots] y dy &= \frac{1}{3\beta^2(\beta^2 - \gamma^2)} [\beta^2 R^2 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2]^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{3\gamma^2(\beta^2 - \gamma^2)} [\gamma^2 R^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2]^{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha^3}{3\beta^2\gamma^2} x^3, \end{aligned}$$



最后, 经一些初等 (虽然是冗长的) 变换后,

$$H = \frac{R^5}{15} \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}.$$

12) 求证: 计算 (a) 由曲面  $z = z(x, y)$  所限制的柱形长条下体积的常用公式

$$V = \iint_{(P)} z dx dy$$

及 (5) 已知断面立体体积的常用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx$$

都是基本公式

$$V = \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx dy dz$$

的推论.

提示 应用公式 (11\*) 及 (8\*) 到后一积分.<sup>①</sup>

**649. 力学应用** 自然, 在空间某一立体  $(V)$  的范围内, 凡一切与质量分布有关的几何量及物理量在原则上这里都可表作取在立体  $(V)$  上的三重积分. 此处同样最简单是利用“无穷小元素相加”的原理 [参照 348~356 及 598].

以  $\rho$  表质量分布在立体  $(V)$  的任意一点的密度, 它是点的坐标的函数, 我们将永远假定这一函数连续. 将质量的元素  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$  相加, 对全部质量的大小我们将有

$$m = \iiint_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho dx dy dz \quad (12)$$

[参照 642].

从元素静矩

$$dM_{yz} = x dm = x \rho dV, \quad dM_{zx} = y dm = y \rho dV, \quad dM_{xy} = z dm = z \rho dV$$

出发, 求得静矩本身:

$$M_{yz} = \iiint_{(V)} x \rho dV, \quad M_{zx} = \iiint_{(V)} y \rho dV, \quad M_{xy} = \iiint_{(V)} z \rho dV, \quad (13)$$

而由此就得出重心的坐标:

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x \rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y \rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z \rho dV}{m}. \quad (14)$$

在均匀物体时,  $\rho =$  常数, 更简地得:

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z dV}{V}.$$

<sup>①</sup>关于其它计算三重积分的例题可从第 676 目中拿过来, 那里考察的是  $n$  重积分, 只要取  $n = 3$ .



对于坐标轴的惯矩公式

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \rho dV, & I_y &= \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) \rho dV, \\ I_z &= \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV \end{aligned} \quad (15)$$

或对坐标面的惯矩公式

$$I_{zy} = \iiint_{(V)} x^2 \rho dV, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} y^2 \rho dV, \quad I_{xy} = \iiint_{(V)} z^2 \rho dV \quad (16)$$

也都自明.

最后, 设充满于立体  $(V)$  的质量按牛顿定律吸引一 (质量为 1 的) 点  $A(\xi, \eta, \zeta)$ . 来自质量元素  $dm = \rho dV$  的吸引力在坐标轴上的射影为<sup>①</sup>

$$dF_x = \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad dF_y = \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV, \quad dF_z = \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV.$$

其中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

是点  $A$  到元素 (或到我们认为它的质量所集中的点处) 的距离. 为要得总吸引力  $\vec{F}$  在坐标轴上的射影, 相加得:

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV, \quad F_z = \iiint_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV. \quad (17)$$

同样亦可确定我们的立体在这一点上的位势:

$$W = \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r}. \quad (18)$$

如点  $A$  在立体以外, 则所有这些积分是常义的. 根据与在单积分时我们所利用过的相似的理由 [507], 此时可以将积分  $W$  对任一变量  $\xi, \eta, \zeta$  在积分记号下微分. 结果我们得到

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z. \quad (19)$$

而当点  $A$  本身属于立体  $(V)$  时, 在这点处  $r = 0$ , 而在 (17) 及 (18) 中积分号下函数在它附近不再有界. 以后 [663] 将证明: 这些积分, 作为反常积分, 都收敛, 且对于它们基本关系式 (19) 仍适合.

**650. 例** 1) 在 598 中对均匀柱形长条 (当  $\rho = 1$  时) 的静矩我们有公式:

$$M_{yz} = \iint_{(P)} z x dx dy, \quad M_{zx} = \iint_{(P)} z y dx dy, \quad M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dx dy.$$

试由前目的一般公式 (13) 推出它们来.

<sup>①</sup>见第 224 页脚注②.



例如, 我们有

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} z dV = \iint_{(P)} dx dy \int_0^{z(x,y)} z dz;$$

但

$$\int_0^{z(x,y)} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=z(x,y)},$$

这就导致所需结果.

在 598 中不是计算最后一积分, 而是引用了力学领域内 (关于元素细长条静矩) 的想法.

2) 同样, 假定立体(V)的平行于某一平面的断面面积已知为自这一平面到断面的距离  $x$  的函数:  $P(x)$  在 356,1) 中已求得静矩的公式

$$M = \int_a^b x P(x) dx.$$

它也可作为一般公式的推论而得出.

即, 由公式 (8\*),

$$M = \iiint_{(V)} x dV = \int_a^b x dx \iint_{(P_x)} dy dz;$$

但里面的积分恰恰表示事先已知的断面面积.

**附注** 这些例子引起我们注意到这样一事实: 与质量的空间分布有关的某些物理量, 在一些简单假定下, 确乎可表作二重积分甚至单积分. 这种积分多重性降低的错觉, 如读者所见, 是这样发生的: 当表示一三重积分为单积分的二重积分之形或二重积分的单积分之形时, 里面的积分, 在简单情况下已经由几何或力学观察可知道而不必计算.

3) 利用第 648 目问题 2), 4), 10) 以决定那里所考察的立体重心的位置.

4) 求由抛物面  $x^2 + y^2 = 2az$  及球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  所围成的立体的重心.

**解** 最简便的是按 2) 中所提到的公式计算对  $xy$  平面的静矩, 只需将  $x$  换作  $z$ . 断面面积  $R(z)$  在  $z$  自 0 到  $a$  间等于  $\pi \cdot 2az$ , 在  $z$  自  $a$  到  $a\sqrt{3}$  间等于  $\pi(3a^2 - z^2)$ . 因此

$$M_{xy} = 2\pi a \int_0^a z^2 dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{5}{3} \pi a^4.$$

因为立体的体积已知:  $V = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5) [343, 6)]$ , 故  $\zeta = \frac{5}{83} (6\sqrt{3} + 5)a$ . 由对称性的观察:  $\xi = \eta = 0$ ,

5) 求球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$$

的质量并确定重心的位置, 如球中各点的密度与坐标原点到这些点的距离成反比:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

**解** 由第 649 目公式 (12), 质量

$$m = k \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



与 (8\*) 相仿将三重积分变换, 可将它表作二重积分的单积分之形:

$$m = k \int_0^{2a} dz \iint_{(R_z)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

其中  $(R_z)$  是半径为  $\sqrt{2az - z^2}$  的圆. 如变到极坐标, 不难将里面的积分计算出来; 它等于

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi(\sqrt{2az} - z).$$

于是

$$m = \frac{4}{3}\pi ka^2$$

同样亦可算出静矩

$$M_{xy} = k \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az} \frac{z dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{16}{15}\pi ka^3,$$

因此,  $\zeta = \frac{4}{5}a$ , 重心的其余二坐标显然为 0.

6) 同一问题, 但在质量另一分布的规则下:

$$\rho = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2},$$

可导得结果:

$$m = 2\pi ka, \quad M_{xy} = \pi ka^2, \quad \zeta = \frac{a}{2}.$$

在以下各题中质量分布的密度  $\rho$  假定为常数.

7) 求圆柱全部质量对圆柱底面中心的吸引力 (图 105).

记号如图, 我们有 [参看 649, (17)]

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{(V)} \frac{\rho z dV}{r^3} = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} dxdy \int_0^h \frac{\rho z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \rho \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) dxdy = 2\pi\rho(R + h - \sqrt{R^2 + h^2}); \end{aligned}$$

吸引力的其余二分力等于 0, 所以吸引力朝着向上的铅垂线.

8) 求锥体对它的顶点的吸引力 (图 106).

答  $F = F_z = \frac{2\pi h\rho}{l}(l - h)$ .

9) 求任意一点 A (质量为 1) 所受一球的吸引力 (图 107).

解 以  $R$  表球的半径, 而以  $a$  表距离  $OA$ . 坐标轴这样放着, 使  $z$  轴的正向通过点 A. 则

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{(V)} \frac{\rho(z - a)}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} dxdydz \\ &= \rho \int_{-R}^R (z - a) dz \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2} \frac{dxdy}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

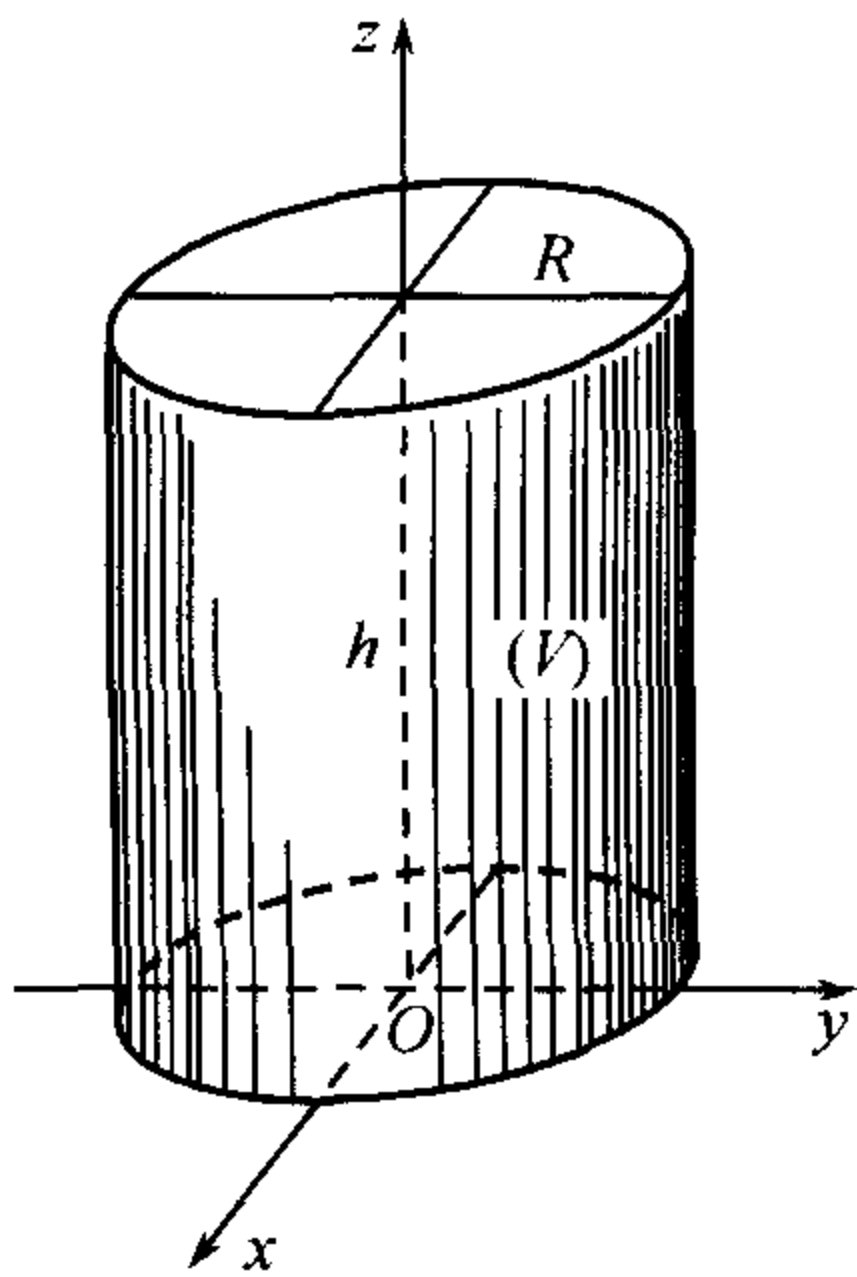


图 105



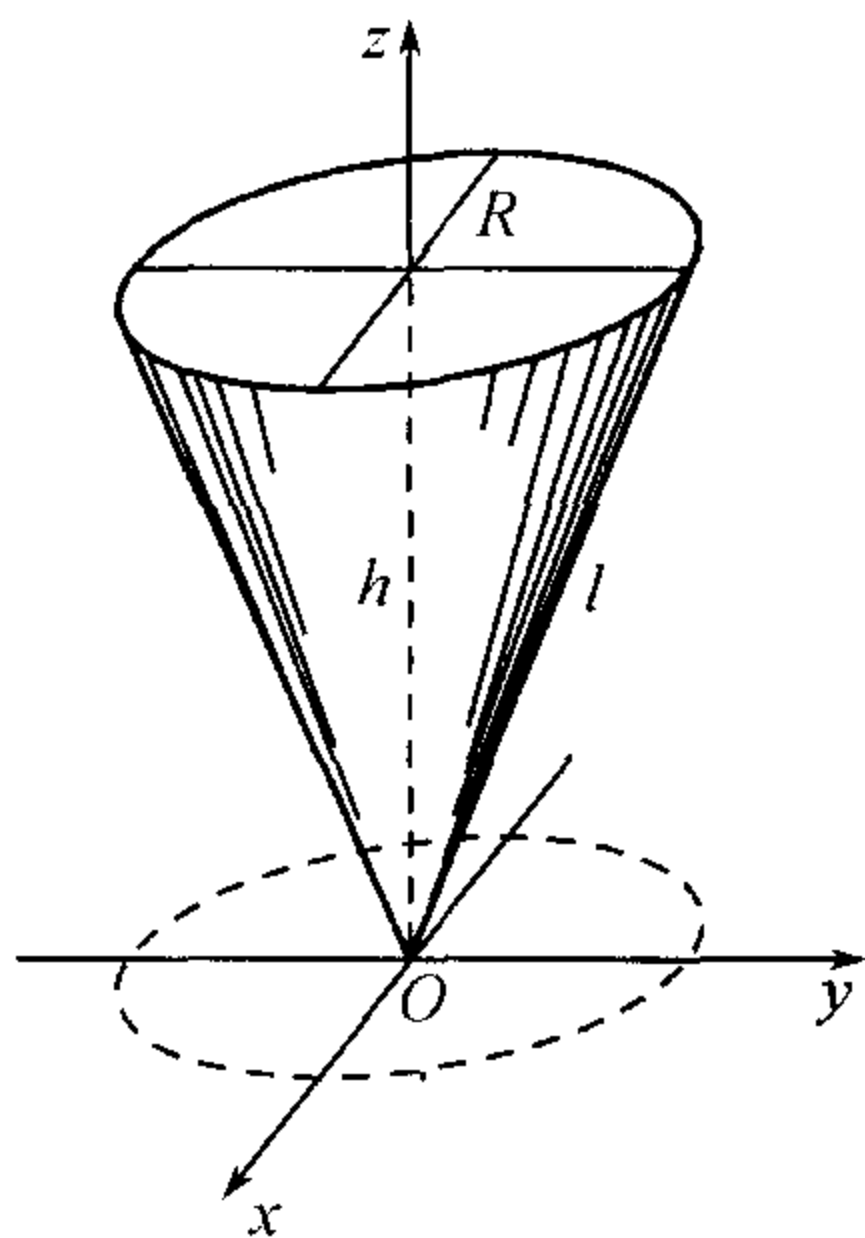


图 106

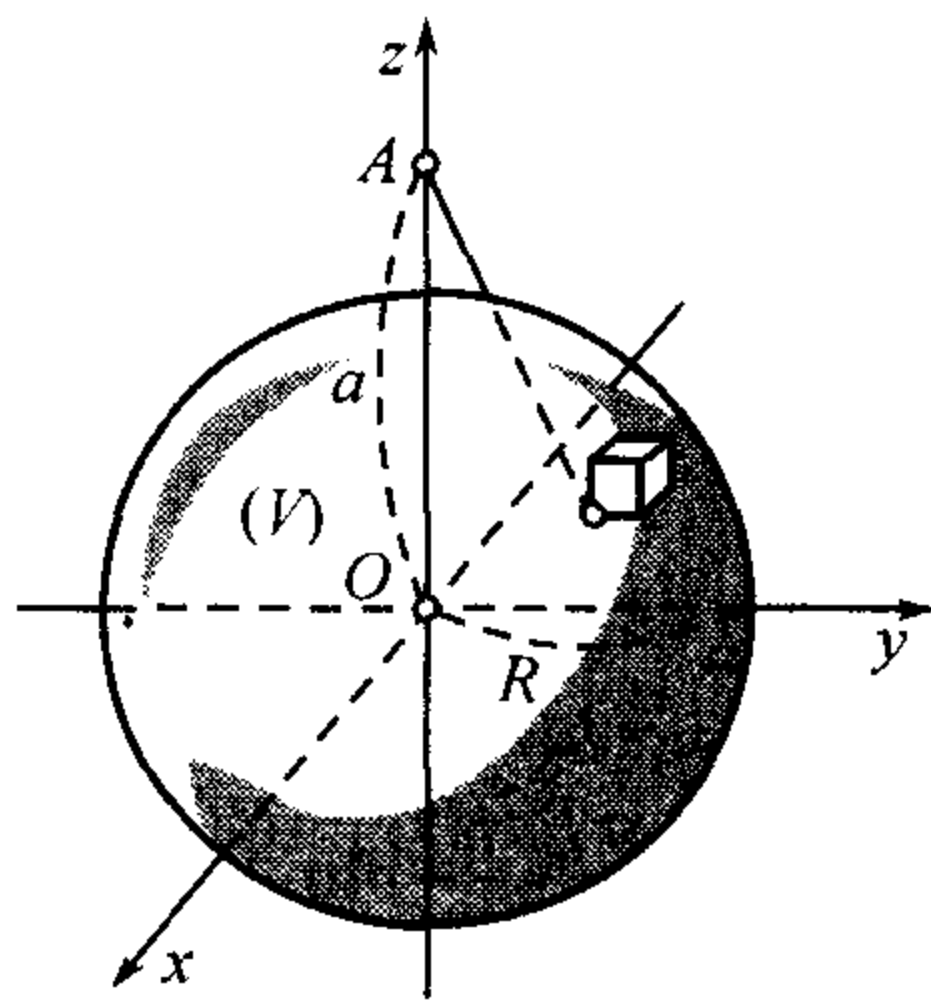


图 107

用变换到极坐标的方法很容易算出里面的积分, 它等于

$$2\pi \left( \frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right).$$

因此,

$$F_z = 2\pi\rho \int_{-R}^R \left[ \frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right] dz.$$

但

$$\int_{-R}^R \frac{z-a}{|z-a|} dz = \int_{-R}^R \text{sign}(z-a) dz = \begin{cases} -2R, & \text{如 } a \geq R, \\ -2a, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

借变换  $t = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$  之助 (或用分部积分法——译者注) 第二个积分也容易算出来:

$$\int_{-R}^R \frac{z-a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} dz = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{R^3}{a^2} - 2R, & \text{如 } a \geq R, \\ -\frac{4}{3}a, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

最终得

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{如 } a \geq R, \\ -\frac{4}{3}\pi a \rho, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

同时, 显然  $F_x = F_y = 0$ . 这样, 在所有情形下吸引力朝向球心.

此处, 位于球外的一点 ( $a \geq R$ ) 因球体而得到的吸引力就好像是将球体的全部质量  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  集中在它的中心处时该点所感受的一样. 另一方面, 对于在球里面的一点 ( $a < R$ ) 说来, 吸引力与  $R$  无关 (而其大小恰如  $R = a$  时的情形一样), 故很清楚, 外面的球层在里面的点上不发生任何作用.

10) 求圆柱在它底面中心上的位势.



提示 这里较简便是从对  $x$  及  $y$  积分开始, 并引用极坐标来计算二重积分:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h \rho dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi\rho \int_0^h (\sqrt{R^2+z^2} - z) dz \\ &= \rho\pi R^2 \cdot \ln \frac{h + \sqrt{R^2+h^2}}{R} + \rho\pi h(\sqrt{R^2+h^2} - h). \end{aligned}$$

11) 求锥体在 (a) 它的顶点及 (b) 它底面的中心上的位势.

提示——同.

答 (a)  $W = \pi h(l-h)\rho$ ;

$$(b) W = \frac{\pi R^2 h^3}{l^3} \rho \ln \frac{R(l+R)}{h(l-h)} + \frac{\pi R^2 h}{l^2} \rho(R-h).$$

12) 求球在任意一点  $A$  上的位势.

解 如问题 9) 的记法, 我们有

$$\begin{aligned} W &= \rho \int_{-R}^R dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \\ &= 2\pi\rho \int_{-R}^R \sqrt{R^2-2az+a^2} - |z-a| dz. \end{aligned}$$

分开  $a \geq R$  的情形, 于是我们有

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2-2az+a^2} dz &= \frac{1}{3a} [(R+a)^3 - |R-a|^3] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}R^3 \cdot \frac{1}{a} + 2Ra & (a \geq R), \\ \frac{2}{3}a^2 + 2R^2 & (a \leq R), \end{cases} \end{aligned}$$

及

$$\int_{-R}^R |z-a| dz = \begin{cases} 2Ra & (a \geq R), \\ a^2 + R^2 & (a \leq R). \end{cases}$$

因此,

$$W = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a} & (a \geq R), \\ \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho & (a \leq R). \end{cases}$$

首先我们看到, 在球外一点上的位势, 与将球的全部质量集中在它的中心处时一样.

而由所得的第二个公式导致这样一推论: 如考察一内半径为  $R_1$  外半径为  $R_2$  的一空心球, 则它在位于空隙处的一点 ( $a < R_1$ ) 上的位势可表作差

$$W = W_2 - W_1 = \left(2\pi R_2^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho - \left(2\pi R_1^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho = 2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho,$$

而不与  $a$  相关. 空心球体在其空隙的范围内的位势保持一常数值.

13) 如图 108 的记号, 求环面体的惯矩:  $I_z$  及  $I_x$  [参看 649, (15)].



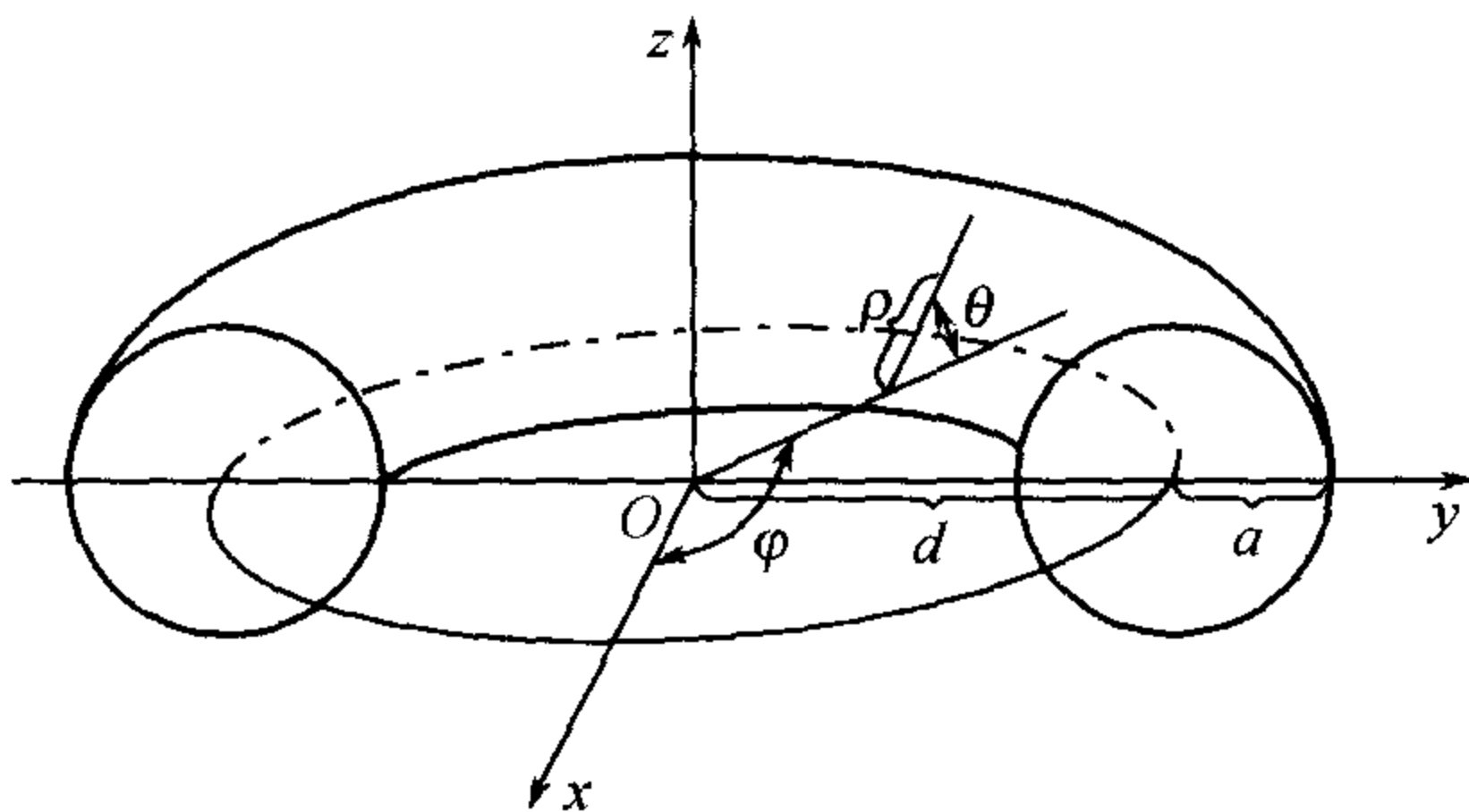


图 108

提示 我们有

$$I_z = 2\rho \int_0^a dz \iint_{R_1^2 \leq x^2+y^2 \leq R_2^2} (x^2+y^2) dx dy,$$

$$I_x = 2\rho \int_0^a dz \iint_{R_1^2 \leq x^2+y^2 \leq R_2^2} (y^2+z^2) dx dy,$$

其中  $R_1 = d - \sqrt{a^2 - z^2}$ ,  $R_2 = d + \sqrt{a^2 - z^2}$ . 变到极坐标可算出这两个二重积分.

答  $I_z = \frac{\pi^2}{2} a^2 d (4d^2 + 3a^2) \rho$ ,  $I_x = \frac{\pi^2}{4} a^2 d (4d^2 + 5a^2) \rho$ .

14) 设立体  $(V)$  绕  $z$  轴以角速度  $\omega$  旋转, 则对离旋转轴距离为  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  的元素  $dm = \rho dV$ , 其线速度  $v = r\omega$ , 因此, 其动能

$$dT = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \rho dV.$$

由此容易得到整个旋转体动能  $T$  的表示式:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{(V)} r^2 \rho dV = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV.$$

我们知道后一积分是立体对旋转轴的惯矩  $I_z$  的表示式 [649, (15)]. 这样, 最后我们有

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

15) 现在我们提出这样一问题: 计算所讨论的立体  $(V)$  对任意一轴  $u$  的惯矩 (图 109), 而这一轴与坐标轴的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ .

对自轴到立体上任意一点  $M(x, y, z)$  的距离  $MD = \delta$ , 我们有  $\delta^2 = r^2 - d^2$ , 其中, 如由解析几何所知,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad ①$$

①后一关系式是记载这件事: 点  $M$  在离原点距离为  $d$  且垂直于轴的平面上.

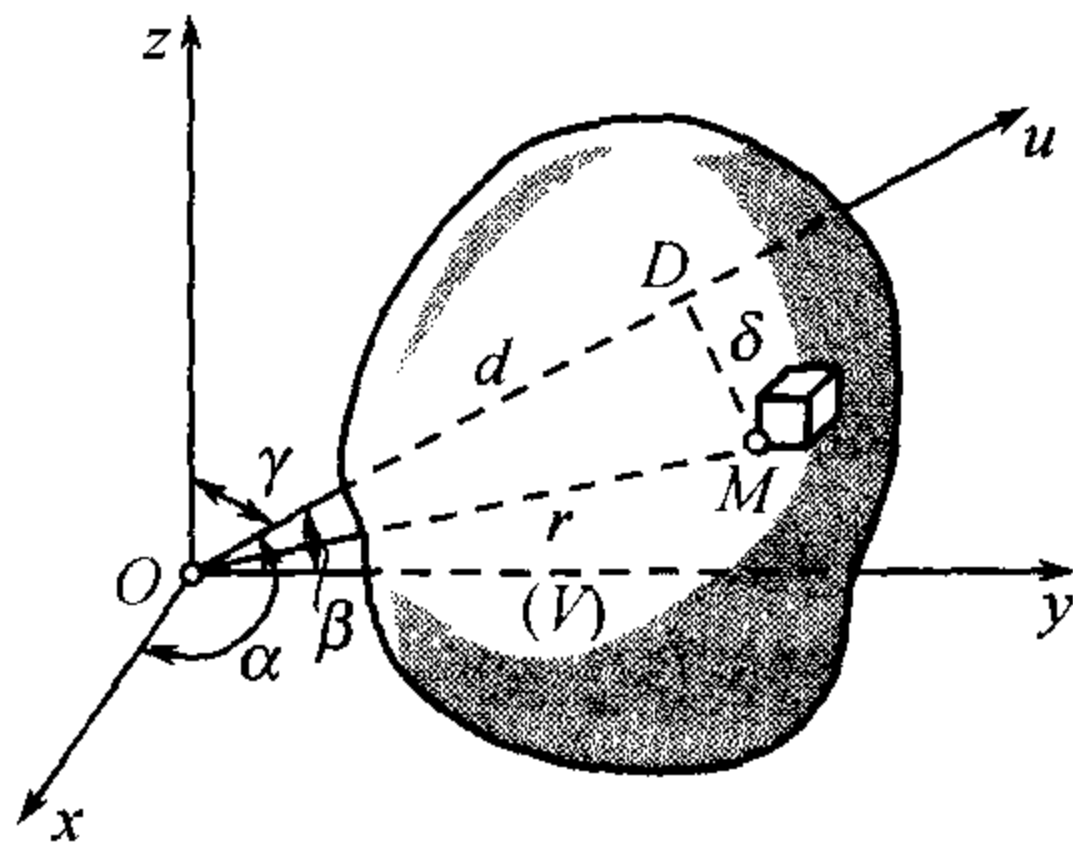


图 109



因为  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 于是得

$$\delta^2 = x^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2(\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + z^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \\ - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

现在很明了了,

$$I_u = \iiint_{(V)} \delta^2 \rho dV = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \\ - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta,$$

其中

$$K_{yz} = \iiint_{(V)} yz \rho dV, \quad K_{zx} = \iiint_{(V)} zx \rho dV, \quad K_{xy} = \iiint_{(V)} xy \rho dV.$$

后面各积分名叫惯性积或离心矩[比照 599,5)].

如果很清楚地描述立体对通过原点各不同轴的惯矩的分配情况, 则如我们对平面图形所作者相似, 应该在每一轴  $u$  上截取线段

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}.$$

设

$$X = ON \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_u}}, \\ Y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I_u}}, \quad Z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I_u}}$$

是这一线段端点  $N$  的坐标. 则自求得的  $I_u$  的式子易得点  $N$  几何轨迹的方程

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2K_{yz} YZ - 2K_{zx} ZX - 2K_{xy} XY = 1.$$

因为  $ON$  不变成无穷, 故这一二次曲面必定是一椭球面; 它称作惯性椭球面. 在研究刚体运动时, 惯性椭球面的各轴起着重要的作用, 称作主惯性轴; 如点  $O$  是立体重心, 则对应的惯性轴称为中心主惯性轴.

哪一个坐标轴是否为主惯性轴, 与这些离心矩有关. 例如, 要  $x$  轴是主惯性轴, 必要且充分须适合条件

$$K_{xy} = 0, \quad K_{zx} = 0.$$

特别, 如质量对  $yz$  平面对称地分布时, 它们就能适合.

16) 最后, 我们来考察在刚体绕一轴旋转时所发生的离心力的问题.

设立体  $(V)$  绕  $z$  轴以角速度  $\omega$  旋转, 则在立体的元素  $dm = \rho dv$  上将有一大小等于

$$dF = \omega^2 r dm = \omega^2 r \rho dV$$

的元素离心力作用着, 其中  $r$  是旋转轴到元素的距离. 它在坐标轴上的射影将为

$$dF_x = \omega^2 x \rho dV, \quad dF_y = \omega^2 y \rho dV, \quad dF_z = 0,$$



所以合成离心力  $\vec{F}$  的射影可表作积分

$$F_x = \omega^2 \iiint_{(V)} x \rho dV = \omega^2 M_{yz}, \quad F_y = \omega^2 M_{zx}, \quad F_z = 0,$$

其中  $M_{yz}, M_{zx}$  是立体的静矩. 如以  $\xi, \eta, \zeta$  表立体的重心坐标, 则这些公式可重写为:

$$F_x = \omega^2 \xi m, \quad F_y = \omega^2 \eta m, \quad F_z = 0.$$

由此可见, 所述合成离心力完全准确地好像是立体的全部质量集中在它的重心时一样.

上面所谈的元素离心力对各坐标轴有下列的矩:

$$dM_x = z dF_y = \omega^2 yz \rho dV, \quad dM_y = z dF_x = \omega^2 zx \rho dV, \quad dM_z = 0.$$

因此, 对这些轴的合成矩将为:

$$M_x = \omega^2 \iiint_{(V)} yz \rho dV = \omega^2 K_{yz}, \quad M_y = \omega^2 K_{zx}, \quad M_z = 0.$$

要使离心力相互平衡且对转动物不发生任何作用 (而由于它, 对它所借以固定的轴承也没有作用), 必要且充分的条件为

$$M_{yz} = 0, \quad M_{zx} = 0; \quad K_{yz} = 0, \quad K_{zx} = 0.$$

前面两条件是说, 立体的重心必须在  $z$  轴上; 就设这里是原点  $O$ . 而后两条件指出,  $z$  轴必须是主惯性轴之一. 因此, 离心力仅在下面条件下对轴承才没有压力, 即旋转轴须与旋转体的中心主惯性轴之一相重合.

## §2. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式

**651. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式** 在二重积分理论中我们已熟识了联系平面区域上二重积分及沿区域边界的曲线积分的格林公式. 在三重积分理论中与它相类似的是联系空间区域上三重积分与区域边界上曲面积分的高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式.

考察一个由分片光滑的曲面

$$\begin{aligned} (S_1) z &= z_0(x, y) \\ (S_2) z &= Z(x, y) \end{aligned} \quad (z_0 \leq Z)$$

及母线平行于  $z$  轴的柱面  $(S_3)$  所围成的立体  $(V)$  (图 96). 这柱面的准线是在  $xy$  平面上范围区域  $(D)$ ——立体  $(V)$  在这平面上的射影——的分段光滑的闭曲线  $(K)$ .

设在区域  $(V)$  中定义有某一函数  $R(x, y, z)$ , 在整个区域  $(V)$  包括边界在内它与其导函数  $\frac{\partial R}{\partial z}$  都连续. 则公式

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R dx dy \quad (1)$$



成立, 而  $(S)$  是范围立体的曲面, 且右端积分是取在它的外侧上的.

事实上, 由第 646 目公式 (11\*),

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{(D)} R(x, y, Z(x, y)) dx dy - \iint_{(D)} R(x, y, z_0(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

如考察曲面积分, 则由第 635 目公式 (3) 及 (3\*),

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy,$$

且右端第一个积分是取在曲面  $(S_2)$  的上侧, 而第二个取在曲面  $(S_1)$  的下侧. 如在这一等式的右端添加一个取在曲面  $(S_3)$  外侧的积分

$$\iint_{(S_3)} R(x, y, z) dx dy,$$

则等式仍旧成立, 因为这个积分等于零 [635, (5)]. 将所有这三个积分合并在一起, 我们就得到公式 (1), 它是高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式的一特殊情形.

在所引用的推理中, 读者可能已观察到与在第 638 目中导出立体  $(V)$  体积的公式时所用的推理的相似处: 当  $R(x, y, z) = z$  时后者可从 (1) 得来.

与在那里一样, 容易明白, 公式 (1) 对更广泛的一类立体, 凡其能分成许多所讨论过的样子的部分者也正确. 同样也可证明, 公式 (1) 对由一些任意的分片光滑曲面所围成的立体一般也成立.

证明可像在第 638 目中当扩张体积公式的应用范围时一样地进行. 我们在它上面只加以一点说明. 如所考察的立体  $(V)$  是一“棱柱形长条”, 例如, 在右面由曲面  $x = g(y, z)$  所限住时, 则在第 638 目中所述推理只有在下一假定下才能搬到现在的情形上来: 函数  $R$  及  $\frac{\partial R}{\partial z}$  也在所述曲面右面的某一区域内有意义且连续 (因为内接多面形也可能略为越出所考察立体的范围).<sup>①</sup>

与公式 (1) 相似, 下面公式也成立:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iiint_{(S)} P dy dz, \quad (2)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q dz dx, \quad (3)$$

如函数  $P$  及  $Q$  在区域  $(V)$  中与它们的导函数  $\frac{\partial P}{\partial x}$  及  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  都连续的话.

<sup>①</sup>事实上对公式的正确性来讲这一假定并非必要的.



将所有三公式 (1),(2),(3) 相加, 我们就得到一般的高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

它将闭曲面外侧的一般形式的第二型曲面积分用这一曲面所围的立体上的三重积分表示出来了.

如来讨论第一型曲面积分, 则得出高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式的另一个常用且易于记忆的形式:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\lambda, \mu, \nu$  是曲面  $(S)$  向外法线与坐标轴间的夹角.

**附注** 格林、斯托克斯以及高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式可用一个思想统一起来: 它们将展布在某一几何图像上的积分用取在这一图像边缘上的积分来表示. 并且, 格林公式是属于二维空间情形的, 斯托克斯公式也是属于二维的不过是“弯曲”空间的, 而高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式是属于三维空间的.

我们可以将积分计算的基本公式

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

看作这些公式对一维空间的某种类似物.<sup>108)</sup>

**652. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式应用于曲面积分的研究** 设在三维空间的某一开区域  $(T)$  中已给连续函数  $P, Q, R$ . 取在这一区域内且围着某一立体的任一闭曲面  $(S)$ , 我们来考察曲面积分

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS. \end{aligned} \quad (6)$$

要积分 (6) 恒等于零, 函数  $P, Q, R$  应满足怎样的条件呢?

<sup>108)</sup> 在叫做微分形式理论的这一数学分析的一支中, 建立了重要的一般的斯托克斯定理, 此前所述的几个公式都是它的特殊情况. 读者可在现代的数学分析教科书找到微分形式理论的详细论述.



这一问题与沿一闭路的曲线积分等于零的问题相似 [601;641], 后者借格林或斯托克斯公式已容易地被解决了. 这里我们就使用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式, 当然假定在这一公式中写出的函数  $P, Q, R$  的导函数存在且连续.

然而, 为了可以有理由按高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式变换积分 (6), 在现在的情形下还必须直接在基本区域  $(T)$  上加以某种限制. 亦即, 必须要求: 只要从外面围着一立体  $(V)$  的一简单闭曲面  $(S)$  属于区域  $(T)$ , 则这一立体也必整个含在所述区域内. 具有这种性质的区域称为 (“空间”) 单连通的 [比照 641]. 这一型单连通性的实质就在于没有 “洞”, 即便是点洞也要没有; 对于不伸展到无穷的立体来说, 可以简单地这样要求: 要一个唯一的闭曲面作它的边界 [比照 659]. 所以, 例如, 与在 641 中关于 “曲面的” 单连通性所谈的不同, 此处环面体是一单连通体, 而空心球却不是的.

由高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式立刻将导得所求条件:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (\text{B})$$

它的充分性是显然的, 而必要性用三重积分对区域的微分法 [644, 8°] 也容易证明.

与曲线积分情形相像, 沿闭曲面积分等于零的问题, 相当于沿 “张” 在一已知闭路上的非闭曲面的积分与曲面形状无关的问题. 我们不讨论这一点了.

最后注意, 如函数  $P, Q, R$  及它们的导函数的连续性在区域  $(T)$  的一个或几个点被破坏了, 则在等式 (B) 适合时积分 (6) 仍可异于零. 但此时不难证明, 对于所有围住一确定奇点的闭曲面  $(S)$ , 积分 (6) 有相同的值 [参照 562].

所有这些情况将用高斯积分的例子来说明, 下一目我们就要来谈它.

### 653. 高斯积分 积分

$$G = \iint_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

就是这样称呼的, 其中  $r$  是连接定点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  与曲面上动点  $M(x, y, z)$  的位径向量的长:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

而这一位径向量与曲面在点  $M$  处的法线间夹角表作  $(r, n)$ . 同时, 曲面  $(S)$  假定是双侧的, 且法线  $n$  对应于它所确定的一侧.

如法线的方向余弦是  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ , 则

$$\begin{aligned} \cos(r, n) &= \cos(x, r) \cos \lambda + \cos(y, r) \cos \mu + \cos(z, r) \cos \nu \\ &= \frac{x - \xi}{r} \cos \lambda + \frac{y - \eta}{r} \cos \mu + \frac{z - \zeta}{r} \cos \nu. \end{aligned}$$

因此, 高斯积分可重写为:

$$\begin{aligned} G &= \iint_{(S)} \left( \frac{x - \xi}{r^3} \cos \lambda + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \mu + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \nu \right) dS \\ &= \iint_{(S)} \frac{x - \xi}{r^3} dy dz + \frac{y - \eta}{r^3} dz dx + \frac{z - \zeta}{r^3} dx dy. \end{aligned}$$



这里

$$P = \frac{x - \xi}{r^3}, \quad Q = \frac{y - \eta}{r^3}, \quad R = \frac{z - \zeta}{r^3},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x - \xi)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y - \eta)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z - \zeta)^2}{r^5}.$$

容易验证条件 (B) 在整个空间除点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  外皆适合, 在这点处函数  $P, Q, R$  有一不连续. 因此, 沿一闭曲面而取的高斯积分, 如曲面不围住  $A$  点, 必等于零. 对所有包含这一点在其内的曲面, 积分保持同一值. 如取例如绕点  $A$  以半径  $R$  作出的球作为曲面  $(S)$ , 就很容易求得它. 此时, 球上点的位径向量保持一定长度, 而它的方向与球的向外法线相一致, 所以  $\cos(r, n) = 1$ . 我们有

$$G = \iint_{(S)} \frac{dS}{R^2} = \frac{S}{R^2} = 4\pi;$$

对所有围着  $A$  点的曲面, 高斯积分的值就是如此.

如从高斯积分的几何意义出发, 即当作自点  $A$  来看曲面  $(S)$  时的立体角<sup>①</sup>的度量, 所有这些结果也容易直接建立起来.

为了证明这, 开始时我们假定: 曲面  $(S)$  与自点  $A$  出发的每一射线相交于至多一点. 设法线  $n$  向着与  $A$  点相反的一侧. 取曲面  $(S)$  的一元素  $(dS)$ , 在它上面选取一点  $M$  并通过这一点以点  $A$  为中心作一球. 如将元素  $(dS)$  自  $A$  射影到这球上去, 则射影的面积将为

$$\cos(r, n)dS, \quad \textcircled{2}$$

所以被由  $A$  出发的视线在单位球上割下的图形的面积将为

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2} dS.$$

这也就是元素  $(dS)$  的可见 (立体) 角. 所有这些元素角的和亦即积分  $G$  就是整个曲面  $(S)$  可见角的度量.

如曲面  $(S)$  与自  $A$  出发的射线交于不止一点, 但曲面可分为许多部分, 使其每一部分与这些射线只交于一点时, 则只需将对于这些部分的高斯积分相加就可以了.

通常总是选取曲面的一个定侧而使法线  $n$  的方向与这一选法一致. 则对曲面的某些部分来说, 这一法线是向着与  $A$  相反的一侧, 而可见角得出来是正的; 对另外一些部分, 其法线向着  $A$  的一侧, 这一角得出来是负的. 高斯积分将为这些可见角的代数和.

由高斯积分的几何解释, 立刻就可明白, 如曲面  $(S)$  是闭的, 且点  $A$  在它所围的区域的里面, 则  $G = 4\pi$ . 反过来, 如点在这一区域的外面, 则不同符号的可见角互相相消而  $G = 0$ .

如点  $A$  在曲面  $(S)$  上, 则高斯积分变成了反常的. 容易明白, 如曲面  $(S)$  在点  $(A)$  处有一确定的切面, 则  $G = 2\pi$ .

<sup>①</sup>被某一锥形曲面所围的空间称作**立体角**, 锥形的顶点是角顶. 如围绕顶点画一单位半径的球面, 则所述锥形在它上面割下一图形, 它的面积就是立体角的度量.

<sup>②</sup>此处我们将元素  $(dS)$  以及它的射影近似地当作平面的, 并利用了正 (不是中心) 射影的公式. 但对无穷小元素  $(dS)$  这里可能的相对误差也是无穷小.



**654. 例** 1) 按高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式变换曲面积分

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

$$(b) I_2 = \iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu) dS,$$

$$(B) I_3 = \iint_{(S)} x dydz + y dzdx + z dxdy,$$

设曲面  $(S)$  范围一立体  $(V)$ .

答 (a)  $I_1 = 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dV$ , (b)  $I_2 = \iiint_{(V)} \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$ ,

(B)  $I_3 = 3V$  [参照 638(16)].

2) 用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式求证公式:

$$(a) \iiint_{(V)} \Delta u dxdydz = \iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

$$(b) \iiint_{(V)} v \Delta u dxdydz = - \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dxdydz \\ + \iint_{(S)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

$$(B) \iiint_{(V)} (v \Delta u - u \Delta v) dxdydz = \iint_{(S)} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS,$$

其中我们令

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(y, n) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(z, n),$$

且把  $n$  了解为曲面向外的法线.

**提示** 这一题与以下各题的解法完全与第 602 目中问题 3), 4), 5), 6), 7) 的解法相似.

3) 函数  $u$ , 与其各导函数同时如皆连续, 且在区域  $(V)$  中满足方程  $\Delta u = 0$ , 就称作在这一区域中的调和函数. 求证: 调和函数的特征是对含在区域  $(V)$  中的任一简单闭曲面  $(S)$  它适合条件

$$\iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

4) 求证下一断语:

如函数  $u$  在一闭区域  $(V)$  中是调和函数, 则它在区域内部的值可唯一地被它在范围这一区域的曲面  $(S)$  上的值所确定.

5) 设  $u$  是在区域  $(V)$  中的调和函数,  $(x_0, y_0, z_0)$  是这一区域的任一内点, 而  $(S_R)$  是中心在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处半径为  $R$  的球. 则公式

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{(S_R)} u(x, y, z) dS$$



成立. 试证.

提示 参考在 [602,6)] 中的证明, 只需取  $v = \frac{1}{r}$  作为辅助调和函数, 其中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

6) 求证: 在一闭区域  $(V)$  上连续且在区域内面为调和的函数  $u(x, y, z)$  在区域内面不会达到最大 (最小) 值 (只要不是常数).

利用这, 可与在 [602,7)] 中所做者相类似地强化 4) 中的结果.

7) 求证: 一坚硬的闭曲面, 在各方面均等压力之下保持平衡.

为达此目的, 我们将证明: 作用于曲面的整个力系的主向量及 (对于任意一点的) 主力矩等于零.

取出曲面的一元素  $(dS)$ . 如以  $p =$  常数表压强, 亦即作用于单位面积上的力, 则沿这一元素的法线方向作用于  $(dS)$  上的元素力在坐标轴上的射影为

$$-p \cos \lambda dS, \quad -p \cos \mu dS, \quad -p \cos \nu dS \quad (7)$$

(所以取负号是因为: 压力是向着曲面内面的, 而  $\lambda, \mu, \nu$  是向外的法线与坐标轴间的夹角).

主向量的射影  $R_x, R_y, R_z$  可自元素力的射影 (7) 相加得来:

$$R_x = -p \iint_{(S)} \cos \lambda dS, \quad R_y = -p \iint_{(S)} \cos \mu dS, \quad R_z = -p \iint_{(S)} \cos \nu dS.$$

但所有这些积分都等于零, 这在高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式中令

$$P = 1, Q = R = 0; \quad Q = 1, P = R = 0; \quad R = 1, P = Q = 0$$

就可看出. 因此, 压力的主向量等于零.

为了确定元素力系例如对坐标原点的主力矩, 我们就要将这些元素力的矩沿坐标轴的分量

$$p(z \cos \mu - y \cos \nu) dS, \quad p(x \cos \nu - z \cos \lambda) dS, \quad p(y \cos \lambda - x \cos \mu) dS^{①}$$

相加. 因此, 压力对原点的主力矩其射影为

$$\begin{aligned} L_x &= p \iint_{(S)} (z \cos \mu - y \cos \nu) dS, & L_y &= p \iint_{(S)} (x \cos \nu - z \cos \lambda) dS, \\ L_z &= p \iint_{(S)} (y \cos \lambda - x \cos \mu) dS. \end{aligned}$$

如在高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式中取  $P = 0, Q = pz, R = -py$ , 则得  $L_x = 0$ . 同样也易证明  $L_y = L_z = 0$ . 压力 (对原点) 的主力矩等于零. 证完.

①回忆一下, 如一力沿坐标轴的分力为  $X, Y, Z$  且这力作用于一点  $(x, y, z)$ , 则对点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的力矩在坐标轴上有下列各射影:

$$\begin{aligned} L_x &= (y - \eta)Z - (z - \zeta)Y, & L_y &= (z - \zeta)X - (x - \xi)Z, \\ L_z &= (x - \xi)Y - (y - \eta)X. \end{aligned}$$



8) 作为应用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式的最后一例, 我们来导出流体静力学的基本定律之一——阿基米德定律.

大家都知道, 流体在浸入其内的一小平面块上的压力是向着这一小平面块的法线的, 且等于以这小块为底, 小块浸没深度为高的液柱的重量. 现设在液体中浸入一刚体 ( $V$ ), 在它的表面 ( $S$ ) 的每一元素 ( $dS$ ) 上液体按上述定律施以压力. 要求确定这些元素压力的合力及它的作用点.

为了解决这一问题, 我们选一坐标系, 将  $xy$  平面与液体自由面放在一起, 而  $z$  轴垂直向下. 设液体比重等于  $\rho$ , 而元素 ( $dS$ ) 浸没深度为  $z$ ; 则这一元素所受的压力将为

$$\rho z dS,$$

而它沿坐标轴的分力将为

$$-\rho z \cos \lambda dS, \quad -\rho z \cos \mu dS, \quad -\rho z \cos \nu dS.$$

此时对主向量在坐标轴上的射影我们有:

$$R_x = -\rho \iint_{(S)} z \cos \lambda dS, \quad R_y = -\rho \iint_{(S)} z \cos \mu dS, \quad R_z = -\rho \iint_{(S)} z \cos \nu dS.$$

与上题一样, 由高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式, 易得

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\rho \iiint_{(V)} dV = -\rho V.$$

因此, 压力的主向量朝着垂直向上的方向且等于被物体排出的液体重量.

现在来考察这些元素力对物体重心  $C(\xi, \eta, \zeta)$  的矩 (今后我们指的是在质量均匀分布时几何立体的重心, 它可能与物理物体的重心不相重合). 元素力矩沿坐标轴的分量为

$$\begin{aligned} &\rho z [(z - \zeta) \cos \mu - (y - \eta) \cos \nu], \quad \rho z [(x - \xi) \cos \nu - (z - \zeta) \cos \lambda], \\ &\rho z [(y - \eta) \cos \lambda - (x - \xi) \cos \mu], \end{aligned}$$

而 (对点  $C$  的) 主力矩的分量得出来是:

$$\begin{aligned} L_x &= \rho \iint_{(S)} z [(z - \zeta) \cos \mu - (y - \eta) \cos \nu] dS, \\ L_y &= \rho \iint_{(S)} z [(z - \xi) \cos \nu - (z - \zeta) \cos \lambda] dS, \\ L_z &= \rho \iint_{(S)} z [(z - \eta) \cos \lambda - (x - \xi) \cos \mu] dS. \end{aligned}$$

应用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式于第一个积分, 得出

$$\begin{aligned} L_x &= \rho \iiint_{(V)} \left[ \frac{\partial z(z - \zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y - \eta)}{\partial z} \right] dV \\ &= \rho \iiint_{(V)} (\eta - y) dV = \rho \left[ \eta V - \iiint_{(V)} y dV \right] = 0, \end{aligned}$$

因为  $\iiint_{(V)} y dV$  是立体对  $xz$  平面的静矩, 等于  $\eta V$ . 同样可证明,  $L_y = 0$ ; 最后, 直接可得出  $L_z = 0$ .



因此, 压力对立体重心的主力矩等于零. 将这一断语与前所证明的关于主向量的命题相对照, 可得出如下的结论; 在浸没于液体中的一立体上, 由液体方面对它作用有一力, 等于立体所排出的液体的重量; 这一力作用于立体的 (几何) 重心且垂直地朝向上.

### §3. 三重积分中的变量变换

**655. 空间的变换及曲线坐标** 在第 603 目中发展的关于平面区域变换的思想也可自然地搬到空间区域的情况上来.

设有一空间采用直角坐标系  $xyz$ , 另一空间用坐标系  $\xi\eta\zeta$ . 在这两空间中, 考察分别由曲面  $(S)$  及  $(\Sigma)$  所围成的两闭区域  $(D)$  及  $(\Delta)$ , 这两曲面恒假定为分片光滑的. 设这两区域以公式

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

相关联, 彼此间形成一个一一的对应.

同时必须曲面  $(\Sigma)$  上的点即对应曲面  $(S)$  上的点, 反之亦然.

设函数 (1) 在区域  $(\Delta)$  内有连续偏导数; 那么雅可比式

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad (2)$$

同样也在  $(\Delta)$  内有连续偏导数. 我们在这里 [参看 603] 将假定, 这个行列式总是非零的, 并保持其符号不变.

如果在区域  $(\Delta)$  内取分块光滑的曲面:

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v) \quad (3)$$

(假定参数在  $uv$  平面上某个区域  $(E)$  内变化), 那么公式 (1) 把这个区域变为区域  $(D)$  中的分块光滑曲面. 这个曲面的方程为

$$x = x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (4)$$

我们只限于考虑曲面 (3) 光滑的情形: 在曲面 (3) 上没有奇点, 于是行列式

$$\frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \quad (5)$$

不同时为零. 仅必须验证在曲面 (4) 上没有奇点.



按 204 目公式 (6), 我们有关于量 (5) 的线性等式:

$$\begin{aligned}\frac{D(y, z)}{D(u, v)} &= \frac{D(y, z)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}, \\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)} &= \frac{D(z, x)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}, \\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} &= \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}.\end{aligned}$$

根据代数学中的已知定理, 由 (5) 式中各量的系数, 即由行列式 (2) 各元素的代数余子式作为元素所组成的行列式, 等于行列式 (2) 的平方, 因此与 (2) 一起是非零的. 如果上述一组等式的左边在某一点同时为零, 那么 (5) 式中的三个行列式都等于零, 这与假设矛盾.<sup>109)</sup>

唯一地描述空间  $xyz$  中点的位置的数  $\xi, \eta, \zeta$  称为这点的曲线坐标. 空间  $xyz$  中保持三个坐标之一为常数的点构成坐标曲面. 共有三族这样的曲面; 区域  $(D)$  的每一点都有每一族中的一张曲面经过.

可是, 所有这些仅在区域  $(D)$  与  $(\Delta)$  之间严格地单值对应的假定下才是如此的. 实际上, 这一单值性常常遭到破坏.

**656. 例** 1) 圆柱坐标代表  $xy$  平面中的极坐标与通常的笛卡儿度量法  $z$  相联合 (图 110). 它们与笛卡儿坐标相关联的公式为

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

这些公式将区域

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

映射到整个  $xyz$  空间. 然而, 我们指出, 直线  $\rho = 0, z = z$  被映射于一个点  $(0, 0, z)$ ; 这就破坏了一一对应性.

在所考察情况下坐标曲面为:

(a)  $\rho = \text{常数}$  是母线平行于  $z$  轴的圆柱面, 它的准线是  $xy$  平面上以原点为中心的圆周;

(b)  $\theta = \text{常数}$  是通过  $z$  轴的半平面;

(c)  $z = \text{常数}$  是平行于  $xy$  平面的平面.

变换的雅可比式:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

<sup>109)</sup> 曲面 (4) 上不存在奇点也可以借助于代数中已知的矩阵的乘积的秩的定理来容易地验证. 事实上 (5) 式中行列式不同时为零意味着 (按照矩阵秩的定义) 由  $\xi, \eta, \zeta$  对变量的  $u, v$  的偏数组成的矩阵  $M_1$  的秩等于 2. 同时由  $x, y, z$  对  $u, v$  的偏数组成的矩阵  $M_2$  等于  $M_1$  与由  $x, y, z$  对  $\xi, \eta, \zeta$  的偏数组成的非奇异矩阵的乘积. 所以矩阵  $M_2$  的秩同样等于 2, 因而曲面 (4) 没有奇点.

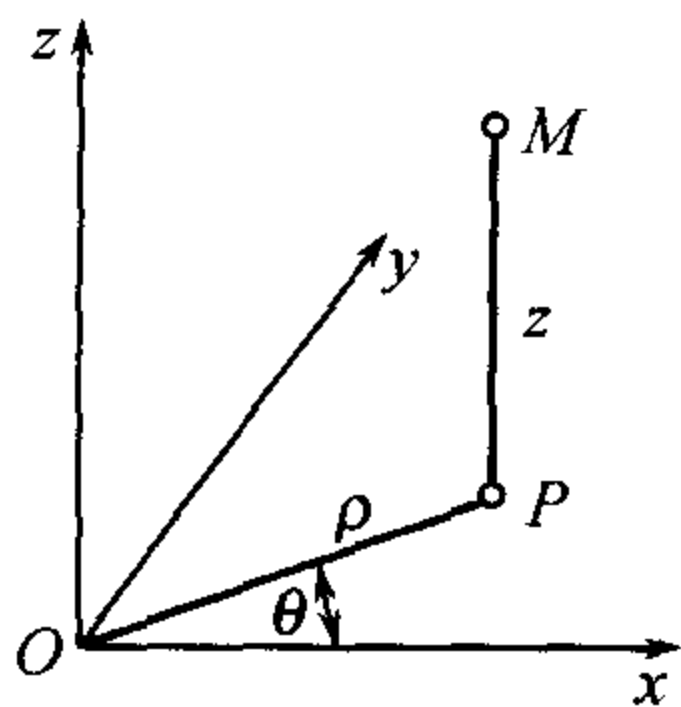


图 110



除  $\rho = 0$  的情形外, 雅可比式保持正号.

2) 球坐标, 或称为空间的极坐标, 与笛卡儿坐标用公式

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

相关联, 其中

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

量  $r, \varphi, \theta$  的几何意义由图 111 很清楚:  $r$  是连接原点 (极) 与已知点  $M$  的位径向量  $OM$ ,  $\varphi$  是这一位径向量与  $z$  轴 (极轴) 间的夹角,  $\theta$  是位径向量  $OM$  在  $xy$  平面上的射影  $OP = r \sin \varphi$  (垂直于极轴) 与  $x$  轴间的夹角.

此时又逢到了一一对应性不成立:  $r\varphi\theta$  空间的平面  $r = 0$  被映射于坐标原点  $x = y = z = 0$ , 直线  $\varphi = 0(\pi)$ ,  $r = r$  被映射于一个点

$$x = y = 0, \quad z = r.$$

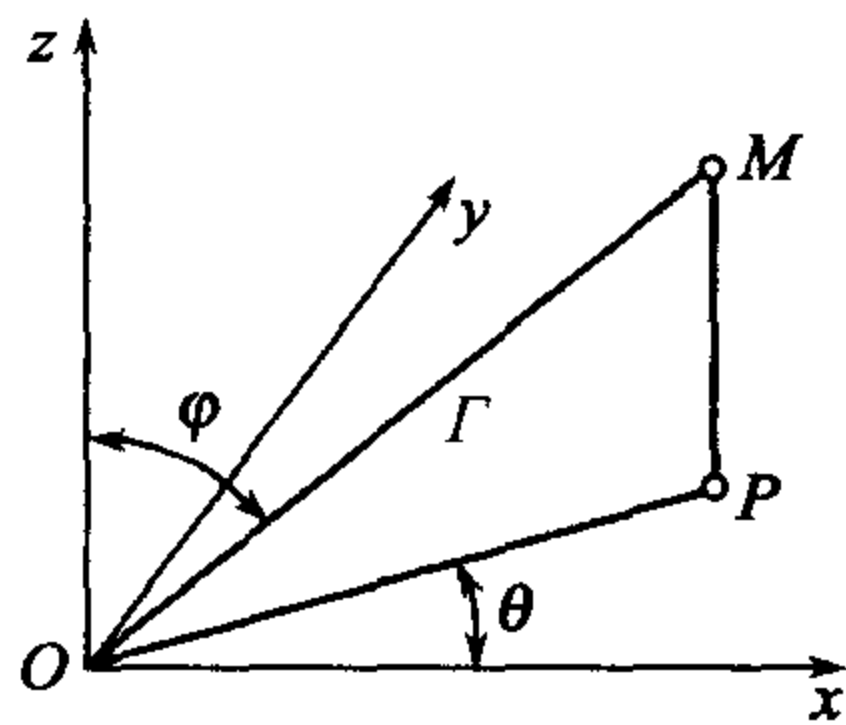


图 111

坐标曲面形成三族:

(a)  $r =$  常数是中心在坐标原点的同心球;

(b)  $\varphi =$  常数是以  $z$  轴为轴的圆锥;

(c)  $\theta =$  常数是过  $z$  轴的半平面.

这一变换的雅可比式:

$$J = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi.$$

除掉上述当  $r = 0$  或  $\varphi = 0(\pi)$  时雅可比式为零处, 它恒保持正号.

3) 空间在自身上按公式

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0)$  的变换是一一对应的可逆的:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

与平面情况一样 [604, 2], 它称为反演法, 且有直观的几何解释; 读者试确立这解释, 并求出对应于这变换的三坐标曲面族.

4) 椭球坐标 考察共焦点且共轴的二次曲面族:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - h^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - k^2} = 1 \quad (0 < h < k),$$

这是由椭球面 (当  $\lambda > k$  时)、单叶双曲面 (当  $k > \lambda > h$  时) 以及还有双叶双曲面 (当  $0 < \lambda < h$  时) 构成的.



过空间中不在坐标平面上的每一点  $(x, y, z)$  通过有每一类型的一个曲面. 事实上, 由原来的方程

$$\begin{aligned} & \lambda^2(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2) - (\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)x^2 \\ & - \lambda^2(\lambda^2 - k^2)y^2 - \lambda^2(\lambda^2 - h^2)z^2 = 0 \end{aligned}$$

其左端当  $\lambda = 0$  时有负号, 当  $\lambda = h$  时有正号, 当  $\lambda = k$  时又有负号, 而最后当更大的  $\lambda$  时有正号. 由此应得: 方程有三个正根: 一个  $\lambda > k$  (对应于椭球面), 第二个  $\mu < k$  但  $> h$  (它给出单叶双曲面), 第三个  $\nu < h$  (双叶双曲面).

上面所写的方程可看作对  $\lambda^2$  的三次方程, 利用它根的性质, 即:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + h^2 + k^2, \\ \lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 &= (h^2 + k^2)x^2 + k^2y^2 + h^2z^2 + h^2k^2, \\ \lambda^2\mu^2\nu^2 &= h^2k^2x^2, \end{aligned}$$

求得

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{\lambda\mu\nu}{hk}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}}, \\ z &= \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}}. \end{aligned}$$

如限制于第一坐标卦限, 则在这些公式中应该只要正号. 数  $\lambda, \mu, \nu$  可视作这一基角内点的曲面坐标. 它们就称为椭球坐标. 三坐标曲面族, 也就是上面所说的椭球面族, 单叶双曲面族及双叶双曲面族.

变换的雅可比式有下形:

$$J = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}}.$$

**657. 曲线坐标下的体积表示法** 回到第 655 目的假定及记号, 我们提出这样一问题: 要将  $xyz$  空间中的一 (有界) 立体  $(D)$  的体积用展布在  $\xi\eta\zeta$  空间中的对应立体  $(\Delta)$  上的三重积分来表示.<sup>①</sup>

所求体积首先可表为第二型曲面积分 [参看 638(14)]:

$$D = \iint_{(S)} z dx dy,$$

它是展布在曲面  $(S)$  的外侧上的. 由此设法变成普通的二重积分.

<sup>①</sup>与第 605 目中一样, 这里我们补充假定偏导数

$$x''_{\xi\eta}, x''_{\eta\xi}, \dots, y''_{\xi\eta}, y''_{\eta\xi}, \dots$$

存在且连续; 虽然这对于结果本身的正确性并非必要, 但可使证明容易些.



我们将自曲面  $(\Sigma)$  的参数方程 (3) 出发,  $u, v$  在  $uv$  平面上的某一区域  $(E)$  中变化. 则显然参数方程 (4) 表示曲面  $(S)$ .

令

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

由第 636 目公式 (8), 有

$$D = \iint_{(E)} z C du dv.$$

并且积分取正号, 如果曲面  $(S)$  与所考察的它的外侧相联带的定向对应于  $uv$  平面的定向; 且恒可假定如此 [620, 621].

因为  $x, y$  经过变数  $\xi, \eta, \zeta$  的媒介依赖于  $u, v$ , 则由熟知的函数行列式的性质 [204, (6)],

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}.$$

将  $C$  的表示式代入上面所得积分中, 得

$$D = \iint_{(E)} z \left[ \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} \right] du dv. \quad (6)$$

将这一积分与展布在曲面  $(\Sigma)$  外侧上的第二型曲面积分

$$\iint_{(\Sigma)} z \left[ \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} d\eta d\zeta + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} d\zeta d\xi \right] \quad (7)$$

相比较. 如将它从参数方程 (3) 按与第 636 目中公式 (10) 相似的公式变换到较普通二重积分, 则恰好得到积分 (6). 这两积分间唯一差别只可能在符号上: 如  $uv$  平面的定向对应于曲面  $(\Sigma)$  考察它的外侧时那一面的定向, 则二积分相等; 而在相反情形时相差一符号.

最后, 自积分 (7) 按高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式可变到在区域  $(\Delta)$  上的三重积分:

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ z \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ z \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ z \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta.$$

积分号下的式子等于

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \\ & + z \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right]. \end{aligned}$$



在第一排中的和等于雅可比式

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

这很容易证明, 只要将这一行列式按最后一行的元素展开; 在方括号中的和, 用直接计算可以证明等于零. ①

因此, 得到公式

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

如考虑到, 由假定, 雅可比式保有一定符号, 而这一符号是雅可比式加到积分上去的, 因而就可明白 (因为这里认为  $D > 0$ ), 积分号前面的符号必须与雅可比式的符号一致. 我们就可将所得结果重写为最终形式:

$$D = \iiint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta, \quad (8)$$

或者, 为简单起见以  $J(\xi, \eta, \zeta)$  表雅可比式时:

$$D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (8^*)$$

积分号下的式子

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$$

通常称为在曲面坐标下的体积元素.

**658. 补充说明** 1° 在曲面  $(\Sigma)$  及  $(S)$  上我们固定了一定的侧面, 例如对于被它们所围的立体来说的外侧. 与此相关对所述曲面也确立了确定的定向 [620]. 如在曲面  $(\Sigma)$  上的一点描画一分开曲面的简单闭路, 且我们讨论被它所范围的二区域

①显然,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta}. \end{aligned}$$

将这些等式一一相加, 得右端恒等于零.



中的任意一个时, 则由公式 (1) 在曲面 ( $S$ ) 上与该点相对应的点就描画出一类似闭路, 且这时我们不必来进行二区域间的选择, 因为这一选择由同一对应规则 (1) 自然地做好了. 如果第一个闭路从曲面 ( $\Sigma$ ) 的定向的观点来看其环行方向譬如说是正的, 则第二个闭路的环行方向, 如从曲面 ( $S$ ) 的定向出发, 就可以是正的, 也可以是负的. 在第一种情况下, 我们就说这两曲面的定向由变换公式彼此相对应, 而在第二种情况下, 就说它们不相对应.

因为我们一开始就认为曲面 ( $S$ ) 的定向对应于  $uv$  平面的定向, 故这一情况或那一情况的发生要看曲面 ( $\Sigma$ ) 的定向对应于  $uv$  平面的定向与否. 与此相关也就有体积公式中积分前符号的选取. 但最后就发现了这一符号与雅可比式的符号相同.

综上所述, 我们得到结论:

两曲面 ( $\Sigma$ ) 及 ( $S$ ) 的定向由变换公式 (1) 彼此对应或否依雅可比式保有正号或负号而定.

2° 应用中值定理于公式 (8\*), 得关系式

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})| \Delta, \quad (9)$$

其中  $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$  是区域 ( $\Delta$ ) 中某一点, 而  $\Delta$  是这一区域的体积. 由此容易导出: 当将区域 ( $\Delta$ ) 缩到一点  $(\xi, \eta, \zeta)$  时将有 [比照 644, 8°]:

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta},$$

所以雅可比式的绝对值是  $\xi\eta\zeta$  空间当变换为  $xyz$  空间时 (在它的所给点处) 它的延展系数.

3° 公式 (8)[(8\*)] 是在一些已知假定 (区域 ( $D$ ) 及 ( $\Delta$ ) 间的可逆一对一旦连续的对应等等) 下推出的. 但与 606, 4° 中一样, 可以证明: 这些条件在一些个别点处或沿一些个别线及面处不成立并不妨害公式正确, 只要雅可比式依然是有界的, 或至少是可积的 (即使是在反常意义下也行).

**659. 几何推演** 公式 (8) 的推演可建立在纯几何的考虑上 (奥斯特洛格拉得斯基最先创立这一点 [比照 609]). 对于  $\xi\eta\zeta$  空间中的一长方体以  $d\xi, d\eta, d\zeta$  为边者使它与  $xyz$  空间中在坐标曲面 “ $\xi$ ” 及 “ $\xi + d\xi$ ”, “ $\eta$ ” 及 “ $\eta + d\eta$ ”, “ $\zeta$ ” 及 “ $\zeta + d\zeta$ ” 间的一元素立体相比较, 这一立体可近似地看作一斜的平行六面体. 它的体积等于以点

$$\begin{aligned} &P_1(x, y, z), \quad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi, z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\right), \\ &P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta, z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right), \\ &P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta, \right. \\ &\quad \left. z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\right) \end{aligned}$$



为顶点的四面体体积的六倍, 由解析几何中所熟知的公式, 知 (其绝对值) 可表作行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

将这些各别的“体积元素”相加, 便得公式 (8).

因此, 这里事情的实质是: 在确定立体的体积时, 它不是用互相垂直的平面而是用坐标曲面网来分成许多元素块.

在简单情形时“体积元素”在曲面坐标下的表示式可直接地得到.

作为一例, 在圆柱坐标下来考察 ( $xyz$  空间中的) 一元素区域, 它是由两个半径为  $\rho$  及  $\rho + d\rho$  的圆柱面, 两个高  $z$  及  $z + dz$  的水平面, 以及两个通过  $z$  轴与  $xz$  平面交角为  $\theta$  及  $\theta + d\theta$  的半平面所围成的 (图 112, a)). 将这一区域近似地当作一长方体, 不难求得它的边长为  $d\rho$ ,  $\rho d\theta$  及  $dz$ , 所以它的体积等于  $\rho d\rho d\theta dz$ , 而代表这一体积与  $\rho\theta z$  空间中的元素长方体体积  $d\rho d\theta dz$  之比的雅可比式等于  $\rho$ .

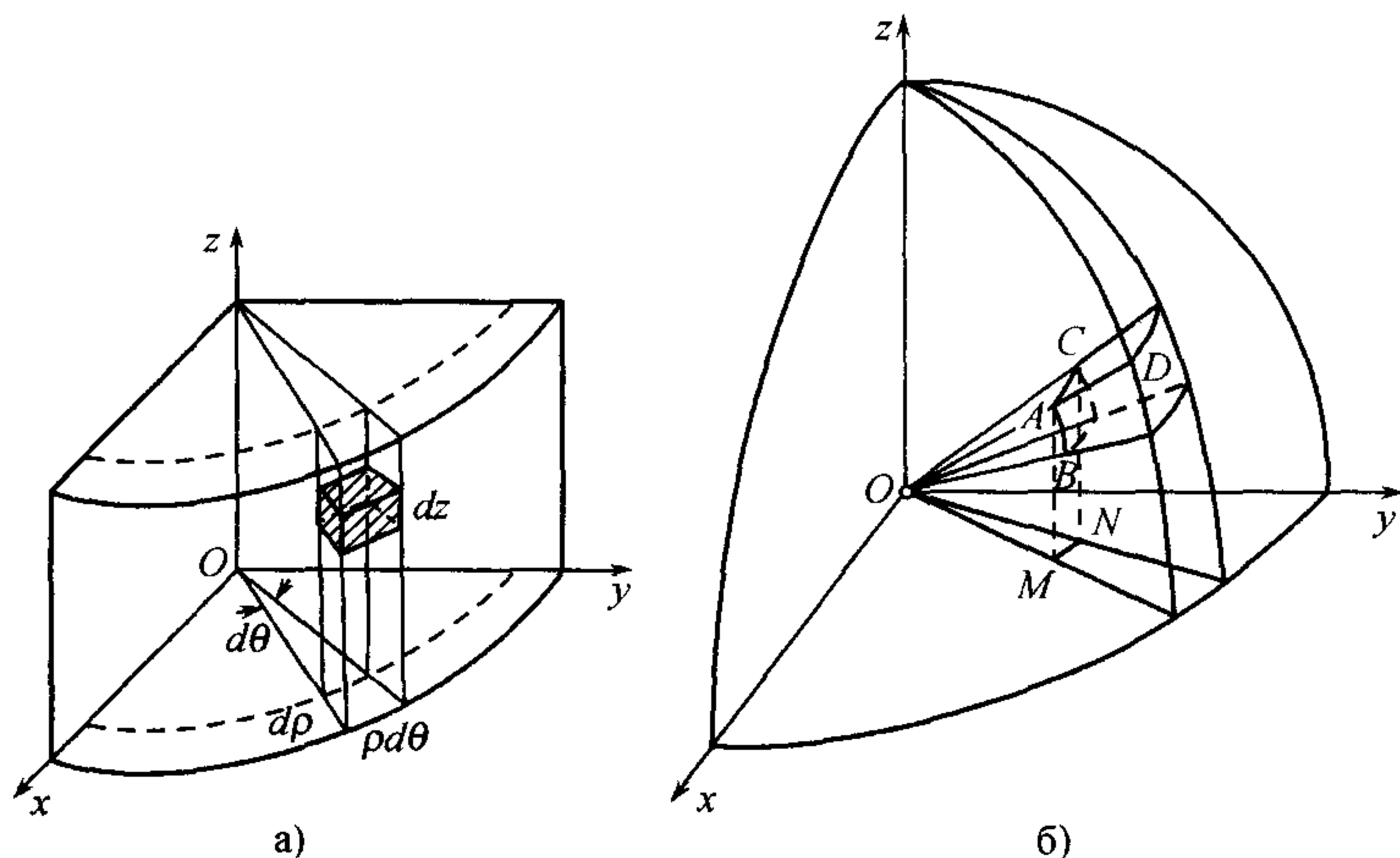


图 112

同样地, 在球坐标下来考察 ( $xyz$  空间中的) 一元素区域. 它是由半径为  $r$  及  $r + dr$  的球面, 锥面  $\varphi$  及  $\varphi + d\varphi$ , 以及半平面  $\theta$  及  $\theta + d\theta$  所围成的 (图 112, b)). 这一区域也可当作一长方体, 其边长为  $AD = dr$ ,  $AB = r d\varphi$  以及  $AC$ . 因为弧  $AC$  等于它自己的射影  $MN$ , 而后者是由半径  $OM = r \sin \varphi$  画出来的且对应于中心角  $d\theta$  故  $AC = r \sin \varphi d\theta$ , 因此所论区域的体积等于  $r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ , 而雅可比式是  $r^2 \sin \varphi$ .

由初等几何观察出来的这两个结果与在 656 1) 及 2) 中所述的相符合.



**660. 例** 1) 计算由下列曲面所围各立体的体积:

$$(a) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z,$$

$$(b) (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz,$$

$$(B) (x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}.$$

**解** (a) 因为  $x$  及  $y$  在方程中只有平方项, 故立体对  $yz$  平面及  $zx$  平面对称. 又, 既然方程左端恒为正, 故必定  $z \geq 0$ , 即整个立体在  $xy$  平面的上面. 这些说明就可使只计算立体在第一卦限中其四分之一的体积.

在方程中式子  $x^2 + y^2 + z^2$  的出现暗示我们变到球坐标去. 将式子

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

代入曲面方程 (a) 中, 得球坐标下的曲面方程:  $r = a \sqrt[3]{\cos \varphi}$ . 因为第一卦限可用不等式  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  来说明, 故考虑到雅可比式  $J = r^2 \sin \varphi$  [656, 2)] 时, 将有

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

(b) 立体在第一、第三、第六及第八卦限内, 对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0;$$

$$x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; \quad x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0;$$

它由四部分构成, 它们一对一对地对称于坐标轴之一 (方程的左端及右端当量  $x, y, z$  中的任何两个同时变号时都不改变).

变到球坐标时, 得

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}} r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

(B) 这里较简单是如下形取变到球坐标的公式:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \varphi \sin \theta.$$

则曲面方程就具有形式  $r = \cos^{2n-1} \varphi$ .

**答**

$$V = \frac{\pi}{3(3n-1)}.$$

2) 求由下面曲面所围各立体的体积:

$$(a) (x^2 + y^2)^2 + z^4 = y,$$

$$(b) (x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3z^3.$$



解 (a) 虽然问题的类型多少与以前各题不同, 但在这里应用球坐标仍很方便. 曲面方程具有形式

$$r^3(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = \sin \varphi \sin \theta.$$

考虑到对称性, 将有

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

(6) 提示

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi} = \pi \int_0^1 \frac{udu}{3u^2 - 3u + 1}$$

(如令  $u = \cos^2 \varphi$ ).

答  $V = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}.$

3) 求由下列曲面所围各立体的体积:

(a)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{h^3};$

(b)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$

(B)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{z}{c}.$

解 (a) 在曲面方程中式子  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  的出现, 常常是按公式:

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi$$

变到广义的球坐标<sup>①</sup> 较为有用; 这时雅可比式  $J = abcr^2 \sin \varphi$ . 我们有 (计及对称性):

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a^2 b \sin^3 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta}{h^3}} abcr^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{4}{3} \frac{a^7 b^4 c}{h^9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

所以最后,

$$V = \frac{\pi}{192} \frac{a^7 b^4 c}{h^9}.$$

(6) 答  $V = \frac{\pi^2}{4} abc.$

(B) 答  $V = \frac{\pi}{60} abc.$

4) 求由下列各曲面所围立体的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y = x.$$

<sup>①</sup>这与平面上广义的极坐标相仿.



提示 这些曲面确定了球坐标的变化区间:

$$1 \leq r \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \left( \text{或} \pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right).$$

立体是由 (在第一及第三坐标卦限内的) 二孤立的块组成.

答  $V = \frac{21\sqrt{2}\pi}{4}.$

5) 计算曲面

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

所围立体的体积.

解 按下面公式引入新的坐标:

$$x = ar \sin^3 \varphi \cos^3 \theta, \quad y = br \sin^3 \varphi \sin^3 \theta, \quad z = cr \cos^3 \varphi$$

$$(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

这时雅可比式

$$J = 9abcr^2 \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

所以

$$V = 9abc \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{35} \pi abc.$$

6) 求曲面

$$(x+y+z)^2 = ay, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

所围立体的体积.

提示 令

$$x = r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta, \quad y = r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta, \quad z = r \cos^2 \varphi$$

$$\left( r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

雅可比式

$$J = 4r^2 \sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta.$$

答  $V = \frac{a^3}{60}.$

7) 求由六平面:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm h_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm h_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h_3$$

所围成的斜平行六面体的体积, 当然, 假定行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



不等于零.

解 引入新的变数

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$$

$$\eta = a_2x + b_2y + c_2z,$$

$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z$$

$$(-h_1 \leq \xi \leq h_1, -h_2 \leq \eta \leq h_2, -h_3 \leq \zeta \leq h_3).$$

求出行列式  $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$  最为简便, 注意它等于行列式  $\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$  的倒数. 我们有

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \int_{-h_1}^{h_1} d\xi \int_{-h_2}^{h_2} d\eta \int_{-h_3}^{h_3} d\zeta = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

8) 求由下列曲面所围各立体的体积:

(a) 柱面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = R^2$$

及平面

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \text{与} \quad a_3x + b_3y + c_3z = h;$$

(b) 椭球面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2$$

(在前面  $\Delta \neq 0$  的假定下).

答 (a)  $V = \frac{\pi R^2 h}{|\Delta|}$ ; (b)  $V = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{|\Delta|}$ .

9) 应用圆柱坐标来计算立体体积时将得出一有趣的公式.

考察由一个分片光滑的曲面所围成的一立体 ( $V$ ), 并假定自  $z$  轴出发的一個半平面对应于  $\theta =$  常数者交立体于某一平面图形 ( $Q_\theta$ ), 而  $\theta$  自  $\alpha$  变到  $\beta$  (图 113). 则

$$V = \iiint_{(V)} \rho d\rho d\theta dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \iint_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz,$$

且将图形 ( $Q_\theta$ ) 引到直角坐标系  $\rho z$  时就很方便, 但这坐标系与所述半平面同时绕  $z$  轴转动. ①

现在易见, 二重积分  $\iint_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz$  是图形 ( $Q_\theta$ ) 对  $z$  轴的静矩, 它等于这一图形的面积  $Q(\theta)$  与  $z$  轴到它的重心  $C$  间距离  $\rho_C(\theta)$  的乘积:

$$\iint_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz = Q(\theta) \rho_C(\theta).$$

将这一体积的式子代入, 得最终公式:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\theta) \rho_C(\theta) d\theta.$$

① 而不是将与它全等的图形引到  $\rho\theta z$  空间中的一固定平面  $\rho z$  上去.

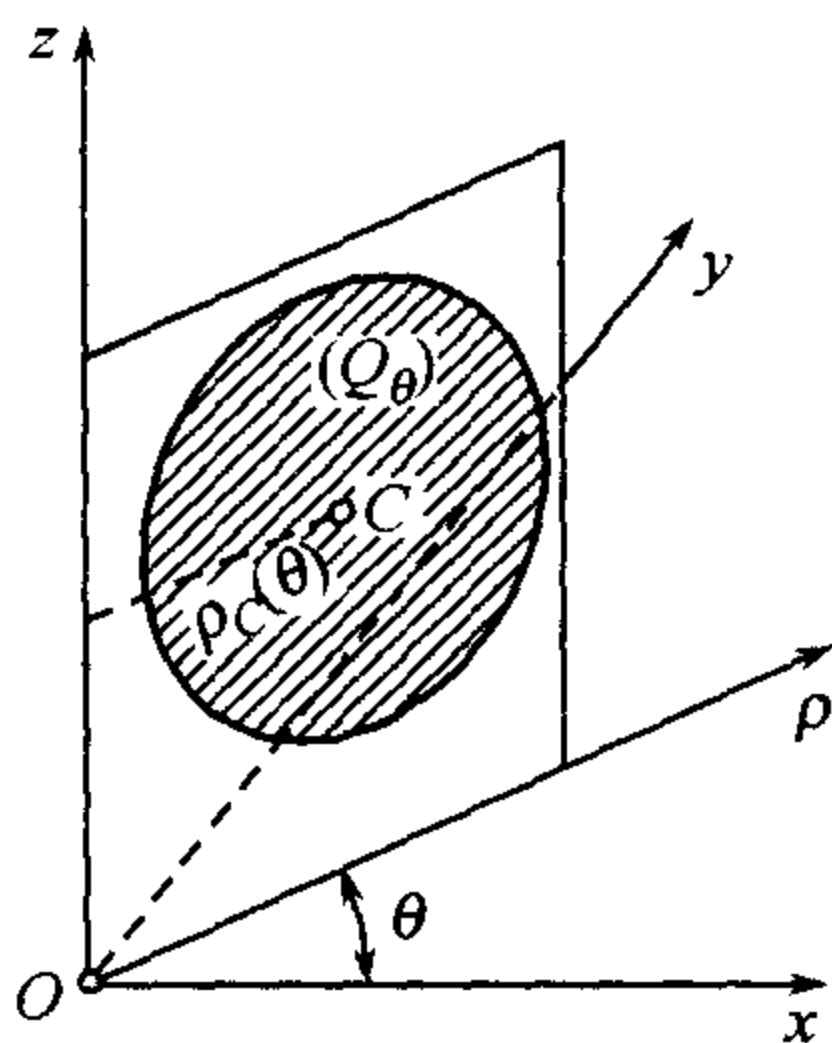


图 113



这一公式是库斯科夫指出的. 它在确定由 (不变的或变动的) 平面图形作螺旋运动时所得立体例如螺丝钉、弹簧等的体积时特别方便.

如立体 ( $V$ ) 单纯地是一与  $z$  轴不相交的不变图形 ( $Q$ ) 绕这一轴的旋转体, 则  $Q = \text{常数}$ ,  $\rho_C = \text{常数}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\pi$ , 而公式就具有形状

$$V = Q \cdot 2\pi\rho_C.$$

它表明了已知的古尔丹定理[351], 这定理说: 平面图形绕与它不相交的轴旋转的立体体积等于这一图形的面积与图形重心描画出的圆周长的乘积. 因此, 库斯科夫公式是这一古典定理的自然推广 (且反过来, 这一公式也容易从它得来).

#### 10) 三轴椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a > b > c)$$

的体积已算过好几次了, 它等于  $\frac{4}{3}\pi abc$ . 但是, 我们现在想引用椭球坐标  $\lambda, \mu, \nu$  [656, 4)] 来计算这一体积. 如令

$$h^2 = a^2 - b^2, \quad k^2 = a^2 - c^2,$$

则当  $\lambda = a$  时就能得到已知椭球体本身.

椭球体的第一卦限与  $\lambda$  自  $k$  变到  $a$ ,  $\mu$  自  $h$  变到  $k$ ,  $\nu$  自  $0$  变到  $h$  相对应. 故

$$\frac{1}{8}V = \int_0^h d\nu \int_h^k d\mu \int_k^a \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}} d\lambda.$$

但, 如已所示, 这一体积等于

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi}{6} a \sqrt{(a^2 - h^2)(a^2 - k^2)}.$$

因此, 上面所写出的复杂积分的值就是这个, 用别的方法来求这一值就会产生巨大的困难.

最后将给出基本公式 (8) 的两个有趣应用, 它们可确立曲面面积及曲线长度的概念与在原则上更简单的立体体积概念间的联系.

#### 11) 设已给一光滑曲面 ( $S$ ):

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

且在参数  $u, v$  变化的区域 ( $\Delta$ ) 中这些函数有二阶连续导函数.

在曲面的每一点  $M$  处的法线上, 对称地在曲面的两侧截取长  $2r > 0$  的一线段. 这些线段填满成某一立体 ( $V_r$ ), <sup>①</sup> 已知曲面就含在其内 (图 114).

以  $x, y, z$  表曲面上点  $M$  的坐标, 而以  $X, Y, Z$  表该点处法线上所述线段的任一点的坐标, 显然, 我们将有

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rho, & Y &= y + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rho, \\ Z &= z + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rho, \end{aligned}$$

<sup>①</sup>可以证明: 对充分小的  $r$  所述线段彼此不相交, 所以立体的每一点恰在一条法线上.

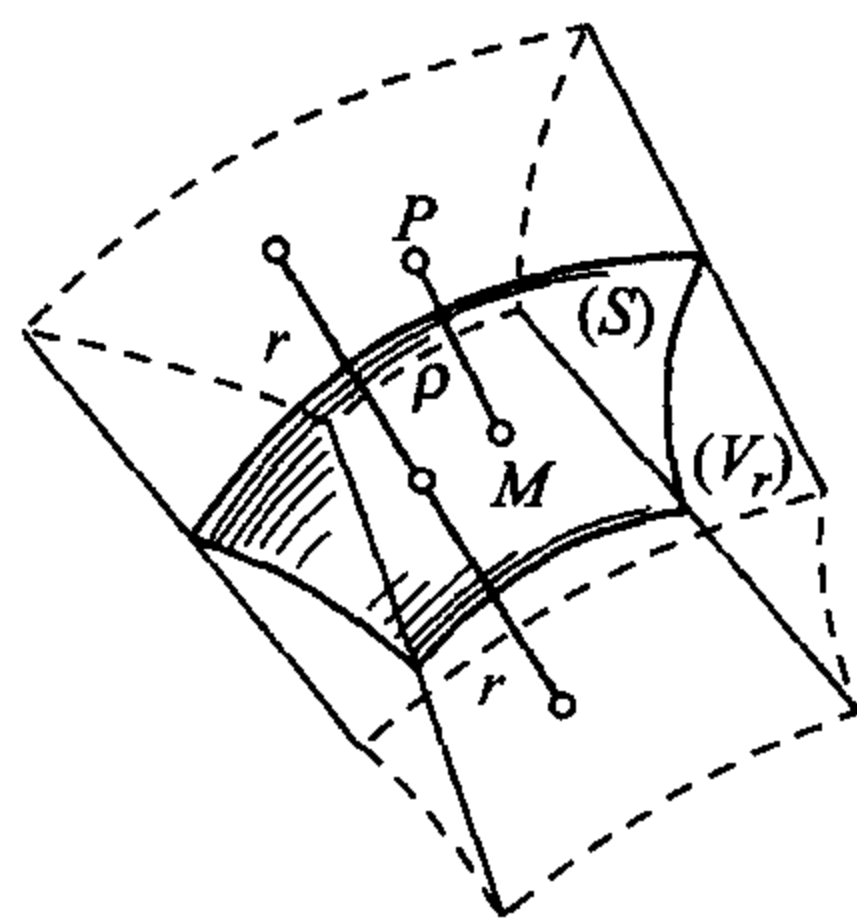


图 114



其中  $A, B, C$  有通常的意义, 而  $\rho$  表距离  $MP$  (带有相应的符号, 所以  $-r \leq \rho \leq r$ ). 因此, 参数  $(u, v, \rho)$  表所述区域  $(V_r)$  的点的曲面坐标. 由公式 (8) 这一立体的体积等于

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} \right| du dv d\rho.$$

但

$$\begin{aligned} \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} &= \begin{vmatrix} x'_u + \alpha_1(u, v)\rho & y'_u + \alpha_2(u, v)\rho & z'_u + \alpha_3(u, v)\rho \\ x'_v + \beta_1(u, v)\rho & y'_v + \beta_2(u, v)\rho & z'_v + \beta_3(u, v)\rho \\ A & B & C \\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} & \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} & \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \gamma_1(u, v)\rho + \gamma_2(u, v)\rho^2, \end{aligned}$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$  表  $u, v$  的某些连续函数. 显然, 对充分小的  $r$  (因为  $|\rho| \leq r$ ) 这一式子的符号将与第一项同, 即为正的. 故

$$\begin{aligned} V_r &= \int_{-r}^r d\rho \iint_{(\Delta)} \left\{ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \gamma_1\rho + \gamma_2\rho^2 \right\} du dv \\ &= 2r \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + Lr^3 \quad (L = \text{常数}). \end{aligned}$$

由此容易推出最终结果

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_r}{2r} = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

我们认识后面的积分是曲面的面积  $S$ . 因此, 这一面积可自体积出发而得来.

12) 设已知一光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

且函数  $x, y, z$  有连续二阶导数. 在曲线的任一点  $M$  处的法面内, 想像一以  $M$  为中心半径为  $r > 0$  的圆. 所有这样的圆构成某一立体  $(V_r)$ ,<sup>①</sup> 它包含这曲线.

不失一般性, 可以假定在所考察的曲线段上恒有  $x'^2_t + y'^2_y > 0$ . 则为了想在所述的曲线法面中建立一直角坐标系, 我们可以取有方向余弦

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad -\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad 0 \quad \text{及} \quad \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad -\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{aligned}$$

的两个相互垂直的法线为坐标轴.

以  $u, v$  表对应的坐标, 我们可以表立体  $(V_r)$  的任一点  $P$  的坐标  $X, Y, Z$  为:

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{y'u}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{x'z'v}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ Y &= y - \frac{x'u}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{y'z'v}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ Z &= z - \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}v. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>这里也可证明: 对充分小的  $r$ , 这些圆两两无公共点, 故立体的每一点只属于其中的一个圆.



这里  $t, u, v$  起着点  $P$  的曲面坐标的作用, 所以

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)} \right| dt du dv.$$

但是, 易见

$$\begin{aligned} & \frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)} \\ &= \begin{vmatrix} x' + \alpha_1(t)u + \beta_1(t)v & y' + \alpha_2(t)u + \beta_2(t)v & z' + \alpha_3(t)u + \beta_3(t)v \\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} & -\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} & 0 \\ \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} & \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} & -\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \alpha(t)u + \beta(t)v, \end{aligned}$$

其中  $\alpha_1, \dots, \beta_3$  是  $t$  的连续函数. 这一式子对充分小的  $r$  保持正号 (因为  $|u|, |v| \leq r$ ). 因此

$$\begin{aligned} V_r &= \int_{t_0}^T dt \iint_{u^2+v^2 \leq r^2} \left\{ \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \alpha(t)u + \beta(t)v \right\} du dv \\ &= \pi r^2 \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt + \iint_{u^2+v^2 \leq r^2} (Ku + Lv) du dv, \end{aligned}$$

其中  $K$  及  $L$  是常数. 我们知道第一个积分是弧长  $s$ , 而第二个积分等于零. 故

$$V_r = \pi r^2 s, \quad s = \frac{V_r}{\pi r^2}.$$

弧长还可更直接地从体积得来, 甚至不必用极限过程!

**661. 三重积分中的变量变换** 借体积在曲面坐标下的表示法, 不难建立三重积分中变量变换的一般公式.

设在  $xyz$  及  $\xi\eta\zeta$  空间的区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  间存在一一对应, 如在第 655 目中说明了的. 假设所有借以推出公式 (8) 的条件都保留, 我们现在求证下一等式成立:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (10) \\ & \quad \left( \text{其中 } J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right), \end{aligned}$$

它完全类似于二重积分中的变量变换公式. 同时我们假定函数  $f(x, y, z)$  连续, 或者至多沿有限个分片光滑的曲面可以有间断 (但在任一情况下都保持有界性). 因此, 在等式 (10) 中的两个积分的存在将无疑问, 仅需证明等式本身.



为了证明起见, 我们如同在第 609 目中一样来进行, 用分片光滑的曲面分区域  $(D)$  及  $(\Delta)$  为 (彼此相对应的) 元素块  $(D_i)$  及  $(\Delta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 应用公式 (9) 到每一对区域  $(D_i), (\Delta_i)$  上; 我们得到

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)| \Delta_i, \quad (11)$$

其中  $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$  是区域  $(\Delta_i)$  中不能随我们选取的某一点. 取区域  $(D_i)$  的对应点  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ , 即令

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad (12)$$

并作出 (10) 中第一个积分的积分和:

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) D_i.$$

用 (12) 式代换此处的  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ , 而用 (11) 式代换  $D_i$ , 得到和

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)) |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)| \Delta_i,$$

显然这已就是 (10) 中第二积分的积分和.

我们让区域  $(\Delta_i)$  的直径趋近于零, 由对应的连续性, 区域  $(D_i)$  的直径也趋近于零. 和  $\sigma$  必须同时趋近于两个积分, 由此即得所需要的等式.

与在二重积分情形时一样, 在证明公式 (8) 时, 当上面所作假定在一些个别点或沿有限个分段光滑曲线及分片光滑曲面处被破坏而只要雅可比式保持有界, 则公式 (10) 也成立.

允许反常积分时, 可更远地来推广公式 (10) 可应用的条件. 读者试对所考察的情形作与在第 616 目中所述者的平行叙述. 这里我们着重指出, 在那里所述的条件下假定 (10) 中积分之一存在时公式就成立, 另一积分的存在已由此能够推得.

最后我们提一下, 公式 (8) 及 (10) 也可以不用雅可比式的绝对值记号写出来. 为了可以这样做, 就应该引进立体定向 (与它的边界定向有关) 的概念, 再视它的定向而给它的体积以及展布在立体上的积分以某一符号. 详细情形留给读者, 并介绍他去参考第 610 目及第 658 目中的说明 1°.

### 662. 例 1) 计算积分

$$I = \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

其中  $(V)$  是一立体, 上面由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$$

所限制, 下面由平面  $z = 0$  所限制.



解 改成球坐标. 曲面方程作下形:

$$r^2 = a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta,$$

注意立体对  $z$  轴对称, 积分变成:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{a^4}{144}. \end{aligned}$$

2) 计算积分

$$H = \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}} \frac{xyz dx dy dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > 0)$$

[参照 648, 11)].

解 在球坐标下

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{r^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr d\varphi d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \varphi}}.$$

进行替换  $\sin^2 \varphi = u, \sin^2 \theta = v$  较为方便. 则

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^R r^4 \frac{u dr du dv}{\sqrt{\alpha^2 u(1-v) + \beta^2 uv + \gamma^2 (1-u)}} \\ &= \frac{R^5}{20} \int_0^1 u du \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)u] + (\beta^2 - \alpha^2)uv}} \\ &= \frac{R^5}{15} \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

3) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} \frac{xyz dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中  $(V)$  是三轴椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

解 如按公式

$$\begin{aligned} x &= ar \sin \varphi \cos \theta, & y &= br \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= cr \cos \varphi, & J &= abcr^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

变到广义球坐标, 则积分可重写为下形:

$$K = a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr d\varphi d\theta}{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi}.$$



替换  $\sin^2 \varphi = u, \sin^2 \theta = v$ . 最终结果:

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{8(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \times \left\{ b^2 c^2 \ln \frac{c}{b} + c^2 a^2 \ln \frac{a}{c} + a^2 b^2 \ln \frac{b}{a} \right\}.$$

4) 计算逐次积分

$$\int_1^\infty dz \int_1^\infty y dy \int_0^{\frac{1}{yz}} e^{xyz} x^2 dx.$$

解 将它换作三重积分

$$\iiint_{\substack{x \geq 0, y, z \geq 1 \\ xyz \leq 1}} e^{xyz} x^2 y dx dy dz,$$

再采用替换

$$x = u, \quad y = \frac{u+v}{u}, \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}, \quad J = \frac{1}{u(u+v)}.$$

积分化为:

$$\iiint_{\substack{u, v, w \geq 0 \\ u+v+w \leq 1}} e^{u+v+w} du dv dw,$$

这很容易计算.

答  $\frac{e}{2} - 1$ .

5) 我们回到计算二重积分

$$B = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta dx dy$$

[参照 617, 21)]. 因为对  $b > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{b}{4\theta^2}} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{b}}$$

[497, 8)], 故如令  $\sqrt{b} = a\sqrt{x^2+y^2}$ , 得:

$$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}} d\theta.$$

将它代入积分  $B$  中并改变积分的次序, 求得

$$B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}} \cos x\xi \cos y\eta dx dy,$$

或者, 如改为变量  $u = \frac{ax}{2\theta}$  及  $v = \frac{ay}{2\theta}$ :

$$\begin{aligned} B &= \frac{8}{\sqrt{\pi}a^2} \int_0^\infty e^{-\theta^2} \theta^2 d\theta \left\{ \int_0^\infty e^{-u^2} \cos \frac{2\theta u\xi}{a} du \int_0^\infty e^{-v^2} \cos \frac{2\theta v\eta}{a} dv \right\} \\ &= \frac{8}{\sqrt{\pi}a^2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{a^2}(a^2+\xi^2+\eta^2)} \theta^2 d\theta \end{aligned}$$



[519,6)(a)]. 分部积分, 就不难得到最终结果:

$$B = \frac{\pi}{2} \frac{a}{(a^2 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

积分次序的颠倒基于三重积分的存在.

6) 求球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$$

在下面质量分布规则下的质量并决定其重心:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[参照 650,5)].

提示 变到球坐标.

7) 求空间任意一点所受一均匀球体的吸引力 [参照 650,9)].

解 变到球坐标, 求得

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho r^2 (r \cos \varphi - a) \sin \varphi dr d\varphi d\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

但在确定球层的吸引力 [633,11)] 时, 我们已求得二重积分的值

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r \cos \varphi - a) \sin \varphi d\varphi d\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } a < r \text{ 时,} \\ -\frac{4\pi}{a^2}, & \text{当 } a > r \text{ 时.} \end{cases}$$

现在, 当  $a > R$  时

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2} \int_0^R r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a^2},$$

而当  $a < R$  时

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2} \int_0^a r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi \rho a.$$

8) 求均匀球体在任意一点上的位势 [参照 650,12)].

提示 变到球坐标并利用 [633, 问题 12)] 的结果.

9) 重解关于球的吸引力及位势的问题, 但在更一般的质量分布规则下:

$$\rho = f(r),$$

其中  $f$  是中心到点的距离的任一函数.

注意我们在 [650,9) 及 12)] 中所作论断在现在情况下仍然有效.

10) 求环面体的惯矩  $I_z$  及  $I_x$  [参照 650,13)].

提示 注意环面体是由圆旋转得来 (参看图 108), 这一立体内点的位置, 可以用经面与  $xz$  平面的夹角  $\varphi$  以及用在这一断面本身的范围内的通常极坐标  $\rho, \theta$  来很自然地确定.

因此

$$\begin{aligned} x &= (d + \rho \cos \theta) \cos \varphi, & y &= (d + \rho \cos \theta) \sin \varphi, \\ z &= \rho \sin \theta, & J &= \rho(d + \rho \cos \theta), \end{aligned}$$



且  $\rho$  自 0 变到  $a$ , 而  $\varphi$  及  $\theta$  自 0 变到  $2\pi$ .

11) 计算均匀 ( $\rho = 1$ ) 椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a > b > c)$$

在它中心上的位势时会导出椭圆积分.

引进球坐标, 但这一次取  $x$  轴作为极轴:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \varphi \sin \theta.$$

我们将有

$$\begin{aligned} W &= \iiint_{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \sin \theta}{c}\right)^2}} r dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{B \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

其中

$$B = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}, \quad C = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}.$$

里面的积分等于  $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$ . 又令  $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \cos \varphi = t$ , 便得第二种椭圆积分

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} t^2\right)}},$$

借变换  $t = \sin \lambda$ , 它就被化至勒让德形式:

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\lambda_0, k_0),$$

其中为简便计已令

$$\lambda_0 = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

**663. 立体的吸引力及在内点上的位势** 现在我们回到对于一点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  被一立体所吸引的力在坐标轴上的射影及在这一点上的位势其在第 649 目中的一般的表示式 (17) 与 (18), 但特别讨论当点  $A$  本身属于这立体时的情况. 这又给出一机会来利用变量变换.

首先, 容易论证所述反常积分的存在. 为了要使这些积分变成非反常的, 只要取点  $A$  为极变到球坐标就行了. 如从立体  $(V)$  上割下一以  $A$  为中心以  $r_0$  为半径的球  $(v_0)$ , 则得

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho \frac{r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho r \sin \varphi dr d\varphi d\theta;$$



同样,

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho \cos\theta \sin^2\varphi dr d\varphi d\theta,$$

等等. 这里积分号下的函数显得是连续的.<sup>①</sup>

在所考察的情况下要建立第 649 目的关系式 (19) 需要精细得多的观察. 这里同样也显得要用球坐标.

首先由上面等式可得不等式

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} \leq 2\pi L r_0^2, \quad (13)$$

$$(L = \max \rho),$$

$$\left| \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi) dv}{r^3} \right| \leq 2\pi L r_0 \quad (14)$$

以下我们要用到这一结果.

现在给  $\xi$  一增量  $h$ , 并与点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  同时考察点  $A_1(\xi+h, \eta, \zeta)$ . 如前, 以  $r$  表自点  $A$  到立体任一点  $M(x, y, z)$  的距离  $AM$ , 以  $r_1$  表距离  $A_1M$ . 必须求证: 当  $h \rightarrow 0$  时差

$$\Delta = \frac{1}{h} \left\{ \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r_1} - \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r} \right\} - \iiint_{(V)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dV$$

亦趋近于零.

从立体  $(V)$  中取出中心在  $A$  半径为  $2|h|$  的球  $(v_0)$  (图 115), 则  $\Delta$  可表作四项和的形状:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{h} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r_1} - \frac{1}{h} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} - \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv \\ &\quad + \iiint_{(V)-(v_0)} \rho \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{x-\xi}{r^3} \right\} dV. \end{aligned}$$

第二及第三项立刻可用当  $r_0 = 2|h|$  时的不等式 (13) 及 (14) 来估计:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} &\leq \frac{2\pi L (2h)^2}{|h|} = 8\pi L |h|, \\ \left| \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv \right| &\leq 2\pi L \cdot 2|h| = 4\pi L |h|. \end{aligned}$$

为了更方便地估计第一项, 绕点  $A_1$  作一半径为  $3|h|$  的球  $(v_1)$ ; 球  $(v_0)$  整个含在它里面. 则再利用形如 (13) 的不等式时, 将有

$$\frac{1}{|h|} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r_1} \leq \frac{1}{|h|} \iiint_{(v_1)} \frac{\rho dv}{r_1} \leq \frac{2\pi L (3h)^2}{|h|} = 18\pi L \cdot |h|.$$

最后, 我们来讨论最后一项. 如引进函数

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r},$$

<sup>①</sup>我们认为密度  $\rho$  是坐标的连续函数.



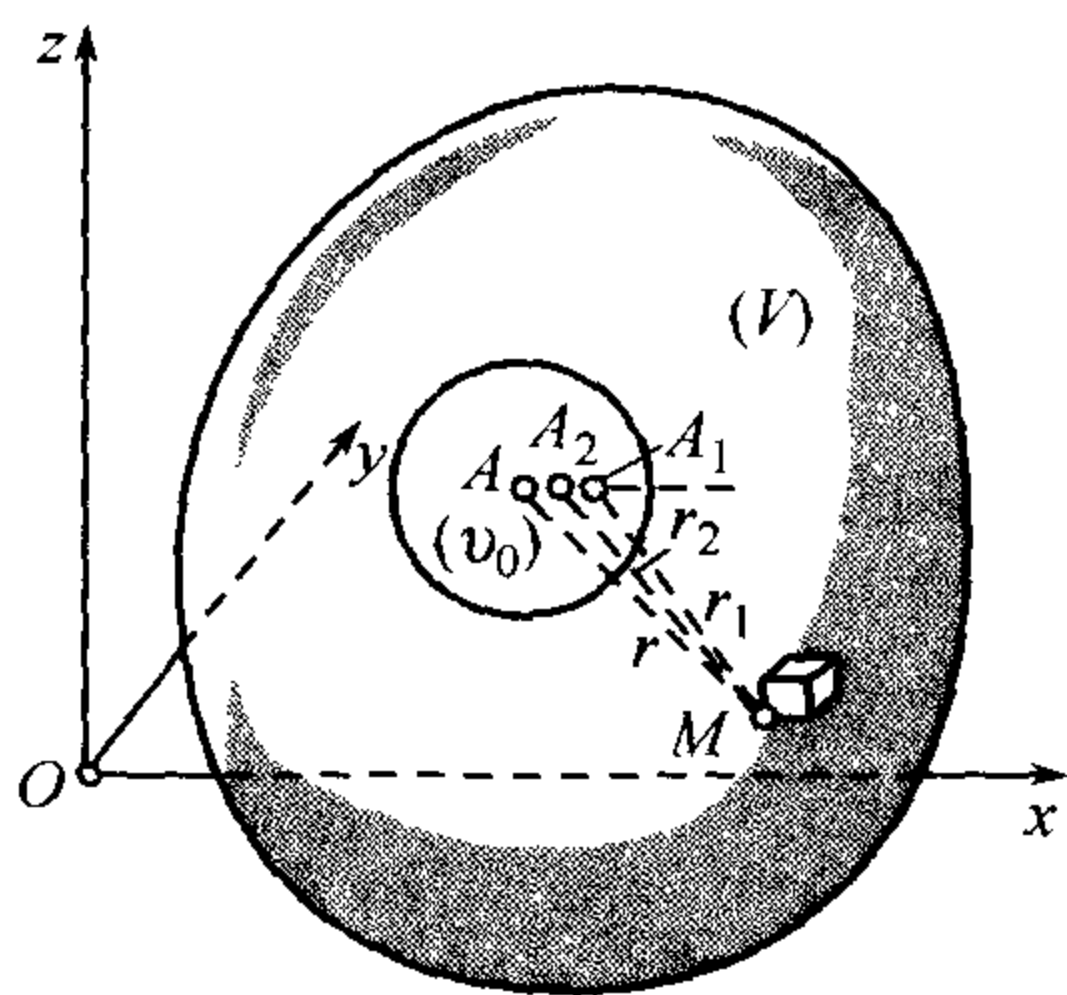


图 115

则在括号中的式子不是别的, 恰为

$$\frac{f(\xi + h, \eta, \zeta) - f(\xi, \eta, \zeta)}{h} = f'_\xi(\xi, \eta, \zeta),$$

由泰勒公式可换作

$$\frac{h}{2} f''_{\xi^2}(\xi + \theta h, \eta, \zeta) \quad (0 < \theta < 1).$$

但现在

$$f''_{\xi^2}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{3(x - \xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

所以

$$|f''_{\xi^2}(\xi + \theta h, \eta, \zeta)| \leq \frac{4}{r_2^3},$$

其中  $r_2$  是自点  $M$  到点  $A_2(\xi + \theta h, \eta, \zeta)$  的距离  $A_2M$ .

由三角形  $AMA_2$  (见图) 有  $A_2M > AM - AA_2$ . 但点  $M$  在半径为  $2|h|$  的球  $(v_0)$  的外面, 而  $AA_2$  显然小于  $|h|$ , 故  $AA_2 < \frac{1}{2}AM$  且  $A_2M > \frac{1}{2}AM$ , 即  $r_2 > \frac{1}{2}r$ . 注意到所有这些, 我们得如下的估计:

$$\left| \iiint_{(V)-(v_0)} \rho \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{x - \xi}{r^3} \right\} dV \right| \leq 16L|h| \cdot \iiint_{(V)-(v_0)} \frac{dV}{r^3}.$$

现取一中心在  $A$  的球  $(V_1)$ , 其半径  $R$  如此地大使立体  $(V)$  整个含在它里面. 则所得式子也就小于

$$\begin{aligned} 16L|h| \iiint_{(V_1)-(v_0)} \frac{dV}{r^3} &= 16L|h| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{2|h|}^R \frac{\sin \varphi}{r} dr d\varphi d\theta \\ &= 64\pi L \cdot |h| (\ln R - \ln 2|h|). \end{aligned}$$

最后,

$$|\Delta| \leq C_1|h| + C_2|h||\ln 2|h||,$$

其中  $C_1$  及  $C_2$  是不难计算的二常数, 由此可见,  $\Delta$  与  $h$  同时趋近于零, 则

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x.$$

同样可建立关系式 (19) 的另外二式. 最后, 用类似的观察可证明, 即使点  $A$  属于立体  $(V)$  时导函数  $\frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial W}{\partial \eta}, \frac{\partial W}{\partial \zeta}$  连续.

## §4. 场论初步

**664. 纯量及向量** 将积分学在数学物理及力学问题上的应用化为向量形式常常较为方便. 所以读者能熟悉一些向量分析的基本概念是很有用处的, 这些概念能将积分构造及其涉及的积分公式变为向量的解释.

我们假定读者已熟悉纯量概念及向量概念, 前者完全可用其数值来说明 (例如体积、质量、密度、温度), 而后者要完全确定它就还要指出其方向 (位移、速度、加速度、力等). 讲到向量, 与通



常一样,我们将设想一表明它的有向线段. 我们约定用带箭头的文字  $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \dots$  表示向量; 不带箭头的同样文字  $A, r, v, \dots$  表示向量的长:

$$A = |\vec{A}|, \quad r = |\vec{r}|, \quad v = |\vec{v}|,$$

而带附标的文字  $A_x, r_y, v_n, \dots$  表示它们分别在  $x, y, n, \dots$  轴上的射影, 向量  $\vec{A}$  在坐标轴上的射影  $A_x, A_y, A_z$  能完全确定该向量的长 (数值) 及方向.

我们同样认为读者也掌握了向量代数学的基本知识. 我们只提一下纯量 (数)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

叫做向量  $\vec{A}$  及  $\vec{B}$  的**数量积**, 用它们在坐标轴上的射影可表作:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1)$$

向量  $\vec{A}$  及  $\vec{B}$  的**向量积**是长为  $AB \sin(\vec{A}, \vec{B})$  的向量, 它垂直于两因子, 且朝向那一边, 从那里看来自  $\vec{A}$  转 (一小于  $180^\circ$  的角) 到  $\vec{B}$  是以反时针向进行的; 它表作  $\vec{A} \times \vec{B}$ . 如果, 我们今后恒将这样假定, 一右手坐标系 [620] 取作基础时, 则向量积在坐标轴上的射影将为

$$A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x. \quad (2)$$

**665. 纯量场及向量场** 如在确定的空间区域 (可包有整个空间) 中的每一点处关联有某一纯量或向量, 则称已给这一量的**纯量场**或**向量场**, 在以下各目中我们一直要讨论这种场.

温度场或电位场是纯量场的例子. 如果对某一任意选取的坐标系  $Oxyz$  的坐标来确定点  $M$  的位置, 则给出一纯量场  $U$  就是相当于给出一数值函数  $U(x, y, z)$ . 我们将永远假定, 这一函数对所有变量有连续偏导数. 如这些导数不同时为零则方程

$$U(x, y, z) = C \quad (C = \text{常数})$$

确定某一 (无奇点的) 曲面, 在它上面量  $U$  保有常数值; 这样的曲面称作**等量面**. 整个所考察的区域填满了这种曲面, 所以通过它的每一点有一个且仅有一个等量面. 显然, 等量面彼此并不相交.

力场或速度场可以作为向量场的例子, 我们已经遇见过这种类似的场了. 如以某一坐标系  $Oxyz$  作基础, 则给出一向量场  $\vec{A}$  可以用给出它在坐标轴上的射影

$$A_x(x, y, z), \quad A_y(x, y, z), \quad A_z(x, y, z) \quad (3)$$

作为与向量  $\vec{A}$  相关的点  $M$  的坐标函数的方法来实现. 我们也将假定这些函数有连续导函数. 在研究向量场时, **向量线**非常重要; 向量线就是一曲线, 在它上面每一点  $M$  处的方向与对应于这一点的向量  $\vec{A}$  的方向相重合. 如回想 [234] 曲线切线的方向余弦与微分  $dx, dy, dz$  成正比, 则得知向量线可用等式

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

来说明, 在向量  $\vec{A}$  不为零的假定下, 依靠线性微分方程组理论的“存在定理”可以证明: 整个所考察的区域被向量线所填满, 且通过它的每一点有一条且仅有一条这样的线. 向量线彼此并不相交.

有时候要考虑由向量线组成的曲面, 它们称为**向量面**, 向量面的特征是: 对应于每一点  $M$  的向量  $\vec{A}(M)$  在曲面的这一点处的切面内 (或者是: 在其所有点处向量  $\vec{A}$  在曲面的法线  $n$  上的射影等于零). 如在所考虑的区域任取一异于向量线的线, 并过它的每一点引向量线, 则这些向量线的几何轨迹就给出一向量面. 当上述“准”线是闭曲线时, 就得到一管形的向量面, 称作**向量管**.



**666. 梯度** 设已给一纯量场  $U(M) = U(x, y, z)$ . 在坐标轴上以

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4)$$

为射影的向量  $\vec{g}$  称作纯量  $U$  的梯度并这样来表示:

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

这一形式的定义有一缺点, 就是它利用了坐标轴而留下梯度概念与它们的选择无关的问题没有解决.

为了要证明这一无关性, 回想早在第一卷 [184] 中给出的函数沿一已知方向  $l$  的导数的定义:  $\frac{\partial U}{\partial l}$ , 它表明函数沿方向  $l$  增加的速度. 在那里我们曾有公式

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是方向  $l$  的方向余弦; 如以  $\vec{\lambda}$  表沿这一方向所引的单位向量, 则它也可重写作:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = \text{grad}_l U.$$

这一导数显然在当方向  $l$  与梯度的方向相重时达到最大值, 且这一最大值等于

$$|\text{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

这就将我们引到这样一一定义 [比照 184]: 纯量  $U$  的梯度是一向量, 其数值及方向恰好说明常量  $U$  变化的最大速度. 这里坐标系已经完全没有提到了.

容易观察到, 梯度的方向与通过已知点的等量面  $U(x, y, z) = C$  的法线方向相重合.

这样, 纯量场  $U(M)$  产生一梯度的向量场  $\text{grad} U$ .

哈密顿(W.R.Hamilton) 介绍考虑一符号向量, 它在坐标轴上的射影为

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}.$$

他称之为“纳布拉”并表作  $\nabla$ . 用这种记法, 就可写

$$\text{grad} U = \nabla U.$$

事实上, 如将所述“向量”形式地乘上量  $U$ , 就是以 (4) 为射影的向量!

**例** 1) 以  $\vec{r}$  表联结某一定点  $O$  与空间一动点  $M$  的位径向量  $\overrightarrow{OM}$ , 而以  $r$  表它的长, 令

$$U(M) = \varphi(r),$$

其中  $\varphi$  是正纯量变元  $r$  的任一纯量函数, 有不变号的导数者. 显然, 以  $O$  为中心半径为  $r$  的球面是等量面, 所以梯度的方向或与半径相一致或者恰恰与它相反, 视  $\varphi'(r) > 0$  或  $< 0$  而定. 易见

$$\text{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$



特别

$$\operatorname{grad} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \vec{r} \quad (c = \text{常数}).$$

如在点  $O$  处放一质量  $m$  并考察牛顿引力场, 则它在点  $M$  处的吸引力将为

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

因而

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r}.$$

一已知向量场是否可看作某一纯量的梯度场这一问题非常重要. 实质上这一问题对我们来说并不是新的, 以后 [670] 我们将再谈它.

2) 考察一温度场  $U$ . 取一曲面元素 ( $dS$ ), 且带有一以确定方法定向的法线  $n$ , 我们来计算在无穷小时间  $dt$  内沿  $n$  的方向通过这一元素所流过的热量  $dQ$ . 热是从物体或介质的较热部分流向较冷部分的, 且温度减低得愈快, 流得也愈快. 通常认为: 上述元素热量  $dQ$  与  $dS, dt$  以及  $\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|$  成正比. 以  $k > 0$  表比例系数 (已知物体的“内部热传导系数”), 可以写

$$dQ = -kdSdt \frac{\partial U}{\partial n};$$

如上所述, 热量  $dQ$  在当  $\frac{\partial U}{\partial n}$  为负时, 即当沿  $n$  的方向  $U$  减少时为正.

如引进所谓热流向量

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} U,$$

则  $dQ$  的表示式可另写为:

$$dQ = dSdtq_n.$$

**667. 向量通过曲面的流量** 现设已给某一向量场  $\vec{A}(M)$ , 亦即给出三函数 (3). 取一曲面 ( $S$ ); 并选取它的一确定侧面后, 以  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  表对应的有向法线  $n$  的方向余弦. 则称曲面积分

$$\iint_{(S)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) dS$$

或另写作

$$\iint_{(S)} A_n dS$$

的积分为向量  $\vec{A}$  通过曲面 ( $S$ ) 在所述侧面的流量.

我们来举一些例子.

1) “流量”这一名称本身与某流体力学问题相关. 考察一流体在空间的运动; 在一般情形下我们不假定它是定常的, 所以运动速度  $\vec{v}$  不仅与它所关联到的点  $M$  的位置有关, 且也与时间  $t$  有关. 我们提出这样一问题: 计算在无穷小时间  $dt$  内流体通过曲面 ( $S$ ) 流进某确定侧面的量. 流体流过曲面元素 ( $dS$ ) 的量可填满一以  $dS$  为底,  $v_n dt$  为

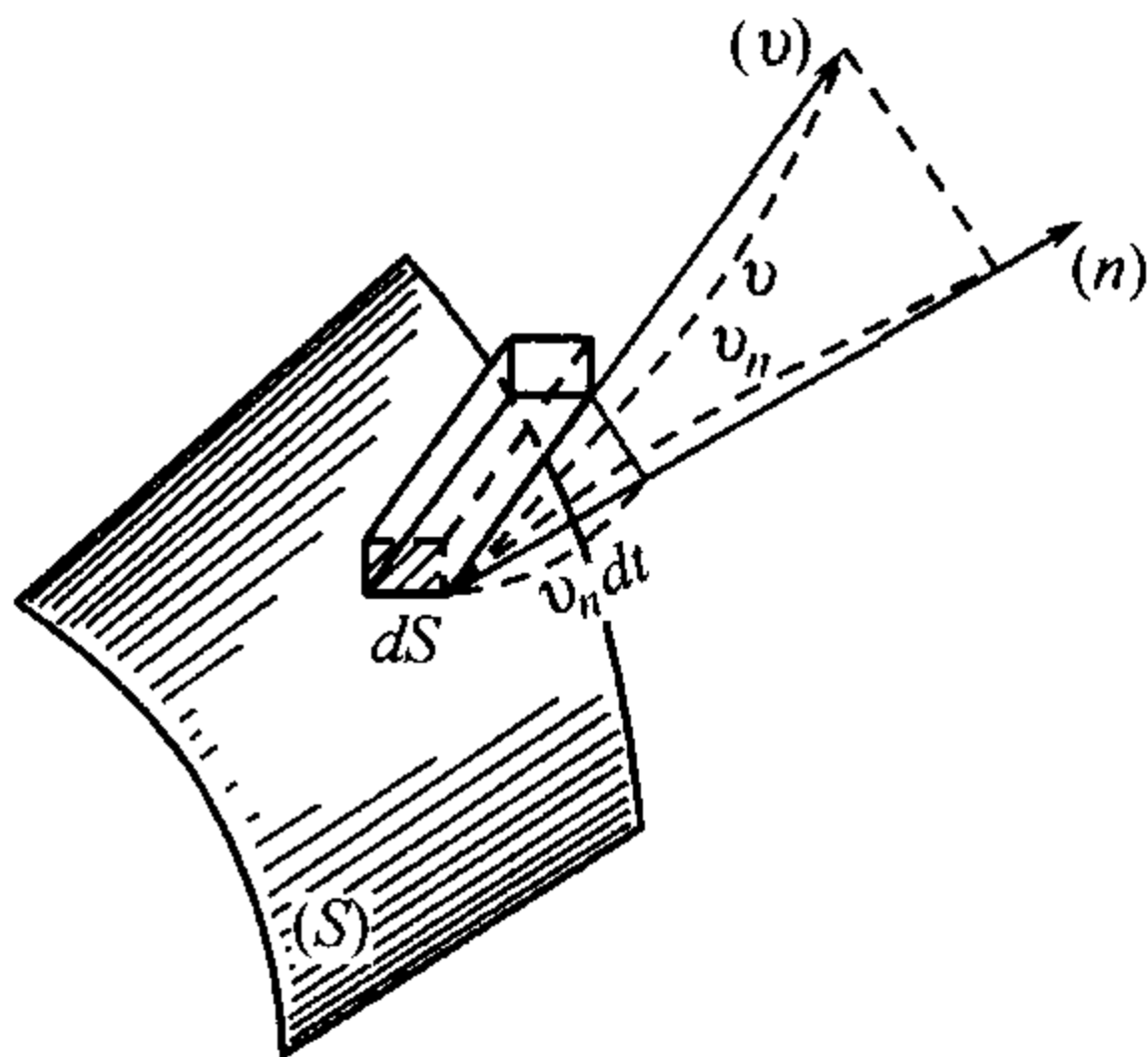


图 116



高的柱形 (图 116), 其中假定法线  $n$  向着所选的侧面的. 如以  $\rho$  表流体的密度, 它同样既与点的位置有关, 也与时间有关, 则流体流过  $(dS)$  的质量将为

$$\rho dS v_n dt.$$

对整个曲面  $(S)$  来说, 便得

$$dt \iint_{(S)} \rho v_n dS.$$

在单位时间内流体流过的量  $Q$  可表作积分

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n dS, \quad (5)$$

这积分读者将认得出是  $\vec{\rho v}$  通过曲面  $(S)$  的“向量流量”!

2) 同样也可以来谈热流量. 易见 [以第 666 目 2) 的记法] 在时间  $dt$  内有等于

$$dt \iint_{(S)} q_n dS$$

的热量流过了曲面  $(S)$ . 如将流过的热量变到单位时间内, 则得

$$\iint_{(S)} q_n dS,$$

也就是  $\vec{q}$  通过  $(S)$  的“向量流量”. 因此, 向量

$$\vec{q} = -k \text{grad} U$$

称为“热流向量”.

**附注** 因为在 1) 和 2) 中考虑的两个过程中, 没有假设是定常的, 那么, 一般说来, 事实上量  $Q$  本身与时间有关, 它具有速度的性质, 更准确地说可称为液体 (或热量) 在所考虑的时刻流经  $(S)$  的数量增长的速度.

3) 如考察一牛顿引力场 [在 666,1) 中已谈到过]

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

则这一向量通过曲面  $(S)$  的流量

$$\iint_{(S)} F_n dS = -m \iint_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

与在  $O$  点看到曲面  $(S)$  的立体角有关系 [653].



**668. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 · 散度** 回到向量  $\vec{A}$  的一般情况, 考察一由闭曲面  $(S)$  所范围的立体  $(V)$ ;  $n$  将表示曲面向外的法线. 则由高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 [651, (5)], 如在它里面令  $P = A_x, Q = A_y, R = A_z$ , 向量  $\vec{A}$  通过曲面  $(S)$  向外的流量可变为三重积分:

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) ds = \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$

在三重积分记号下的式子称作向量  $\vec{A}$  的散度, 并表作记号

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (6)$$

因此高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式可重写成

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (7)$$

这是最常用的形状.

刚才所介绍的散度是一纯量, 但它的定义形式上与坐标轴的选法有关. 为了要克服这一缺陷, 我们进行如下: 将点  $M$  用任一立体  $(V)$  围起来, 设  $(V)$  的表面为  $(S)$ , 并写出公式 (7); 如两端用立体的体积  $V$  相除并将立体  $(V)$  缩成点  $M$  而变到极限, 则 [644, 8°] 右端就恰得点  $M$  处的  $\operatorname{div} \vec{A}$ . 这样,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_{(S)} A_n dS}{V}; \quad (8)$$

这一等式同样可作为散度的定义, 且在这一形式下的定义已经不与坐标系的选择有关了.

这一次向量场  $\vec{A}$  产生出一散度  $\operatorname{div} \vec{A}$  的纯量场.

注意, 散度定义 (6) 可用哈密顿符号向量  $\nabla$  写作:  $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$ ; 如回想到二向量的数量积表示式 (1), 这就很清楚了.

**例** 我们来讨论一不可压缩流体 ( $\rho = 1$ ) 当有泉源(或漏洞)存在时的运动. 流体在单位时间内通过  $(S)$  所流出的量, 亦即向量速度  $\vec{v}$  的流量

$$\iint_{(S)} v_n dS$$

[参看 667, 1)] 称作包含在闭曲面  $(S)$  内面的泉源生产率. 如泉源在所考察的区域内连续地分布, 则泉源密度概念就可被引入. 这说的就是包围点  $M$  的立体  $(V)$  内泉源生产率在单位体积上计出的极限值, 即

$$\lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_{(V)} v_n dS}{V}.$$

但是, 如我们刚才已经看到的 [参看 (8)], 这一极限等于  $\operatorname{div} \vec{v}$ ; 这样,  $\operatorname{div} \vec{v}$  亦是泉源密度.

对于有热源的热流量也可作同样的考察, 只需取热流向量代替速度向量.

**669. 向量的环流量 · 斯托克斯公式 · 旋度** 又设已知任一向量场  $\vec{A}(M)$ . 沿所考察区域范围内的某一曲线  $(l)$  上所取的积分

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl,$$



称作向量  $\vec{A}$  沿曲线  $(l)$  的线性积分. 在闭曲线情形下这一积分称为向量  $\vec{A}$  沿  $(l)$  的环流量.

如场  $\vec{A}$  是一力场, 则线性积分表示当点沿曲线位移时场中力的功 [参照 554].

设想由闭曲线  $(l)$  所张的某一曲面  $(S)$ . 则按读者所熟知的斯托克斯公式 [639(21\*)], 向量  $\vec{A}$  沿这一闭路的环流量可表作曲面积分:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \left\{ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \mu + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \nu \right\} dS.$$

在坐标轴上以

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (9)$$

为射影的向量称作向量  $\vec{A}$  的旋度, 并表作记号  $\text{rot } \vec{A}$ .<sup>①</sup>

因此, 在向量形式下斯托克斯公式可写作:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \text{rot}_n \vec{A} dS. \quad (10)$$

向量沿一闭路的环流量等于旋度通过这一闭路所张曲面的流量. 同时闭路的环行方向与曲面的侧面必须如在第 620 目中所说明者彼此相对应.

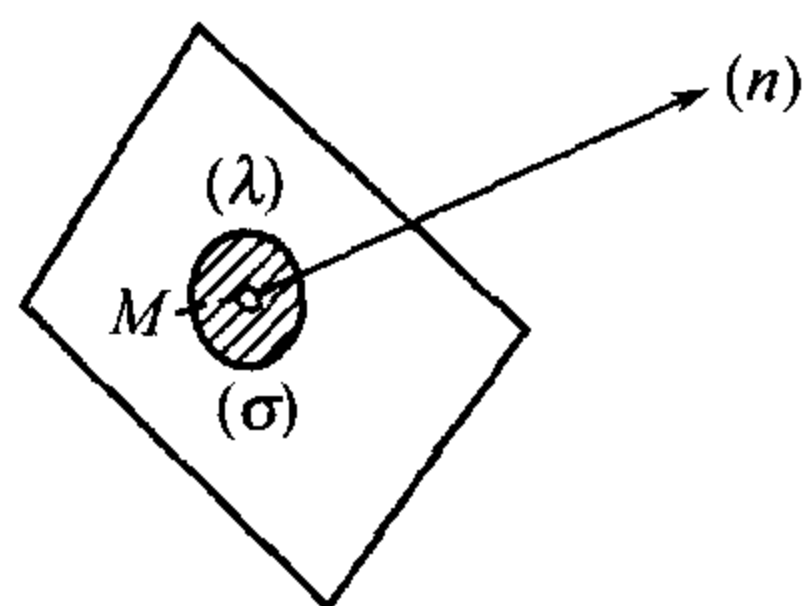


图 117

上面所给“旋度”概念定义具有同样的缺点: 在它里面利用了确定的坐标系. 取好自一已知点  $M$  出发的任一方向  $n$ , 在与  $n$  相垂直的平面上将它用一以闭路  $(\lambda)$  为边界的平面块  $(\sigma)$  围起来 (图 117). 则由斯托克斯公式

$$\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda = \iint_{(\sigma)} \text{rot}_n \vec{A} d\sigma,$$

将这等式的两端除以所述小块的面积  $\sigma$  后并将后者“缩”成所给的点, 变到极限时得

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{(\sigma) \rightarrow M} \frac{\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda}{\sigma}. \quad (2)$$

因而得以确定向量  $\text{rot } \vec{A}$  在任何轴上的射影, 这就是说, 不需事先选取坐标系就能确定向量本身.

特别指出, 这里向量场  $\vec{A}$  产生一旋度向量场  $\text{rot } \vec{A}$ .

用哈密顿向量  $\nabla$  可简单地写出旋度的定义:  $\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$  [参看向量积射影的表示式 (2)].

**例** 考察某一刚体的任意运动. 如在它上面固定一点  $O$  (图 118), 则如在运动学中所证明的, 在任何时刻刚体点的速度场  $\vec{v}$  可由公式  $\vec{v} = \vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r}$  来确定, 其中  $\vec{v}^O$  是“平动速度”, 即点  $O$  的速度,  $\vec{\omega}$  是瞬时“角速度”, 而  $r$  是连接  $O$  与刚体任意点  $M$  的位径向量. 这一向量在任意坐标系  $Oxyz$  各轴上的射影将为 [参看 (2)]

$$v_x^O + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y^O + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z^O + \omega_x y - \omega_y x.$$

<sup>①</sup>由英文字 rotation= 旋转而来; 记号  $\text{curl } \vec{A}$  也常用——这是由英文字 curl 而来, 表明“鬃曲”.

<sup>②</sup>这里容易观察到某种区域微分法, 让读者去论证它.

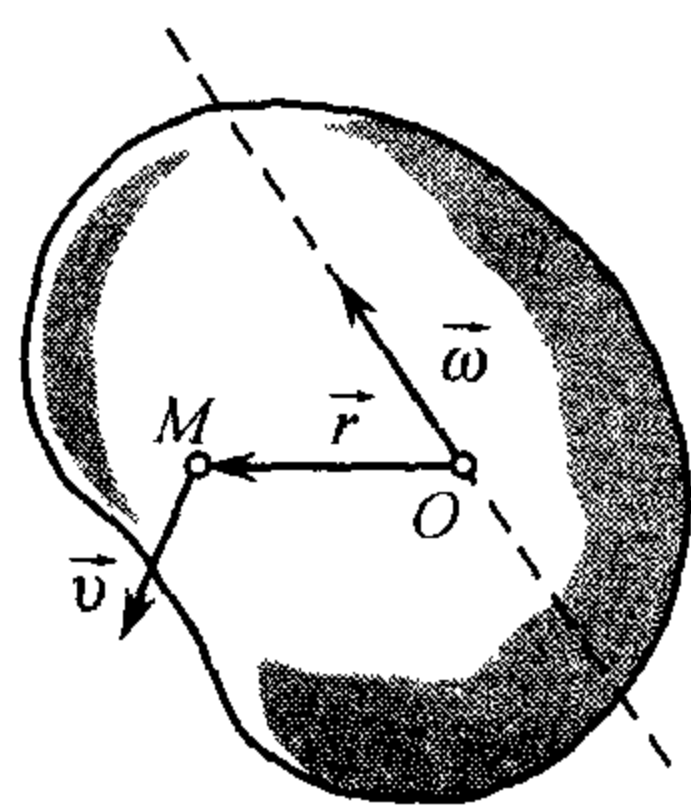


图 118



如利用 (9) 式, 计算出这一场的旋度的射影,<sup>110)</sup> 则得  $2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$ , 所以

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$$

因此, 除去一数字因子外, 速度场  $\vec{v}$  的旋度恰恰给出瞬时角速度, 由此就有“旋度”这一称呼.

**670. 特殊的场** 在本目及以下各目中, 为了简单, 仅限于考虑连通的直角形状的空间区域中的场, 特别是整个三维空间中的场.

1) 位势场 对于向量场  $\vec{A}$ , 如果存在一个数量场  $U$ , 使得  $\vec{A}$  是它的梯度:

$$\vec{A} = \text{grad} U,$$

那么  $\vec{A}$  称为位势场.

上述等式可分解为如下三个等式 [参看 (4)]:

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

且与如下断言等价: 表达式  $A_x dx + A_y dy + A_z dz$  是函数  $U(x, y, z)$  的全微分. 原函数  $U$  称为场  $\vec{A}$  的**势函数** (或称为**数量势**).

进一步解释为我们已知的 [564; 641, 条件 (B)], 可以说:

为使场  $\vec{A}$  是势场, 必须且只需在整个所考虑的区域中成立等式

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

即使得  $\text{rot } \vec{A}$  为零.<sup>111)</sup>

这样一来, 位势场的概念原来和“无旋”场的概念是一致的.

借助于在 564 与 641 目所说过的, 可以这样来描述位势场: 沿简单闭路的环流量总是为零, 沿连接场中任意两点的曲线上的曲线积分与曲线的形状无关.

势函数本身可准确到任意常数项不计以外, 由曲线积分

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl$$

确定, 其中曲线  $(l)$  是在所考虑的区域中连接某一固定点  $M_0$  到变动的点  $M$  的任意曲线.

所有这些事实都很自然地可用位势力场的情形时功的术语来解释. 众所周知, 无论是在单个的引力中心的情况, 还是当是连续分布的质量的引力时的牛顿引力场的情况都是如此.

<sup>110)</sup> 这里假定某个时刻  $t = t_0$  是固定的, 而量  $v_x^O, v_y^O, v_z^O, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  对坐标  $x, y, z$  看作是常量.

<sup>111)</sup> 提醒一下, 对函数  $A_x, A_y, A_z$  的偏导数的存在性与连续性, 先前已作过假定 [参看 665 目].



2) 管量场 对向量场  $\vec{A}$ , 如果存在向量  $\vec{B}$ , 使得  $\vec{A}$  是其旋度:

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{B}, \quad (11)$$

那么向量场  $\vec{A}$  称为**管量场**或**管形场**(来源于希腊文  $\sigma\omicron\lambda\acute{\epsilon}\nu$ ). 这个等式可分解为如下三个等式 [参看 (9) 式]:

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \quad (12)$$

向量  $\vec{B}$  本身称为场  $\vec{A}$  的**向量势**.

现在证明如下定理, 它给出易于检验管性的条件.

为使场  $\vec{A}$  是管量场, 其必要充分条件是在整个所考虑的区域中成立等式

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (112)$$

**必要性** 用计算直接验证: 如果  $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$ , 那么 [参看 (12) 式]

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} = \text{div } \text{rot } \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

**充分性** 设等式 (13) 成立. 我们力图至少求出 (12) 式的一个特解  $(B_x, B_y, B_z)$ . 为了简化, 我们先令  $B_z \equiv 0$ . 那么方程 (12) 的前两式成为

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y,$$

对  $z$  求积分给出  $B_x$  与  $B_y$  的下述表达式:

$$B_y = - \int_{z_0}^z A_x(x, y, z) dz + \varphi(x, y), \quad B_x = \int_{z_0}^z A_y(x, y, z) dz,$$

其中  $z_0$ —— $z$  的任意一个容许值, 而  $\varphi(x, y)$ ——还应确定的三元函数. 按照**莱布尼茨法则**对上述积分求导得

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = - \int_{z_0}^z \frac{\partial A_x}{\partial x} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^z \frac{\partial A_y}{\partial y} dz.$$

为了满足方程 (12) 的最后一式, 应用等式 (13), 得到函数  $\varphi$  这样的条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x(x, y, z_0),$$

由此, 利用对  $x$  的积分很容易确定  $\varphi$  (准确到与  $y$  有关的自由项).

<sup>112)</sup> 参看脚注 111).



这样一来, 我们的断言得到了证明. 令人引起兴趣的还有: 由方程 (11) 确定向量势  $\vec{B}$  的时候, 任意到什么程度. 如果  $\vec{B}^{(0)}$  是任意一个被确定的 (11) 的解, 那么通解  $\vec{B}$  由条件  $\text{rot}(\vec{B} - \vec{B}^{(0)}) = 0$  确定, 且根据 2),  $\vec{B}$  可表为

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{C}$$

的形式, 其中  $\vec{C}$  是任意一个位势向量.<sup>113)</sup>

由 652 目的考虑, 可得出结论: 描述管量场的条件 (13) 与要求向量  $\vec{A}$  通过任意闭的[范围某一立体  $V$  的]曲面  $(S)$  的流量等于零是等价的.

现在来考察一作为立体  $(V)$  向量管 (图 119) 介于它二任意断面  $(S_1)$  及  $(S_2)$  之间的一段, 以  $(S_3)$  表管子本身的侧面. 则由上所述,

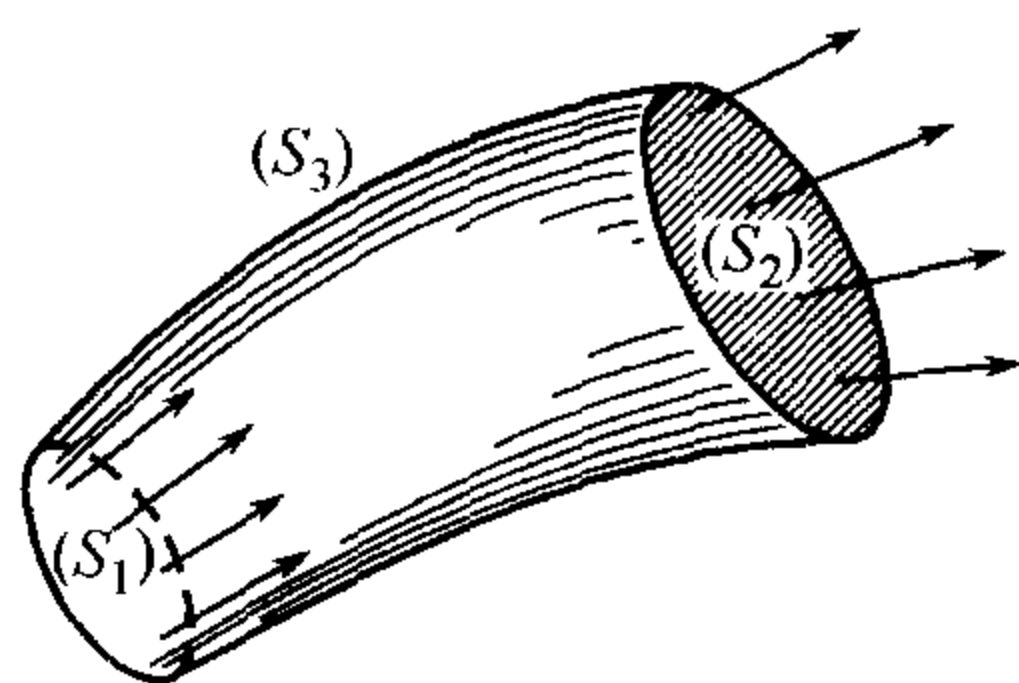


图 119

$$\left\{ \iint_{(S_1)} + \iint_{(S_2)} + \iint_{(S_3)} \right\} A_n dS = 0,$$

且在所有情形下法线都向外. 沿曲面  $(S_3)$ , 显然,  $A_n = 0$  [665]; 如在断面  $(S_1)$  处改变法线方向使它与  $(S_2)$  处的方向一致, 则得等式

$$\iint_{(S_1)} A_n dS = \iint_{(S_2)} A_n dS.$$

因此我们得到管量场的如下性质: 筒形向量通过一向量管的各横断面的流量是一常数; 它称作向量管的强度.

容易说明, 所指出的性质完全描述了管量场. 这可以从对向量  $\vec{A}$  的散度的公式 (8) 中一下子推出: 如果把包含所选的点  $M$  的立体  $(V)$ , 即作为向量管的一段, 那么  $\iint_{(S)} A_n dS = 0$ , 和它同时有  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

如果回到前述的向量场的流体力学解释, 那么就是在不可压缩流体的情形, 且在无源 ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) 的情况下通过向量管的横截面的流量对所有的横截面都有相同的值.

3) 任意向量场的分解 我们现在说明, 任意向量场  $\vec{A}$  总可以表为位势向量  $\vec{A}'$  与管形向量  $\vec{A}''$  之和的形式:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}'' \quad (\text{rot } \vec{A}' = 0, \text{div } \vec{A}'' = 0).$$

我们立刻假定  $\vec{A}' = \text{grad } \Phi$ , 其中  $\Phi$  是待定的数量函数, 等式  $\text{rot } \vec{A}' = \text{rot grad } \Phi = 0$  已被这一点保证了. 现在  $\vec{A}'' = \vec{A} - \text{grad } \Phi$ , 因此  $\Phi$  应当在条件

$$\text{div } \vec{A}'' = \text{div } \vec{A} - \text{div grad } \Phi = 0$$

<sup>113)</sup> 此处与今后, 为了简洁, 向量场有时简称为向量.



下来选取. 但是

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi,$$

这里通常  $\Delta \Phi$  指的是拉普拉斯算子. 这样一来, 为了确定  $\Phi$ , 我们有二阶偏导数的方程

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{A},$$

此方程总是有解的 (甚至有解的一个无穷集合).

**671. 向量分析的逆问题** 这个问题就是按预先给定的散度  $\operatorname{div} \vec{A} = F$  ( $F$  是数量函数) 及旋度  $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$ , 求向量场  $\vec{A}$ . 由于上一目中的 2), 显然为了在所有情况下的可解性, 需要条件  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ; 我们假定这个条件是满足的.

自然 [如果回忆起上一目中的 3)] 是要求出解  $\vec{A}$  为如下这样一组解  $\vec{A}'$  与  $\vec{A}''$  之和的形式:

$$(1) \operatorname{rot} \vec{A}' = 0, \operatorname{div} \vec{A}' = F; \quad (2) \operatorname{rot} \vec{A}'' = \vec{B}, \operatorname{div} \vec{A}'' = 0.$$

(1) 由第一个方程, 根据上一目中的 1),  $\vec{A}' = \operatorname{grad} \Phi$ . 为了确定  $\Phi$ , 转向第二个方程:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = F \quad \text{或} \quad \Delta \Phi = F,$$

因此  $\Phi$  是我们已经知道的微分方程的一个解.

(2) 由于 (按假定)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , 根据上一目中的 2), 所考虑的方程组中第一个方程有解.<sup>①</sup> 用  $\vec{A}_0''$  表示该方程的任意一个确定的特解, 其通解可记为  $\vec{A}'' = \vec{A}_0'' + \vec{C}$  的形式, 其中  $\vec{C}$  是任意的位势向量,  $\vec{C} = \operatorname{grad} \Phi$ . 余下还要满足 (2) 组中第二个方程. 即由条件

$$\operatorname{div} \vec{A}'' = \operatorname{div} \vec{A}_0'' + \Delta \Phi = 0 \quad \text{或} \quad \Delta \Phi = -\operatorname{div} \vec{A}_0''$$

确定  $\Phi$ .

所提出的问题得以解决. 现在来研究在确定所求的向量  $\vec{A}$  时, 任意的程度. 不难想到, 把这样的向量  $\vec{G}$  分成两个解,  $\vec{G}$  满足两个方程:

$$\operatorname{div} \vec{G} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{G} = 0.$$

由其中第二个给出:  $\vec{G} = \operatorname{grad} H$ , 而由第一个方程得到  $\Delta H = 0$ :  $H$  是任意的调和函数. 如果给定“边界条件”, 它将唯一地确定上述调和函数, 于是向量  $\vec{A}$  便可唯一地得到.

本目与上一目中的结果可以推广到一般形状的区域, 但需要强调的是, 这种区域应是满足单连通要求的这种或那种类型, 要视具体情况而定.

<sup>①</sup>请读者注意: 这里的符号与上一目中的 2) 符号不同.



**672. 应用** 在本节末, 我们来给出应用向量分析与向量形式的基本积分公式的各种例子. 我们从应用奥斯特洛格拉得斯基公式及与之有关概念的例子开始.

1° 连续性方程 重新考察一流体在无泉源时的运动, 但一般说来, 我们不再假定它是不可压缩的了. 设流体连绵地充满于空间或其一确定的部分, 我们从流体中割下任一由曲面  $(S)$  所范围的立体  $(V)$ . 我们已知, 在单位时间内自这一立体向外流出的流量  $Q$  可以公式 (5) 来表示. 我们用另一法来计算这同一量. 如考虑到在时间  $dt$  内密度  $\rho$  改变一值  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ , 则立体元素  $(dV)$  的质量  $\rho dV$  就改变  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$ , 而整个所考察的立体的质量改变

$$dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

这一流量必须在时间  $dt$  内流进立体; 改变它的符号, 便得在这一时间内向外流出的流量. 最后, 如将流出流量改作单位时间内, 则得出

$$Q = - \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

为了使  $Q$  的两表示式相等较为方便, 将曲面积分 (5) 按高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 (7) 同样变作三重积分. 用此法我们便得

$$\iiint_{(V)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right\} dV = 0.$$

因为这一等式对在所考察区域的范围内的任何立体  $(V)$  都成立, 故由 644,8°, 应得恒等式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

这一等式大家称作**连续性方程**.

2° 理想流体运动的基本方程 在一般情形下假定在流体上作用着有外力及内力. 我们将外力当作与质量成正比, 所以, 如  $\vec{F}$  是作用在单位质量上的力, 则在流体元素  $(dV)$  上有力  $\rho dV \vec{F}$  在作用着.

至于谈到内力, 是指从流体分出来一块  $(V)$  而其余流体作用在这块上的力. 于是理想流体就可这样来说明其特征: 这些力是沿着立体表面  $(S)$  的法线而指向立体内部的法线压力. 且这时落在单位面积上压力  $p$  本身的大小与压力所加于的无穷小面块的方向无关, 仅与它的坐标有关. 因此, 如以  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  表曲面向外法线的方向余弦, 则在曲面元素  $(dS)$  上作用一力, 它在坐标轴上的射影为

$$-pdS \cos \lambda, -pdS \cos \mu, -pdS \cos \nu.$$

在整个立体  $(V)$  上将作用有一力, 可由射影

$$- \iint_{(S)} p \cos \lambda dS, - \iint_{(S)} p \cos \mu dS, - \iint_{(S)} p \cos \nu dS$$

来决定. 或者如再采取按高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式的变换, 可由积分

$$- \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x} dV, - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial y} dV, - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial z} dV$$



来决定. 加在流体元素 ( $dV$ ) 这一部分上的力将有射影

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dV, -\frac{\partial p}{\partial y}dV, -\frac{\partial p}{\partial z}dV,$$

因此, 作为一向量, 可表作

$$-dV \operatorname{grad} p.$$

如现在以  $\vec{a}$  表对应于元素 ( $dV$ ) 的加速度, 则按牛顿运动定律,

$$\rho dV \vec{a} = \vec{F} \rho dV - dV \operatorname{grad} p,$$

于是, 最终有

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (14)$$

这就是在向量形式下的理想流体运动的基本方程. 如变到在三坐标轴上的射影, 它可拆成三个纯量方程.

3° 热传导方程 作为最后一例我们来考察一物体在内部热传导的作用下且无热源时的热状态.

如取出由曲面 ( $S$ ) 所围的一立体 ( $V$ ), 则在 667,2) 中已经看到, 在单位时间内, 自立体通过曲面 ( $S$ ) 向外流出的热量等于

$$Q = - \iint_{(S)} k \operatorname{grad}_n U dS$$

(我们保留以前的记法). 在这一式子中变号后并将它变作三重积分, 便得向立体内部流入的热量的表示式

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) dV. \quad (15)$$

这一热量引起立体 ( $V$ ) 内部温度的改变, 且可换一方法来计算. 在时间  $dt$  内温度  $U$  增加  $dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$  需要对立体元素 ( $dV$ ) 输入热量

$$cdU \rho dV = c \frac{\partial U}{\partial t} dt \rho dV,$$

其中  $c$  表物体在所考察点处的热容量. 在时间  $dt$  内整个立体就要吸收热量

$$dt \iiint_{(V)} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV;$$

如将它改在单位时间内, 则得

$$\iiint_{(V)} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV. \quad (16)$$

将 (11) 式及 (12) 式等置, 便得等式

$$\iiint_{(V)} \left\{ c \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) \right\} dV = 0,$$

它对取在所考察区域内的任何立体 ( $V$ ) 都适合. 于是, 与上面 1) 中一样, 可以断定, 在这一区域内恒有

$$c \rho \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U).$$



这就是热传导方程.

在均匀介质的情况下, 它作下形

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U,$$

其中  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ,  $\Delta$  表拉普拉斯运算号:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

最后, 当温度  $U$  稳定分布时, 它就与时间无关而满足拉普拉斯方程

$$\Delta U = 0,$$

亦即是点坐标的调和函数.

现在转到斯托克斯公式及与其有关概念的应用. 这属于液体运动方面的应用.

4° 以后, 在考察某一时刻流体内部的线或面时, 我们将感兴趣于: 在另一时刻这些相同的流体小块形成什么样子. 在这种研究中, 下一辅助断语将起重要的作用, 速度沿一闭流体路线的环流量对时间的导数等于加速度沿同一闭路的环流量.

在时刻  $t_0$  时考察任一闭路  $(L_0) = (A_0 B_0)$ . 取一确定在它上面的点  $M_0$  位置的参数. 例如, 弧长  $\sigma = A_0 M_0$  (图 120); 如在时刻  $t$  时, 流体闭路  $(L_0) = (A_0 B_0)$  变成了  $(L) = (AB)$ , 则点  $M_0$  所变到的点  $M$  的位置可由形如

$$x = \varphi(\sigma, t), \quad y = \psi(\sigma, t), \quad z = \chi(\sigma, t) \quad (0 \leq \sigma \leq \bar{\sigma})$$

的方程来确定.

速度的环流量

$$J = \int_{(L)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_0^{\bar{\sigma}} \left( v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (17)$$

可按莱布尼茨规则对  $t$  微分:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_0^{\bar{\sigma}} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\bar{\sigma}} \left( v_x \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma \partial t} + v_y \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma \partial t} + v_z \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial t} \right) d\sigma \\ &= \int_0^{\bar{\sigma}} \left( a_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + a_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + a_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\bar{\sigma}} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \sigma} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

所得二积分中的第一个是加速度的环流量

$$\int_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

而第二个可直接计算出来, 因为积分号下的式子是

$$\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} v^2$$

对  $\sigma$  的导数; 它等于

$$\frac{1}{2} v^2 \Big|_A^B,$$

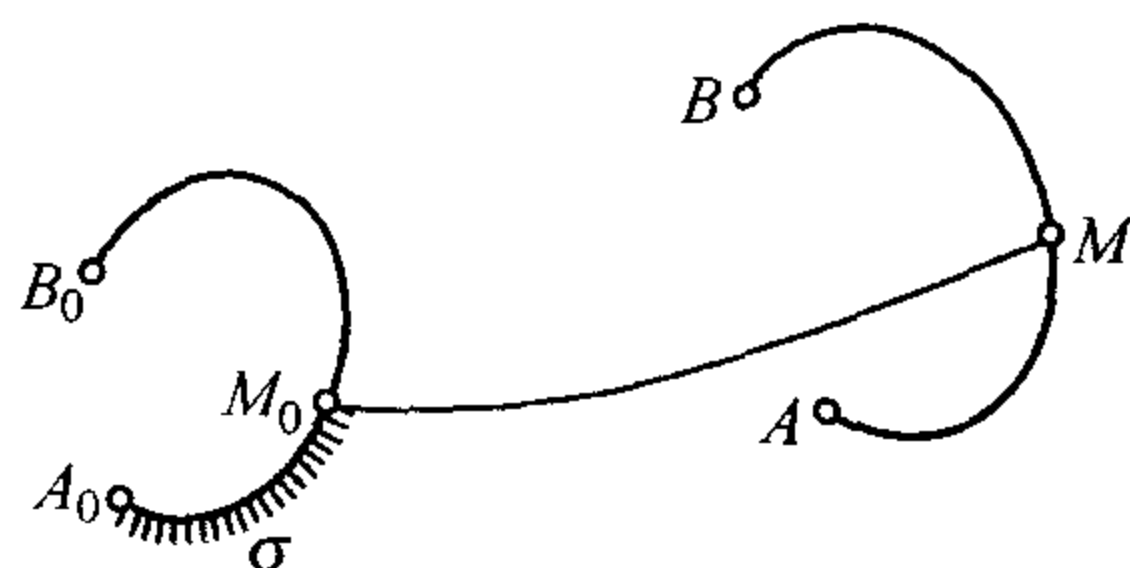


图 120



在  $(L)$  为闭路的情形时为 0.

这样, 最终有:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad (18)$$

这就是所要求证的.

5° 设我们有一在 2° 意义下的理想流体. 此外, 还作两个假定: 1) 力  $\vec{F}$  有一位势, 即

$$\vec{F} = \text{grad} U;$$

2) 密度  $\rho$  是压强的单值函数:<sup>①</sup>

$$\rho = \varphi(p).$$

我们引进一量

$$\Phi(p) = \int \frac{dp}{\varphi(p)};$$

则

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

同样,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

所以

$$\text{grad} \Phi = \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

我们已有过流体动力学的基本方程 [672(14)]. 现在它可写作

$$\vec{a} = \text{grad}(U - \Phi).$$

如将它代入上面所得等式 (18) 中, 则有

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(L)} d(U - \Phi) = 0, \quad \text{所以 } J = \text{常数}.$$

因此, 速度沿任一闭流体路线的环流量在时间过程中不变. 这是汤姆森 (W. Thomson) 定理.

作为一简单推论, 由此得出一有趣的拉格朗日命题: 如所考察的流体质量在某一确定时刻没有旋度, 则它在任何其它时刻也无旋度. 事实上, 没有旋度相当于速度沿任一闭路的环流量为零. 如这一情况有一次发生了, 则由汤姆森定理它就永远如此.

6° 现在我们可以来证明有关于“涡”线及“涡”管<sup>②</sup>的赫尔姆霍尔茨的两个重要定理了. 这时我们一直保留在 5° 开始处所述的假定.

**涡线保持定理** 流体在某一时刻形成涡线的部分在运动的整个过程中依旧形成涡线.

我们开始对涡面来证明它较为简便. 设  $(S_0)$  是在时刻  $t_0$  时的这样一曲面, 则在它的每一点处速度的旋度

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

<sup>①</sup>满足后面这一要求的流体有时称作“正压性的”.

<sup>②</sup>一旋度场的向量线或向量面 (特别, 向量管) 分别称为涡线或涡面 (特别, 涡管).



将在切于  $(S_0)$  的平面中, 即  $\Omega_n = 0$ . 如在曲面上取任一围成曲面的一部分  $(\sigma_0)$  的闭路  $(\lambda_0)$ , 则由斯托克斯公式 [669, (10)],

$$\int_{(\lambda_0)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \iint_{(\sigma_0)} \Omega_n dS_0 = 0.$$

在时刻  $t$  时流体表面  $(S_0)$  变成了曲面  $(S)$ , 它的部分  $(\sigma_0)$  变成了  $(\sigma)$ , 而流体闭路  $(\lambda_0)$  变成了闭路  $(\lambda)$ , 但由汤姆森定理现在

$$\int_{(\lambda)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0,$$

所以 (再由斯托克斯公式)

$$\iint_{(\sigma)} \Omega_n dS = 0.$$

由于  $(\sigma)$  的任意性由此易得出结论:<sup>①</sup>沿  $(S)$  恒有

$$\Omega_n = 0,$$

所以曲面  $(S)$  也是涡面.

因为涡线永远可看作两涡面的交线, 故定理得证. 特别, 由此也得涡管的不变性.

现在已非常容易得到:

**涡管强度保持定理** 任一涡管的强度在整个运动过程中保持一常数.

由斯托克斯公式, 涡管的强度亦即旋度通过管子横断面的流量可化为速度沿这一断面边界的环流量. 此时所需结论可直接由汤姆森定理 [5°] 推得.

我们只预备讨论这样一些应用所引概念及基本公式的例题了.

## §5. 多重积分

**673. 两立体间的引力及位势问题** 已经研究的几种定积分: 简单的、二重的以及三重的, 还不能概括分析学及其应用的需要.

我们用二立体引力问题 来说明这一点. 我们将以  $x_1, y_1, z_1$  表第一立体  $(V_1)$  的点的坐标, 而以  $x_2, y_2, z_2$  表第二立体  $(V_2)$  的点的坐标. 设这两立体质量的分布以这些坐标的函数给出:  $\rho_1 = \rho_1(x_1, y_1, z_1), \rho_2 = \rho_2(x_2, y_2, z_2)$ . 如在每一立体中分别取出质量元素  $\rho_1 dx_1 dy_1 dz_1$  及  $\rho_2 dx_2 dy_2 dz_2$ , 则由牛顿定律, 第二立体以力

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}^2} \textcircled{2}$$

作用于第一立体上, 其中  $r_{1,2}$  是元素间的距离:

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

<sup>①</sup>参看第 306 页脚注②.

<sup>②</sup>与通常一样, 我们令牛顿万有引力定律公式中的比例系数等于 1.



因为这一力自点  $(x_1, y_1, z_1)$  朝向点  $(x_2, y_2, z_2)$ , 故它的方向余弦为  $\frac{x_2 - x_1}{r_{1,2}}, \frac{y_2 - y_1}{r_{1,2}}, \frac{z_2 - z_1}{r_{1,2}}$ . 所以第一元素对第二元素的引力譬如说在  $x$  轴上的射影等于

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

第一立体吸引第二立体的合力的射影  $F_x$  可由将所求得的式子对两立体的所有元素相加得来, 亦即可表作一六重积分

$$F_x = \iiint \iiint \frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

它是展布在点  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  的六维区域  $(V) = (V_1) \times (V_2)$  上的, 其中  $(x_1, y_1, z_1)$  取自  $(V_1)$ , 而  $(x_2, y_2, z_2)$  取自  $(V_2)$ . 其它二射影亦可同样地表示.

与此相像, 量

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$$

是一元素在另一元素上的位势. 将这些式子相加, 得一立体在另一立体上的位势又作六重积分的形状:

$$W = \iiint \iiint \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{1,2}} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

如两立体相重, 则类似的积分被 2 除 (因为否则每一对元素就被算了两次!) 就给出立体在自身上的位势.

举一例, 我们试来计算一均匀 ( $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ) 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  在自身上的位势, 即计算积分

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint \iiint \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

$$\begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2 \end{matrix}$$

可以这样进行计算: 球体  $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2$  在一坐标为  $x_1, y_1, z_1$  与中心相距  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  的一元素  $dx_1 dy_1 dz_1$  上的位势我们是已经知道的 [650, 12)] 它可表作一三重积分且等于

$$\left( 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1. \textcircled{1}$$

剩下的就是要将对球体  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$  的一切元素的同样式子相加, 即还要取一个三重积分:

$$\iiint \left( 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1.$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$$

①应该考虑到, 这里所计算的位势所加在的点的质不是 1 而是  $dx_1 dy_1 dz_1$ ; 此外, 这里  $r_1$  是取在早先推出的公式中的  $a$  的地位.



变到球坐标时, 这很容易做出来. 最后得

$$W_0 = \frac{16}{15} \pi^2 R^5.$$

在这一情况下, 六重积分的计算化为了两个三重积分的计算, 并且其中之一已经是知道了的.

虽然在大多数情形下只引用与上面所研究的积分的样子相像的东西, 但现在我们仍转而建立此处所处理的一般概念.

**674.  $n$  维立体的体积 ·  $n$  重积分** 与在定义简单、二重、三重积分时我们利用过线段长、平面图形面积、空间立体体积诸概念相像, 在  $n$  重积分定义的基础中有  $n$  维区域体积<sup>①</sup>的概念. 对于最简单的  $n$  维区域—— $n$  维长方体

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n], \quad (1)$$

它的诸测度的乘积

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

称作体积. 由有限个这样的长方体组成的立体其体积应如何来了解自明. 可初等地证明: 这种立体的体积与怎样将它分为长方体无关.

考察内接于一已知  $n$  维立体 ( $V$ ) 以及外接于它的这种“长方状”立体时, 用常用的方法可建立立体 ( $V$ ) 的体积  $V$  的概念 [比照 340].

我们将只处理体积存在的立体; 对于由光滑的或分片光滑的曲面<sup>②</sup>所围的立体它根本是存在的, 特别, 对于最简单的为我们所熟悉的  $n$  维区域—— $n$  维单纯形

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq h$$

以及  $n$  维球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$$

体积都存在; 以后我们要计算它们的体积的 [676, 1) 及 2)].

设在区域 ( $V$ ) 中给出一  $n$  个变量的函数  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ; 则将这一区域分成许多元素部分, 并重复我们所熟知的其他运算 [参照 643], 使得  $n$  重积分的概念:

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}^n_{(V)} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (2)$$

<sup>①</sup>我们决定保留这一术语, 虽然它的意义当然随  $n$  而变化: 问题是“ $n$  维体积”. 也可以用“广延”、“度量”等类似字眼来代替它.

<sup>②</sup>这里所称光滑曲面就是在  $n$  维空间中用  $n-1$  个参数的  $n$  个参数方程所确定的图像, 且在方程中写出的参数函数与其各偏导函数都必须连续, 又导函数矩阵的第  $n-1$  阶行列式必须不同时为零.











自这些公式出发, 将 (7) 中里面的  $n-1$  重积分变换到变量  $\xi_2, \dots, \xi_n$ , 这由假定可按照与 (6) 相似的公式来做. 我们得到积分

$$\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{(\Delta_{x_1})}^{n-1} f(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) |J^*| d\xi_2 \cdots d\xi_n, \quad (9)$$

其中

$$J^* = \frac{D(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{D(\xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

现在在它里面将对  $x_1$  的积分放在第一个位置:

$$\int_{(\Delta^*)}^{n-1} d\xi_2 \cdots d\xi_n \int_{x_1^0(\xi_2, \dots, \xi_n)}^{X_1(\xi_2, \dots, \xi_n)} f(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) |J^*| dx_1,$$

并在里面的积分中按公式 (5) 中第一个将自变量  $x_1$  改为变量  $\xi_1$  (当固定  $\xi_2, \dots, \xi_n$  时). 我们得到

$$\int_{(\Delta^*)}^{n-1} d\xi_2 \cdots d\xi_n \int_{\xi_1^0(\xi_2, \dots, \xi_n)}^{\Xi_1(\xi_2, \dots, \xi_n)} f(x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1,$$

或者, 还原到  $n$  重积分时:

$$\int_{(\Delta)}^n f(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

为了要得到 (6), 剩下的只要证明恒等式

$$J = J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}.$$



但将复合函数 (8) 对  $\xi_2, \cdots, \xi_n$  微分并对函数  $\bar{\xi}_1$  的导数表示式利用隐函数微分法规则时, 求得

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \frac{\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}} \quad (i, k = 2, \cdots, n).$$

所以, 如在行列式  $J$  中在第  $k$  列元素上 ( $k = 2, \cdots, n$ ) 加上相对应的第一列元素的  $-\frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$  倍, 则它作下形:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix},$$

由此可见, 它等于  $J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$ , 这样证明就完成了.

注意, 我们暗暗地假定了  $n-1$  维区域  $(D_{x_1})$  及  $(\Delta_{x_1})$  每次都是由一个连续的、光滑或分片光滑的 (在所对应的空间内) 曲面所围起来的. 事先将区域  $(D)$  并与它同时将  $(\Delta)$  分裂为若干部分后, 总可以达到使以上所述至少对每一部分分开来看为真. 公式 (6) 既对这些部分成立将对整个区域放在一起也成立.

用通常的方法, 变量变换的公式可推广到反常积分的情形.

676. 例 1) 求  $n$  维单纯形 [162]

$$(T_n) : x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant h$$

的体积  $T_n$ .

解 我们有

$$T_n = \overbrace{\int \cdots \int}^n_{(T_n)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{h-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n.$$

在这些单积分中用公式

$$x_1 = h\xi_1, \quad x_2 = h\xi_2, \cdots, \quad x_n = h\xi_n,$$



逐次变换变量, 且不必利用一般公式 (6), 便得结果

$$\begin{aligned} T_n &= h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n \\ &= h^n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1}}^n d\xi_1 \cdots d\xi_n = \alpha_n h^n, \end{aligned}$$

其中  $\alpha_n$  表示与所提出的积分相类似但对应于  $h=1$  的积分的值.

而从另一方面, 我们有 (顺便利用已得的结果)

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \dots, \xi_{n-1} \geq 0 \\ \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1 - \xi_n}}^{n-1} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}.$$

所求得的递推关系式 (注意  $\alpha_1 = 1$ ) 给我们

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

所以最终有

$$T_n = \frac{h^n}{n!}.$$

2) 求  $n$  维球体 [162]

$$(V_n) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$$

的体积  $V_n$

解 这一个问题是要计算积分

$$V_n = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2}^n dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

令

$$x_1 = R\xi_1, x_2 = R\xi_2, \dots, x_n = R\xi_n, \textcircled{1}$$

易得  $V_n = \beta_n R^n$ , 其中数字系数  $\beta_n$  表半径为 1 的  $n$  维球体体积.

为要确定  $\beta_n$  我们进行变换

$$\beta_n = \int_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1}^n d\xi_1 \cdots d\xi_n = \int_{-1}^1 d\xi_n \int_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2}^{n-1} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1},$$

①这里同样一般公式(6)是不需要的: 将重积分按公式(4)表成逐次积分的形状后, 就可以再在每个单积分中分开一个个地变换变量.



里面的积分代表半径为  $\sqrt{1-\xi_n^2}$  的  $n-1$  维球体的体积, 因此等于  $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$ . 代入, 又得一递推关系式

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta,$$

或 [参看 534,4)(6)]

$$\beta_n = \beta_{n-1} \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

因为  $\beta_1 = 2$ , 故简易的计算就给出

$$\beta_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

而所求体积等于

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n.$$

对于偶数的  $n$  以及奇数的  $n$  得到公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m}, \quad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1}.$$

特别, 对于  $V_1, V_2, V_3$ , 自然就求得熟知的值  $2R, \pi R^2, \frac{4}{3}\pi R^3$ .

3) 计算 (反常的!) 积分

$$S = \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}. \quad (n > 2).$$

解 将所提出的积分变换为:

$$S = \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_{n-2} \times \int_{-\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2}} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2}}.$$

里面的积分现在等于  $\pi$ , 所以 [参看 2)]

$$S = \pi \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_{n-2} = \pi \beta_{n-2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

附注 很有趣的我们指出, 刚才所计算的积分差一个因子 2 表示  $n$  维球面  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  的面积. 不作详细探讨, 我们提一下, 在以显式给出曲面

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$



时, 其中点  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  在一  $n-1$  维区域  $(E)$  内变动, 这一曲面的面积可表作积分

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{(E)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2} dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad ①$$

特别, 对半球面

$$x_n = \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2},$$

我们有

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_n} \\ &= \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

因此, 半径为 1 的  $n$  维球面面积等于  $2\pi\beta_{n-2}$ ; 在半径为  $R$  的球时, 其面积显然是

$$2\pi\beta_{n-2}R^{n-1} = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}.$$

这一结果是属于雅可比的.

#### 4) 求证狄利克雷公式

$$\overbrace{\int \cdots \int}^n_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)} \quad (p_1, \dots, p_n > 0).$$

由于当  $n=2$  时公式已经确立起来过 [597,12);617,14)], 我们将应用数学归纳法. 设它对  $n-1$  重积分正确. 将公式左端重写为形如

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1-x_n}} x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

后, 在里面的积分中进行变换

$$x_1 = (1-x_n)\xi_1, \dots, x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1}, \quad ②$$

再应用狄利克雷公式到  $n-1$  重积分. 我们将得

$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)} \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1-x_n)^{p_1 + \cdots + p_{n-1}} dx_n;$$

①它的结构完全与平面曲线弧长的公式 [329,(4a)] 以及曲面面积的公式 [626,(5)] 相像, 在这两种情况下考虑的都是显的已知式.

②参看第 322 页上脚注.



如将积分用它的  $\Gamma$  表示式:

$$\frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n+1)}$$

来代替, 便得所需结果.

5) 容易推广狄利克雷公式:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1}} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n} + 1\right)} \quad (a_i, \alpha_i, p_i > 0). \end{aligned}$$

如变到新的变量  $\xi_i = \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),<sup>①</sup> 这一公式就化为已证过的公式.

特别, 当  $p_1 = \cdots = p_n = 1, \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 2, a_1 = \cdots = a_n = R$  时, 由此又可得到  $n$  维球体体积  $V_n$  的公式<sup>②</sup>[参看 2)].

6) 特别指出在  $n = 3$  时的狄利克雷公式:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha \beta \gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + 1\right)} \quad (p, q, r > 0), \end{aligned}$$

它在确定所述形状均匀立体的体积、静矩、惯矩以及离心矩时都有用处.

例如, 对椭球体  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$  ( $\alpha = \beta = \gamma = 2$ ) 包含在第一卦限内的部分, 我们得到 (将密度算作 1):

对  $p = q = r = 1$ .

$$V = \frac{abc}{8} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\pi}{6} abc,$$

对  $p = 2, q = r = 1$ ,

$$M_{yz} = \frac{a^2 bc}{8} \frac{\Gamma(1) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16} a^2 bc,$$

对  $p = 3, q = r = 1$ ,

$$I_{yz} = \frac{a^3 bc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\pi}{30} a^3 bc,$$

<sup>①</sup> 参看第 322 页上脚注.

<sup>②</sup> 只要注意到, 在限制于变量的正值时, 狄利克雷公式仅直接给出体积的  $\frac{1}{2^n}$ .



对  $p = 1, q = r = 2$ .

$$K_{yz} = \frac{ab^2c^2}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{15} ab^2c^2, \text{等等.}$$

7) 求证刘维尔公式 ( $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ ):

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n \varphi(x_1 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n - 1} du, \end{aligned}$$

其中假定了右端的单积分绝对收敛.

对  $n = 2$  这一公式已经知道 [597,16); 611,17); 617,14)]. 设它对  $n - 1$  重积分为真. 被证公式的左端可重写为:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1}}^{n-1} x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ & \times \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} \varphi(x_1 + \dots + x_n) x_n^{p_n-1} dx_n. \end{aligned}$$

如令

$$\psi(t) = \int_0^{1-t} \varphi(t + x_n) x_n^{p_n-1} dx_n,$$

则里面的积分此处可用  $\psi(x_1 + \dots + x_{n-1})$  来代替, 因而由刘维尔公式应用到这  $n - 1$  重积分上去, 它可表作:

$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1})} \int_0^1 \psi(t) t^{p_1 + \cdots + p_{n-1} - 1} dt.$$

将  $\psi(t)$  换作它的表示式, 我们就将所得的逐次积分变换为二重积分:

$$\iint_{\substack{t, x_n \geq 0 \\ t + x_n \leq 1}} \varphi(t + x_n) t^{p_1 + \cdots + p_{n-1} - 1} x_n^{p_n-1} dt dx_n,$$

要想得到所需结果, 只要应用已证得的公式到这一积分上去就行了.

8) 由此将容易得出更一般的公式:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1}}^n \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_0^1 \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n} - 1} du \end{aligned}$$



(假定所有的数  $a_i, \alpha_i, p_i$  为正的).

这一公式, 例如, 可用来计算下列各积分, 并同时附带确定了它们的存在条件:<sup>①</sup>

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}}{(1 - x_1^{\alpha_1} - \dots - x_n^{\alpha_n})^\mu} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right) \Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(1-\mu + \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \quad (\text{当 } \mu < 1 \text{ 时}); \\
 (b) \quad & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n})^\mu} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} - \mu\right) \Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \quad \left(\text{当 } \mu < \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} \text{ 时}\right); \\
 (B) \quad & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} \sqrt{\frac{1 - x_1^{\alpha_1} - \dots - x_n^{\alpha_n}}{1 + x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n}}} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{1}{\Gamma(m)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \right\},
 \end{aligned}$$

其中为简便计已令

$$m = \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}.$$

9) 用数学归纳法求证公式:

$$\begin{aligned}
 & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}} \varphi(x_1 + \dots + x_n) \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n}{(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b)^{p_1 + \dots + p_n}} \\
 &= \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)} \int_0^1 \phi(u) \frac{u^{p_1 + \dots + p_n - 1}}{(a_1 u + b)^{p_1} \cdots (a_n u + b)^{p_n}} du \quad (a_1, \dots, a_n \geq 0, b > 0)
 \end{aligned}$$

[参看 611, 18); 利用 534, 2)].

10) 按照柯西那样, 我们指出计算重积分

$$K = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} e^{-(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)}}{(b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)^q} dx_1 \cdots dx_n \quad (p_i, a_i, b_j, q > 0)$$

<sup>①</sup>因为刘维尔公式中左端及右端的积分或同时收敛或同时发散.



可以怎样化为计算一单积分.

由已知的公式 [531, (13)],

$$\frac{1}{(b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-u(b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)u^{q-1}} du.$$

将它代入积分  $K$  中并改变积分次序, 我们可将它表作

$$K = \int_0^\infty e^{-b_0 u} u^{q-1} du \times \left\{ \int_0^\infty e^{-(a_1 + b_1 u)x_1} x_1^{p_1-1} dx_1 \cdots \int_0^\infty e^{-(a_n + b_n u)x_n} x_n^{p_n-1} dx_n \right\},$$

或者, 最后, 如对在括号中的积分再利用上述公式:

$$K = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{e^{-b_0 u} u^{q-1} du}{(a_1 + b_1 u)^{p_1} \cdots (a_n + b_n u)^{p_n}}.$$

这一结果对  $b_0 = 0$  亦成立, 但须假设  $p_1 + \cdots + p_n > q$ .

11) 试计算积分

$$L_{2k} = \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^{2k} dx_1 \cdots dx_n,$$

其中  $2k$  是一偶自然数, 而  $a_1, \cdots, a_n$  是任意的实数.

首先, 由多项式定理的公式, 我们有

$$(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^{2k} = \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 2k} \frac{2k!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

如沿球体  $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$  积分, 则指数  $\lambda$  中至少有一个为奇数的那些项其积分为零. 因此,

$$L_{2k} = \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_n = k} \frac{2k!}{2\mu_1! \cdots 2\mu_n!} a_1^{2\mu_1} \cdots a_n^{2\mu_n} \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} x_1^{2\mu_1} \cdots x_n^{2\mu_n} dx_1 \cdots dx_n,$$

但由推广了的狄利克雷公式 [参看 5)], 所写出的积分有值<sup>①</sup>

$$\frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)}$$

这里令

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right) \left(\mu - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2\mu - 1)!!}{2^\mu} \sqrt{\pi},$$

经变换后得:

$$\begin{aligned} L_{2k} &= \frac{(2k - 1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_n = k} \frac{k!}{\mu_1! \cdots \mu_n!} a_1^{2\mu_1} \cdots a_n^{2\mu_n} \\ &= \frac{(2k - 1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^k. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>这时应该注意到, 狄利克雷公式中假定限制于  $x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ ; 所以由它所给出的结果必须还要乘上  $2^n$ .







反过来, 对于这一组来说, 函数组 (10) 就是解. 在这种情况下由第 210 目 8) 中的公式:

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = (-1)^n \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}}.$$

后面这两行列式可立刻计算出来, 因为都可化为对角线上各项的乘积, 它们分别等于

$$\begin{aligned} & \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} \\ &= (-1)^n 2^n r^{2n-1} \sin^{2n-3} \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cos \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} &= 2^n x_1 x_2 \cdots x_n \\ &= 2^n r^n \sin^{n-1} \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^{n-2} \varphi_2 \cos \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

因此, 结果有

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

作为一例考察积分

$$G = \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2}^n f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 \cdots dx_n.$$

如采用极坐标变换, 则它的计算可直接化为计算  $n$  个各不相干的分开的积分:

$$\begin{aligned} G &= \int_0^R r^{n-1} f(r) dr \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

如利用计算正弦幂积分 [534, 4), 5)] 的公式:

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)},$$

化简后则得

$$G = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^R r^{n-1} f(r) dr,$$

所以问题就化成计算一个对  $r$  的单积分了.

习题 2) 及 3) 的结果可作为特殊情形包含于其中. 反过来, 所得结果又包含在 8) 中刘维尔公式内.



13) 如将公式 (10) 平方, 并将  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  换作  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , <sup>①</sup> 而将  $r^2, \sin^2 \varphi_1 \dots, \sin^2 \varphi_{n-1}$  换作  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , 则得这样一组关系式:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1(1 - u_2), \\ x_2 &= u_1 u_2(1 - u_3), \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= u_1 u_2 \dots u_{n-1}(1 - u_n), \\ x_n &= u_1 u_2 \dots u_n. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

变换 (11) 因而在某种意义上相当于极坐标变换 (10). 在  $n = 2$  时, 雅可比曾应用它去证明 B 及  $\Gamma$  函数间所已知的关系式 [617, 13].

应用变换 (11) 到刘维尔公式 7) 左端的积分中后, 可直接证明它. 单纯形

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad x_1 + \dots + x_n \leq 1$$

这时与  $u_1 \dots u_n$  空间中的立方体  $[0, 1; \dots; 0, 1]$  相对应. 变换的雅可比式等于

$$J = \begin{vmatrix} 1 - u_2 & u_2(1 - u_3) & \dots & u_2 \dots u_{n-1}(1 - u_n) & u_2 \dots u_n \\ -u_1 & u_1(1 - u_3) & \dots & u_1 u_3 \dots u_{n-1}(1 - u_n) & u_1 u_3 \dots u_n \\ 0 & u_1 u_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_1 \dots u_{n-2}(1 - u_n) & u_1 \dots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \dots & -u_1 \dots u_{n-1} & u_1 \dots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

如在每一行的元素上加上所有以后各行相对应的元素, 则所有在对角线下面的全部元素都换作了零, 而在对角线上的元素就等于

$$1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \dots u_{n-1}.$$

因此, 最终有

$$J = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}.$$

由公式 (6) 我们的积分就化为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(u_1) u_1^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} (1 - u_2)^{p_1-1} \\ & \quad \times u_2^{p_2+\dots+p_{n-1}} \dots (1 - u_n)^{p_{n-1}-1} u_n^{p_n-1} du_1 \dots du_n, \end{aligned}$$

而这已经表作许多单积分乘积的样子, 剩下的就很明显了.

14) 同一变量变换可以得到一变了形的刘维尔公式. 其中  $n$  重积分是展布在无穷区域上的:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \geq 1}} \varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} du; \end{aligned}$$

<sup>①</sup>当然, 在这种情况下这些变数只能取非负的值.



与以前的公式一样, 它可同样推广 [比照 8)]:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \geq 1}} \varphi \left( \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \right) x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} - 1} du. \end{aligned}$$

$$\frac{\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \geq 1}} \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n}{(x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n})^\mu}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n \left( \mu - \frac{p_1}{\alpha_1} - \cdots - \frac{p_n}{\alpha_n} \right) \Gamma \left( \frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n} \right)} \Gamma \left( \frac{p_1}{\alpha_1} \right) \cdots \Gamma \left( \frac{p_n}{\alpha_n} \right) \quad \left( \text{当 } \mu > \frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n} \text{ 时} \right).$$
$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(v_1 v_2 \cdots v_n) (1-v_1)^{p_1-1} (1-v_2)^{p_2-1} \\ & \cdots (1-v_n)^{p_n-1} v_2^{p_1} v_3^{p_1+p_2} \cdots v_n^{p_1+\cdots+p_{n-1}} dv_1 \cdots dv_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 \varphi(u) (1-u)^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du. \end{aligned}$$
[illegible]
$$J = (-1)^n v_2 v_3^2 \cdots v_{n-1}^{n-2} v_n^{n-1}.$$



16) 依照卡塔兰, 我们来考察积分 ( $n \geq 3$ )

$$\begin{aligned}
 K &= \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1}^{n-1} f(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n) \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{|x_n|} \textcircled{1} \\
 &= 2 \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1}^{n-1} f(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n) \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}};
 \end{aligned}$$

此处, 令

$$M = \sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2}$$

时, 我们设函数  $f(u)$  当  $u \leq M$  时连续.

采用包含  $x_n$  在内的所有变量的线性正交变换公式

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1 u_1 + b_1 u_2 + \cdots + k_1 u_{n-1} + l_1 u_n, \\
 x_2 &= a_2 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + k_2 u_{n-1} + l_2 u_n, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= a_n u_1 + b_n u_2 + \cdots + k_n u_{n-1} + l_n u_n,
 \end{aligned}$$

其中  $n^2$  个系数受制于  $\frac{n(n+1)}{2}$  个条件

$$\begin{aligned}
 a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= 1, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0, \\
 &\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \\
 l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2 &= 1, \quad k_1 l_1 + k_2 l_2 + \cdots + k_n l_n = 0.
 \end{aligned}$$

由此应得

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1,$$

并在令

$$u_n = \pm \sqrt{1 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2}$$

后, 我们将取  $u_1, \cdots, u_{n-1}$  作为新的独立变量.

系数选择的任意性很大, 使我们有权利实际令

$$a_i = \frac{m_i}{M} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$\textcircled{1}$  在原始的形式下这一积分实质上是展布在  $n$  维空间中单位球面上的一曲面积分

$$\int \cdots \int f(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n) dS,$$

[参照 3) 中附注].



并甚至可进一步要求由变换系数组成的行列式要等于 +1, 在这种假定之下, 如大家所知, 对应于行列式任一元的代数余子式等于元素本身. 估计到这一点, 雅可比式

$$\frac{D(x_1, \dots, x_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = \begin{vmatrix} a_1 - l_1 \frac{u_1}{u_n} & b_1 - l_1 \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_1 - l_1 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ a_2 - l_2 \frac{u_1}{u_n} & b_2 - l_2 \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_2 - l_2 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_1}{u_n} & b_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} \end{vmatrix}$$

就会等于

$$l_n + a_n \frac{u_1}{u_n} + b_n \frac{u_2}{u_n} + \cdots + k_n \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{x_n}{u_n}.$$

因此

$$\begin{aligned} K &= 2 \int \cdots \int_{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \leq 1}^{n-1} f(Mu_1) \frac{du_1 \cdots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2}} \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(Mu_1) du_1 \int \cdots \int_{u_2^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2}^{n-2} \frac{du_2 \cdots du_{n-1}}{\sqrt{(1 - u_1^2) - u_2^2 - \cdots - u_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

里面的积分, 容易由 3) 得出, 等于

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}},$$

所以最终有

$$K = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2} u) (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du.$$

在这里令  $u = \cos \lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq \pi$ ), 也可将结果写作下形:

$$K = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi f(\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2} \cos \lambda) \sin^{n-2} \lambda d\lambda.$$

当  $n = 3$  时由此得到我们已知的泊松公式, 这在 633,3) 中我们已推出, 且在实质上是用的同一坐标变换法推得的.

17) 已为我们熟知的卡塔兰公式 [参看 597,15) 及 617,16)] 可立刻重复同样的推理 —— 移到  $n$  维的情形:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq M}^n f(x_1, \dots, x_n) \varphi(g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n \\ &= (S) \int_m^M \varphi(u) d\psi(u) = (R) \int_m^M \varphi(u) \frac{d\psi(u)}{du} du, \end{aligned} \quad (12)$$



其中

$$\psi(u) = \overbrace{\int \cdots \int}^n_{m \leq g(x_1, \cdots, x_n) \leq u} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (13)$$

这里  $M$  也可以是  $+\infty$ , 但  $\int_m^{+\infty}$  了解为  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_m^M$ .

作为一例不妨按照卡塔兰的方法从狄利克雷公式 4) 去求得刘维尔公式 7).

18) 索宁注意到有时卡塔兰公式可在另一种设计下来利用.

假定函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  是  $s$  次齐次函数 [187], 而函数  $g(x_1, \cdots, x_n)$  也是齐次但为一次的; 例如, 函数  $g$  可以有下形

$$x_1 + \cdots + x_n \quad \text{或} \quad \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

又设  $m = 0$ . 则在 (13) 中令

$$x_1 = u\xi_1, x_2 = u\xi_2, \cdots, x_n = u\xi_n$$

(雅可比式  $J = u^n$ ) 并考虑到不等式  $0 \leq g(x_1, \cdots, x_n) \leq u$  此时变为不等式  $0 \leq g(\xi_1, \cdots, \xi_n) \leq 1$  时, 我们得到

$$\psi(u) = u^{n+s} \overbrace{\int \cdots \int}^n_{0 \leq g(\xi_1, \cdots, \xi_n) \leq 1} f(\xi_1, \cdots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

将它代入 (12)(但将  $\xi$  又写为  $x$ ):

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int \cdots \int}^n_{0 \leq g(x_1, \cdots, x_n) \leq M} f(x_1, \cdots, x_n) \varphi(g(x_1, \cdots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \overbrace{\int \cdots \int}^n_{0 \leq g(x_1, \cdots, x_n) \leq 1} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \cdot \int_0^M \varphi(u) du^{n+s}. \end{aligned}$$

现在, 如果能够首先选取函数  $\varphi$ , 其次选取上限  $M$  使左端的积分容易计算, 则由此就得积分

$$\overbrace{\int \cdots \int}^n_{0 \leq g(x_1, \cdots, x_n) \leq 1} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

的表示式.

例如, 如限定于  $x_1, \cdots, x_n$  的非负值时, 取

$$\begin{aligned} g(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n, \\ f(x_1, \cdots, x_n) &= x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} \quad (p_i > 0), \\ \varphi(u) &= e^{-u}, \quad M = +\infty, \end{aligned}$$



则  $s$  就等于  $p_1 + \cdots + p_n - n$ , 而我们将得狄利克雷公式 [4]):

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{p_1-1} dx_1 \cdots \int_0^\infty e^{-x_n} x_n^{p_n-1} dx_n}{(p_1 + \cdots + p_n) \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1 + \dots + p_n - 1} du} = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)}. \end{aligned}$$

19) 用同一方法试化简积分

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}}{(b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)^q} dx_1 \cdots dx_n,$$

但假定

$$p_i > 0, \quad b_i > 0, \quad p_1 + \cdots + p_n > q > 0.$$

提示 取  $\varphi(u) = e^{-u}$ ,  $M = +\infty$ ; 利用当  $a_1 = \cdots = a_n = 1$  及  $b_0 = 0$  时 10) 的结果.

答 
$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n - q + 1) \Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{u^{q-1} du}{(1 + b_1 u)^{p_1} \cdots (1 + b_n u)^{p_n}}.$$

20) 卡塔兰公式的下一推广同样也是属于索宁的:

$$\int \cdots \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq M}^n \varphi(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n = (R) \int_m^M \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} dt$$

其中

$$\Phi(t, c) = \int \cdots \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq t} \varphi(x_1, \dots, x_n, c) dx_1 \cdots dx_n.$$

[如给函数  $\varphi(x_1, \dots, x_n, c)$  以特殊形式:  $f(x_1, \dots, x_n)\varphi(c)$ , 由此就得卡塔兰公式.]

我们将采用著者的证明.

在显明的等式

$$\int_m^M dt \int \cdots \int_{m \leq g \leq M}^n F(x_1, \dots, x_n, t) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{m \leq g \leq M}^n dx_1 \cdots dx_n \int_m^M F(x_1, \dots, x_n, t) dt$$

中, 令

$$F = \begin{cases} \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t}, & \text{如 } m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq t, \\ 0, & \text{当 } g(x_1, \dots, x_n) > t \text{ 时;} \end{cases}$$



则得

$$\begin{aligned} & \int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{m \leq g \leq M}^n dx_1 \cdots dx_n \int_g^M \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

如算出右端里面的积分, 则由此有

$$\begin{aligned} & \int_{m \leq g \leq M}^n \varphi(x_1, \dots, x_n, g) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \Phi(M, M) - \int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned} \quad (14)$$

另一方面, 按照复合函数的微分法规则, “全导数”

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t) = \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} + \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial c} \right\}_{c=t}.$$

应用莱布尼茨规则到右端第二个导数, 可将它换作

$$\int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n,$$

现在将这一等式对  $t$  自  $m$  积分到  $M$ ; 注意  $\Phi(m, m) = 0$ , 便得出

$$\begin{aligned} & \Phi(M, M) - \int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_m^M \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

如比较 (14) 及 (15), 则得所要证的公式.

21) 我们将应用索宁公式去计算积分

$$S = \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq 1}^n e^{\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}} dx_1 \cdots dx_n.$$



这里

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_n, c) &= e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{c}}, \\ g(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \\ m &= 0, \quad M = 1, \\ \Phi(t, c) &= \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t} \dots \int_0^n e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{c}} dx_1 \dots dx_n.\end{aligned}$$

显然, 我们有

$$\begin{aligned}& \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t} \dots \int_0^n e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{c}} dx_1 \dots dx_n \\ &= t^n \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1} \dots \int_0^n e^{\frac{t}{c}(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.\end{aligned}$$

利用习题 11) 的结果后, 易得展开式

$$\Phi(t, c) = \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \left(\frac{\rho}{2c}\right)^{2k} t^{2k+n}.$$

其中

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

于是

$$\left[ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right]_{c=t} = t^{n-1} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

所以由索宁公式,

$$S = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(\rho i)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho i)$$

[比较 11)].

22) 计算积分 ( $\lambda \geq 0$ )

$$\begin{aligned}R(\lambda) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{\lambda^n}{x_1 \dots x_{n-1}}\right)} \\ &\quad \times x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dx_1 \dots dx_{n-1}\end{aligned}$$

[比照 617, 19)].



对参数  $\lambda$  在积分号下面微分 (当  $\lambda > 0$  时) 并在结果中将一个变数  $x_1$  以

$$z = \frac{\lambda^n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$$

来代换, 则得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\lambda} = & -n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(x_2 + \cdots + x_{n-1} + z + \frac{\lambda^n}{x_2 \cdots x_{n-1}} z)} \\ & \times x_2^{\frac{1}{n}-1} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-2}{n}-1} z^{\frac{n-1}{n}-1} dx_2 \cdots dx_{n-1} dz, \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{dR}{d\lambda} = -nR.$$

于是

$$R = Ce^{-n\lambda}.$$

因为当  $\lambda = 0$  时积分  $R$  保有连续性, 故

$$C = R(0) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

[531, 6°]. 最终:

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-n\lambda}.$$

23) 刘维尔很聪明地利用这一积分来推演属于高斯的  $\Gamma$  函数乘法定理 [536].

在所得等式两端乘上  $\lambda^{p-1}$  ( $p > 0$ ) 后, 将它对  $\lambda$  自  $\lambda = 0$  积分到  $\lambda = +\infty$ . 从右边得到

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int_0^\infty \lambda^{p-1} e^{-n\lambda} d\lambda = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{p+\frac{1}{2}}} \Gamma(p). \quad (16)$$

而在左边我们就将对  $\lambda$  的积分移到 (按施行次序的) 第一个位置:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(x_1 + \cdots + x_{n-1})} x_1^{\frac{1}{n}-1} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ & \times \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^n}{x_1 \cdots x_{n-1}}} \cdot \lambda^{p-1} d\lambda. \end{aligned}$$

用代换  $\frac{\lambda^n}{x_1 \cdots x_{n-1}} = t$ , 里面的积分就化为

$$\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{p}{n}\right) (x_1 \cdots x_{n-1})^{\frac{p}{n}},$$

于是余下的  $n-1$  重积分就可拆成分离的单积分的乘积:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \cdot \int_0^\infty e^{-x_1} \cdot x_1^{\frac{p+1}{n}-1} dx_1 \cdots \int_0^\infty e^{-x_{n-1}} \cdot x_{n-1}^{\frac{p+n-1}{n}-1} dx_{n-1} \\ & = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p+n-1}{n}\right). \end{aligned}$$



令这一积分与 (16) 式相等并将  $p$  换作  $na(a > 0)$ , 我们就得到在通常形式下的高斯公式:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na).$$

24) 设  $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$  为在有限区间  $[a, b]$  上可积的有界函数. 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \left| \begin{matrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{matrix} \right|^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \left| \begin{matrix} \int_a^b f_1^2 dx & \int_a^b f_1 f_2 dx & \cdots & \int_a^b f_1 f_n dx \\ \int_a^b f_2 f_1 dx & \int_a^b f_2^2 dx & \cdots & \int_a^b f_2 f_n dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b f_n f_1 dx & \int_a^b f_n f_2 dx & \cdots & \int_a^b f_n^2 dx \end{matrix} \right|. \end{aligned}$$

右端的行列式称作格拉姆 (J.P.Gram) 行列式.

将区间  $[a, b]$  分成  $m(> n)$  等分, 考察所有  $n$  个函数在各分点的值:

$$f_{ij}^{(m)} = f_i\left(a + j\frac{b-a}{m}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m-1).$$

将由这些数组成的矩阵自乘. 由熟知的定理, 对应于它的行列式

$$\left| \sum_j f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|^{(1)}$$

等于所述的原来矩阵的许多行列式的平方和:

$$\sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_n} \left| f_{ij_k}^{(m)} \right|^2,$$

其中加法是分布在从  $m(> n)$  个附标  $0, 1, \cdots, m-1$  中取  $n$  个的一切可能组合上. 如在各组合中颠倒其位置, 则每一项重复  $n!$  次; 附标  $j$  相等也可不必避免, 因为这种情况对应的项为零. 结果可以写为:

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{m-1} \left| f_{ij_k}^{(m)} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|.$$

如左端多重的和中每一项乘上  $\left(\frac{b-a}{m}\right)^n$  且同时右端行列式的每一元乘上  $\frac{b-a}{m}$ , 则得一类似于所求证的等式, 不过不是积分而是积分和. 要完成证明, 只需令  $m \rightarrow \infty$  时变到极限.

①为简便计, 我们将一行列式在第  $i$  行及第  $k$  列交叉处是元  $a_{ik}$  者写成  $|a_{ik}|$  的形状.



# 第十九章 傅里叶级数

## §1. 引言

**677. 周期量与调和分析** 在科学与工程中时常要遇到周期现象，也就是经历一定的时间  $T$  后要恢复原状的现象，时间  $T$  称为**周期**。蒸汽机所作的稳定运动是这种现象的实例，它经历了一定的转数后又重新经过原来的位置。我们也可取交流电等现象作为实例。与所考虑的周期现象有关的各种量，在经历周期  $T$  后，重新取得它们的原值；因此这些量是时间  $t$  的**周期函数**，可用下列等式来表明：

$$\varphi(t + T) = \varphi(t).$$

例如交流电的强度与电压就是这样的量。在蒸汽机的例子中，十字头的行程，它的速度与加速度，蒸汽压力，以及在曲柄梢处的切线力等也都是这样的量。

最简单的周期函数（如果我们不计常数）是**正弦型量**： $A \sin(\omega t + \alpha)$ ，其中  $\omega$  是“频率”，它与周期的关系是：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

用这类简单的周期函数可以组成比较复杂的周期函数。显然用以组成复杂函数的各正弦型量必须有不同的频率，因为频率相等的正弦型量的和仍是有同一频率的正弦型量。反过来考察形状为

$$\left. \begin{aligned} y_0 = A_0, \quad y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \dots \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

的量；如果不计常数，这些量的频率

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$$



是最小频率  $\omega$  的倍数; 它们的周期是

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$$

如果将其中某些量相加, 则得到一个周期函数 (周期是  $T$ ), 但在实质上与 (2) 型的量已不同.

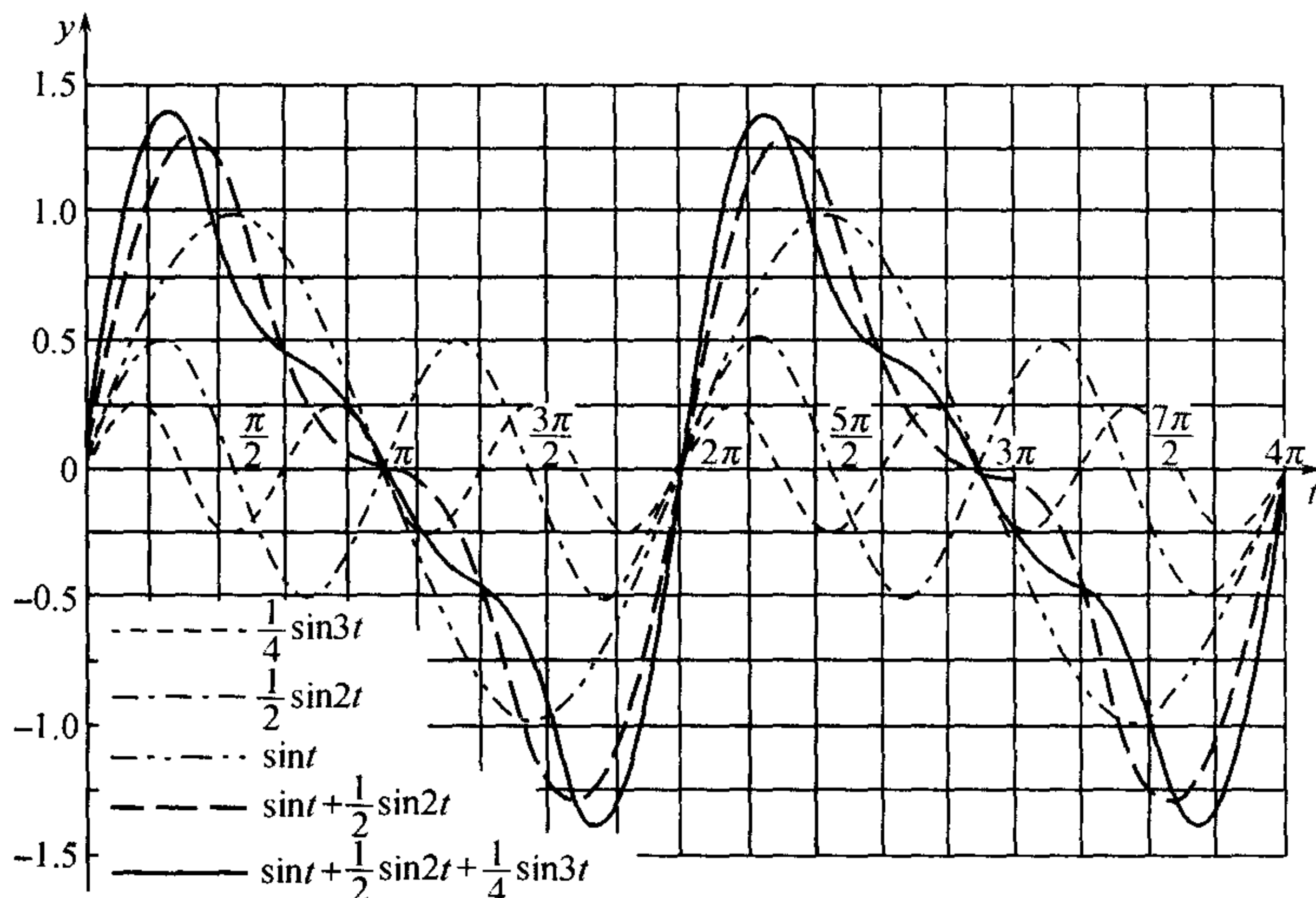


图 121

作为一例, 作三个正弦型量的和 (图 121):

$$\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 3t;$$

这函数的图解就其特征来说已与正弦型函数的图解大不相同. 用 (2) 型各量所作成的无穷级数的和的图解则更要不同了.

现在我们很自然地提出相反的问题: 将一个周期是  $T$  的已给函数  $\varphi(t)$  表作有限个, 或者即使是无穷个形如 (2) 的正弦型量的和, 是不是可能呢? 在下面, 我们可以看到, 对于相当广泛的一类函数, 可以给这问题以肯定的答复; 不过我们要引用全部数量 (2) 所成的无穷序列. 对于这类函数 “三角级数” 展开式

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \end{aligned} \quad (3)$$

成立, 其中  $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \dots$  是常数, 对于每个这样的函数, 各取特殊的值, 而频率  $\omega$  由公式 (1) 给出.



在几何上, 这就表明: 周期函数的图解可以由叠加一系列正弦型量的图解得来. 如果将每个正弦型量解释为力学上的调和振动, 则也可说这里由函数  $\varphi(t)$  表示的复杂振动可以分解成各别的调和振动. 因此组成展开式 (3) 的各正弦型量称为函数  $\varphi(t)$  的调和成分或简称调和素(第一, 第二调和素等). 将周期函数分解成调和素的手续称为调和分析.

如果选取

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$$

作为自变数, 则得  $x$  的函数

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

这也是周期函数, 但具有标准周期  $2\pi$ . 展开式 (3) 将有下面的形状:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \end{aligned} \quad (4)$$

用二角和的正弦公式展开级数的各项, 并令

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则得三角展开式的最终形状:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) \\ &\quad + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned} \quad (5)$$

今后我们总是研究这种形状的展开式.<sup>①</sup> 在这里角  $x$  的以  $2\pi$  为周期的函数就表为  $x$  的倍角的余弦及正弦的展开式.

在上面, 从周期振动现象及与它们有关的量出发, 我们得到了函数的三角级数展开式. 然而重要的是现在就应注意: 当研究只是在有限区间上给出、而完全不是由任何振动现象所产生的函数时, 这样的展开式也时常是有用的.

**678. 欧拉-傅里叶确定系数法** 要研究已给的以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  展开为三角级数 (5) 的可能性, 必须从系数  $a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots$  的一确定组合出发. 我们将说明在 18 世纪的下半叶欧拉所用的系数确定法, 而在 19 世纪之初, 傅里叶也曾经独立地应用过.

假定函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上按常义或非常义可积分; 在上一情形, 我们补充假定函数绝对可积. 设展开式 (5) 成立, 并将它逐项从  $-\pi$  积分到  $\pi$ , 则得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right].$$

<sup>①</sup> 如果需要的话, 当然不难从这个展开式反过来变成形如 (4) 的展开式.



但容易看出

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此在和数符号后的各项都是零, 最后求得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (7)$$

为要确定系数  $a_m$  的大小, 用  $\cos mx$  乘等式 (5) (我们总假定这等式成立) 的两端, 再在同一区间上逐项积分:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]. \end{aligned}$$

由 (6), 上式右端第一项等于零. 此外, 不论  $n, m$  如何, 恒有 [参考 308,4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = 0, \quad (8)$$

而  $n \neq m$  时, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0; \quad (9)$$

最后还有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \pi. \quad (10)$$

因此在和数符号后的一切积分, 除了以系数  $a_m$  为乘数的积分外, 都等于零. 从而这系数就被确定为:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

同样, 用  $\sin mx$  乘展开式 (5) 后再逐项积分, 即定出正弦的系数:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

在这里除了要用 (6) 与 (8) 外, 我们还应用了容易验证的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m), \quad (13)$$



与

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi. \quad (14)$$

公式 (7), (11) 与 (12) 称为**欧拉-傅里叶公式**, 用这些公式算出的系数称为已给函数的**傅里叶系数**, 用这些系数作成的三角级数 (5) 称为已给函数的**傅里叶级数**. 在本章中我们专门研究傅里叶级数.

现在来看以上的讨论在逻辑上有什么价值. 我们的出发点是假设三角展开式 (5) 成立, 但是这个假设究竟真实与否这一问题自然没有解决. 即令假定展开式 (5) 为真, 我们依欧拉与傅里叶的方法算出了展开式 (5) 的系数, 然而像这样做的理由是否令人信服呢? 我们一再应用过级数的逐项积分法, 但是这种运算并不是什么时候都能进行的 [434]. 级数的一致收敛性是可以应用这种运算的充分条件. 因此现在只有下列定理能够算作已经严格地证明了:

如果周期是  $2\pi$  的函数  $f(x)$  可以展开成一致收敛的三角级数 (5),<sup>①</sup> 则这级数一定是  $f(x)$  的傅里叶级数.

如果不预先假设一致收敛性, 以上的讨论甚至不能证明函数能展开成傅里叶级数 [参考下面 750, 751]. 那么以上的讨论究竟有怎样的意义呢? 我们只能将它看成一种导入法, 由此足以使得在求已给函数的三角展开式时, 至少可以从它的傅里叶级数出发, 而必须 (完全严格地!) 确定在那些条件下级数收敛并且收敛于已给函数.

在没有这样做以前, 我们只能够在形式上考虑已给函数  $f(x)$  的傅里叶级数, 除了知道它是由函数  $f(x)$  “所产生” 外, 不能再下任何结论. 通常用下列符号来表示这级数与函数  $f$  的关系:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5a)$$

而避免采用等号.

**679. 正交函数系** 上节中所讲的是一种讨论的范例, 这样的讨论在数学分析中研究许多展开式时常常要应用到.

如果在区间  $[a, b]$  上所定义的两函数  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  的乘积, 其积分为零:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0,$$

则此两函数称为在这区间上**正交**. 考虑定义在区间  $[a, b]$  上的函数系  $\{\varphi_n(x)\}$ . 设系中各函数与它们的平方在  $[a, b]$  上皆可积分, 则它们的两两乘积在同一区间上也可积分 [483, 6]. 如果系中各函数两两正交:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, n \neq m), \quad (15)$$

<sup>①</sup>注意, 用有界函数  $\cos mx, \sin mx$  乘级数各项时并不改变级数的一致收敛性 [429]. 在这里, 一致收敛性也可换成级数各部分和的有界性 [526].



则此系称为正交函数系. 同时我们还永远假定

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n > 0, \quad (16)$$

因而在正交系中不包含恒等于零的函数, 也不包含其他任何平方的积分等于零的函数 (在某种意义下与恒等于零的函数相似<sup>①</sup>).

当条件  $\lambda_n = 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$  成立时, 这函数系称为规范的. 如果这些条件不成立, 则当需要时可换取函数系  $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ , 这一函数系显然就是规范的. 现举几个例如下:

1) 上面考虑过的在区间  $[-\pi, \pi]$  上的三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (17)$$

正是正交函数系的重要例子; 其正交性可以由关系式 (6), (8), (9) 与 (13) 看出. 然而由 (10) 与 (14), 可知它不是规范的. 将 (17) 中各三角函数乘以适当乘数, 不难获得规范系:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (17^*)$$

2) 注意函数系 (17) 或 (17\*) 在缩小了的区间  $[0, \pi]$  上不再是正交的. 因为如果  $n$  与  $m$  一为奇数一为偶数, 则

$$\int_0^\pi \sin nx \cos mx dx \neq 0.$$

相反地, 每一仅由余弦

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (18)$$

或仅由正弦

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (19)$$

所组成的部分系在这区间上分别成为正交系. 这点不难验证.

3) 下列两函数系与刚才考虑过的函数系没有本质上的区别.

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (18^*)$$

与

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (19^*)$$

其中每一个都是在区间  $[0, l]$  上的正交系.

4) 为了要给出由三角函数构成的更复杂的正交系的例子, 考虑超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数}). \quad (20)$$

<sup>①</sup>参考下面 733 目.



可以证明这方程的正根成一无穷集合:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots;$$

在图解上, 各根是正切曲线  $\eta = \operatorname{tg} \xi$  与直线  $\eta = c\xi$  相交之点的横坐标 (图 122). 作函数系

$$\sin \frac{\xi_1}{l} x, \sin \frac{\xi_2}{l} x, \dots, \sin \frac{\xi_n}{l} x, \dots$$

容易算出 (当  $\alpha \neq \beta$  时)

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)l}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)l}{\alpha + \beta} \right\} \\ &= \cos \alpha l \cos \beta l \frac{\beta \operatorname{tg} \alpha l - \alpha \operatorname{tg} \beta l}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

如果在这里令  $\alpha = \frac{\xi_n}{l}, \beta = \frac{\xi_m}{l}$  (当  $n \neq m$  时), 则利用方程 (20) 可得

$$\int_0^l \sin \frac{\xi_n}{l} x \cdot \sin \frac{\xi_m}{l} x dx = 0 \quad (n \neq m).$$

由此证实了所述函数系在区间  $[0, l]$  上的正交性.

如果

$$\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, \dots$$

是方程

$$\operatorname{ctg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数})$$

的正根序列, 则对于函数系

$$\cos \frac{\xi'_1}{l} x, \cos \frac{\xi'_2}{l} x, \dots, \cos \frac{\xi'_n}{l} x, \dots,$$

也可作出类似的结论.

但是这些函数系都不是规范的.

5) 勒让德多项式

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是在区间  $[-1, 1]$  上的正交系的重要例子 [参考第 118 及 320 目]. 因为

$$\int_{-1}^1 X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

所以要得到规范系, 必须分别用  $\sqrt{n + \frac{1}{2}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 乘这些多项式.

6) 最后, 再考虑一个与贝塞尔函数有关的例子. 为了写起来简单起见, 我们只限于考虑函数  $J_0(x)$ , 但以下所讨论的一切对于函数  $J_n(x)$  ( $n > 0$ ) 也都成立.

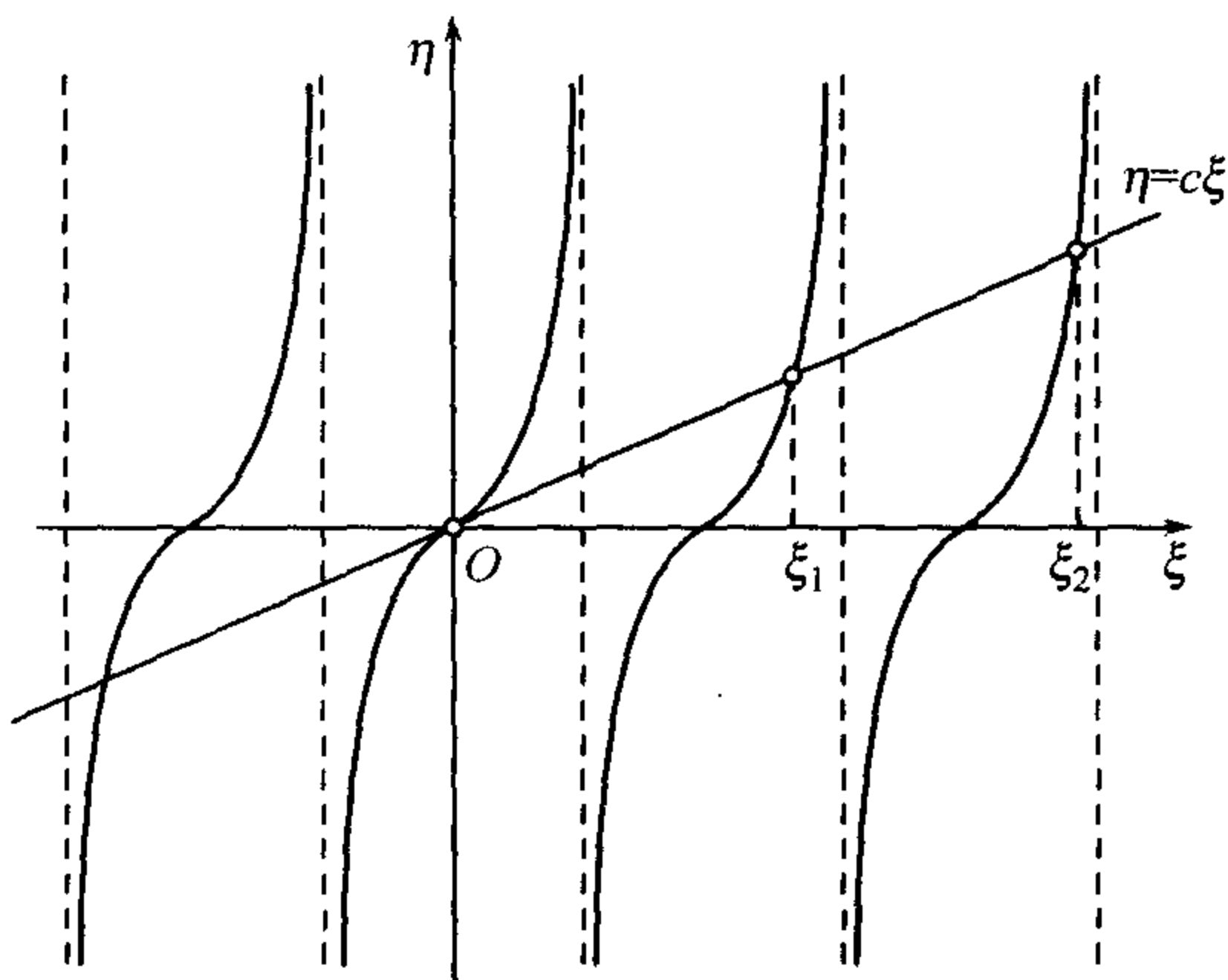


图 122



在贝塞尔函数的理论中, 证明了  $J_0(x)$  的正根成一无穷集合:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

将函数  $J_0(x)$  所满足的方程改写为

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dz}{dx} \right] = -xz,$$

则容易得到: 不论  $\alpha$  与  $\beta$  是什么数,

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dJ_0(\alpha x)}{dx} \right] = -\alpha^2 x J_0(\alpha x), \quad \frac{d}{dx} \left[ x \frac{dJ_0(\beta x)}{dx} \right] = -\beta^2 x J_0(\beta x).$$

用  $J_0(\beta x)$  乘第一个等式, 用  $J_0(\alpha x)$  乘第二个等式, 再将两端相减, 则得:

$$(\beta^2 - \alpha^2) x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) = \frac{d}{dx} [\alpha x J_0(\beta x) J_0'(\alpha x) - \beta x J_0(\alpha x) J_0'(\beta x)].$$

因此如果  $\alpha \neq \beta$ , 则

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\alpha J_0(\beta) J_0'(\alpha) - \beta J_0(\alpha) J_0'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

如果在这里令  $\alpha = \xi_n, \beta = \xi_m (n \neq m)$ , 则得关系式:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_n x) J_0(\xi_m x) dx = 0,$$

这就证明了函数系  $\{\sqrt{x} J_0(\xi_n x)\}$  在区间  $[0, 1]$  上是正交的.<sup>①</sup> 然而此系并不是规范的.

设在区间  $[a, b]$  上已给任一正交系  $\{\varphi_n(x)\}$ . 我们试行将定义在  $[a, b]$  上的函数  $f(x)$  展开成“函数  $\varphi$  的级数”

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (22)$$

为了要确定这展开式中的系数, 先设函数可能展开, 然后进行与上述特例中相同的手续. 这就是说, 先用  $\varphi_m(x)$  乘展开式的两端, 再逐项积分:

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx.$$

由于正交性 [参考 (15) 与 (16)], 右端各积分除去一个以外都是零, 因此容易得到:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (23)$$

<sup>①</sup>要推广函数  $\varphi$  与  $\psi$  正交性的概念, 我们引进加权  $p(x)$  的正交性的概念, 用等式

$$\int_a^b p(x) \varphi(x) \psi(x) dx = 0$$

来说明这种正交性. 如果采用这术语, 也能说函数系  $\{J_0(\xi_n x)\}$  是加权  $x$  正交的.



[公式 (7), (11), (12) 是这公式的特殊情形.]

用公式 (23) 所确定之系数作出级数 (22), 它称为已给函数对于函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  的 (广义) 傅里叶级数, 而各系数本身则称为 (广义) 傅里叶系数. 在规范系的情形下, 公式 (23) 特别简单; 这时

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (23^*)$$

在这里当然也可重复在上目末尾所作的那些说明. 由已给函数所作出的广义傅里叶级数仅仅是在形式上与这函数发生联系. 在一般情形下, 函数  $f(x)$  与它的 (广义) 傅里叶级数之间的关系表示如下:

$$f(x) \sim \sum_0^\infty c_n \varphi_n(x). \quad (22^*)$$

与三角级数的情形一样, 这级数是否收敛于函数  $f(x)$ , 还须加以研究.

**680. 三角插值法** 从三角插值法出发, 也可自然地接触到用三角级数表示已给函数  $f(x)$  的问题. 所谓三角插值法就是用三角多项式

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (24)$$

作为函数  $f(x)$  的近似式, 使三角多项式与函数在许多点上有相同的值.

总能选取  $n$  阶三角多项式 (24) 的  $2n+1$  个系数:  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ , 使得在区间  $(-\pi, \pi)$  内预先指定的  $2n+1$  个点处, 例如在

$$\xi_i = i\lambda \quad (i = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n)$$

各点处 (其中  $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$ ), 三角多项式的值与函数  $f(x)$  的值相等. 实际上, 为了要确定这  $2n+1$  个系数, 我们有个数相同的线性方程:

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\xi_i + \beta_k \sin k\xi_i) = f(\xi_i) \quad (i = -n, -n+1, \dots, n). \quad (25)$$

要解这些方程, 应当回忆到一个初等三角恒等式:<sup>①</sup>

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ih = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)h}{2 \sin \frac{1}{2}h}. \quad (26)$$

<sup>①</sup>如果用  $2 \sin \frac{1}{2}h$  乘此式左端, 并且将每一乘积  $2 \sin \frac{1}{2}h \cos ih$  换成差式  $\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)h - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)h$ , 就不难求得这恒等式.[参考 307(2).]



将 (25) 中各等式两端分别相加. 由于正弦是奇函数, 所以  $\beta_k$  的系数

$$\sum_{i=-n}^n \sin k\xi_i = 0.$$

$\alpha_k$  的系数也是这样, 这是因为余弦是偶函数, 所以如果在恒等式 (26) 中, 令  $h = k\lambda = \frac{2k\pi}{2n+1}$  时, 应有

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos ik\lambda = 0. \quad (27)$$

由此得

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i). \quad (28)$$

为了要确定  $\alpha_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ), 分别用  $\cos m\xi_i$  乘 (25) 中各等式, 然后将它们的两端分别相加. 则由 (27),  $\alpha_0$  的系数是零; 因为正弦是奇函数, 所以  $\beta_k$  的系数显然也等于零. 至于  $\alpha_k$  的系数则可表为:

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i \cos m\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k+m)\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k-m)\xi_i;$$

当  $k \neq m$  时, 由 (27), 上式右端的两个和式都为零; 当  $k = m$  时, 第一个和式为零而第二个和式的值显然是  $\frac{2n+1}{2}$ . 这样, 只有  $\alpha_m$  的系数不等于零, 而等于  $\frac{2n+1}{2}$ . 现在已不难求得

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (29)$$

完全与以上相仿, 用  $\sin m\xi_i$  乘 (25) 中各等式并且相加, 求得

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (30)$$

读者一定已经注意到这里所用方法与欧拉-傅里叶确定三角级数系数法相似. 但是在这里我们的计算是无可非议的, 因为不难验证所求得未知数的值确乎适合方程 (25). 并且, 由简单的代数推理, 此点可不待验证而自明. 我们看到方程系 (25) 只可能有 (如果一般说来有解) 唯一的解, 此解是由公式 (28), (29), (30) 给出, 而不论各式的右端是怎样. 在这种情形下, 方程系的行列式一定不等于零, 而这种方程系是确定的. 因此用求出的各值为系数作出三角多项式  $\sigma_n(x)$ , 则它满足所提出的要求, 并能作为我们的函数在区间  $[-\pi, \pi]$  上的插值式.

现设已给函数在这区间上可积分 (这次是在可积分的原义下!). 如果  $n$  增大到无穷, 则插值多项式  $\sigma_n(x)$  也作相应的变化, 而与  $f(x)$  在愈来愈“稠密”的点集上



重合. 插值多项式不仅要“加长”, 而且其中的系数也要改变. 为了更好地分析系数的性质, 将区间  $[-\pi, \pi]$  用分点  $x_i = (2i-1)\frac{\pi}{2n+1}$  ( $-n \leq i \leq n+1$ ) 分成  $2n+1$  个相等的部分. 则点  $\xi_i$  恰好是这些部分区间的中点, 而各部分区间的长度都等于  $\Delta x_i = \frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$ . 如果将公式 (28), (29) 和 (30) 改写成下列形状

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \Delta x_i,$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \Delta x_i,$$

则各式右端中的和式就是与上述区间分法相对应的插值和式. 现在显然可见, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$\beta_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx,$$

所以我们的函数的傅里叶系数分别是插值三角多项式各系数的极限值. 可以说插值多项式“在取极限时”似乎变成了傅里叶级数.

这种步骤当然只能认为是一种导入法. 对于函数与其傅里叶级数之关系来说, 这种步骤不能证明什么, 但也足以引起研究这种级数的兴趣. 在以下各节中, 我们就要最后直接研究各不同类函数的傅里叶级数之性质.

## §2. 函数的傅里叶级数展开式

**681. 问题的提出 · 狄利克雷积分** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 在区间  $[-\pi, \pi]$  上至少是非常义绝对可积, 因而在任一有限区间上也如此. 算出常数 (函数的傅里叶系数):

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mudu \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mudu \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

并用这些常数作成函数的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \quad (2)$$

读者可看到这里与第 678 目的符号略有不同: 在这里我们不用该目中的公式 (7), 而用  $a_m$  的一般公式在  $m=0$  时的情形来确定  $a_0$ , 因而我们须将级数的常数项写成  $\frac{a_0}{2}$  的形状.



尤需注意 (在下面我们还要用到这一说明): 对于以  $2\pi$  为周期的函数  $F(u)$ , 在长为  $2\pi$  的区间上, 其积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) du$$

的大小与  $\alpha$  无关 [参考 314, 10) 与 316]. 因此在确定傅里叶系数的公式 (1) 中, 积分可取在任一长为  $2\pi$  的区间上; 例如可以写

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

等等.

为了研究级数 (2) 于任一定点  $x = x_0$  的性质, 作出其部分和的相应表示式

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$

用积分表示式 (1) 代替  $a_m$  与  $b_m$ , 并在积分号下引入常数  $\cos mx_0, \sin mx_0$ , 则得:

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0] du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) \right\} du. \end{aligned}$$

利用第 680 目中的公式 (26) 来变换在大括号中的表示式, 就有:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) = \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}},$$

最后得

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du. \quad (3)$$

这个重要的积分称为狄利克雷 (G. Lejeune-Dirichlet) 积分.

因为我们在这里讨论周期为  $2\pi$  的  $u$  的函数, 所以由上面所作的说明, 可将积分区间  $[-\pi, \pi]$  例如改成  $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ :

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du.$$



用代换  $t = u - x_0$ , 将这积分变换成下列形式:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

然后将积分分成两部分:  $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ , 并用改换变数符号的方法, 将第二个积分也化为在区间  $[0, \pi]$  上的积分, 则对于傅里叶级数的第  $n$  个部分和, 最后得到这样的表示式:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad (4)$$

因此, 问题就化为研究这个含有参数  $n$  的积分的性质. 这里所提出的问题的特征是: 在这里不能应用积分号下取极限法.<sup>①</sup> 直到现在为止, 对于含参数的积分求极限, 这是我们所应用过的唯一的方法 (参看第十四章). 在本章与下章中, 我们必须系统地研究不能应用这种方法的情况.

**682. 第一基本引理** 在继续研究以前, 先证明黎曼所发现的下一定理, 它在以后的讨论中很重要.

如果函数  $g(t)$  在某一有限区间  $[a, b]$  上绝对可积, 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin ptdt = 0,$$

同样

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos ptdt = 0.$$

只要作出上列第一个极限式的证明就够了. 预先应注意, 不论取任何有限区间  $[\alpha, \beta]$ , 我们有估值如下:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin ptdt \right| = \left| \frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p} \right| \leq \frac{2}{p}. \quad (5)$$

先设函数  $g(t)$  在原义下可积分. 用点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b \quad (6)$$

将区间  $[a, b]$  分成  $n$  个部分, 并与此相应来分解积分:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin ptdt.$$

<sup>①</sup>在这种情形下, 积分号下的表示式当  $n \rightarrow \infty$  时根本没有极限.



用  $m_i$  表示  $g(t)$  的值在第  $i$  个区间上的下确界, 则可将上面的表示式变换为:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin ptdt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin ptdt.$$

如果  $\omega_i$  是函数  $g(t)$  在第  $i$  个区间上的振幅, 则在这区间上  $g(t) - m_i \leq \omega_i$ ; 考虑到不等式 (5), 不难求得我们的积分的估值:

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

已给任一数  $\varepsilon > 0$ , 首先选取分法 (6), 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

由于函数  $g$  的可积分性, 这种分法是可能的 [297]. 现因数  $m_i$  已由此确定, 所以能选取

$$p > \frac{4}{\varepsilon} \sum |m_i|,$$

对于这些值  $p$ , 可得

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| < \varepsilon,$$

因此证明了我们的断语.

在函数  $g(t)$  是非常义可积 (但必须是非常义绝对可积!) 的情形下, 只要假定在区间  $[a, b]$  上只有一个奇异点, 例如点  $b$ , 就够了.<sup>①</sup>

设  $0 < \eta < b - a$ . 将积分分成两部分:

$$\int_a^b = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b,$$

上式右端的第二个积分对于任一值  $p$  有估值如下:

$$\left| \int_{b-\eta}^b g(t) \sin ptdt \right| \leq \int_{b-\eta}^b |g(t)| dt;$$

如果选取  $\eta$  充分小, 则这个估值  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . 至于积分

$$\int_a^{b-\eta} g(t) \sin ptdt,$$

则由已经证明了的结果, 当  $p \rightarrow +\infty$  时, 它趋近于零, 因为在区间  $[a, b-\eta]$  上, 函数  $g(t)$  在原义下可积分; 当  $p$  充分大时, 这积分的绝对值也变为  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . 这样, 定理的证明就完成了.

<sup>①</sup> 否则我们可将区间分成有限个部分, 使每部分只含一个奇异点, 然后将推理分别应用到每一部分上.



我们提起读者注意: 在这里, 积分所趋近的极限不是用积分号下取极限法求出的.

如果回忆起表示傅里叶系数的公式 (1), 则由此得出第一个直接的推论:

绝对可积分函数的傅里叶系数  $a_m, b_m$  当  $m \rightarrow \infty$  时趋近于零.

**683. 局部化定理** 值得注意的“局部化定理”是已证的引理的第二个直接推论, 它也是黎曼所发现的.

先取任一正数  $\delta < \pi$ , 将 (4) 中的积分拆成两部分:  $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$ . 如果将第二个积分改写成

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

则显然正弦的乘数是  $t$  的函数, 在区间  $[\delta, \pi]$  上绝对可积, 因其分母  $2 \sin \frac{1}{2}t$  在这区间上不为零. 在这种情形下, 由引理, 这一积分当  $n \rightarrow \infty$  时趋近于零, 因此对于傅里叶级数的部分和  $s_n(x_0)$ , 其极限的存在与极限的大小都可由一个积分

$$\rho_n(\delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad (7)$$

的性质来完全确定. 但在这积分中函数  $f(x)$  的值只包含对应于变元从  $x_0 - \delta$  变到  $x_0 + \delta$  时的那一部分. 由这种简单的讨论, 就证明了黎曼定理:

**黎曼定理** 函数  $f(x)$  的傅里叶级数在一点  $x_0$  处的性质<sup>①</sup> 只与函数在这点邻近所取的值有关, 即与在这点的任意小的邻域内所取的值有关.

因此, 例如如果取两函数, 使其在  $x_0$  的任意小的邻域内的值相同, 则不论这两函数在邻域外怎样不同, 在点  $x_0$  处, 与它们相应的傅里叶级数有相同的性质: 或者两级数同时收敛并收敛于同一和式; 或者两级数同时发散. 如果注意到所考虑的两函数的傅里叶系数既然与两函数的一切值有关, 因而也就可能完全不同, 那么上述结果就显得更令人惊讶了!

这个定理通常与黎曼的名字相连, 因为它是黎曼在 1853 年证明的更一般定理的推论. 然而应指出在奥斯特洛格拉得斯基于 1828 年有关数学物理的文章中含有“局部化原理”的思想, 同样罗巴切夫斯基关于三角级数的研究中也反映出这一思想.

**684. 迪尼与利普希茨的傅里叶级数收敛性的判别法** 现在再回来继续研究傅里叶级数的部分和式  $s_n(x_0)$  的性质. 我们已经得到它的积分表示式 (4). 注意这等式对于满足所提到的条件的每一函数  $f(x)$  都成立. 如果特别取  $f(x) \equiv 1$ , 则  $s_n(x) \equiv 1$ ,

<sup>①</sup>我们指的是级数在点  $x_0$  处的收敛与发散性, 以及级数 (在收敛的情形下) 有怎样的和.



由 (4) 就得到

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

设常数  $S_0$  是级数的和, 在下面将要求出它的确值. 用  $S_0$  乘等式两端, 所得结果从 (4) 式减去, 则得

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt, \quad (8)$$

其中为简便计, 已令

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0. \quad (9)$$

如果我们要想断定  $S_0$  真是级数的和, 则必须证明积分 (8) 当  $n \rightarrow \infty$  时趋于零.

现在回来选取  $S_0$  这个数. 实际上重要的情形是: (a) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 或 (б)  $f(x)$  在这点的两边只可能有第一种不连续 (即跳跃), 从而极限  $f(x_0 + 0)$  与  $f(x_0 - 0)$  存在. 以后我们只讨论这两种情形, 并且恒设

在情形 (a) 时:  $S_0 = f(x_0)$ ,

在情形 (б) 时:  $S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

如果在第一种不连续的点  $x_0$  上, 等式

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

成立, 则 (a) 与 (б) 两种情形没有区分的必要. 适合于这种条件的不连续点有时称为正则的.

注意: 因为

$$(a) \lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0) \quad \text{或} \quad (б) \lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0 \pm 0)$$

(视那一种情况而定), 故由上述选取数  $S_0$  的方法, 恒有

$$\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0. \quad (10)$$

由此可形成:

**迪尼(U.Dini)判别法** 如果对于某一  $h > 0$ , 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$



存在, 则函数  $f(x)$  的傅里叶级数在点  $x_0$  收敛于和数  $S_0$ .

事实上, 在这一假定下, 积分

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

也存在. 如果将表示式 (8) 改写成

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

则因函数  $\frac{\varphi(t)}{t}$  绝对可积, 从而  $\frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$  也绝对可积, 直接由基本引理, 可知上一积分式当  $n \rightarrow \infty$  时趋近于零. 因此这个判别法的证明就完成了.

迪尼积分展开的形状:

在情形 (a) 时, 为  $\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)|}{t} dt$ ;

在情形 (b) 时, 为  $\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)|}{t} dt$ .

显然, 只要 (依不同情况) 假设积分

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t} dt \quad \text{与} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{t} dt \quad (11)$$

或

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} dt \quad \text{与} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} dt$$

分别存在就够了. 由此应用积分存在的各种已知判别法, 可得关于傅里叶级数收敛性的许多判别法. 例如, 在情形 (a) 时, 我们能证明

**利普希茨 (R.O.Lipschitz) 判别法** 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 并且对于充分小的  $t$ , 不等式

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha$$

成立, 其中  $L$  与  $\alpha$  都是正的常数 ( $\alpha \leq 1$ ); 则  $f(x)$  的傅里叶级数在点  $x_0$  处收敛于和数  $f(x_0)$ .

当  $\alpha = 1$  时, 则简单地有

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq L,$$



因此积分 (11) 作为原义积分而存在 [480]. 如果  $\alpha < 1$ , 则有

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

并且因为上式右端的函数可积分, 所以积分 (11) 至少是作为反常积分而存在 [482].

特别, 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有有限导数  $f'(x_0)$ , 或者即令有不相等的单侧导数 (“尖点”):

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t},$$

则当  $\alpha = 1$  时的利普希茨条件显然成立. 因此, 如果在点  $x_0$  处, 函数  $f(x)$  有导数, 或者甚至只有两个有限单侧导数, 则其傅里叶级数收敛, 并且它的和等于  $f(x_0)$ .

对于情形 (6), 也容易说明利普希茨判别法. 作为一特别的推论, 我们在这里指出: 要使得傅里叶级数在第一种不连续点  $x_0$  处收敛, 只需假定有限的极限

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

存在, 且这次级数的和是  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

上列极限在某种意义下与单侧导数相似, 不过函数在点  $x_0$  处的值  $f(x_0)$  要分别用它在这一点右边及左边的值的极限来代替.

在实用上最常遇到以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  是可微分的函数, 或者是由几个可微分的函数组成的, 即分段可微分的函数.<sup>①</sup> 我们可看到: 对于这样的函数  $f(x)$ , 其傅里叶级数除在各别函数的 “衔接点” 处外, 收敛于函数  $f(x)$ ; 而在 “衔接点” 处, 级数的和是  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

**685. 第二基本引理** 为了要作出另外一些判别法, 我们还需要建立一个引理, 它是由狄利克雷首先发现的.

如果函数  $g(t)$  在区间  $[0, h](h > 0)$  上单调增加并且有界, 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(+0). \quad (12)$$

**证** 首先, 所考虑的积分可以表为两个积分之和的形状:

$$g(+0) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt + \int_0^h [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt. \quad (13)$$

<sup>①</sup> 函数  $f(x)$  称为在区间  $[a, b]$  内分段可微, 是指当  $[a, b]$  被分成有限多个子区间时, 在每个子区间内部, 函数是可微的, 而在端点处不仅有极限值, 而且在这些端点处以上述极限值代换函数值时, 存在单侧导数. 可以把分段可微函数想象为由若干在闭子区间内可微的函数 “粘合” 而成, 仅在 “衔接点” (以及基本区间的端点  $a$  与  $b$ ) 要特地确定函数值.



如果应用代换  $pt = z$ , 将第一个积分变换为

$$g(+0) \int_0^{ph} \frac{\sin z}{z} dz,$$

则立刻可见, 当  $p \rightarrow +\infty$  时, 这积分趋近于  $\frac{\pi}{2} \cdot g(+0)$ , 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

因此整个问题就在如何证明 (13) 中的第二个积分趋近于零.

任意给出  $\varepsilon > 0$ , 则有这样的  $\delta > 0$  (可认为  $\delta < h$ ) 存在, 使得对于  $0 < t \leq \delta$ ,

$$0 \leq g(t) - g(+0) < \varepsilon.$$

刚才所提到的积分拆成两部分:

$$\left( \int_{\delta}^{\delta} + \int_0^h \right) [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt = I_1 + I_2.$$

对积分  $I_1$  应用波内公式 [306], 则得

$$I_1 = [g(\delta) - g(+0)] \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin pt}{t} dt = [g(\delta) - g(+0)] \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz,$$

其中第一个因子  $< \varepsilon$ , 而第二个因子对于一切值  $p$  一致有界. 事实上, 由反常积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$  的收敛性, 可见当  $z \rightarrow \infty$  时,  $z$  的 ( $z \geq 0$ ) 连续函数

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz,$$

有有限的极限, 并且对于一切值  $z$  有界:

$$\left| \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz \right| \leq L \quad (L = \text{常数}),$$

从而

$$\left| \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz \right| = \left| \int_0^{p\delta} - \int_0^{p\eta} \right| \leq 2L.$$

因此积分  $I_1$  具有与  $p$  无关的估计值:

$$|I_1| < 2L\varepsilon. \quad (14)$$

至于积分  $I_2$ , 则因  $\sin pt$  的乘数在原义下可积分 (须知  $t \geq \delta$ ), 由第 682 目中的引理, 可知当  $p \rightarrow +\infty$  时 (并对固定的  $\delta$ ), 这积分趋近于零. 这定理因而得证.



**686. 狄利克雷-若尔当判别法** 现在转而推导从另一种思想而来的傅里叶级数收敛性的一个新判别法.

**狄利克雷-若尔当判别法** 如果在以点  $x_0$  为中点的区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上, 函数  $f(x)$  有有界变差, 则这函数的傅里叶级数在点  $x_0$  处收敛于和数  $S_0$ .

在第 683 目中我们已经看到, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 部分和  $s_n(x)$  的性质由积分  $\rho_n(\delta)$  的性质确定 [参看 (7)], 其中特别可取上面所说到的数  $h$  作为  $\delta$ . 将积分  $\rho_n(h)$  改为

$$\rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt.$$

由假定, 方括号内的和式为一有界变差函数; 商数  $\frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$  则为增函数. 可见它们的乘积也有有界变差, 而且因此可以表示为两个单调增函数的差的形状. 既然上目中的引理可以分别应用到每个增函数, 所以也可以应用到它们的差, 由此立即得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

因为在连续点处, 所得表示式成为  $f(x_0)$ , 所以我们的证明就完成了.

必须说明由狄利克雷所首先举出的可展开函数为傅里叶级数之条件, 则具有较特殊的性质. 他所证明的命题是:

**狄利克雷判别法** 如果以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上分段单调,<sup>①</sup> 并且在这区间上不连续点的个数不超过一个有限数, 则此函数的傅里叶级数在每个连续点处收敛于和数  $f(x_0)$ , 在每个不连续点处收敛于和数  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

此后, 这里所说的条件称为“狄利克雷条件”.

因为适合于这条件的函数在任一有限区间上显然有有界变差, 所以这判别法可以在形式上包括在前一判别法中.

以上所述判别法完全足以满足分析及其在实用上的要求. 其他提出的判别法主要具有理论上的意义; 对于这些, 我们不可能详细研讨.

最后来谈一谈迪尼及狄利克雷-若尔当的两判别法之间关系的问题. 可以证明, 这两判别法是不可比较的, 这就是说不能从其中的一个推出另一个. 先考虑函数  $f(x)$ , 它在区间  $[-\pi, \pi]$  上定义为:<sup>②</sup>

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln \frac{|x|}{2\pi}}, & \text{在 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

<sup>①</sup> 这意思是说能将区间  $[-\pi, \pi]$  分解成为有限个部分区间, 使得函数在每个部分区间上单调.

<sup>②</sup> 用周期法则  $f(x + 2\pi) = f(x)$  将函数推广到实数轴上的其余部分.



这函数是连续的, 并且是分段单调的, 即满足狄利克雷条件. 而这时在点  $x = 0$  处, 对于任一  $h > 0$ , 迪尼积分

$$\int_0^h \frac{|f(t) + f(-t) - 2f(0)|}{t} dt = 2 \int_0^h \frac{dt}{t \ln \frac{t}{2\pi}}$$

显然是发散的.

在另一方面, 如果用下列等式在区间  $[-\pi, \pi]$  上定义函数:<sup>①</sup>

$$\begin{cases} f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{在 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

则在点  $x = 0$  处, 利普希茨条件显然成立:

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|,$$

因此迪尼条件也成立. 然而, 此时函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  的任何邻域内没有有界变差 [567].

**687. 非周期函数的情形** 以上所建立的全部理论的出发点是: 假定所给函数对于一切实值  $x$  有定义, 并且有周期  $2\pi$ . 但是最常遇到的函数  $f(x)$  或者是: (a) 只在区间  $(-\pi, \pi]$  上被给出; 或者是: (b) 即使在这区间以外也有定义, 它是非周期的.

为了要能将上面的理论应用到这种函数, 引进由下述方式所定义的辅助函数  $f^*(x)$  来代替它. 在区间  $(-\pi, \pi]$  上, 取  $f^*$  与  $f$  恒等:

$$f^*(x) = f(x) \quad (-\pi < x \leq \pi), \quad (15)$$

又令

$$f^*(-\pi) = f^*(\pi),$$

而用周期法则将函数  $f^*(x)$  推广到  $x$  的其他实数值.

对于这样作出的以  $2\pi$  为周期的函数  $f^*(x)$ , 可以应用已证的关于展开的定理. 然而, 如果所讨论的点  $x_0$  严格地在  $-\pi$  与  $\pi$  之间, 则当检查这些定理的条件是否成立时, 由于 (15), 只需考虑实际上给出的函数  $f(x)$ . 根据同样的理由, 可以不必引进函数  $f^*(x)$  就直接用公式 (1) 将展开式的系数计算出来. 简单地说, 不必用辅助函数  $f^*(x)$ , 以上所证明的全部结果都可直接应用到已给函数  $f(x)$  上来.

但是必须特别注意区间的端点  $x = \pm\pi$ . 当检查第 684, 686 目中任一定理的条件对于  $f^*(x)$  譬如说在点  $x = \pi$  处是否成立时, 则既需考察辅助函数  $f^*(x)$  在  $x = \pi$  左侧的值, 又需考察在右侧的值; 其左侧的值与已给函数  $f(x)$  的对应值一致, 而其右侧

<sup>①</sup> 见上页脚注 ②.



的值则与  $f(x)$  在  $x = -\pi$  的右侧的值一致. 因此, 如果我们要对于点  $x = \pm\pi$  复述狄利克雷-若尔当判别法, 则在两种情形下都必须要求  $f(x)$  在  $x = \pi$  的左侧与  $x = -\pi$  的右侧都有有界变差, 此时在两种情形下, 应取

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} \\ &= \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \end{aligned}$$

作为值  $S_0$ . 由此可知, 即使已给函数  $f(x)$  在  $x = \pm\pi$  处连续, 但是没有周期  $2\pi$ , 从而  $f(\pi) \neq f(-\pi)$ , 则当傅里叶级数收敛性的任一个充分条件成立时, 这一级数的和将为

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

而与  $f(-\pi)$  及  $f(\pi)$  都不相同. 对于这种函数, 展开式只在开区间  $(-\pi, \pi)$  内成立.

读者应当特别留心下面的说明. 如果三角级数 (2) 在区间  $(-\pi, \pi)$  内收敛于函数  $f(x)$ , 则因为它的各项都以  $2\pi$  为周期, 级数处处收敛, 而且它的和  $S(x)$  也是以  $2\pi$  为周期的  $x$  的周期函数. 不过一般说来, 这个和在上述区间以外已与函数  $f(x)$  不同[如果已经在整个实轴上给出  $f(x)$ ]. 以后 [690] 将用许多例子来解说此点.

最后指出, 可取长为  $2\pi$  的任一区间  $(a, a+2\pi]$  来代替区间  $(-\pi, \pi]$ .

**688. 任意区间的情形** 设在任意长  $2l(l > 0)$  的区间  $(-l, l]$  上给出一函数  $f(x)$ . 如果用下式变换:

$$x = \frac{ly}{\pi} \quad (-\pi < y \leq \pi),$$

则得在区间  $(-\pi, \pi]$  上一个  $y$  的函数  $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ , 此时就可应用上目中的讨论. 我们已看到, 在一定的条件下, 可将它展开为傅里叶级数:

$$f\left(\frac{yl}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

其中各系数由欧拉-傅里叶公式确定:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \cos ny dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \sin ny dy \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

现在回到原有的变数  $x$ , 令

$$y = \frac{\pi x}{l},$$

则得已给函数  $f(x)$  的三角级数展开式, 但其型式略有变更:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (16)$$



这里取的不是角  $x$  的, 而是角  $\frac{\pi x}{l}$  的倍角的余弦与正弦. 用同一变换, 可将关于确定展开式系数的公式变换成下形:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

对于区间的端点  $x = \pm l$ , 上目中对点  $x = \pm \pi$  所作的说明仍然有效. 最后, 区间  $(-l, l]$  可用另外任一长为  $2l$  的区间来代替, 特别可用区间  $(0, 2l]$  来代替. 此时则必须用公式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (17^*)$$

来代替公式 (17).

在区间的端点或函数的不连续点处保留所有条件时, 已证明了下一重要而有原则性意义的事实: 在任意区间上任意给定的函数属于极广泛一类者,<sup>①</sup> 可以展开为三角级数, 这就是说, 在函数有定义的整个区域中, 可用唯一的分析式——三角级数——将它表示出来. 在第 690 目中, 我们将特别找出函数的展开式的许多例子, 而各函数原先在区间的各部分上是用不同的分析表示式给出的. 三角级数这一工具是用来“接连”函数的普通工具, 最终消除了在整个定义域中可用一个分析式表示的函数与要用几个分析式来定义的函数之间的界限[参考 46, 3°; 363, 5); 407, 附注 I; 497, 11) 等等].

**689. 只含余弦或正弦的展开式** 首先注意: 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上所给出的 (常义或非常义) 可积函数  $f(x)$  是奇函数, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

将积分  $\int_{-\pi}^{\pi}$  化为两积分之和的形状:  $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ , 并且在第二个积分中将  $x$  换为  $-x$ , 则不难推出此结果. 用同样方法, 可知当  $f(x)$  为偶函数时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$$

[参考 314, 9) 及 316].

现设  $f(x)$  是在区间  $[-\pi, \pi]$  上绝对可积分的偶函数. 则  $f(x) \sin nx$  是奇函数, 由上所述,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

<sup>①</sup>例如分段可微分或分段单调的函数等都包括在内.



因此,偶函数的傅里叶级数只含余弦:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (18)$$

因为在这种情形下,  $f(x) \cos nx$  也是偶函数, 则应用上述第二个说明, 能将展开式的系数  $a_n$  写作

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

如果函数  $f(x)$  是奇函数, 则函数  $f(x) \cos nx$  也是奇函数, 从而

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

我们得结论如下:奇函数的傅里叶级数只含正弦:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (20)$$

而且由于乘积  $f(x) \sin nx$  是偶函数, 所以能写出

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (21)$$

顺便注意到在区间  $[-\pi, \pi]$  上所给出的每一函数  $f(x)$  都能够表作偶函数与奇函数之和的形式:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

其中

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

显然, 函数  $f(x)$  的傅里叶级数恰巧是由函数  $f_1(x)$  的余弦展开式与函数  $f_2(x)$  的正弦展开式所组成的.

再设只是在区间  $[0, \pi]$  上给出  $f(x)$ . 要想在这区间上将它展开为傅里叶级数 (2), 我们对于在区间  $[-\pi, 0)$  上的值  $x$ , 任意补充函数的定义, 然后应用第 687 目中的结果. 由于可以任意补充函数的定义, 所以就有可能得到各种不同的三角级数. 如果在 0 与  $\pi$  之间的任一点  $x_0$  处, 函数满足在第 694, 696 目中所建立的一个判别法, 则这些级数在点  $x_0$  处或者收敛于  $f(x_0)$ , 或者在  $x_0$  是不连续点时收敛于  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ .

利用函数定义在区间  $[-\pi, 0)$  的任意性, 可以得到  $f(x)$  的只含余弦<sup>2</sup>的或只含正弦的展开式. 实际上, 想象在  $0 < x \leq \pi$  时, 令

$$f(-x) = f(x), \quad (22)$$

则得在区间  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数 (图 123,a), 而且它有周期  $2\pi$ . 由前述可知它的展开式只含余弦. 展开式的系数可用公式 (19) 来计算, 而在计算中只用得着原给函数  $f(x)$  的值.



同样, 如果用条件 (对于  $0 < x \leq \pi$ )

$$f(-x) = -f(x) \quad (23)$$

来补充函数  $f(x)$  的定义, 使它成为奇函数(图 123, 6), 则其展开式中只含一些正弦项. 而其系数可由公式 (21) 来确定.

因此, 当已知的一些条件成立时, 在区间  $[0, \pi]$  上所给出的函数既能展开为只含正弦的级数, 又能展开为只含余弦的级数!

然而, 点  $x = 0$  及  $x = \pi$  需要特别加以研究. 在这两点处, 两个展开式是不同的. 为简单起见, 假定所给函数  $f(x)$  在  $x = 0$  及  $x = \pi$  处连续, 而首先考虑余弦展开式. 条件 (22) 首先使得在  $x = 0$  处的连续性保持不变, 因此当应有的条件成立时, 级数 (18) 在  $x = 0$  处恰好收敛于  $f(0)$ . 又因

$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi),$$

所以在  $x = \pi$  处也有类似的情况.

正弦展开式的情况则不相同. 现不深入讨论由于条件 (23) 而破坏了函数的连续性等等, 而只简单地指出在点  $x = 0$  与  $x = \pi$  处级数 (20) 的和显然是零. 因此只有在  $f(0)$  及  $f(\pi)$  的值等于零时, 级数的和才能给出这些值.

如果函数  $f(x)$  是在区间  $[0, l] (l > 0)$  上给出的, 则引用与 688 目中相同的变量变换后, 展开函数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

或正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

的问题就化为刚才所讨论过的问题. 此时展开式中的系数可分别用公式

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

或

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (25)$$

计算出来.

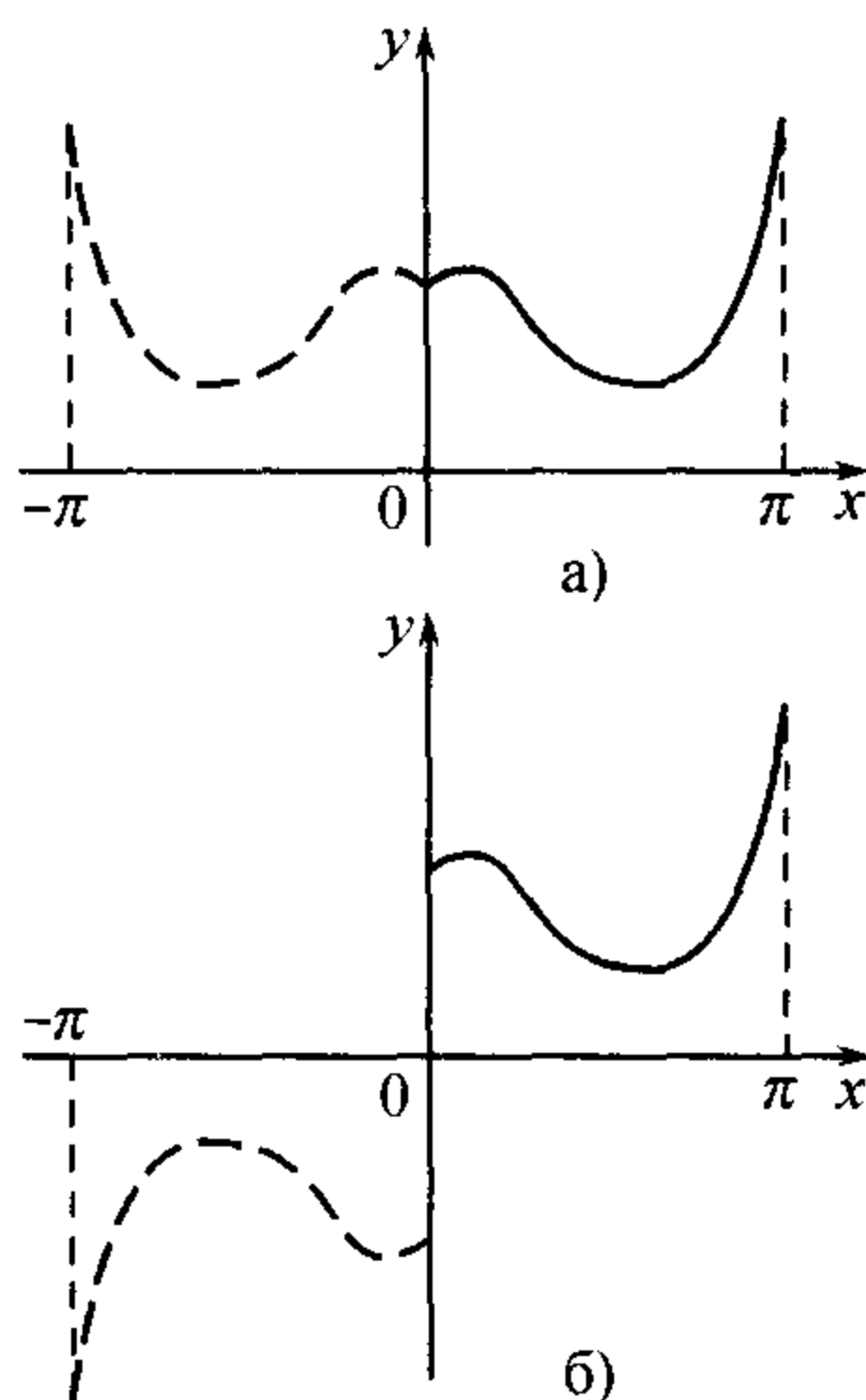


图 123



**690. 例** 下面作为例子的函数不是可微分函数, 就是分段可微分的函数. 这种函数无疑地能展开为傅里叶级数, 因此我们不讨论展开问题.

1) 在区间  $(-\pi, \pi)$  内展开函数

$$f(x) = e^{ax} \quad (a = \text{常数}, \neq 0).$$

由公式 (1):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = 2 \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi. \end{aligned}$$

因此, 对于  $-\pi < x < \pi$ , 则有

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \cos nx - n \sin nx] \right\}.$$

如果我们从区间  $(0, 2\pi)$  出发, 则得系数不同的展开式——此时必须利用公式 (1\*). 不过新的展开式也不难从已经求得的展开式推出.

2) 在区间  $(0, 2\pi)$  内展开函数

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

由公式 (1\*):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \pi x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \\ &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

这样得到特别简单并且只含正弦的展开式:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

在  $x = 0$  (或  $2\pi$ ) 处, 级数的和等于零, 上面的等式不成立. 在以上所指出的区间之外, 这个等式也不成立. 级数和  $S(x)$  的图解 (图 124) 是由无限多个平行线段与在  $x$  轴上的一系列孤立点所构成的.



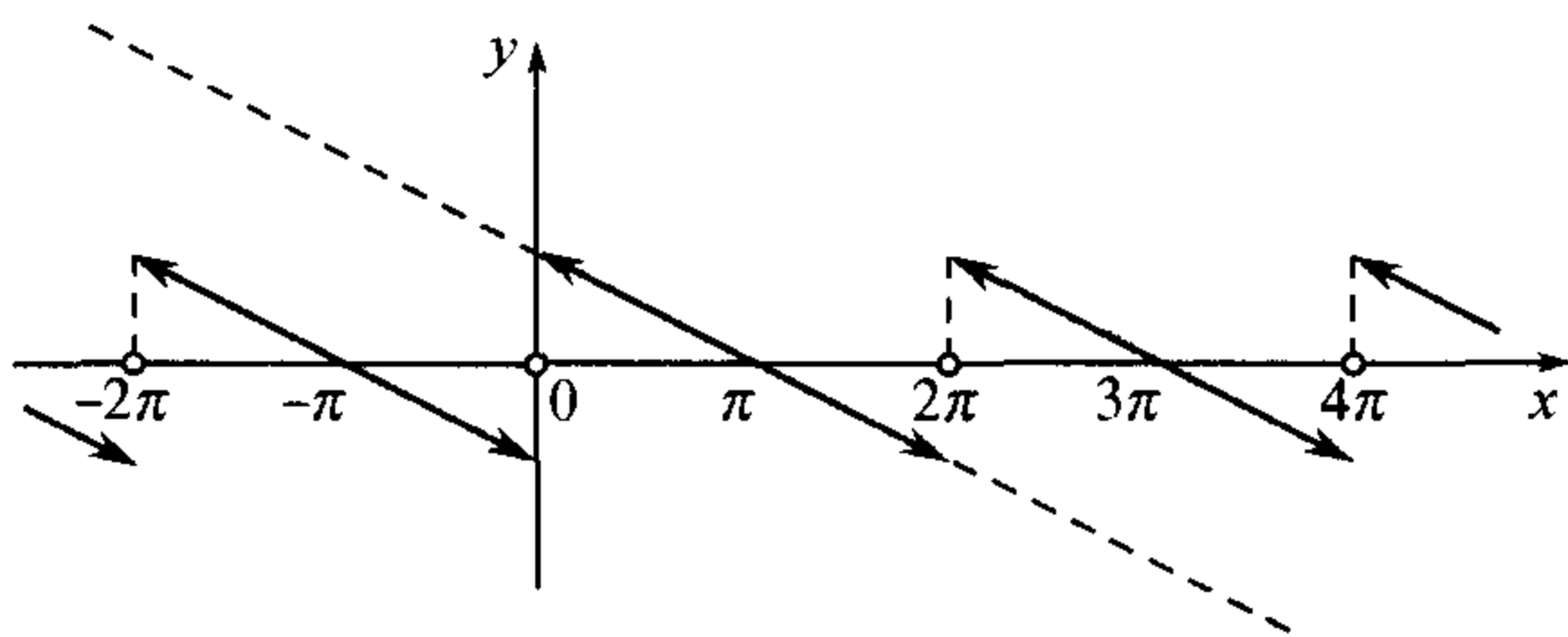


图 124

3) 由于上题中所得展开式特别重要, 今不依赖一般的理论, 而用初等的方法将它推演出来. 设  $0 < x < 2\pi$ . 利用第 680 目中的公式 (26), 将它改写为:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

逐步求得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos kt dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin(2n+1)\frac{t}{2} dt + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t} dt. \end{aligned}$$

但当  $n \rightarrow +\infty$  时, 由第 682 目中的基本引理, 上面的等式最后一部分中的第二项趋近于 0;<sup>①</sup> 而作变换  $u = (2n+1)\frac{t}{2}$ , 则第三项变换为

$$\int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin u}{u} du,$$

它显然趋近于  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2},$$

这就是我们所要证明的.

4) 从 2) 中的展开式出发, 不加计算, 可推得其他有趣的展开式. 在原展开式中将  $x$  换成  $2x$ , 并用 2 除等式两端, 得:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0 < x < \pi),$$

<sup>①</sup> 如果令方括弧中的因子当  $t = 0$  时的值为 0, 则它是在这点解析的函数, 因为它在这点邻近, 可以展开成幂级数:

$$\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}t + \frac{37}{5760}t^3 + \dots$$



由原展开式减去这个展开式, 得:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi).$$

如果用  $S(x)$  表示上面级数的和, 则  $S(0) = S(\pi) = 0$ . 因为正弦是奇函数, 改变  $x$  的符号, 可知在区间  $(-\pi, 0)$  内,  $S(x) = -\frac{\pi}{4}$ ; 对于  $x$  的其他数值, 和数  $S(x)$  可由周期规律推出, 因此特别在区间  $(2\pi, 3\pi)$  内, 又得  $S(x) = \frac{\pi}{4}$ , 等等. 函数  $S(x)$  的图解见图 125; 图 126 显示由级数的各部分和所表示的、不连续函数的逐步渐近值.

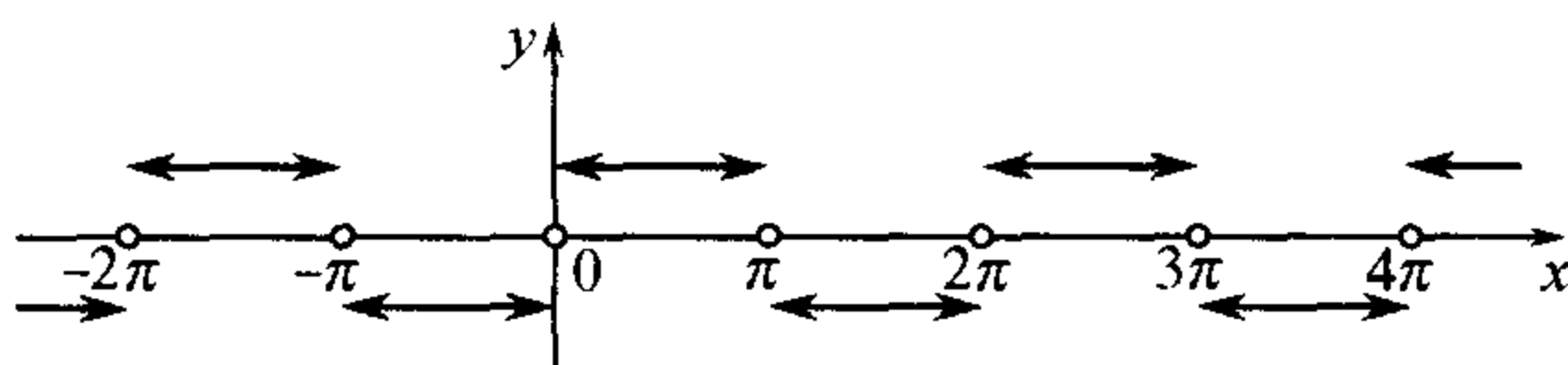


图 125

如果在所考虑的展开式中, 令  $x = \frac{\pi}{2}$ , 即得我们熟知的莱布尼茨级数[404(16)]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

当  $x = \frac{\pi}{6}$  及  $x = \frac{\pi}{3}$  时, 得级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots$$

及

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$$

合并此处所求得的展开式与 2) 中的展开式, 不难得出关于函数  $f(x) = x$  的级数:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

我们只是对于  $0 < x < \pi$  直接得出此等式, 但显然这等式对于  $x = 0$  也成立; 此外它的两端显然都是奇函数, 因此最后的展开式对于整个区间  $(-\pi, \pi)$  正确.

当  $x$  由  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 级数和的图解不难由图 127 表出. 在图 128 上, 描画着部分和

$$y = s_5(x) = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$$

的图解.

5) 依靠 2) 中的展开式, 证明在整个实数轴上

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - E(x), & \text{对于非整数 } x, \\ \frac{1}{2}, & \text{对于整数 } x. \end{cases}$$

6) 在区间  $[-\pi, \pi]$  上, 展开 (偶) 函数  $f(x) = x^2$  为余弦级数.



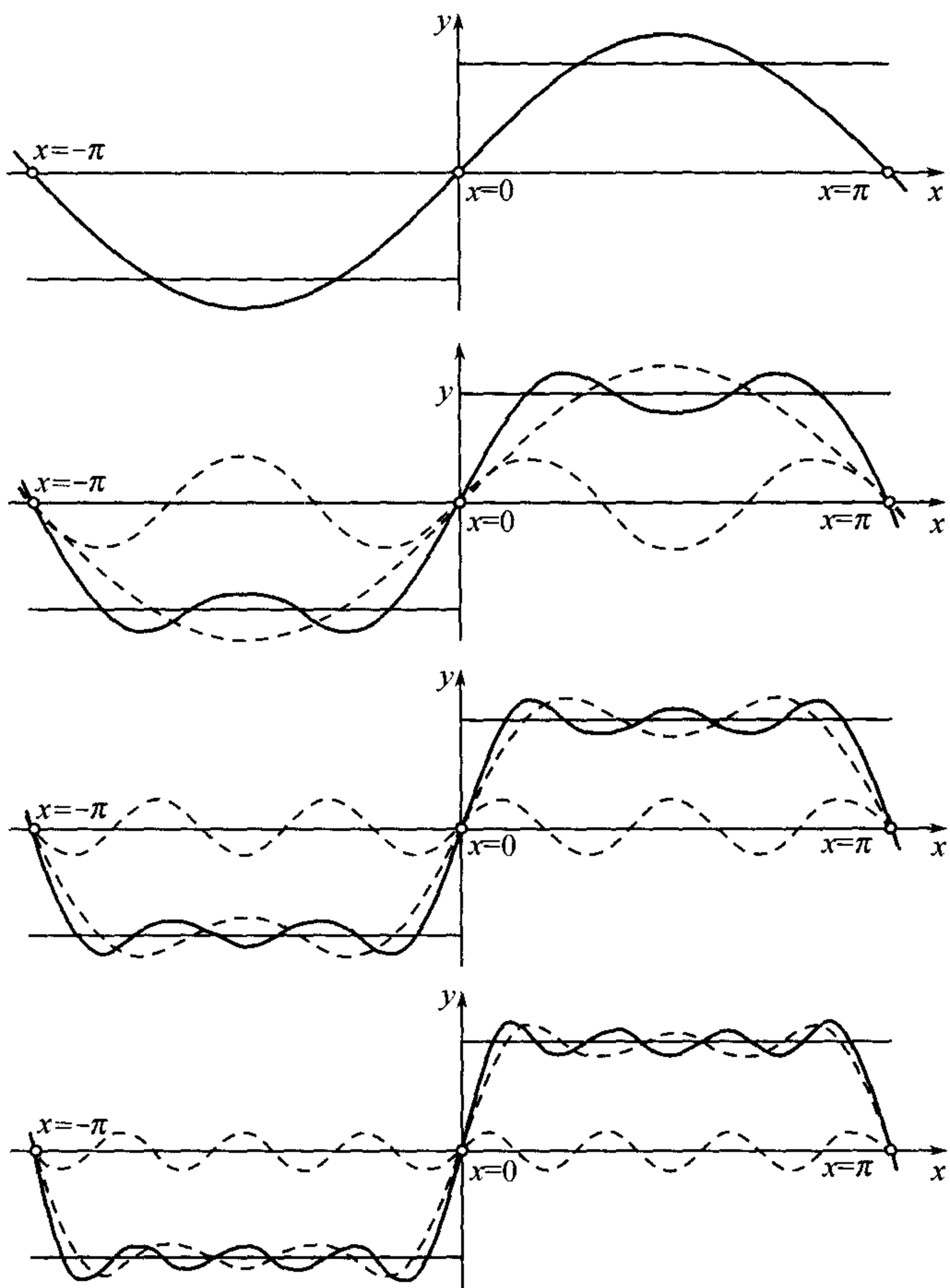


图 126

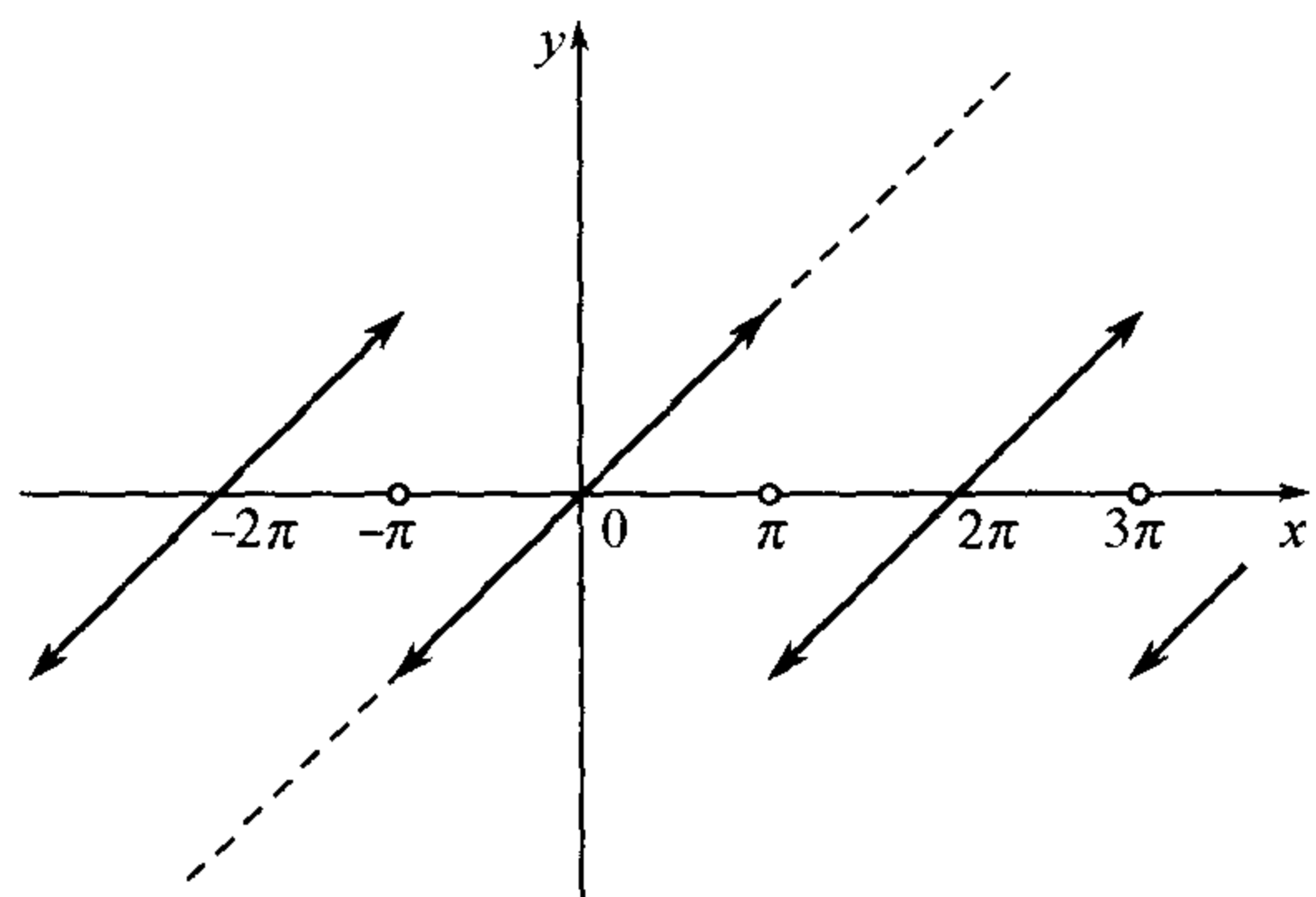


图 127



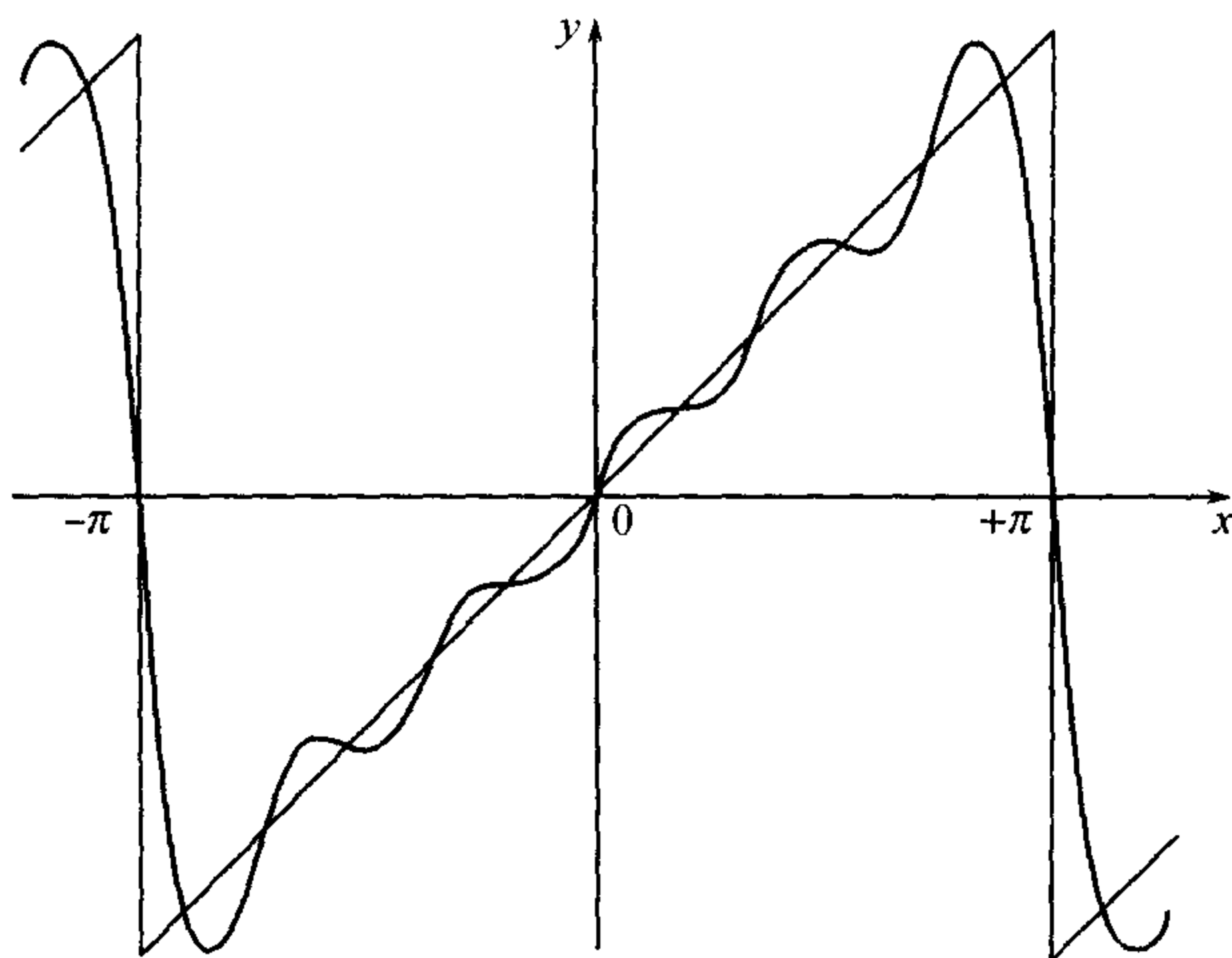


图 128

由公式 (19):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{4}{n\pi} x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n > 0),\end{aligned}$$

因此

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

级数和的图解表示在图 129 上, 它是由无穷个互相连接的抛物线弧所组成的.

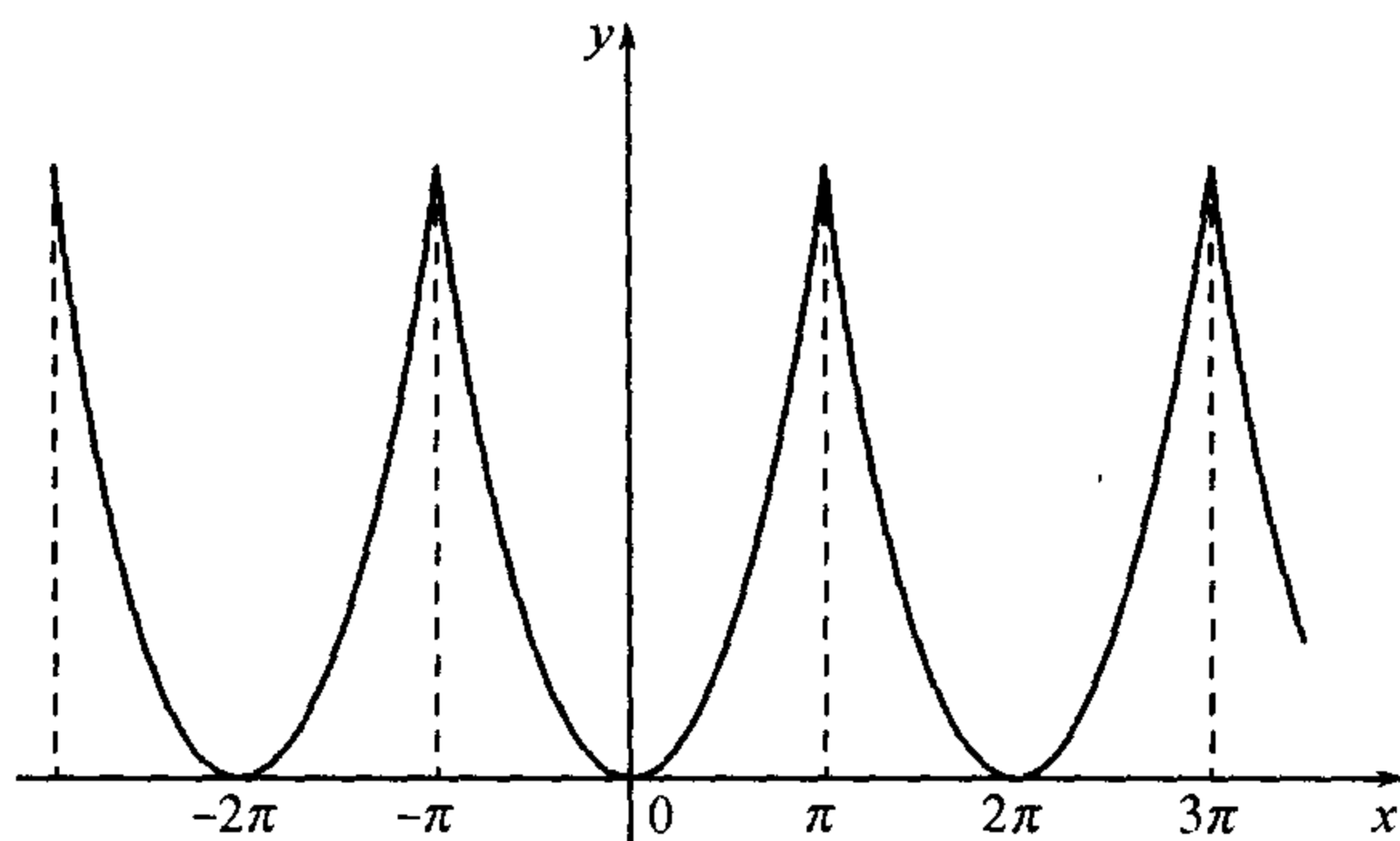


图 129



在所得展开式中, 令  $x = \pi$  或  $x = 0$ , 则得出熟知的结果:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

此两式中, 任何一式亦可由其他一式直接推演出来.

7) 将函数:

(a)  $f_1(x) = \cos ax$ , 在  $[-\pi, \pi]$  上按余弦展开,

(b)  $f_2(x) = \sin ax$ , 在  $(-\pi, \pi)$  内按正弦展开

(这里假定数  $a$  不是整数).

(a) 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi}, \\ (n > 0) \quad a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x] dx = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi}, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\pi \cos ax}{2 \sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

$$(b) \text{ 答 } \frac{\pi \sin ax}{2 \sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

顺便注意到当  $x = 0$  时, 可由 (a) 得:

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2},$$

或者令  $a\pi = z$ ; 则得:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right]$$

(其中  $z$  是不为  $\pi$  之整倍数的任何数). 由此重新求得函数  $\frac{1}{\sin z}$  之由简单分数形成的展开式. 在 (a) 中令  $x = \pi$ , 便又得到函数  $\operatorname{ctg} z$  的简单分数形式的展开式[参看 441,9)].

非常显著的是: 这几个数学上的重要结果可以简单地从各别的三角展开式推得.

8) 由 1) 中函数  $f(x) = e^{ax}$  的展开式可以很简单地推得函数:

(a)  $f_1(x) = \operatorname{ch} ax$ , 在  $[-\pi, \pi]$  上的余弦展开式,

(b)  $f_2(x) = \operatorname{sh} ax$ , 在  $(-\pi, \pi)$  内的正弦展开式, 而且  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  分别是关于  $f(x)$  的偶的与奇的组成函数 [689]. 其展开式的形状是:

$$\begin{aligned} \frac{\pi \operatorname{ch} ax}{2 \operatorname{sh} a\pi} &= \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{a^2 + n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \\ \frac{\pi \operatorname{sh} ax}{2 \operatorname{sh} a\pi} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi). \end{aligned}$$



作为推论,由此可得函数  $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$  与  $\operatorname{cth} z$  的简单分数形式的展开式.

现转到从 0 到  $\pi$  的区间上所给出的函数之余弦或正弦展开式的例子 [689].

9) 在区间  $[0, \pi]$  上, 用余弦展开函数  $f(x) = x$ .

由公式 (19):

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = 2 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi} \quad (n > 0),$$

即

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

所求展开式的形状为:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

级数和的图解表示在图 130 上 [比较同一函数在 4) 中的正弦展开式及其在图 127 上的图解]. 在图 131 上, 描画出近似曲线:

$$y = s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \right).$$

结合所得结果与在 6) 中函数  $x^2$  的余弦展开式, 容易得出:

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

然而, 因为将  $x$  换成  $2\pi - x$  时, 等式两端的值均不变, 所以事实上等式在较大的区间  $[0, 2\pi]$  上依然成立.

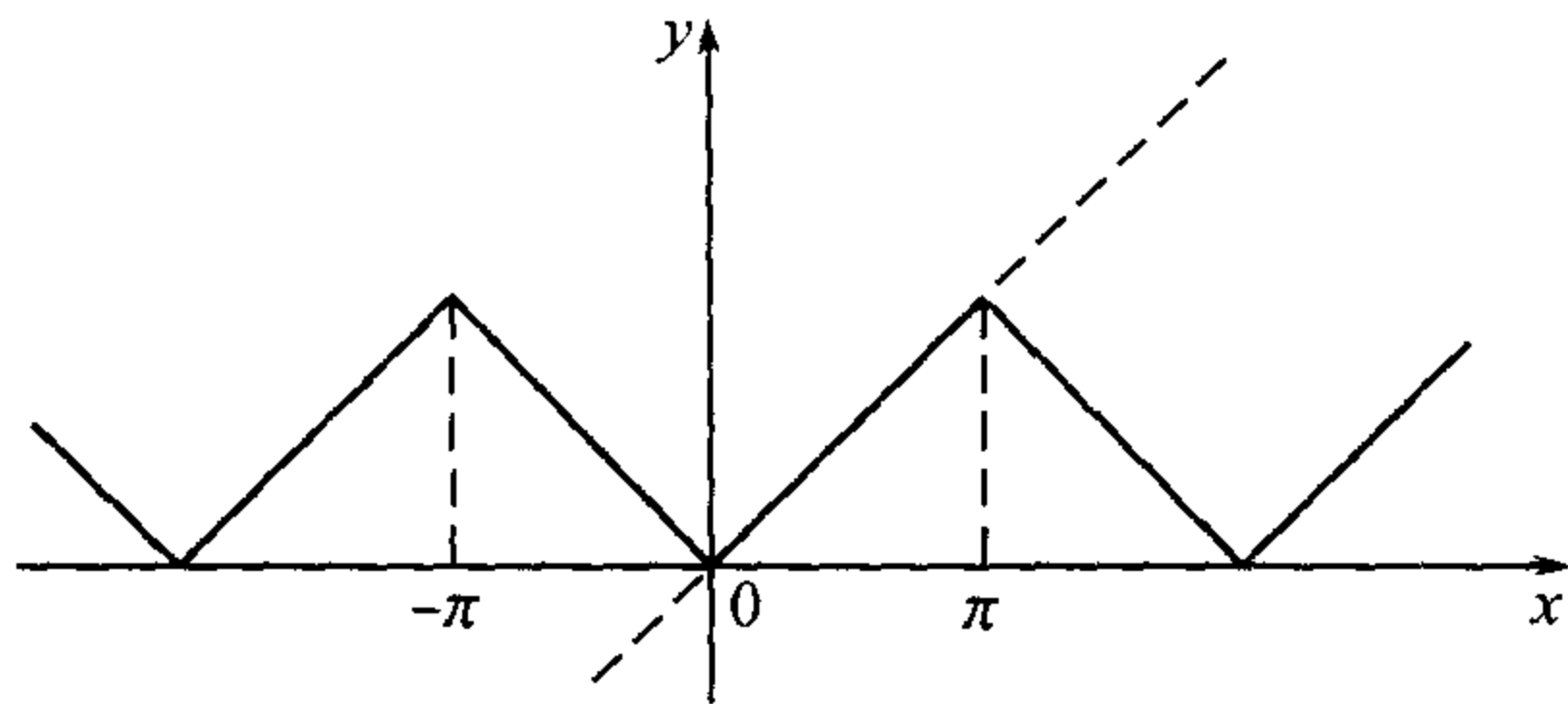


图 130

10) 在区间  $(0, \pi)$  内, 按正弦展开函数  $f(x) = x^2$ .

答

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$



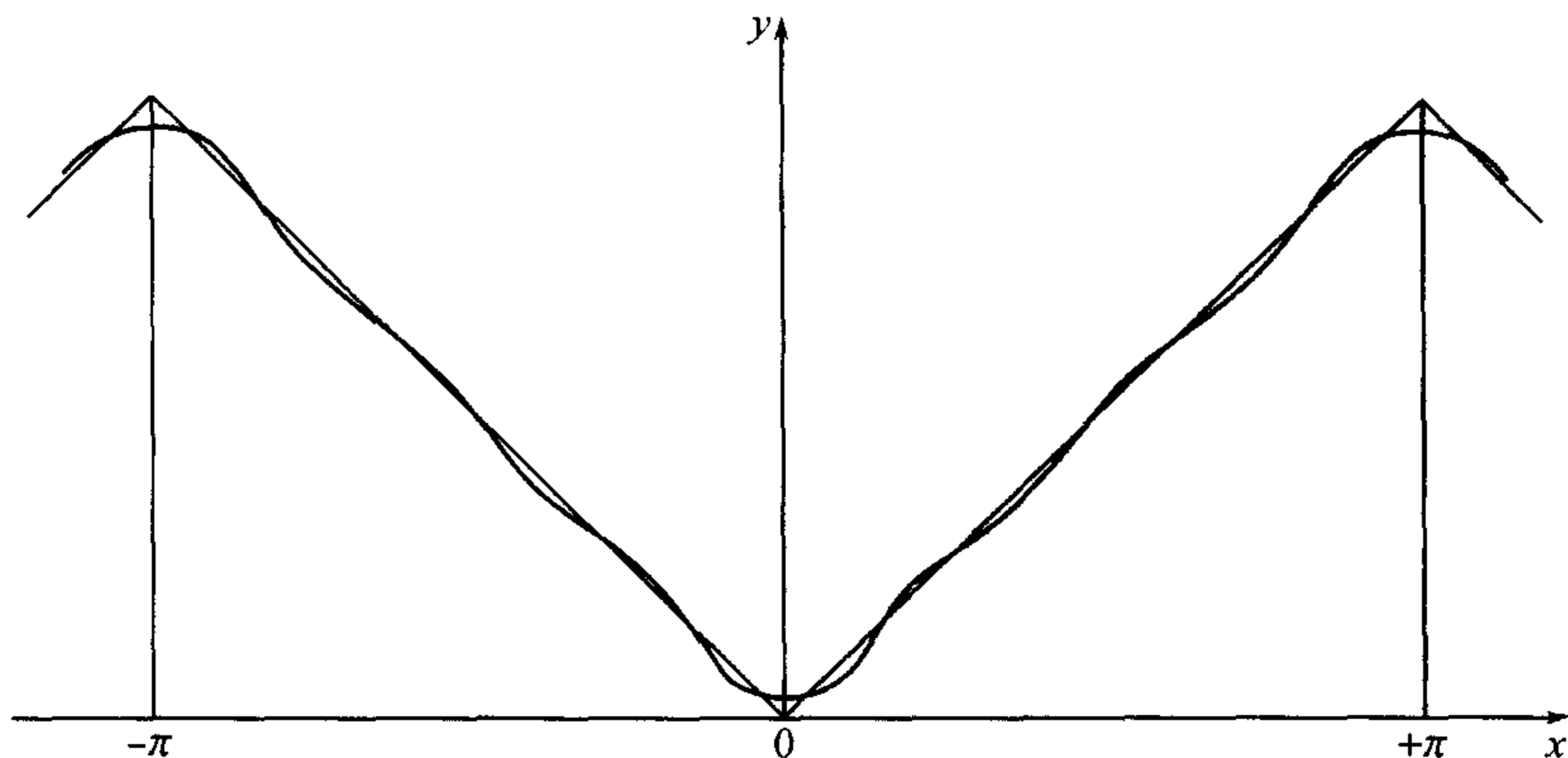


图 131

读者试作出级数和的图解, 并且将它与图 129 上的图解相比较.

11) 在从 0 到  $\pi$  的区间中, 展开函数  $f(x) = e^{ax}$  为 (a) 余弦级数与 (b) 正弦级数.

答 (a)  $e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi),$

(b)  $e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \quad (0 < x < \pi).$

12) 将函数

(a)  $f_1(x) = \sin ax$ , 在  $[0, \pi]$  上按余弦展开,

(b)  $f_2(x) = \cos ax$ , 在  $(0, \pi)$  内按正弦展开.

(a) 解 首先假定  $a$  不是整数. 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax dx = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(a+n)x + \sin(a-n)x] dx \\ &= \frac{2a}{\pi} [1 - (-1)^n \cos a\pi] \frac{1}{a^2 - n^2}. \end{aligned}$$

所求展开式可写成下列形式:

$$\begin{aligned} \sin ax &= \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{a^2 - (2k)^2} \right\} \\ &\quad + 2a \frac{1 + \cos a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{a^2 - (2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi). \end{aligned}$$

现设  $a$  为整数, 则需要分成偶数  $a = 2m$  或奇数  $a = 2m - 1$  两种情形. 当  $a = 2m$  时,

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{8m}{\pi} \frac{1}{(2m)^2 - (2k-1)^2},$$

因此

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2m)^2 - (2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$



同样, 当  $a = 2m - 1$  时,

$$\sin(2m-1)x = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2(2m-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2m-1)^2 - (2k)^2} \right\}^{(1)} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

(6) 提示 应分成与在 (a) 中一样的各种情形来讨论.

13) 证明关于在  $[0, \pi]$  上的  $x$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} = \frac{1}{96} \pi (\pi - 2x) (\pi^2 + 2\pi x - 2x^2).$$

提示 将在上式右端的函数  $f(x)$  展开为傅里叶级数, 当重复进行分部积分时, 顾及  $f'(0) = f'(\pi) = 0$ .

14) 现在考虑非常义可积函数展开式的例子. 设要在区间  $(-\pi, \pi)$  内, 按余弦展开偶函数

$$f(x) = \ln 2 \cos \frac{x}{2}.$$

函数在区间的两端变为  $\infty$ , 但依然保持 (绝对) 可积分性.

由公式 (19):

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} dx = \ln 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt = 0$$

[参考 492, 1°], 而关于  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = (-1)^{n-1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

(将  $x$  换作  $\pi - x$ ). 为了计算最后一个积分, 将被积分函数写为和的形状:

$$\frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

根据第 680 目中的恒等式 (26), 将上式每一项分别换作和数

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ix \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \cos ix.$$

最后,

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

而所求展开式的形状是

$$\ln 2 \cos \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

① 不难证明, 如果在等式左端将正弦用它的绝对值来代替, 则展开式在整个实数轴上成立.



如果当  $x = \pm\pi$  时令等式两端的值是  $-\infty$ , 则可看作等式在此时也成立. 如果在  $\ln$  符号下将余弦用它的绝对值来代替, 则新的等式对于一切实数值  $x$  皆成立!

在证得的等式中, 用  $\pi - x$  代替  $x$ , 就得另一有趣的展开式:

$$-\ln 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

关于此公式的推广, 可作与上相同的说明.

最后举几个展开“接连”函数的例子, 这种函数在区间不同的部分上是用不同的分析表示式给出的.<sup>①</sup>

15) 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } -\pi < x < 0. \\ x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

展开这函数为完全的傅里叶级数.

由公式 (1) 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}, \end{aligned}$$

即

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)^2\pi}.$$

同样

$$b_n = -\frac{\cos nx}{n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9\pi} \cos 3x \\ &\quad + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \dots \quad (-\pi < x < \pi). \end{aligned}$$

16) 在从 0 到  $\pi$  的区间上按余弦展开函数

$$(a) \quad f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{对于 } 0 \leq x \leq h, \\ 0, & \text{对于 } h < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(b) \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & \text{对于 } 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & \text{对于 } 2h < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(a) \quad \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^h dx = \frac{h}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin nh}{n},$$

<sup>①</sup>然而与以上已研究过的例子比较, 此处并没有包含任何新的原则: 实际上, 2) 中的级数和也可看作是由许多线性函数“接连”而得的函数 (参考图 124).



除在点  $x = h$  外,

$$f_1(x) = \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right\} \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

而在点  $x = h$ , 级数和等于  $\frac{1}{2}$ .

(6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2h} \left(1 - \frac{x}{2h}\right) dx = \frac{h}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2h} \left(1 - \frac{x}{2h}\right) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos 2nh}{2n^2 h} = \frac{2 \sin^2 nh}{\pi n^2 h}, \\ f_2(x) &= \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \cos nx \right\} \quad (0 \leq x \leq \pi). \end{aligned}$$

17) 求证

$$(a) \quad \cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 11x}{11} + \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{当 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{当 } x = \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{当 } \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(b) \quad \sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}x, & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \text{当 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi - x), & \text{当 } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

18) 设函数  $f(x)$  由下列各等式定义:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \text{关于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

按余弦展开这函数.

答

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \right\}.$$



19) 求证级数和

$$\frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} [\cos(4k+1)x - \sin(4k+1)x - \cos(4k+3)x - \sin(4k+3)x]$$

当  $m\pi < x < m\pi + \frac{\pi}{2}$  时等于  $\pi \sin x$ , 当  $m\pi + \frac{\pi}{2} < x < (m+1)\pi$  时等于  $\pi \cos x$ , 而当  $x = m\pi$  或  $(m + \frac{1}{2})\pi$  时等于  $(-1)^m \frac{\pi}{2}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

20) 以正六边形的边长  $a$  为半径, 以其 (互不相邻的) 三顶点为圆心作圆; 圆的外弧构成三叶线(图 132). 如果取六边形的中心作为极点, 取通过一圆心的直线作为极轴, 试写出三叶线的极坐标方程式.

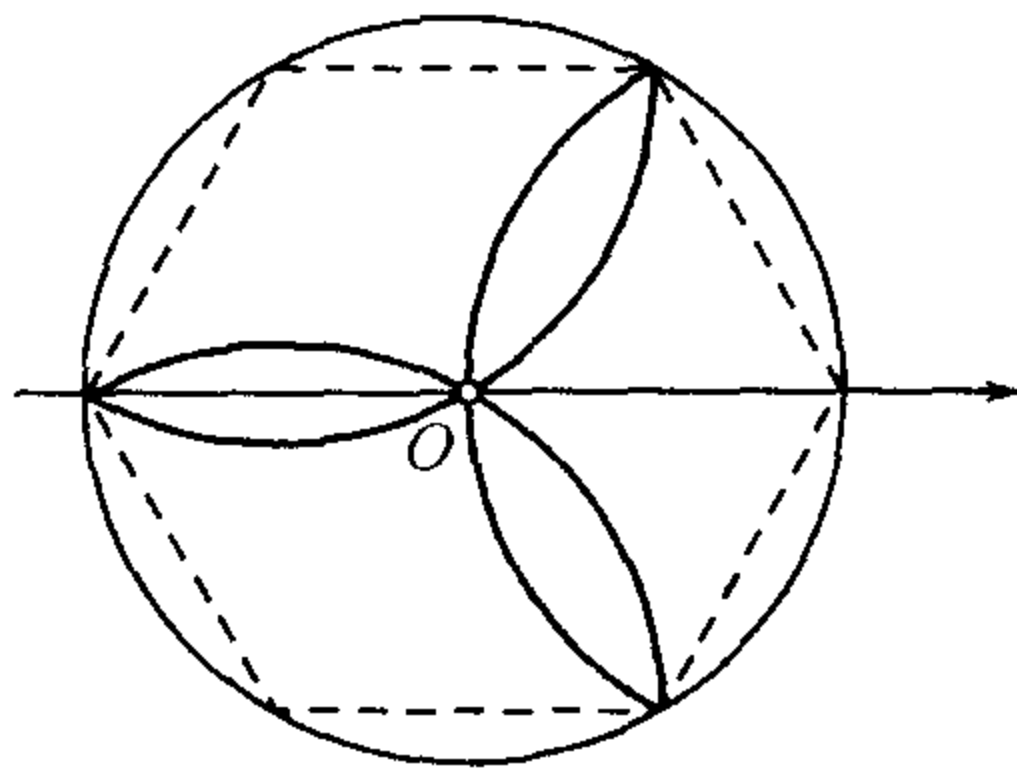


图 132

**提示**  $r = f(\theta)$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ), 其中偶函数  $f(\theta)$  由下列等式定义:

$$f(\theta) = \begin{cases} 2a \cos \theta, & \text{关于 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 2a \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right), & \text{关于 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

按余弦展开此函数.

答  $\frac{\pi}{6\sqrt{3}a} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\theta - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\theta + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\theta - \dots$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ).

21) 利用已知的展开式, 求证

$$(a) \quad x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(b) \quad x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(B) \quad \sin x \ln 2 \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(r) \quad \cos x \ln 2 \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \cos nx \quad (-\pi < x < \pi).$$

22) 如果在区间  $[0, 2\pi]$  上所给出的函数  $f(x)$  适合条件:

$$(a) \quad f(2\pi - x) = f(x) \quad \text{或} \quad (b) \quad f(2\pi - x) = -f(x),$$

则在第一种情形下, 所有的  $b_n = 0$ ; 在第二种情形下, 所有的  $a_n = 0$ .

证明此结果 [或者从公式 (1) 出发, 或者按周期性开拓而得的函数为偶函数或奇函数来证明].

**附注** 由此可预见函数  $\frac{\pi-x}{2}$  与  $\ln 2 \sin \frac{x}{2}$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的展开式 [2) 与 14)] 的特性, 因为

$$\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = -\frac{\pi - x}{2}, \quad \ln 2 \sin \frac{2\pi - x}{2} = \ln 2 \sin \frac{x}{2}.$$



23) 求证: 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上函数  $f(x)$  适合条件:

$$(a) f(x + \pi) = f(x) \quad \text{或} \quad (b) f(x + \pi) = -f(x),$$

则在第一种情形下,  $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$ ; 在第二种情形下,  $a_{2m} = b_{2m} = 0$ .

24) 限于在区间  $[0, \pi]$  上所给出的函数, 求证由条件

(a)  $f(\pi - x) = f(x)$  可导出等式  $a_{2m-1} = 0$  (在余弦展开式中) 或  $b_{2m} = 0$  (在正弦展开式中);

(b)  $f(\pi - x) = -f(x)$  可导出等式  $a_{2m} = 0$  (在余弦展开式中) 或  $b_{2m-1} = 0$  (在正弦展开式中).

**附注** 基于此点, 可以预见: 在 4) 中函数  $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  与  $\frac{\pi}{4}$  的正弦展开式的特性; 在 12) 中函数  $\sin 2mx$  与  $\sin(2m-1)x$  的余弦展开式的特性; 以及在 13), 17) 与 18) 中各展开式的特性.

25) 仿照第 689 目中的推理, 证明在通常的条件下, 能将在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上所给出的函数在这区间上展开为只含偶数或奇数倍  $x$  的余弦或正弦展开式. 求出系数的公式, 并应用于各例.

26) 设已给函数  $f(x)$  有周期  $2\pi$ , 并以  $a_m, b_m$  为其傅里叶系数. 求用这些系数表示“经过位移的”函数  $f(x+h)$  ( $h = \text{常数}$ ) 的傅里叶系数  $\bar{a}_m, \bar{b}_m$ .

利用在 681 目中关于周期函数积分的说明, 有

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) dx = a_0, \\ \bar{a}_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \cos m(x-h) dx \\ &= \cos mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \cos mx dx + \sin mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \sin mx dx \\ &= a_m \cos mh + b_m \sin mh.\end{aligned}$$

同样,

$$\bar{b}_m = b_m \cos mh - a_m \sin mh.$$

**691.  $\ln \Gamma(x)$  的展开式** 作为较复杂的例子, 我们按照库默尔 (E.E.Kummer) 的方法, 作出函数  $\ln \Gamma(x)$  在区间  $(0, 1]$  上的傅里叶级数展开式.

利用在第 688 目中关于在区间  $(0, 2l]$  上的函数展开式所作的说明 (在现在的情形下,  $2l = 1$ ), 求出下列形式的展开式:

$$\ln \Gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x),$$

而且可由与第 688 目中公式 (17\*) 相仿的公式求出其系数:

$$\begin{aligned}a_n &= 2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= 2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin 2n\pi x dx \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$



但我们要指出, 系数  $a_n$  几乎不加计算就可确定出来. 事实上, 对已知的关系式 [531, 5°]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\pi}{2\sin\pi x}$$

两端取对数, 求得

$$\ln\Gamma(x) + \ln\Gamma(1-x) = \ln 2\pi - \ln 2\sin\pi x.$$

函数  $\ln\Gamma(1-x)$  的傅里叶级数可由函数  $\ln\Gamma(x)$  的傅里叶级数中将  $x$  换成  $1-x$  而得. 因此含余弦的各项保持不变, 而含正弦的各项变号. 两级数相加, 得

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\pi x.$$

另一方面, 如果利用函数  $-\ln 2\sin \frac{x}{2}$  的已知的展开式 [690, 14)], 但将其中的  $x$  换成  $2\pi x$ , 则不难写出上面等式右端函数的傅里叶级数:

$$\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2n\pi x.$$

这样立刻可得

$$\frac{1}{2}a_0 = \ln \sqrt{2\pi}, \quad a_n = \frac{1}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

计算系数  $b_n$  要复杂得多. 从  $\ln\Gamma(x)$  的公式出发 [540]

$$\ln\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left[ (x-1)e^{-z} - \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right] \frac{dz}{z},$$

作代换  $e^{-z} = t$ , 此式变换为

$$\ln\Gamma(x) = \int_0^1 \left[ \frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right] \frac{dt}{\ln t}.$$

将此表示式代入  $b_n$  的公式中, 并且颠倒对  $x$  及对  $t$  积分的次序, 得

$$b_n = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\ln t} \int_0^1 \left[ \frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right] \sin 2n\pi x dx.$$

我们可以改变积分次序的理由如下: 表示式

$$\left[ \frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right] \frac{\sin 2n\pi x}{\ln t}$$

作为二元函数, 只是在  $t=0$  处不连续.<sup>①</sup> 但此表示式对变数  $t$  的积分对于在区间  $[0, 1]$  上的  $x$  一致收敛, 因为

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \left[ \frac{t^{x-1} - 1}{1-t} - (1-x) \right] \frac{|\sin 2n\pi x|}{|\ln t|} dt \\ & < \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{1}{|\ln \tau|} \cdot \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} \tau^x < \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{1}{|\ln \tau|} \cdot 2n\pi. \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 不难验证在  $t=1$  处, 连续性事实上并未破坏.



由已知的定理 [521], 改变积分次序是可容许的.

现来继续计算. 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin 2n\pi x dx &= 0, \quad \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{2n\pi}, \\ \int_0^1 t^{x-1} \sin 2n\pi x dx &= \frac{1}{t} \int_0^1 e^{x \ln t} \sin 2n\pi x dx \\ &= \frac{\ln t \cdot \sin 2n\pi x - 2n\pi \cos 2n\pi x}{t[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]} e^{x \ln t} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{(1-t)2n\pi}{t[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]}. \end{aligned}$$

于是

$$b_n = 2 \int_0^1 \left[ -\frac{2n\pi}{t[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]} + \frac{1}{2n\pi} \right] \frac{dt}{\ln t}.$$

在这里令  $t = e^{-2n\pi u}$ , 最后将  $b_n$  的表示式化成下式:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{1+u^2} - e^{-2n\pi u} \right] \frac{du}{u}.$$

特别推得

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{1+u^2} - e^{-2\pi u} \right] \frac{du}{u},$$

由此

$$nb_n - b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-2\pi u} - e^{-2n\pi u}) \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \ln n,$$

(伏汝兰尼积分, 495), 这样, 确定一切系数的问题化成了确定第一个系数的问题.

回忆欧拉常数的积分表示式 [535]

$$C = \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+u} - e^{-u} \right) \frac{du}{u},$$

则

$$b_1 - \frac{1}{\pi} C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u} \right) \frac{du}{u} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-u} - e^{-2\pi u}) \frac{du}{u}.$$

但第一个积分可以直接计算出来, 它等于零; 第二个积分等于  $\frac{1}{\pi} \ln 2\pi$  (又是伏汝兰尼积分). 最后得

$$b_1 = \frac{1}{\pi} (C + \ln 2\pi).$$

从而得

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (C + \ln 2n\pi).$$

所求展开式的形状是

$$\ln \Gamma(x) = \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cos 2n\pi x + \frac{1}{n\pi} (C + \ln 2n\pi) \sin 2n\pi x \quad (0 < x < 1).$$



## §3. 补充

**692. 系数递减的级数** 直到此时为止, 我们是从预先给定的函数出发, 将它展为傅里叶级数, 而应用到确定可展开函数为傅里叶级数的充分条件. 在少数简单的情形下, 反过来可证明已给的三角级数收敛于某一绝对可积分函数, 并且是这函数的傅里叶级数. 我们在这里叙述杨 (W.H.Young) 的有关研究.

我们将讨论下列形状的级数:

$$(C) \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \cos \nu x, \quad (S) \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sin \nu x,$$

而且恒假定系数  $q_{\nu}$  是正数, 并且单调减趋近于零. 如我们所知 [参考第 430 目末], 在任一不含点  $2k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$  的闭区间上, 两级数均一致收敛. 用  $f(x)$  表示级数 (C) 的和, 用  $g(x)$  表示级数 (S) 的和; 两函数都有周期  $2\pi$ , 并且除去形如  $2k\pi$  的各点外, 处处连续. 在这些例外点, 级数 (C) 可能发散.<sup>①</sup> 因为函数  $f$  是偶的,  $g$  是奇的, 因此只需在区间  $[0, \pi]$  上进行讨论.

1° 如果函数  $f$  (或  $g$ ) 绝对可积, 则级数 (C) [或 (S)] 是它的傅里叶级数.<sup>②</sup>

(a) 用  $\sin mx (m=1, 2, \dots)$  乘函数  $g$  的展开式:

$$g(x) \sin mx = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sin \nu x \cdot \sin mx,$$

即得在区间  $[0, \pi]$  上一致收敛的级数. 事实上, 因为

$$\sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

则

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \sin \nu x \sin mx \right| \leq \frac{|\sin mx|}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = m\pi,$$

然后在这里应用狄利克雷判别法 [430]. [我们在这里应用初等不等式

$$|\sin z| \leq z \quad (z \geq 0), \quad \sin z > \frac{2}{\pi}z \quad \left(0 < z \leq \frac{\pi}{2}\right).]$$

在这种情形下, 可将级数从 0 到  $\pi$  逐项积分, 求得

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin mx dx.$$

<sup>①</sup>如果级数  $\sum_1^{\infty} q_{\nu}$  收敛, 则级数 (C) 及 (S) 一致收敛于两连续函数, 而两级数就是这两连续函数的傅里叶级数 [678]. 下文只在级数  $\sum_1^{\infty} q_{\nu}$  发散时有意义.

<sup>②</sup>这定理是一个很难证明的一般定理 [参考 750, 751] 的特殊情形, 在这里我们宁可就所考虑的简单类型的级数来解决这个问题.



(6) 转到讨论函数  $f$ , 用  $1 - \cos mx$  乘它的展开式:

$$f(x)(1 - \cos mx) = \frac{1}{2}q_0(1 - \cos mx) + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \cos \nu x (1 - \cos mx).$$

由狄利克雷判别法, 这级数同样在区间  $[0, \pi]$  上一致收敛. 要想证明此点, 只需注意

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x}, \quad (1)$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(1 - \cos mx) + \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x (1 - \cos mx) \right| &\leq \frac{1 - \cos mx}{2 \sin \frac{1}{2} x} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}m^2 x^2}{\frac{2x}{\pi}} = \frac{1}{4}m^2 \pi x \leq \frac{1}{4}m^2 \pi^2. \end{aligned}$$

[应用不等式:  $1 - \cos z < \frac{1}{2}z^2$ .]

逐项从 0 到  $\pi$  积分, 得

$$q_0 - q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 1, 2, \dots).$$

在这里取  $m \rightarrow +\infty$  时的极限. 由假设,  $q_m \rightarrow 0$ , 又由第 682 目中的基本引理, 上式最后一个积分也趋近于零. 这样, 首先得

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

然后普遍地求得

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

至此证明完毕.

2° 如果级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu}}{\nu} = Q \quad (2)$$

收敛, 则两级数 (C) 及 (S) 各确定一个绝对可积的函数 (并且因此是这两函数的傅里叶级数).

因为讨论上两级数的方式相同, 所以我们只限于讨论级数 (C). 令

$$Q_n = \frac{1}{2}q_0 + q_1 + \dots + q_n,$$



我们逐步求得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n(n+1)} &= \frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^n q_{\nu} \\ &= \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu}}{\nu} = \frac{1}{2}q_0 + Q;\end{aligned}\quad (3)$$

在这里, 我们交换了两个求和步骤的次序 [393] 并且利用了显而易见的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \text{ 以及一般的 } \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\nu}.$$

现设

$$\frac{\pi}{n+1} \leq x \leq \frac{\pi}{n}.$$

对于  $x$  的这些值,  $f(x)$  表示如下式:

$$f(x) = \left( \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^n q_{\nu} \cos \nu x \right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_{\nu} \cos \nu x.$$

第一个和式的绝对值按  $Q_n$  来估值. 为了估值第二个和式, 将阿贝尔引理 [383] 应用到表示式

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m} q_{\nu} \cos \nu x.$$

因为

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} \cos \nu x \right| = \left| \frac{\sin \left( n + \mu + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x},$$

则

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+m} q_{\nu} \cos \nu x \right| \leq \frac{q_{n+1}}{\sin \frac{1}{2} x} < \frac{\pi}{x} q_{n+1} < \frac{\pi}{x} q_n < (n+1)q_n.$$

在趋近于极限时, 第二个和式的同一估值保持有效, 故最后得

$$|f(x)| \leq Q_n + (n+1)q_n \quad \left( \frac{\pi}{n+1} \leq x \leq \frac{\pi}{n} \right).$$

在这种情形下 [参考 (3) 及 (2)],

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |f(x)| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)| dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} [Q_n + (n+1)q_n] = \pi \left( \frac{1}{2}q_0 + 2Q \right),\end{aligned}$$



因此函数  $f(x)$  确是绝对可积. 只需应用 1° 就可完成这定理的证明了.

我们以后可以看到 [731], 级数 (2) 的收敛性同时是级数 (S) 为傅里叶级数的必要条件, 因此对于级数 (S) 所得的结果, 不能再加改善. 而级数 (C) 的情况则不相同: 这里所提到的条件决不是必要条件. 对于这种情形, 我们还要举出上面没有包括的另一充分条件.

3° 如果差数  $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$  随着  $\nu$  增大而单调减小, 则函数  $f(x)$  是非负的并且是可积的 [级数 (C) 是它的傅里叶级数].

对部分和

$$C_n(x) = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^n q_\nu \cos \nu x \quad (x > 0)$$

作阿贝尔变换 [383]. 考虑到 (1), 求得

$$C_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu \cdot \sin \left( \nu + \frac{1}{2} \right) x + q_n \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right\}.$$

再对所得和式作阿贝尔变换. 如果为简单起见, 令  $\Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1} = \Delta^2 q_\nu$ , 并考虑到

$$\sum_{\nu=0}^m \sin \left( \nu + \frac{1}{2} \right) x = \frac{1 - \cos(m+1)x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

则  $C_n(x)$  化成下列形式:

$$\begin{aligned} C_n(x) = & \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} \sum_{\nu=0}^{n-2} \Delta^2 q_\nu \cdot (1 - \cos(\nu+1)x) \\ & + \Delta q_{n-1} \cdot \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} + q_n \cdot \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

因为当  $n \rightarrow +\infty$  时, 上式最后两项趋近于零, 所以在取极限时, 即得用非负的连续函数所作成的  $f(x)$  的展开式:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \cdot \frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x}$$

(由假定, 系数  $\Delta^2 q_\nu$  是非负的). 由此可见, 函数  $f(x)$  也是非负的.

为了证明这函数的可积分性, 我们利用第 518 目中的推论, 以及将该推论换述为级数情形所作的说明. 只要下面的级数收敛, 则可写出

$$\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^\pi \frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} dx.$$



因为

$$\frac{1 - \cos(\nu + 1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \cos \lambda x \right\},$$

则直接可得

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(\nu + 1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} dx = \frac{\pi}{2}(\nu + 1)$$

[参考 309,5)(6)], 因此

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \Delta^2 q_{\nu}.$$

现在还只需证实上式右端的级数收敛.

在 375,3) 中, 我们已经看到如果有单调减的正项级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \tag{4}$$

收敛, 则条件

$$\nu a_{\nu} \rightarrow 0$$

必须成立. 由此还可知, 级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)(a_{\nu} - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \Delta a_{\nu}$$

收敛且与级数 (4) 有相同的和数: 此点可由恒等式

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu + 1)(a_{\nu} - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} n a_n$$

看出. 现在如果取  $a_{\nu} = \Delta q_{\nu}$ , 则有

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \Delta^2 q_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta q_{\nu} = q_0,$$

最后得

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} q_0.$$

定理便已得证.

例如, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$



适合于这定理中的条件; 这个例子所以值得注意是由于对于它不能应用定理 2°, 因为级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

发散 [367,6)].

**附注** 如果在级数 (C) 与 (S) 中, 将变数  $x$  换成  $x + \pi$ , 则得系数变号而其绝对值减的级数. 对于这类级数, 已证明的各定理还是保持有效.

**693. 三角级数借助于复变量解析函数的求和法** 在许多情形下, 当研究形如 (C) 或 (S) 的级数之系数时, 能证明这些级数收敛 (可能除去若干个别的点), 且为其和的傅里叶级数 (可参考前目), 但在所有这些情形下, 自然要产生下一问题: 怎样求出这些级数的和? 或者更正确地说, 如果级数的和一般地可用初等函数表示为有限的形状, 则怎样将它们表示成为这种形状呢? 早在欧勒 (与拉格朗日) 就已成功地应用了复变量解析函数求出三角级数的有限形和. 欧勒方法的思想将叙述如下.

设对于某一组系数  $\{q_\nu\}$ , 两级数 (C) 与 (S) 在区间  $[0, 2\pi]$  上 (可能除去若干个别的点) 处处收敛于函数  $f(x)$  与  $g(x)$ . 现考虑具有同样系数, 且用复变量  $z$  所作成的幂级数:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu z^\nu. \quad (5)$$

由假设, 在单位圆的圆周  $|z| = 1$  上, 即当  $z = e^{ix}$  时, 除在若干个别的点外, 这级数收敛:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu e^{\nu ix} &= \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu (\cos \nu x + i \sin \nu x) \\ &= f(x) + ig(x). \end{aligned} \quad (6)$$

在这种情形下, 由熟知的幂级数的性质, 当  $|z| < 1$  时, 即在单位圆内, 级数 (5) 显然收敛, 且在那里定出某一复变量函数  $\varphi(z)$ . 利用已知的初等复变函数的展开式 [参考第十二章, §5], 我们常常能将  $\varphi(z)$  化为这些函数. 于是对于  $z = re^{ix} (r < 1)$ , 就有

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu r^\nu e^{i\nu x} = \varphi(re^{ix}),$$

又由阿贝尔定理 [456], 只要级数 (6) 收敛, 它的和可以作为极限

$$f(x) + ig(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) \quad (7)$$

而求得. 通常这极限就等于  $\varphi(e^{ix})$ , 由此可以计算出函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的有限形状.



例如, 设给出级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu} \quad \text{及} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

由前目中所证明的断语可得结论: 这两级数收敛 (第一个级数除去在点 0 与  $2\pi$  外), 并且是它们所定出的函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的傅里叶级数. 可是这些函数究竟是什么呢? 要回答这问题, 作出级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu}.$$

由于这级数与对数级数 [458] 相似, 不难求得其为

$$\varphi(z) = -\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

因此

$$f(x) + ig(x) = \ln \frac{1}{1-e^{ix}} \quad (x \neq 0, 2\pi).$$

由简单的计算, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{ix}} &= \frac{1}{(1-\cos x) - i \sin x} = \frac{1}{2} + i \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

所以这表示式的模数是  $\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ , 而辐角是  $\frac{\pi-x}{2}$ . 故

$$\ln \frac{1}{1-e^{ix}} = -\ln 2 \sin \frac{x}{2} + i \frac{\pi-x}{2},$$

因此, 最后求得

$$f(x) = -\ln 2 \cdot \sin \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

我们已经知道了这些结果 [690,14) 与 2)], 并且过去有一次也是用“复数的”推理求得的 [461,6)(5)]; 但以往我们是从函数  $f$  与  $g$  出发的, 而现在是从解析函数  $\varphi$  出发的. 在这里两个级数本身是我们讨论的起点. 读者可以在下一目中找到另一些类似的例子.

再次强调指出: 必须预先确知, 级数 (C) 及 (S) 收敛, 我们才能够应用极限等式 (7) 来确定级数的和. 但由等式右端极限存在, 还不能断定两级数收敛. 为了要用例子说明此点, 考虑对于  $0 < x < 2\pi$  显然发散的级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos \nu \quad \text{与} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x.$$



但是如果作出与它们相对应的级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2},$$

则当点  $z = re^{ix}$  沿着单位圆的半径趋近于圆周上的点  $e^{ix}$  时, 这级数的和有完全确定的极限

$$\frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{1}{2} = i \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \quad (0 < x < 2\pi).$$

如果预先不能断定级数 (C) 与 (S) 收敛, 则等式 (7) 只能看作一种导入法: 先由这等式求得函数  $f$  与  $g$ , 然后计算它们的傅里叶系数, 只有当这些系数与已知级数的系数一致时, 才可应用我们所已知的傅里叶级数收敛性判别法.

**694. 例** 在下面所有各题中, 请读者证明所设级数的收敛性.

1) 求下列各级数的和:

$$(a) \ 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\cos nx}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots.$$

$$(b) \ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\sin nx}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots.$$

解 这里

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} = e^z, \textcircled{1}$$

所以

$$\varphi(e^{ix}) = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)].$$

由此得

$$(a) \ f(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x), \ g(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

2) 求下列级数的和:

$$(a) \ \frac{\cos x}{1!} - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \cdots; \quad (b) \ \frac{\sin x}{1!} - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \cdots;$$

$$(B) \ 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - \cdots; \quad (r) \ \frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - \cdots.$$

提示 在情形 (a), (b) 下, 函数  $\varphi(z)$  等于

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots;$$

在情形 (B), (r) 下, 它等于

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots.$$

利用将复变量的正弦及余弦分解为实虚两部分的展开式 [459]:

$$\sin(\alpha + \beta i) = \sin \alpha \operatorname{ch} \beta + i \cos \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta i) = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta - i \sin \alpha \operatorname{sh} \beta.$$

<sup>①</sup>我们保持上目中的记号.



答 (a)  $\sin(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$ , (б)  $\cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$ ,  
 (B)  $\cos(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$ , (r)  $\sin(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$ .

3) 求下列级数的和:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n(n+1)}; & \text{(б)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}; \\ \text{(B)} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}; & \text{(r)} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1}; \\ \text{(Д)} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \cos nx; & \text{(e)} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \sin nx; \\ \text{(ж)} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}; & \text{(3)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}. \end{array}$$

(a),(б).解 与这两情形相对应的级数

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1 \cdot 2} - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{3 \cdot 4} - \dots$$

不能直接求出已知的初等函数, 但是如果利用显明的等式

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

将级数变换如下:

$$1 + \left\{ z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right\} + \left\{ -\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots \right\},$$

则由对数级数 [458] 不难求得

$$\varphi(z) = 1 + \ln(1+z) + \frac{1}{z} [\ln(1+z) - z] = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \ln(1+z).$$

现在在这里代入  $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 即有

$$1 + z = (1 + \cos x) + i \sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right),$$

因此 (对于  $0 < x < \pi$ ) 这表示式的模数是  $2 \cos \frac{x}{2}$ , 其辐角是  $\frac{x}{2}$ , 并且

$$\ln(1+z) = \ln 2 \cos \frac{x}{2} + i \frac{x}{2}.$$

最后得

$$\varphi(e^{ix}) = [(1 + \cos x) - i \sin x] \cdot \left[ \ln 2 \cos \frac{x}{2} + i \frac{x}{2} \right].$$

由此对于  $-\pi < x < \pi$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \cos x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sin x, \\ g(x) &= \frac{1}{2} x (1 + \cos x) - \sin x \ln 2 \cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$



(B)~(3)提示 在所有各情形下, 利用对应的等式

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

就不难化为对数级数的问题.

答 (x)  $(\cos x + \cos 2x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x) - \cos x,$

(3)  $(\sin x + \sin 2x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} (\cos x + \cos 2x) - \sin x.$

[关于 (B)~(e) 参考 690,21).]

4) 求下一级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

提示  $\varphi(z) = \frac{1}{z} \ln(1+z^2).$

答 限制在区间  $0 \leq x \leq \pi$  上, 有

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \ln 2 \cos x + x \sin x, & \text{对于 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x \ln 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x, & \text{对于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

5) 求下列级数的和:

(a)  $\frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 3x}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 4} + \cdots;$

(6)  $\frac{\cos 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots.$

提示 利用

$$\frac{1}{(n-1)n} \quad \text{及} \quad \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

的“简单分数”展开式, 则化为  $\ln \frac{1}{1-z}$  的问题.

答 在两种情形下, 关于  $0 < x < 2\pi,$

(a)  $(1 - \cos x) \ln 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} \sin x + \cos x;$

(6)  $(1 - \cos x) \ln 2 \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{2}.$

6) 求下列级数的和:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1};$  (6)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1};$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}.$

(a), (6). 解 作出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$



于其中可看出反正切函数

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+zi}{1-zi}$$

的展开式; 除去  $z = \pm i$  外, 这展开式关于  $|z| \leq 1$  成立 [459].

在这里令  $z = e^{ix}$ , 并且限于区间  $0 \leq x \leq \pi$ , 但除去点  $x = \frac{\pi}{2}$ . 则有

$$\frac{1+zi}{1-zi} = i \frac{\cos x}{1+\sin x} = i \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right),$$

因此这表示式的模数为  $\left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|$ , 其辐角为  $+\frac{\pi}{2}$  或  $-\frac{\pi}{2}$ , 依  $x < \frac{\pi}{2}$  或  $x > \frac{\pi}{2}$  而定. 所以

$$\ln \frac{1+zi}{1-zi} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \pm \frac{\pi}{2} i,$$

并且

$$\operatorname{arctg} z = \pm \frac{\pi}{4} + i \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

这样,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

且关于这些  $x$  的值,

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| = \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

(B) 提示 合并刚才所得的结果及习题 4) 中的结果, 求得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \ln 2 \cos x + x \sin x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \ln 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x), & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

7) 求下列级数的和:

$$(a) \cos x + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7} + \cdots;$$

$$(b) \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin 7x}{7} + \cdots;$$

$$(B) \frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7 \cdot 8} + \cdots;$$

$$(r) \frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5 \cdot 6} + \cdots.$$

解 关于情形 (a) 及 (b)

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = \arcsin z$$

[459]. 其次, 关于  $0 \leq x \leq \pi$ ,

$$\arcsin e^{ix} = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} + i \ln(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{\sin x}).$$



知道了表示式右端的正弦实际上等于  $e^{ix}$ , 则易于验证此点.<sup>114)</sup> 又由方程

$$\sin uchv = \cos x, \quad \cos ushv = \sin x$$

求得  $u, v$ , 就不难推出上面的表示式. 这样,

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}, \\ g(x) &= \ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}) \end{aligned} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

关于情形 (B) 及 (r), 得级数

$$\begin{aligned} & \frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7 \cdot 8} + \cdots \\ &= \left\{ z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \cdots \right\} \\ & \quad - \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^8 + \cdots \right\} \\ &= \arcsin z + \frac{1}{z} (\sqrt{1 - z^2} - 1) \end{aligned}$$

[460]. 因此关于  $0 \leq x \leq \pi$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + \sqrt{2 \sin x} \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos x, \\ g(x) &= \ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}) - \sqrt{2 \sin x} \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sin x. \end{aligned}$$

**695. 傅里叶级数的复数形式** 重新考虑以  $2\pi$  为周期且在任一有限区间上绝对可积的任意函数  $f(x)$ , 并考虑与这函数相对应的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \quad (8)$$

级数的系数由下列公式确定:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mudu \quad (m = 0, 1, 2, \cdots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mudu \quad (m = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \quad (9)$$

现在如果将  $\cos mx$  与  $\sin mx$  用纯虚变量的指数函数表示式来代替 [457]:

$$\begin{aligned} \cos mx &= \frac{1}{2} (e^{mxi} + e^{-mxi}), \\ \sin mx &= \frac{1}{2i} (e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2} (e^{-mxi} - e^{mxi}), \end{aligned}$$

<sup>114)</sup> 右端并非简单地是  $\operatorname{Arcsin} z$  的一个值, 而即是用  $\arcsin z$  表示的主值, 这样一件事可从主值的定义立即得出 [参看 459].



则得级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_m - b_m i)e^{mxi} + \frac{1}{2}(a_m + b_m i)e^{-mxi}.$$

此式可简单地写成:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \quad (10)$$

其中

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + b_m i), \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

因此

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \quad (12)$$

上一表示式是函数  $f(x)$  的傅里叶级数的复数形式.

如果级数 (8) 收敛于函数  $f(x)$  的充分条件成立, 则级数 (10) 也收敛于同一和数, 不过只要 (由求得级数的方法可知) 将求和的手续了解为求对称的部分和

$$\sum_{m=-n}^n c_m e^{mxi}$$

在  $n \rightarrow +\infty$  时的极限. 然而如果级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{mxi} \quad \text{及} \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-mxi}$$

分别收敛, 则上面所说的极限可由这两级数的和相加而得.

如果考虑到欧勒-傅里叶公式 (9), 则由公式 (11) 所确定的展开式 (10) 的系数  $c_m$  可一律写成:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nui} du \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (13)$$

如果设函数  $f(x)$  能展开为级数 (10) (因此能用  $=$  代替  $\sim$ ), 我们用  $e^{-nxi}$  乘等式的两端, 再从  $-\pi$  积分到  $\pi$ , 并在等式的右端逐项积分, 则也可直接求得这些系数, 而与系数  $a_m$  及  $b_m$  相似 [678].

如果有复函数

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

其中  $f_1$  及  $f_2$  为属于所考虑类型的实函数, 则函数  $f$  的傅里叶级数很自然地称为函数  $f_1$  与  $f_2$  的傅里叶级数的形式和, 而预先须用  $i$  乘  $f_2$  的傅里叶级数的各项. 在复

①请回忆, 如果  $z$  是复数, 则符号  $\bar{z}$  表示与它相共轭的复数.



数形式下, 函数  $f$  的傅里叶级数有 (10) 的形状, 其中系数  $c_n$  和刚才一样, 可用公式 (13) 表示出来(但在一般的情形下, 当然不能肯定系数  $c_m$  与  $c_{-m}$  的共轭性).

有时很自然就得到函数的傅里叶级数展开式的复数形式. 作为一例, 回忆贝塞尔函数的母函数及其展开式 [395,14)];

$$e^{\frac{a}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) z^n.$$

不难看出, 这展开式对于不等于零的一切复值  $z$  皆成立. 在这里, 令  $z = e^{ix}$ , 则得

$$e^{ai \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) e^{nxi}, \quad (14)$$

复函数

$$e^{ai \sin x} = \cos(a \sin x) + i \sin(a \sin x) \quad (15)$$

就已被展开为 (10) 型的级数, 此级数对于  $x$  一致收敛<sup>①</sup>(由于幂级数的性质), 并且因此显然为此复函数的傅里叶级数.

回忆

$$J_{-m}(a) = (-1)^m J_m(a)$$

[395,14)], 将求得的展开式改写为下列形式:

$$\begin{aligned} & J_0(a) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(a) [e^{mxi} + (-1)^m e^{-mxi}] \\ &= J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a) \cos 2kx + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a) \sin(2k-1)x. \end{aligned} \quad (16)$$

分别比较表示式 (15) 及 (16) 的实数与虚数部分, 即得有趣的展开式:

$$\cos(a \sin x) = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a) \cos 2kx,$$

$$\sin(a \sin x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a) \sin(2k-1)x.$$

在此处将  $x$  换成  $x + \frac{\pi}{2}$ , 还能得到另外两个展开式:

$$\cos(a \cos x) = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(a) \cos 2kx,$$

$$\sin(a \cos x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J_{2k-1}(a) \cos(2k-1)x,$$

最后, 如果应用公式 (13) 来计算展开式 (14) 的系数, 则得熟知的贝塞尔函数的积分表示式:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a \sin x - nx)i} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a \sin x - nx) dx,$$

这公式我们已经遇到过好几次了.

<sup>①</sup>我们分别考察两级数  $\sum_{n=0}^{\infty}$  与  $\sum_{n=-1}^{-\infty}$ .



## 696. 共轭级数 具有任意实系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (17)$$

可以在形式上<sup>①</sup>当作复变数  $z$  的幂级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m i) z^m \quad (18)$$

在  $z = e^{xi}$  时的实数部分. 事实上, 这时

$$z^m = e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$$

并且

$$(a_m - b_m i) z^m = (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + i(-b_m \cos mx + a_m \sin mx).$$

级数的虚数部分也可在形式上表示为级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-b_m \cos mx + a_m \sin mx). \quad (19)$$

级数(19)称为与级数(17)共轭.

与某一 (以  $2\pi$  为周期并且绝对可积分的) 函数  $f(x)$  的傅里叶级数相共轭的级数值得特别注意. 与傅里叶级数 (17) 本身收敛性问题相平行, 特别能提出共轭级数的收敛性的问题. 但是在这种情形下, 由于事先不能自然地预料到共轭级数的和是什么, 所以产生了额外的困难.

与在第 681 目中一样, 我们开始先作出在  $x = x_0$  处级数 (19) 的部分和  $\tilde{s}_n(x_0)$  的适当表示式. 将系数  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m, \dots$  用它们的积分表示式来代替 [参考 (9)], 则逐步求得:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n(x_0) &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [-\sin mu \cos mx_0 + \cos mu \sin mx_0] du \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=1}^n \sin m(u - x_0) du. \end{aligned}$$

如果用公式

$$\sum_{m=1}^n \sin mt = \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

<sup>①</sup>因为我们不知道这级数是否收敛, 所以这里只能说在形式上.



变换积分号下的和式, 则  $\tilde{s}_n(x_0)$  的表示式取得下列形式:

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\cos \frac{1}{2}(u-x_0) - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(u-x_0)} du.$$

这积分与狄利克雷积分相似.

换取区间  $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ , 并利用代换  $u - x_0 = t$ , 与第 681 目中一样, 求得

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n(x_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

其中为简单起见, 已令

$$\psi(t) = f(x_0 + t) - f(x_0 - t). \quad (21)$$

如果假定积分

$$\tilde{S}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}t} dt \quad (22)$$

收敛, 即使不是绝对收敛, 则可写出:

$$\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

并能设法证明此积分当  $n \rightarrow +\infty$  时趋近于零: 这时  $\tilde{S}_0$  就是级数 (19) 的和. 我们只指出按照迪尼判别法 [684] 型式建立的关于级数 (19) 有和  $\tilde{S}_0$  的充分条件:

如果积分

$$\int_0^h \frac{|\psi(t)|}{t} dt \quad (h > 0)$$

存在, 则与函数  $f(x)$  的傅里叶级数共轭的级数在点  $x_0$  处收敛于和数  $\tilde{S}_0$ .

由于

$$\frac{\psi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}t} = \frac{\psi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}t},$$

则由所作假定, 首先推出积分 (22) 绝对收敛. 同样可证明积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$



为绝对收敛, 由此根据第 682 目中的引理, 则有  $\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 \rightarrow 0$ , 这就是所需要证明的.

显然, 我们只需假定两积分

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0)|}{t} dt \quad \text{及} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}{t} dt$$

分别存在, 或者更特别地只需假定利普希茨条件

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Ct^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

成立就够了.

注意在所有这些条件中, 都要假设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 或至少两极限  $f(x_0 \pm 0)$  相等. 但在一般情形下, 当函数  $f(x)$  在所考虑的点  $x_0$  有一跳跃, 即当条件

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \geq 0,$$

成立时, 可以证明共轭级数 (19) 在这点显然发散,<sup>①</sup> 因此假定函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续是必要的. 在此处可看出级数 (17) 与 (19) 的情况有特殊的差别: 实际上, 对于傅里叶级数 (17), 仅有跳跃存在并不足以妨碍级数的收敛.

我们对于与傅里叶级数共轭的级数不再作更详细的研究.

**697. 多重傅里叶级数** 我们也能考虑多元函数的傅里叶级数. 为了作出这种表示式, 只需限于考虑二元函数的情形.

设对于一切实值  $x$  与  $y$  给出函数  $f(x, y)$ . 我们假设它对  $x$  及对  $y$  都有周期  $2\pi$ , 并且它在正方形

$$(Q) = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$$

上可积分 (常义或非常义). 仿照展开式 (10), 写出二重级数

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n, m} e^{(nx+my)i}, \quad (23)$$

与它相对应, 其中系数  $\gamma_{\nu, \mu}$  是由类似于 (13) 的公式确定:

$$\gamma_{\nu, \mu} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-(\nu x + \mu y)i} dx dy \quad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

这就是函数  $f(x, y)$  的复数形式的傅里叶级数. 如果在上面写出的关系式中, 我们将符号  $\sim$  换为  $=$ , 再用  $e^{-(nx+my)i}$  乘“等式”两端, 并且在矩形  $(Q)$  上积分, 而对级数则逐项积分, 则能由通常的方法求得傅里叶级数的系数.

<sup>①</sup>显然积分 (22) 也发散!



这时实数形式的傅里叶级数十分复杂. 如果在复级数中集合各共轭项, 则得

$$f(x, y) \sim \sum_{n,m=0}^{\infty} [a_{n,m} \cos nx \cos my + b_{n,m} \cos nx \sin my + c_{n,m} \sin nx \cos my + d_{n,m} \sin nx \sin my], \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) dx dy, \\ a_{n,0} &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx dx dy \quad (n = 1, 2, \dots); \\ a_{0,m} &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos my dx dy \quad (m = 1, 2, \dots); \\ b_{0,m} &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin my dx dy \quad (m = 1, 2, \dots); \\ c_{n,0} &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx dx dy \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

并且, 最后得:  $m, n = 1, 2, \dots$  时,

$$\left. \begin{aligned} a_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \cos my dx dy, \\ b_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \sin my dx dy, \\ c_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \cos my dx dy, \\ d_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \sin my dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

但通常将级数 (24) 写成下列形式:

$$f(x, y) \sim \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} [a_{n,m} \cos nx \cos my + b_{n,m} \cos nx \sin my + c_{n,m} \sin nx \cos my + d_{n,m} \sin nx \sin my], \quad (24^*)$$

其中乘数  $\lambda_{n,m}$  当  $n = m = 0$  时为四分之一, 当指标  $n, m$  中只有一个等于零时为二分之一, 当  $n, m$  都不等于零时为一. 而系数  $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$  都可由公式 (25) 计算出来.

级数 (24)[或 (24\*)] 的收敛的问题可以由研究它的部分和  $S_{n,m}(x_0, y_0)$  来解决. 对于这种部分和能得到类似于狄利克雷积分的积分表示式:

$$S_{n,m}(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x_0 + u, y_0 + v) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)v}{\sin \frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v} du dv.$$



我们不研究这个问题. 而只说明, 如果下列条件成立, 则函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处显然可展开为傅里叶级数: 1) 偏导数  $f'_x$  和  $f'_y$  处处存在并且有界, 2) 在所给点的邻域内二级导数  $f''_{xy}$  (或  $f''_{yx}$ ) 存在, 并且在所给点处连续.

#### §4. 傅里叶级数的收敛特性

**698. 对于基本引理的几点补充** 当转而研究傅里叶级数本身的收敛特性时, 我们首先讨论这种级数一致收敛的充分条件.

要研究这个问题, 必须先将第 682 目中的第一基本引理加以补充. 这就要在该目所讨论的积分中引入不同的参数, 现在研究对于这些参数积分一致趋近于零的问题.

1° 设函数  $g(t)$  定义在区间  $[A, B]$  上并且在这区间上绝对可积, 此时如果变数  $a$  与  $b$  取区间  $[A, B]$  上的任何值, 则两积分

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt, \quad \int_a^b g(t) \cos ptdt$$

当  $p \rightarrow +\infty$  时对于  $a$  与  $b$  一致趋近于零.

我们只要讨论上列第一个积分就够了. 由于函数

$$\int_A^t |g(t)| dt$$

一致连续, 对于给出的  $\varepsilon > 0$ , 能用点

$$A = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_i < \tau_{i+1} < \cdots < \tau_n = B$$

将区间  $[A, B]$  分得充分小, 使得

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(t)| dt < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

又因形如

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} g(t) \sin ptdt \quad (i, j = 0, 1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

的积分只有有限个, 所以能求出共同的  $\Delta > 0$ , 使得对于  $p > \Delta$ , 所有的积分的绝对值都小于  $\varepsilon$ . 但不难看出不论  $a$  与  $b$  如何, 积分

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt$$

与 (1) 中某一积分之差 (对于任意的  $p$ ) 小于  $2\varepsilon$ . 因此当  $p > \Delta$  时, 不论  $a$  与  $b$  如何, 这积分的绝对值小于  $3\varepsilon$ . 这就是需要证明的.



2° 其次可以断定积分

$$\int_a^b g(x \pm t) \sin ptdt, \quad \int_a^b g(x \pm t) \cos ptdt$$

当  $p \rightarrow +\infty$  时对于参数  $a, b$  及  $x$  一致趋近于零, 只要其中各参数适合条件

$$A \leq x \pm a, \quad x \pm b \leq B.$$

事实上, 例如对第一个积分作代换

$$x \pm t = u,$$

则可以写成

$$\begin{aligned} & \int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \sin p(u - x) du \\ &= \cos px \int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \sin pu du - \sin px \int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \cos pu du, \end{aligned}$$

因此问题化为前一情形 (1°).

3° 最后, 如果在积分号下的表示式中还引入在区间  $[A, B]$  上有有界变差的任意乘数  $\gamma(t)$ , 则积分

$$\int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \sin ptdt, \quad \int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \cos ptdt$$

当  $p \rightarrow +\infty$  时也一致趋近于零.

因为  $\gamma(t)$  可写成两个单调增函数的差的形状, 所以我们只要假设  $\gamma(t)$  本身是增函数就够了. 在这种情形下, 由第二中值定理 [306],

$$\begin{aligned} & \int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \sin ptdt \\ &= \gamma(a) \int_a^\tau g(x \pm t) \sin ptdt + \gamma(b) \int_\tau^b g(x \pm t) \cos ptdt \quad (a \leq \tau \leq b). \end{aligned}$$

由于函数  $\gamma(t)$  有界, 在这里问题也化为已经考虑过的情形 (2°).

现在转到第二基本引理; 我们对于它只补充说明如下:

4° 设函数  $g(t)$  在区间  $[A, B]$  上连续并且单调增加, 而区间  $[a, b]$  含在  $[A, B]$  的内部. 则积分

$$\int_0^h g(x \pm t) \frac{\sin pt}{t} dt$$

(其中  $0 < h \leq a - A$  及  $B - b$ ) 当  $p \rightarrow +\infty$  时对于在区间  $[a, b]$  上的  $x$  一致趋近于极限  $\frac{\pi}{2} g(x)$ .



依照第 685 目中的证明并使其适合于这里所设的情形. 现将第 685 目 (13) 中的第一个积分写作

$$g(x) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt = g(x) \int_0^{ph} \frac{\sin z}{z} dz,$$

由于  $g(x)$  有界, 所以这积分对于在  $[a, b]$  上的  $x$  一致趋近于极限  $\frac{\pi}{2}g(x)$ . 在另一方面, 因为函数  $g(x)$  在  $[A, B]$  上一致连续, 所以对于已给的  $\varepsilon > 0$ , 我们可选出与  $x$  (在从  $a$  到  $b$  的范围中变化) 无关的数  $\delta > 0$ , 使得

$$|g(x \pm t) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{当 } 0 < t \leq \delta.$$

分解第 685 目 (13) 中第二个积分 (与在那目中一样) 为和数  $I_1 + I_2$ , 我们有不仅与  $p$  无关而且也与  $x$  无关的估计值 685 目 (14). 最后, 由  $3^\circ$ ,  $I_2$  对于  $x$  一致趋近于零. 总之, 由此可推得所需要的结论.

**699. 傅里叶级数一致收敛性的判别法** 现在不难作出一些适当的判别法来判断傅里叶级数在某一区间  $[a, b]$  上是否一致收敛于  $f(x)$ . 当然首先要假定这函数在所述区间上连续 [参考 431]. 现先作出形状改变了的

**迪尼判别法** 已给在区间  $[a, b]$  上的一连续函数  $f(x)$ . 如果取定某一  $h > 0$ , 对于在  $[a, b]$  上的一切  $x$ , 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \quad (2)$$

存在, 并且对于  $x$  一致收敛 (当  $t=0$  时), 则函数  $f(x)$  的傅里叶级数在区间  $[a, b]$  上一致收敛于这函数.

我们回忆在这种情形下,

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

并且

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad (3)$$

由所作假定, 对于任意给出的  $\varepsilon > 0$ , 有一与  $x$  无关的数  $\delta > 0$  存在, 使得对于在  $[a, b]$  上的一切  $x$ ,

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < \varepsilon.$$



这时积分 (3) 可表示为和数  $\frac{1}{\pi} \int_0^\delta + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi$  的形状. 并且显然不论  $n$  为何值,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} dt < \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < \frac{\varepsilon}{2}, \textcircled{1}$$

这式对上述所有的值  $x$  一致成立.

转到积分

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt, \quad (4)$$

由前目 3°, 可见积分

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi f(x \pm t) \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$$

当  $n \rightarrow \infty$  时对于在  $[a, b]$  上的  $x$  一致趋近于零. 由于函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 这个结果对于积分

$$\frac{1}{\pi} f(x) \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$$

也成立. 由此可见有一个与  $x$  无关的数  $N$  存在, 使得当  $n > N$  时, 不论  $x$  是  $[a, b]$  上的何数, 积分 (3) 的绝对值变为  $< \varepsilon$ . 至此证明完成.

由此可特别推出

**利普希茨判别法** 如果在某一比较  $[a, b]$  更宽的区间  $[A, B]$  上 ( $A < a < b < B$ ), 条件

$$|f(x') - f(x)| \leq C|x' - x|^\alpha$$

成立, 其中  $x, x'$  是  $[A, B]$  上的任意点,  $C$  与  $\alpha$  是正常数 ( $\alpha \leq 1$ ); 则函数  $f(x)$  的傅里叶级数在区间  $[a, b]$  上一致收敛于这函数.

事实上, 如果选取  $h$  为两数  $B - b$  与  $a - A$  中较小的一数, 则对于在  $[a, b]$  上一切  $x$  的值, 积分 (2) 小于下一收敛积分:

$$\int_0^h \frac{2C}{t^{1-\alpha}} dt.$$

①利用不等式

$$\sin z > \frac{2}{\pi}z \quad \left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$$



如果函数  $f(x)$  在比  $[a, b]$  更宽的区间上有有界的导数  $f'(x)$ , 则显然利普希茨条件 (在  $\alpha = 1$  时) 成立, 因此函数  $f(x)$  的傅里叶级数在  $[a, b]$  上一致收敛于这函数.

而且这条件是下一判别法的一个特殊情形:

**狄利克雷-若尔当判别法** 如果在某一比  $[a, b]$  更宽的区间  $[A, B]$  上函数  $f(x)$  连续并有有界变差, 则函数  $f(x)$  的傅里叶级数在区间  $[a, b]$  上一致收敛于这函数.

依照第 686 目中的论证, 将积分

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

表示为积分的和  $\frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^\pi$ , 其中正数  $h$  要选得小于  $a - A$  与  $B - b$ , 且与  $[a, b]$  上  $x$  的值无关. 由 3°, 显然上面第二个积分当  $n \rightarrow \infty$  时对于  $x$  一致趋近于零. 在第一个积分中, 令

$$\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{t} \right] + \frac{1}{t},$$

首先从第一个积分中分出一部分:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x+t) + f(x-t)] \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{t} \right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

又由 3°, 这部分一致趋近于零.<sup>①</sup>

最后回到积分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt.$$

因为在区间  $[A, B]$  上函数  $f(x)$  可以表示为两个连续增函数之差的形状:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

所以对这两函数分别应用命题 4°, 便能断定上面的积分一致趋近于极限  $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2f(x) = f(x)$ . 证明至此完成.

特别, 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上给出一连续并有有界变差的函数  $f(x)$ , 且适合条件

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

<sup>①</sup>参考第 690 目 3) 的脚注.



则它的傅里叶级数在整个区间上一致收敛于这函数.

为了要证明这定理, 只需以  $2\pi$  为周期, 按周期规则在整个数轴上延拓此函数, 然后任取一包含  $[-\pi, +\pi]$  在其内部的区间作为  $[A, B]$ .

**700. 傅里叶级数在不连续点附近的性质; 特殊情形** 现在研究函数  $f(x)$  的傅里叶级数在这函数的不连续点附近的性质. 我们开始考虑一个特殊的级数. 这级数有一种有趣的现象, 能够最简单明了地表现出来.

我们知道级数

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = 2 \left\{ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right\} \quad (5)$$

收敛于和式

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{如果 } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{如果 } x = 0, \pm\pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{如果 } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

[参考 690,4)]; 在点  $x = 0$  的左方及右方, 函数有跳跃:

$$\sigma(+0) - \sigma(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma(0) - \sigma(-0) = \frac{\pi}{2}.$$

我们将研究级数部分和

$$\sigma_{2n-1}(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

的性质.<sup>①</sup> 因为它是奇函数, 所以只要在区间  $[0, \pi]$  上考虑它就够了. 此外, 显而易见的恒等式

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2} - x'\right)$$

指出  $\sigma_{2n-1}(x)$  关于点  $x = \frac{\pi}{2}$  为对称:

$$\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x'\right);$$

因此可以限于在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上进行研究.

不难求得  $\sigma_{2n-1}(x)$  的表示式:

$$\sigma_{2n-1}(x) = 2 \int_0^x [\cos u + \cos 3u + \cdots + \cos(2n-1)u] du = \int_0^x \frac{\sin 2nu}{\sin u} du; \quad (6)$$

或者, 如果令  $2nu = t$ , 即得:

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \int_0^{2nx} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt. \quad (7)$$

<sup>①</sup> 显然  $\sigma_{2n}(x) = \sigma_{2n-1}(x)$ .



这表示式可写成和式的形状:

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \left\{ \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{2nx} \right\} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt, \quad (8)$$

其中  $k = E\left(\frac{2nx}{\pi}\right)$ . 对于  $i = 0, 1, \cdots, n-1$ , 一般地令

$$\frac{1}{2n} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt = (-1)^i \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin z}{\sin \frac{z+i\pi}{2n}} dz = (-1)^i v_i,$$

我们显然有

$$v_i > 0 \quad \text{及} \quad v_{i+1} < v_i. \quad (9)$$

因此, 最后得:

$$\sigma_{2n-1}(x) = v_0 - v_1 + \cdots + (-1)^{k-1} v_{k-1} + (-1)^k \tilde{v}_k, \quad (8^*)$$

其中用  $(-1)^k \tilde{v}_k$  表示最后的一个“不规则”项; 它的符号是  $(-1)^k$ , 而其绝对值小于  $v_k$ .

由此立即推得关于和式  $\sigma_{2n-1}(x)$  的性质的一系列结论. 如果固定  $n$ , 而  $x$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 则

1) 和式  $\sigma_{2n-1}(x)$  为正, 且只在  $x=0$  处为零;

2) 它在点

$$x_m = \frac{m\pi}{2n} \quad (m = 1, 2, \cdots, n)$$

处有极值: 当  $m$  是奇数时有极大值, 是偶数时有极小值. 事实上, 由  $(8^*)$  可见在区间  $\left[m\frac{\pi}{2n}, (m+1)\frac{\pi}{2n}\right]$  上, 函数  $\sigma_{2n-1}(x)$  当  $m$  是偶数时为增函数, 当  $m$  是奇数时为减函数.<sup>①</sup>

最后, 由极值的表示式

$$\sigma_{2n-1}(x_m) = v_0 - v_1 + \cdots + (-1)^m v_m$$

并且考虑不等式 (9), 可知:

3) 当  $x$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上变化时,  $\sigma_{2n-1}(x)$  的极大值从左向右减小而极小值则增大.

所有这些断语都表现于图 133, 在这图中描出了函数  $\sigma_{11}(x)$  的图解作为例子.

现讨论函数  $\sigma_{2n-1}(x)$  的最大的极大值, 即从  $x=0$  计算起的第一个极大值, 它就是函数在点

$$x_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$$

处的值, 其大小等于 [参考 (7)]

$$M_1^{(n)} = \sigma_{2n-1}(x_1^{(n)}) = \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt.$$

<sup>①</sup>考虑导数

$$\frac{d}{dx} \sigma_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$$

时, 也容易得到关于函数  $\sigma_{2n-1}(x)$  的极值的论断 2) [参考 (6)].



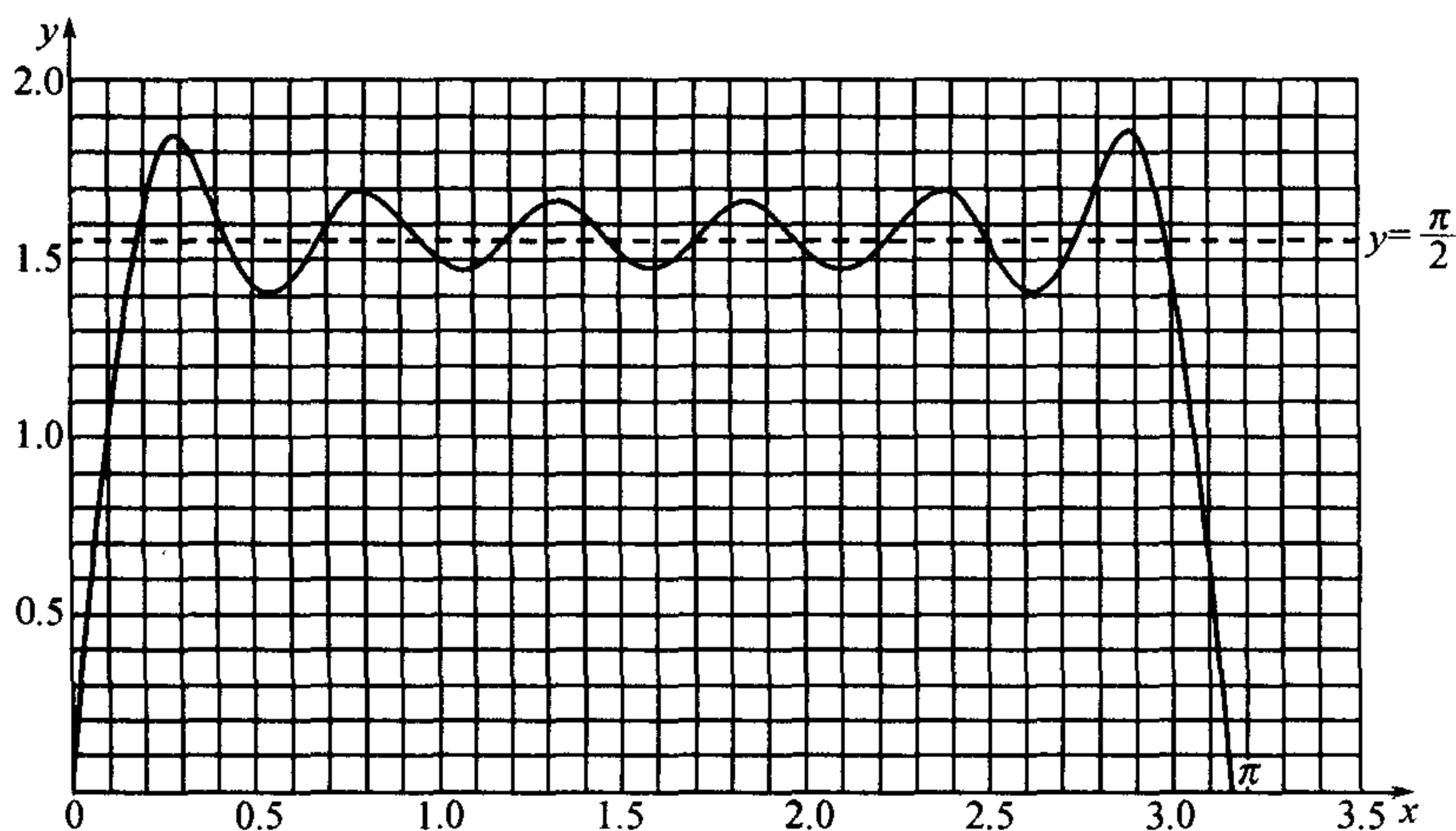


图 133

在这里我们取  $n$  作为指标, 因为现在打算要研究当  $n$  变化时函数的性质. 显然当  $n$  增大时,  $x_1^{(n)}$  单调减小, 并且当  $n \rightarrow +\infty$  时趋近于零. 为了简化对于  $M_1^{(n)}$  的大小的研究起见, 将它的表示式换写为下列形式:

$$M_1^{(n)} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \frac{\frac{t}{2n}}{\sin \frac{t}{2n}} dt.$$

因为当  $n$  增大时, 被积分式中的第二个因子随着  $n$  的递增而一致(关于  $t$ )递减<sup>①</sup> 趋近于1, 所以  $M_1^{(n)}$  也显然递减趋近于极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_1^{(n)} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \mu_1. \quad (10)$$

由此得:

4) 函数  $\sigma_{2n-1}(x)$  在值  $x = x_1^{(n)}$  处达到第一个(最大的)极大值, 当  $n$  无限增大时,  $x_1^{(n)}$  单调递减趋近于零, 而极大值  $M_1^{(n)}$  本身则单调递减趋近于公式 (10) 所表示的极限  $\mu_1$ .

一般说来, 对于函数的第  $k$  个 ( $k$  固定!) 极值也能作类似的断语: 函数在值

$$x_k^{(n)} = k \cdot \frac{\pi}{2n} \quad (n \geq k)$$

处达到它; 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_k^{(n)}$  趋近于 0, 而第  $k$  个极值的大小  $M_k^{(n)}$ , 则单调趋近于极限

$$\mu_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt;$$

如果所讲的是极大值 ( $k$  为奇数) 则  $M_k^{(n)}$  减小; 如果是极小值 ( $k$  为偶数) 则  $M_k^{(n)}$  增大.

为了说明起见, 我们作出了图 134, 在其中将前六个和式  $\sigma_{2n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 的图解加以比较.

<sup>①</sup>我们在此处应用到这个事实: 当  $z$  从 0 增大到  $\frac{\pi}{2}$  时, 函数  $\frac{z}{\sin z}$  本身也增大.



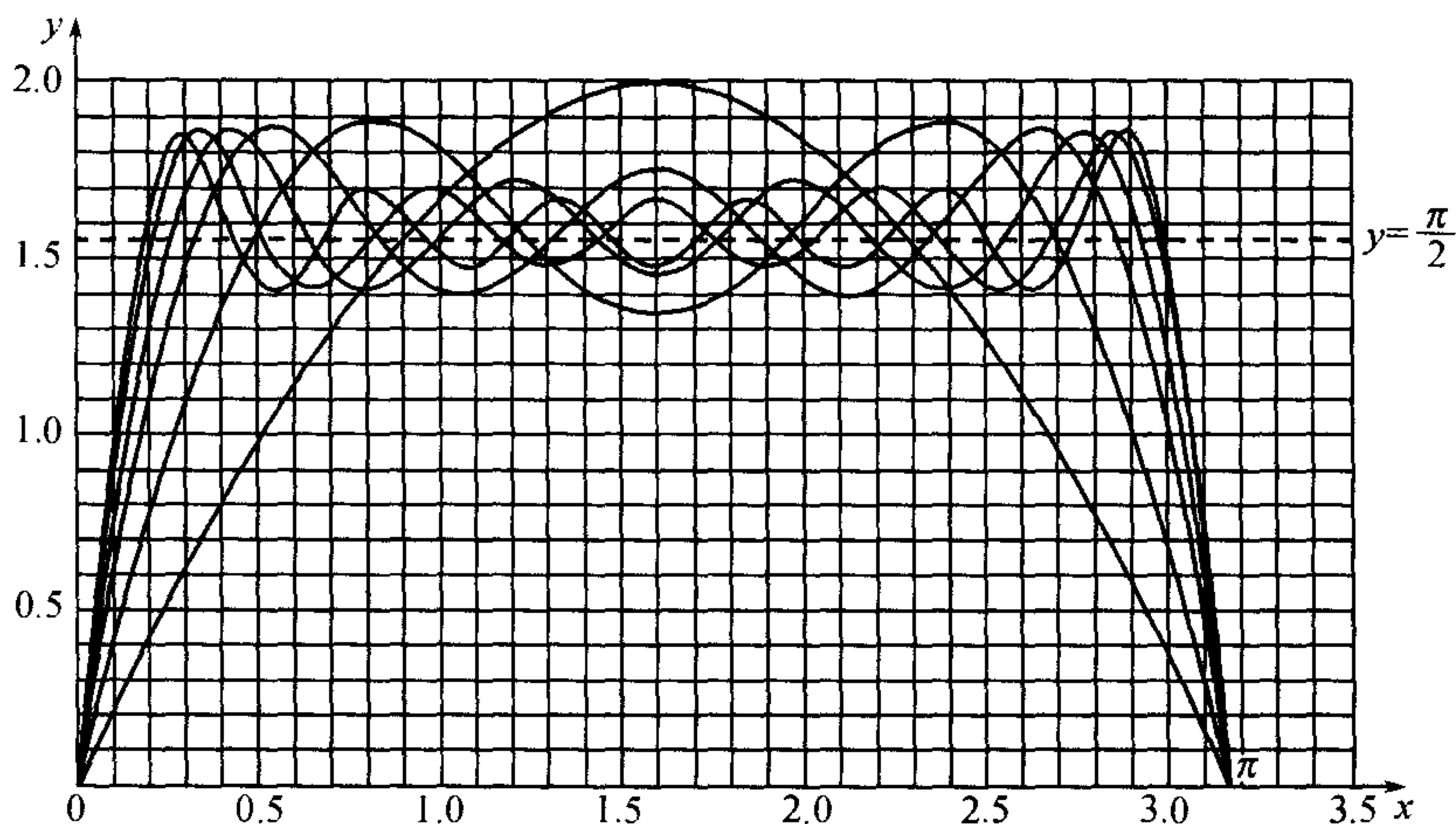


图 134

由第 478 目中所作的推理, 显然数  $\mu_k$  比起数

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

来, 依次交互一大一小. 差数  $\rho_k = \mu_k - \frac{\pi}{2}$  有下列各值:

$$\rho_1 \doteq 0.281; \textcircled{1} \rho_2 \doteq -0.153; \rho_3 \doteq 0.104; \rho_4 \doteq -0.073; \rho_5 \doteq 0.063; \dots \quad (11)$$

现在我们能充分完满地说明级数 (5) 的部分和  $\sigma_{2n-1}(x)$  收敛于和式  $\sigma(x)$  这一特性; 为了明确起见, 我们的讨论限于在区间  $[0, \pi]$  上.

如果用任意充分小的邻域  $[0, \delta)$  及  $(\pi - \delta, \pi]$  划出不连续点  $x = 0$  及  $x = \pi$ , 则由前目所证明的结果, 级数在余下的区间  $[\delta, \pi - \delta]$  上一致收敛. 换句话说, 当  $n$  充分大时, 部分和  $\sigma_{2n-1}(x)$  的图解在这区间的整个范围就向着直线  $y = \frac{\pi}{2}$  任意充分靠拢, 在点  $x = 0$  (及  $x = \pi$ ) 附近, 函数从值  $\frac{\pi}{2}$  变到值 0, 即有一跳跃; 在这里, 自然不可能有一致逼近的性质, 因为  $\sigma_{2n-1}(x)$  从在  $x = \delta$  (或  $\pi - \delta$ ) 处接近于  $\frac{\pi}{2}$  的值以连续的方式变为在  $x = 0$  (或  $\pi$ ) 处的值 0.

然而很值得注意的是: 一致近似性之所以不能成立的原因不仅在此; 我们要提醒读者注意这个事实. 在  $y$  轴右侧附近, 当函数  $\sigma_{2n-1}(x)$  的图解突然趋近于原点  $(0, 0)$  以前, 它围绕着直线  $y = \frac{\pi}{2}$  振动, 而且振动的振幅当  $n \rightarrow \infty$  时一点没有无限减小的趋势. 反之, 如我们所看到, 在这个直线上面的第一个峰, 也就是最高的一个峰的高度在这时趋近于数量  $\rho_1 \doteq 0.281$ , 随着第一个峰, 其余的谷与峰当  $n$  增大时从右向左推移, 并向  $y$  轴密集, 而且当  $n \rightarrow \infty$  时, 它们的顶点与直线  $y = \frac{\pi}{2}$  的距离分别趋近于序列 (11) 中其余的数量  $\rho_2, \rho_3, \dots$  等等. 在直线  $x = \pi$  的左侧邻近, 也有类似的图形. 在  $y$  轴左侧附近也是一样, 应重新作出同一图形; 不过要将所有考虑过的数量变号.

<sup>①</sup>参考 412 目, 4).



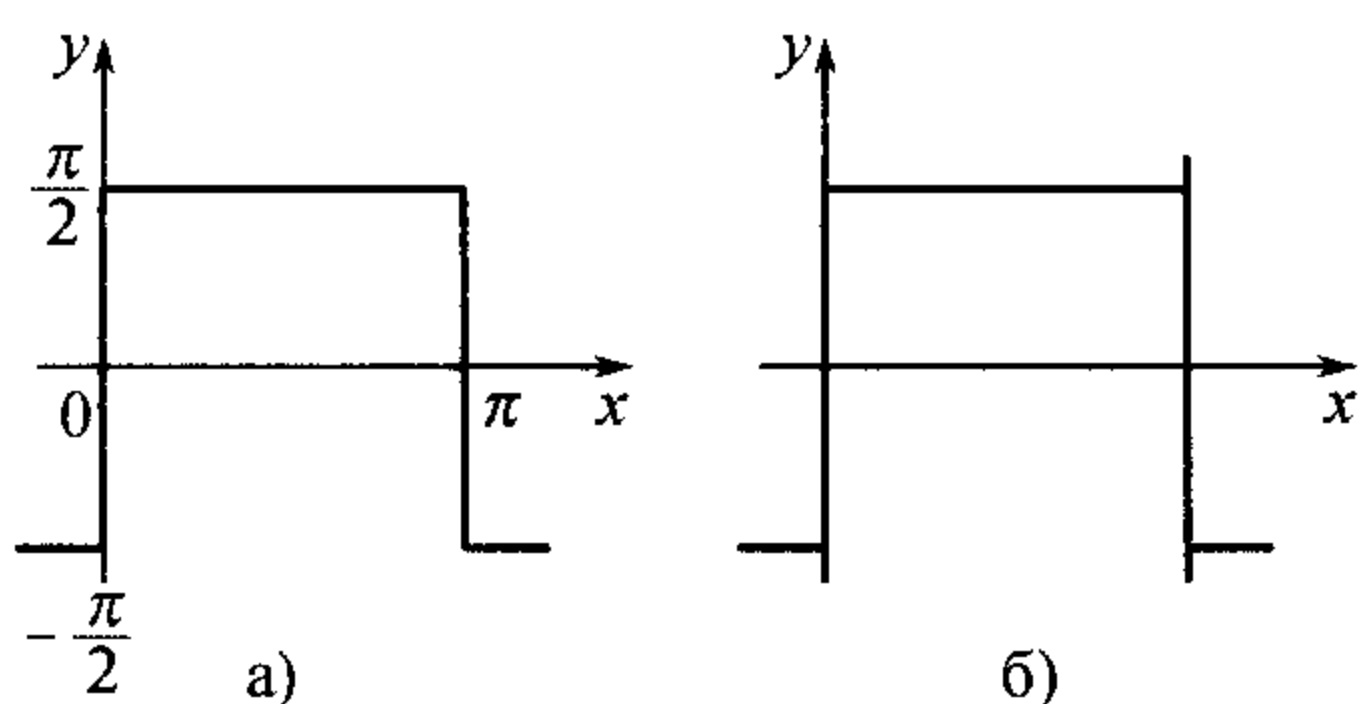


图 135

可以说对于曲线  $y = \sigma_{2n-1}(x)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 画在图 135,a 上的折线不是“极限的几何图形”(不是如我们自然料想到的那样!), 而应取图 135,b 中的折线作为极限图形, 其中重直的线段分别延长了约  $0.281 : \frac{\pi}{2} \doteq 18\%$ .

在 19 世纪的末年, 吉布斯 (J.W.Gibbs) 首先也是在一个三角展开式的特例上注意到这种收敛性的缺点, 因此我们称它为吉布斯现象. 现在将看到在某种意义下, 这种现象在一般情况下也要产生.

**701. 任意函数的情形** 考虑以  $2\pi$  为周期并具有第一种孤立不连续点  $x = x_0$  的绝对可积函数  $f(x)$ . 则在某一区间  $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$  上 ( $\Delta > 0$ ), 没有其他不连续点; 为了简单起见, 假定函数在这区间上有有界变差.

现引用函数  $\sigma(x - x_0)$ , 它与上目中所研究的函数的差别只是在于向右平移了  $x_0$ , 利用它作出函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} - \frac{1}{\pi}[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\sigma(x - x_0).$$

如果在点  $x = x_0$  处, 约定取  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$  作为值  $f(x_0)$ , 则容易证实:

$$\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0) = 0.$$

这样, 函数  $\varphi(x)$  在点  $x = x_0$  处就是连续的: 利用函数  $\sigma$  能够补救函数  $f$  的不连续性! 如果取  $\Delta < \pi$ , 则函数  $\varphi$  在区间  $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$  的其余各点处也连续; 而且函数  $\varphi$  也与函数  $f$  及  $\sigma$  一样, 在这个区间上也有有界变差.

现在可写出

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{\pi}[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\sigma(x - x_0) + \varphi(x).$$

在这里, 将函数  $\sigma(x - x_0)$  及  $\varphi(x)$  用它们的傅里叶级数展开式来代替, 我们显然就得到已给函数的傅里叶级数展开式. 它的部分和  $s_m(x)$  可表示为下列形式:

$$s_m(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{\pi}\sigma_m(x - x_0) + \varphi_m(x).$$

在这里, 当  $m = 2n - 1$  或  $2n$  时,

$$\begin{aligned}\sigma_m(x - x_0) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)(x - x_0)}{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} [\cos x_0 \sin(2k-1)x - \sin x_0 \cos(2k-1)x],\end{aligned}$$

而  $\varphi_m(x)$  则表示  $\varphi$  的级数的相应部分和.

因为  $\varphi(x_0) = 0$ , 并且函数  $\varphi(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 所以当  $\Delta$  充分小时,  $\varphi(x)$  在区间  $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$  上的一切值可任意小. 同时  $\varphi_m(x)$  在这区间上一致趋近于  $\varphi(x)$ , 因此当  $m$  充



分大时,  $\varphi_m(x)$  的值可任意小. 这样, 和式  $s_m(x)$  的性质基本上已由和式  $\sigma_m(x - x_0)$  的已知性质所确定;  $\varphi_m(x)$  一项的出现只会有不重要的改变, 而当  $x$  愈接近于  $x_0$  及  $m$  愈大时, 则改变愈小.

如果对于奇数  $m = 2n - 1$ , 令

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m+1},$$

而对于偶数  $m = 2n$ :

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m},$$

则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = x_0.$$

如果同时考虑到 (10), 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\xi_m) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{\pi} \cdot \mu_1,$$

因为当  $m \rightarrow \infty$  时, 显然

$$\varphi_m(\xi_m) = [\varphi_m(\xi_m) - \varphi(\xi_m)] + \varphi(\xi_m) \rightarrow 0.$$

用  $\frac{\pi}{2} + \rho_1$  代替  $\mu_1$ , 并且引用跳跃量  $D = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ , 可将所得结果改写为:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\xi_m) = f(x_0 + 0) + \frac{D}{\pi} \rho_1. \tag{12}$$

同样, 按照  $m$  是奇数或偶数, 令

$$\bar{\xi}_m = x_0 - \frac{\pi}{m+1} \quad \text{或} \quad x_0 - \frac{\pi}{m},$$

得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\bar{\xi}_m) = f(x_0 - 0) - \frac{D}{\pi} \rho_1. \tag{13}$$

这样, 在所考虑的一般情形下, 和式  $s_m(x)$  在不连续点  $x_0$  的邻域内之振幅的极限值比较函数  $f(x)$  的跳跃量  $|D|$  大

$$\frac{2|D|}{\pi} \rho_1,$$

即大 18%. 在这里, 要得到和式  $s_m(x)$  的图解的极限几何图形, 只对曲线  $y = f(x)$  附加在垂直线  $x = x_0$  上连接纵坐标为  $f(x_0 - 0)$  及  $f(x_0 + 0)$  的两点的线段是不够的, 还必须把这线段相应地向上下两方延长. 可以说对于任意的函数都有吉布斯现象!

附注 对吉布斯现象的研究还可得到其他有趣的结论. 譬如, 利用这种研究, 对于有有界变差的函数  $f(x)$ , 则能由它的傅里叶级数直接求出确定它在任意点  $x_0$  处的单侧极限  $f(x_0 \pm 0)$  及跳跃量的公式. 为了这个目的, 例如, 可应用公式 (12) 与 (13): 将它们两端相减, 求得

$$D = \frac{\pi}{2\mu_1} \lim_{m \rightarrow \infty} [s_m(\xi_m) - s_m(\bar{\xi}_m)],$$

然后确定  $f(x_0 \pm 0)$  便容易多了. 这种类型的公式都是由费耶 (L.Fejér) 求得的.



**702. 傅里叶级数的奇异性质 · 预先的说明** 在连续函数的傅里叶级数的一切收敛判别法中,除了连续性本身以外,总还需要加上某些条件:有时是某一积分存在,某一不等式成立,或有限的导数存在;有时是函数有有界变差或逐段单调.因而很自然地发生了下一问题:要傅里叶级数的收敛,仅有产生这级数的函数连续这一性质是否就够了呢?早在 1876 年,杜·布瓦-雷蒙(P. du Bois-Reymond) 已经对这问题作了否定的答复,他作出了一个连续函数的例子,其傅里叶级数在若干点发散.

勒贝格 (H. Lebesgue) 在 1906 年作出了一连续函数的例子,其傅里叶级数处处收敛,但是并不一致收敛.

在这里,我们要依照费耶所指出的方法,作出具有“杜·布瓦-雷蒙奇异性质”及“勒贝格奇异性质”的一些例子.

在这两种情形下,都要用下列有限三角多项式 ( $m$  与  $n$  表示自然数) 作为作法的要素:

$$P_{m,n}(x) = \left[ \frac{\cos mx}{n} + \frac{\cos(m+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(m+n-1)x}{1} \right] \\ - \left[ \frac{\cos(m+n+1)x}{1} + \cdots + \frac{\cos(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\cos(m+2n)x}{n} \right], \\ Q_{m,n}(x) = \left[ \frac{\sin mx}{n} + \frac{\sin(m+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\sin(m+n-1)x}{1} \right] \\ - \left[ \frac{\sin(m+n+1)x}{1} + \cdots + \frac{\sin(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(m+2n)x}{n} \right].$$

事先推出这些多项式的若干性质:

1° 第一,不论变数  $x$  及指标  $m$  及  $n$  的值是怎样,一定有一个常数  $M$  存在,使得

$$|P_{m,n}(x)| \leq M \quad \text{及} \quad |Q_{m,n}(x)| \leq M. \quad (14)$$

为了要证明这性质,变换多项式  $P$  与  $Q$ , 合并其中具有相同系数的各项. 这样,在第一个多项式中,令 (当  $\nu = 1, 2, \cdots, n$  时)

$$\frac{\cos(m+n-\nu)x}{\nu} - \frac{\cos(m+n+\nu)x}{\nu} = 2 \sin(m+n)x \frac{\sin \nu x}{\nu},$$

我们将它化成下列形式:

$$P_{m,n}(x) = 2 \sin(m+n)x \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

同样,

$$Q_{m,n}(x) = -2 \cos(m+n)x \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$



因为在这里两种情形下, 所出现的和式的乘数显然有界, 所以问题归结为和式本身的有界性. 我们过去已将这和式表成下列形式 [690,3]):

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt + \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du.$$

在这里, 右端的第二项当  $n \rightarrow \infty$  时一致趋近于零, 所以它有界 [698,1°]; 又因积分  $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$  收敛, 所以第三项也有界. 由此推得所需要的结论.

2° 多项式  $P$  及  $Q$  的部分和 (即在多项式中从第一项起任意个相连各项的和) 的情况则有所不同. 如果取多项式  $P_{m,n}(x)$  前  $n$  项的和, 则当  $x=0$  时, 它的值是

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

即随着  $n$  一同发散于无穷大 [365,1)]. 因为, 显然,

$$\frac{1}{\nu} > \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} = \ln(\nu+1) - \ln \nu,$$

所以可求得  $H_n$  的下一熟知的估计值

$$H_n > \ln n.$$

当  $x=0$  时, 多项式  $Q_{m,n}(x)$  的部分和全都等于零. 但是如果我们计算多项式的前  $n$  项在靠近于零的 (当  $m$  及  $n$  很大时) 点  $x = \frac{\pi}{2(m+n)}$  处的和, 则得

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2(m+n)} \right).$$

根据熟知的不等式  $\sin z > \frac{2}{\pi} z \left( 0 < z < \frac{\pi}{2} \right)$ , 这和式比

$$\sum_{\nu=1}^n \left( \frac{1}{\nu} - \frac{1}{m+n} \right) = H_n - \frac{n}{m+n} > \ln n - 1$$

更大, 并且也随着  $n$  无穷增大. 实际上在这里已经包含着 (杜·布瓦-雷蒙及勒贝格的) 两种奇异性质的胚胎了.

3° 如果我们取任意正数  $\varepsilon$ , 限制变量  $x$  在区间  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  上变化,<sup>①</sup> 则两多项式的一切部分和 (的绝对值) 都以同一与  $m$  及  $n$  无关的常数  $L(\varepsilon)$  为界, 只需关于表示式

$$\sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \quad \sum_{\lambda=1}^l \frac{\sin(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \quad (15)$$

<sup>①</sup>或取从  $2k\pi + \varepsilon$  到  $2(k+1)\pi - \varepsilon$  的区间 (其中  $k$  为任意整数), 像这样并没有什么不同.



证明此点就够了, 因为容易看出在一般的情形下, 各部分和可写成两个类似表示式的差.

现取表示式

$$\sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}$$

为例, 并且为了求它的估计值须应用阿贝尔引理 [383]. 当标数  $\lambda$  增大时, 因子  $\frac{1}{\lambda}$  减小, 但总是正数. 至于因子  $\cos(p+\lambda)x$ , 则其任意个的和

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \cos(p+\lambda)x = \frac{\sin\left(p+\lambda_0+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

的绝对值不超过常数  $\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ . 由此可作结论:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

对于 (15) 中其他的表示式, 这个结论还是成立. 这样, 可以取常数  $\frac{2}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$  作为上述的界  $L(\varepsilon)$ .

所有这些性质在下款中都要应用到.

**703. 奇异性质的作法** 现在取正数序列  $\{a_k\}$ , 使得级数  $\sum a_k$  收敛. 又取两个无穷增加的自然数序列  $\{m_k\}$  及  $\{n_k\}$ , 作出两级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{m_k, n_k}(x) = \Phi(x) \quad (\text{I})$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{m_k, n_k}(x) = \Psi(x). \quad (\text{II})$$

则因根据 (14), 这两级数都以收敛级数  $M\sum a_k$  为强函数, 所以它们绝对且一致收敛. 因此 [431] 函数  $\Phi(x)$  及  $\Psi(x)$  显然连续.

我们先取  $a_k, m_k$  及  $n_k$  使其适合下列两个要求:

- 1)  $m_{k+1} > m_k + 2n_k$  (关于  $k = 1, 2, \dots$ ),
- 2) 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $a_k \ln n_k \rightarrow +\infty$ . 例如可令

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad m_k = n_k = 2^{k^3}.$$



两个不同的三角多项式  $a_k P_{m_k, n_k}(x)$  或  $a_k Q_{m_k, n_k}(x)$  分别在级数 (I) 或 (II) 中出现, 由 1), 它们不包含具有  $x$  的相同倍数的项. 如果现在简单地依次一一写出 (I) 或 (II) 中的多项式序列的一切项, 即去掉所有括号, 则得两个三角级数 (一个是余弦级数, 另一个是正弦级数), 就是函数  $\Phi(x)$  及  $\Psi(x)$  的傅里叶级数. 事实上, 例如如果用  $\cos px$  乘等式 (I) 的两端并从 0 到  $2\pi$  积分, 则由级数的一致收敛性, 能够进行级数的逐项积分法. 然后将每个积分

$$\int_0^{2\pi} a_k P_{m_k, n_k}(x) \cos px dx$$

用有限个积分的和来代替, 则除了在  $a_k P_{m_k, n_k}(x)$  中含  $\cos px$  项的情形以外, 一切积分都是零, 由此可知  $\cos px$  的系数是傅里叶系数.

现在研究这些傅里叶级数收敛及其收敛的特性问题. 如果限制  $x$  在区间  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  上变化, 则这两级数也与级数 (I) 及 (II) 一样, 是收敛的, 并且甚至是一致收敛的. 这是因为 (例如) 函数  $\Phi(x)$  的傅里叶级数的任一部分和, 与级数 (I) 的某一部分和

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k P_{m_k, n_k}(x)$$

的差只是三角多项式

$$a_s P_{m_s, n_s}(x)$$

中的某一部分和, 而由 702,3°, 这一部分和的绝对值不会超过  $a_s L(\varepsilon)$ . 并且当  $s$  无穷增加时一致趋近于零.

由于  $\varepsilon$  的任意性, 因此就保证了函数  $\Phi(x)$  与  $\Psi(x)$  的傅里叶级数在  $(0, 2\pi)$  内的一切值  $x$  处收敛. 然而第一个级数在  $x = 0$  (或  $2\pi$ ) 处发散, 即有“杜·布瓦-雷蒙奇异性性质”! 实际上, 如果一般地用  $s_m(x)$  表示它的第  $m$  个部分和, 我们有

$$s_{m_k + n_k - 1}(x) - s_{m_k - 1}(x) = a_k \left[ \frac{\cos m_k x}{n_k} + \cdots + \frac{\cos(m_k + n_k - 1)x}{1} \right],$$

因此 [参考 702,2°]

$$s_{m_k + n_k - 1}(0) - s_{m_k - 1}(0) = a_k H_{n_k} > a_k \ln n_k,$$

结合要求 2), 此式证实了级数收敛的基本条件 [376,5°] 不能成立.

至于函数  $\Psi(x)$  的傅里叶级数则仅含正弦, 所以当然它在  $x = 0$  (或  $2\pi$ ) 处也收敛. 但是这时在点  $x = 0$  的邻域内, 收敛性不是一致的, 因而我们在这里体现了“勒贝格奇异性性质”! 为了要证实这一点, 一般地用  $\bar{s}_m(x)$  表示它的第  $m$  个部分和, 并且计算在点  $x = \frac{\pi}{2(m_k + n_k)}$  处的差数

$$\bar{s}_{m_k + n_k - 1}(x) - \bar{s}_{m_k - 1}(x) = a_k \left[ \frac{\sin m_k x}{n_k} + \cdots + \frac{\sin(m_k + n_k - 1)x}{1} \right];$$



由 702,2°, 它比

$$a_k(\ln n_k - 1)$$

还大, 并且随着  $k$  增加到无穷大.

将作法加繁, 则能确定以  $2\pi$  为周期的连续函数  $\Phi(x)$ , 使得它的傅里叶级数在区间  $[0, 2\pi]$  的任一部分有发散点.

然而直到现在为止, 关于连续函数的傅里叶级数是不是可能处处发散的问题还没有解决.<sup>115)</sup> 的确, 处处发散的傅里叶级数曾由柯尔莫戈洛夫院士用精密的方法作出了一例, 但是他的例子已与性质较复杂的函数有关, 并且利用了较通常更普遍的(勒贝格的)积分定义.

## §5. 与函数可微分性相关的余项估值

**704. 函数与其导数的傅里叶系数间之关系** 考虑以  $2\pi$  为周期并有直到  $k$  阶 ( $k \geq 1$ ) 导数的函数  $f(x)$ . 当然, 前  $k-1$  个导数是连续函数; 而假定第  $k$  阶导数为(绝对)可积. 与在前面一样, 我们用  $a_m, b_m$  表示函数  $f(x)$  的傅里叶系数; 对于导数  $f^{(i)}(x) (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则用  $a_m^{(i)}, b_m^{(i)}$  表示其傅里叶系数.

分部积分, 求得 (对  $m = 1, 2, \dots$ )

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = f(x) \frac{\sin mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin mx dx,$$

因此

$$a_m = -\frac{b'_m}{m};$$

同样

$$b_m = \frac{a'_m}{m}.$$

如果将所得公式应用到系数  $a'_m, b'_m$ , 则得用  $a''_m, b''_m$  表示它们的式子, 将这些式子代入  $a_m, b_m$  的公式中, 则有

$$a_m = -\frac{a''_m}{m^2}, \quad b_m = -\frac{b''_m}{m^2}.$$

继续应用这种方法, 我们分别偶数与奇数的情形, 归纳作出最后的公式:

$$\text{当 } k = 2h \text{ 时: } a_m = (-1)^h \frac{a_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h \frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad (1a)$$

$$\text{当 } k = 2h + 1 \text{ 时: } a_m = (-1)^{h+1} \frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h \frac{a_m^{(k)}}{m^k}. \quad (1b)$$

<sup>115)</sup> 所述问题的否定解答由 L. 卡尔列逊 (L. Carleson) 于 1966 年发表的论文中得到.



我们提出的问题是: 在对  $k$  阶可微分函数的  $k$  阶导数加上若干条件时, 利用上列公式求出这函数的傅里叶级数的余项估值. 在前一节的开始, 我们研究了傅里叶级数的一致收敛性的问题, 即它的余项一致趋近于零的问题; 的确, 在这里, 在更严格的假定下, 利用函数的可微分性求出余项的无穷小阶后, 我们甚至能估计这种趋近的速度.

**705. 在有界函数情形时部分和的估值** 现只假定函数  $f(x)$  有界:

$$|f(x)| \leq M,$$

在这里, 例如, 可把  $M$  了解为  $|f(x)|$  的上确界. 我们预先要给出傅里叶级数的部分和  $s_n(x)$  以及与其共轭的级数的部分和  $\tilde{s}_n(x)$  的估值.

由熟知的公式 [参考 681, (4)],

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

由此逐步有:

$$\begin{aligned} |s_n(x)| &\leq \frac{2M}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt < M \int_0^\pi \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right|}{t} dt^{①} \\ &= M \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du < M \int_0^1 du + M \int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{du}{u} \\ &= M \left[1 + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] < M(\ln n + 1 + \ln 2\pi). \end{aligned}$$

如果将  $A$  理解为一充分大的常数, 则 (当  $n \geq 2$  时) 在最后一个括号中的表示式比  $A \ln n$  小, 因此最后得

$$|s_n(x)| \leq AM \ln n^{②} \quad (n \geq 2). \quad (2)$$

转到共轭级数, 我们回忆 [696, (20)]

$$\tilde{s}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

①参考 699 目迪尼判别法下的脚注.

②例如可以取

$$A = 2 + \frac{1 + \ln \pi}{\ln 2}.$$

但是这当然不是常数  $A$  所能取得的最好值.



因此

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_n(x)| &\leq \frac{2M}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left| \cos \frac{1}{2}t - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \\ &= \frac{4M}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left| \sin \frac{n}{2}t \cdot \sin \frac{n+1}{2}t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt < \frac{4M}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left| \sin \frac{n+1}{2}t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \end{aligned}$$

再与以上同样进行推理, 我们得到类似的估值:

$$|\tilde{s}_n(x)| \leq AM \ln n \quad (n \geq 2), \quad (3)$$

其中  $A$  是新的常数, 一般说来与前面的  $A$  不同, 但是与它相似的是这个  $A$  也与函数  $f(x)$  的选取无关. 然而当然能在两种情形下采用同一常数——即两数中较大的一数.

差式  $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$  [只有当  $s_n(x)$  收敛于函数  $f$  时, 它才是傅里叶级数的余项] 的估值与 (2) 相仿:

$$|R_n(x)| \leq AM \ln n \quad (n \geq 2),$$

事实上,

$$|R_n(x)| \leq |f(x)| + |s_n(x)| \leq M + AM \ln n,$$

因此只要适当地增大常数  $A$ , 即得所需要的不等式.

对于随着  $n$  增加到无穷大的数量在不等式右端这个事实, 读者不必感觉惊讶. 的确, 我们知道对于若干有界 (甚至于是连续的, 参考 703) 函数  $f(x)$ , 量  $R_n(x)$  确乎能够无穷增大, 而我们的不等式则必须对于一切有界可积的函数都成立.

**706. 函数有  $k$  阶有界导数时余项的估值** 现在再转而考虑以  $2\pi$  为周期并有直到  $k$  阶 ( $k \geq 1$ ) 导数的函数  $f(x)$ , 而且这次假定  $k$  阶导数有界:

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_k$$

并且有常义积分.

我们将证明 S.N 伯恩施坦院士所发现的重要结果: 在已作的假定下, 有一个绝对常数  $A$  存在, 使得 (对于  $n \geq 2$ )

$$|R_n(x)| \leq AM_k \frac{\ln n}{n^k}. \quad (4)$$

在证明时, 我们将分别  $k$  为偶数及奇数两种情形.



1° 设  $k = 2h$ . 如果利用公式 (1a), 则可将函数  $f(x)$  的傅里叶级数的余项的表示式<sup>①</sup>

$$R_n = R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

写成下列形式

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (a_m^{(k)} \cos mx + b_m^{(k)} \sin mx).$$

在括弧中, 我们有函数  $f^{(k)}(x)$  的傅里叶级数的第  $m$  项; 引用这个级数的部分和  $\sigma_m = \sigma_m(x)$ , 则可用  $\sigma_m - \sigma_{m-1}$  来代替此项:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (\sigma_m - \sigma_{m-1}).$$

除去括弧并换一种方式集合诸项 [参考 383], 我们得到级数

$$(-1)^h R_n = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \sigma_m. \quad (5)$$

可以这样变换的理由是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sigma_m}{m^k} = 0;$$

这是由不等式

$$|\sigma_m| \leq AM_k \ln m \quad (6)$$

推出的, 而这个不等式则是将不等式 (2) 应用于函数  $f^{(k)}(x)$  而求得的. 由 (5) 及 (6) 推得估值

$$\frac{|R_n|}{M_k} \leq \frac{A \ln n}{(n+1)^k} + A \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \ln m.$$

最后和式重新变换为下列形式 [参考 371]:

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} [\ln(m+1) - \ln m].$$

如果利用不等式

$$\ln(m+1) - \ln m = \ln \left( 1 + \frac{1}{m} \right) < \frac{1}{m}$$

及

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

<sup>①</sup>在已作的假定下, 傅里叶级数处处收敛于函数  $f(x)$  [684].



[参考 373,a)], 则逐步求得它的估值:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)^k} &< \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k} \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{\ln n}{n^k} + \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{\ln n + 2}{n^k}. \end{aligned}$$

回到  $|R_n|$ , 关于它的大小我们得到这样一个估值:

$$|R_n| < M_k \frac{2A \ln n + 2A}{n^k} \quad (n \geq 2),$$

当然,适当改变  $A$ , 由此容易推出 (4).

2° 现假定  $k = 2h + 1$ . 依靠公式 (16), 我们改写  $R_n$  为:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (a_m^{(k)} \sin mx - b_m^{(k)} \cos mx).$$

这次我们看出在括号内的表示式是与函数  $f^{(k)}(x)$  的傅里叶级数共轭的级数的第  $m$  项 [696]. 因为我们有它的部分和  $\tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_m(x)$  的估值

$$|\tilde{\sigma}_m| \leq AM_k \ln m$$

[参考 (3)], 所以其余的推理与上面已说过的没有什么不同.

**707. 函数有有界变差的  $k$  阶导数的情形** 首先考虑以  $2\pi$  为周期且在区间  $[-\pi, \pi]$  上其本身有有界变差的函数  $f(x)$ . 转用斯蒂尔切斯积分并应用分部积分的公式 [577], 我们将函数  $f(x)$  的系数  $a_n$  表成下列形式:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} (S) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \frac{\sin nx}{n} \\ &= f(x) \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} (S) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x). \end{aligned} \quad (7)$$

积分号外的一项为零, 至于最后一个积分, 则用通常对斯蒂尔切斯积分所应用的方法 [582, 2°] 来估值, 我们得到

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x) \right| \leq \max |\sin nx| \cdot V_{-\pi}^{\pi} f(x).$$

这样, 如果用  $V$  表示函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的总变差, 最后得

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} V \cdot \frac{1}{n}.$$

系数  $b_n$  的估值也是这样.



如果与同一变量有关的两变量  $\alpha$  及  $\beta$  具有下述性质, 即它们的比值保持有界:

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq M \quad (M = \text{常数}),$$

则用下列方式写出这个事实:

$$\beta = O(\alpha).^{①}$$

应用这符号, 我们能表示出有界变差函数的傅里叶系数  $a_n, b_n$  的已证明的性质如下:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

现在对于以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$ , 设其  $k$  阶 ( $k \geq 1$ ) 导数  $f^{(k)}(x)$  存在并在区间  $[-\pi, \pi]$  上有有界变差; 则对于函数  $f(x)$  的傅里叶系数, 估值

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{V_k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{k+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

为真, 其中  $V_k$  是函数  $f^{(k)}(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的总变差.

比较刚才所证明的结果与第 704 目中的公式 (1a) 及 (1b) 立即得到上述命题.

因此, 这一次,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \quad (8)$$

知道了傅里叶系数的阶次, 现在就不难估值傅里叶级数的余项: 在同样的假定下, 对于函数  $f(x)$  的傅里叶级数的余项  $R_n(x)$ , 我们有不等式

$$|R_n(x)| < \frac{V_k}{n^k}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \\ &\leq \frac{2V_k}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{2V_k}{k\pi} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{V_k}{n^k}. \end{aligned}$$

这样, 对于函数的第  $k$  阶导数加上某些较严格的条件 (与上目中的条件比较), 则可引导出余项  $R_n(x)$  的较好的估值: 在估值的分子中,  $\ln n$  不再出现.

**附注** 我们再次强调在本目与前目的推理中, 函数  $f(x)$  及其导数的周期性起着主要的作用. 如果函数预先只是在区间  $[-\pi, \pi]$  上被给出, 则必须有下列条件成立:

$$f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi), \dots, f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi).$$

在这里各导数理解为单侧导数. 只有这时才能保证周期地延拓出的函数有连续的逐级导数, 而且上面所作出的估值也才能成立.

<sup>①</sup>比较这个符号与我们在第 60 目中所引用的符号  $o(\alpha)$ .



**708. 函数及其导数的不连续性对于傅里叶系数的无穷小阶的影响** 我们已看到如函数有一系列连续导数, 则能保证其傅里叶系数迅速减小, 并且因而能保证傅里叶级数迅速收敛.

然而在数学的应用上, 时常要遇到这种情况: 在从  $-\pi$  到  $\pi$  的范围中, 由若干个在各自的区间有一定个数导数的函数“接连”而得一函数, 要把这函数展开为傅里叶级数. 这样, 在“接连”点处, 这函数本身以及它的各级导数都有跳跃. 这种不连续性降低了傅里叶系数的无穷小阶, 并且不难了解, 同时也降低了傅里叶级数的余项的无穷小阶. 我们来详细研究这个问题.

1° 设除去“接连点”

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \quad (9)$$

外, 函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi)$  上连续, 而它在各“接连点”处有第一种不连续, 即具有跳跃

$$\delta_\mu^{(0)} = f(\xi_\mu + 0) - f(\xi_\mu - 0) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

如果差数

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi + 0) - f(\pi - 0)$$

不等于零, 在不连续点中, 还必须加入点  $\xi_0 = -\pi$ , 因为周期地延拓函数时, 在这点出现了不连续性.

又假定只除去在所指出的各点外, 有限的导数  $f'(x)$  处处存在, 并假定它在区间  $[-\pi, \pi]$  上绝对可积. 对于函数  $f(x)$  的系数  $a_n$  的表示式, 我们重新应用斯蒂尔切斯积分与分部积分法 [参考等式 (7)]. 如果在最后一积分中分出与函数  $f(x)$  的跳跃相对应的项 [579, (15)], 则得

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(0)} \sin n\xi_\mu - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

或较简单地

$$\alpha_n = \frac{A_n}{n} - \frac{b'_n}{n}, \quad (10)$$

其中已令

$$A_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(0)} \sin n\xi_\mu, \quad (11)$$

并与以前相同, 用  $b'_n$  表示函数  $f'(x)$  的傅里叶系数. 同样能断定,

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{a'_n}{n}, \quad (12)$$



其中

$$B_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_{\mu}^{(0)} \cos n\xi_{\mu}, \quad (13)$$

而  $a'_n$  同样也表示  $f'(x)$  的傅里叶系数.

现在我们假定导数  $f'(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上有有界变差. 因为在这个假定下, 它的傅里叶系数有阶  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  [707], 所以也能将公式 (10) 与 (12) 写成这样:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (14)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (15)$$

这些公式明白指出: 如果函数有不连续点, 则虽然在其余一切点导数存在, 傅里叶系数的无穷小的阶仍是怎样立即降低.

反之, 现在设已知某一函数  $f(x)$  的傅里叶系数有 (14) 与 (15) 的形式, 而且  $A_n, B_n$  的大小由公式 (11) 与 (13) 所确定, 其中  $\{\delta_{\mu}^{(0)}\}$  是已给的一组  $m+1$  个数. 则函数  $f(x)$  就在点 (9) 处一定有第一种不连续, 并且有跳跃, 且其跳跃分别等于  $\delta_{\mu}^{(0)}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ); 此外, 对于这函数, 极限  $f(-\pi+0), f(\pi-0)$  存在,<sup>①</sup> 并且它们的差是  $\delta_0^{(0)}$ . 在其余各点处, 函数连续.

为了要证实此点, 例如用  $(\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1})$  内的线性函数作出辅助函数  $\bar{f}(x)$ , 使得它在所指定的点恰好有所指定的跳跃. 与 (14) 及 (15) 类似, 对于它的傅里叶系数我们有:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中  $A_n$  与  $B_n$  有前述的值. 这时差数  $f(x) - \bar{f}(x)$  有如下列形式的展开式

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

其中

$$\alpha_n, \beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

即

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \frac{K}{n^2} \quad (K = \text{常数}).$$

<sup>①</sup>在这里以及在后面, 我们总是认为

$$f(\xi_{\mu}) = \frac{1}{2}[f(\xi_{\mu}+0) + f(\xi_{\mu}-0)],$$

同时

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)];$$

从而一切不连续点都是正则的[参考 684].



这个级数以收敛级数  $2K \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$  为强函数, 它处处一致收敛. 由此已可见, 差数  $f(x) - \bar{f}(x)$  表示以  $2\pi$  为周期的连续函数, 从而  $f(x)$  也与  $\bar{f}(x)$  在相同的点处有相同的跳跃.

2° 除去已述过的假定以外, 现在还假定一阶导数  $f'(x)$  有极限值

$$f'(-\pi+0), \quad f'(\xi_\mu \pm 0), \quad f'(\pi-0)$$

而且二阶导数  $f''(x)$  处处 (“接连点” 除外) 存在, 并在区间  $[-\pi, \pi]$  上有有界变差.

利用已经证明的结果, 则可断言这时

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{A'_n}{n} - \frac{b''_n}{n} = \frac{A'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ b'_n &= \frac{B'_n}{n} + \frac{a''_n}{n} = \frac{B'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

此处用  $A'_n, B'_n$  表示类似于 (11) 及 (13) 的量

$$A'_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(1)} \sin n\xi_\mu, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$B'_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_\mu^{(1)} \cos n\xi_\mu \quad (17)$$

而且

$$\begin{aligned} \delta_\mu^{(1)} &= f'(\xi_\mu + 0) - f'(\xi_\mu - 0) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \\ \delta_0^{(1)} &= f'(-\pi + 0) - f'(\pi - 0). \end{aligned}$$

将这些  $a'_n$  与  $b'_n$  的表示式代入公式 (10) 及 (12), 则对于所考虑的情形, 最后得到:

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (18)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (19)$$

在这里同样可证明在某种意义下的逆断语. 设函数  $f(x)$  的傅里叶系数有如 (18) 及 (19) 的形式, 其中  $A_n, B_n, A'_n, B'_n$  的大小由公式 (11), (13), (16), (17) 所确定, 而  $\{\delta_\mu^{(0)}\}, \{\delta_\mu^{(1)}\}$  则为先给出的一组数. 可以断言函数  $f(x)$  在区间  $(-\pi, \pi)$  内除去点  $\xi_\mu$  外处处连续并且有连续导数  $f'(x)$ , 而在点  $\xi_\mu$  处, 函数及它的导数有跳跃, 且其跳跃分别等于  $\delta_\mu^{(0)}$  及  $\delta_\mu^{(1)}$ ; 此外

$$f(-\pi+0) - f(\pi-0) = \delta_0^{(0)}$$

并且

$$f'(-\pi+0) - f'(\pi-0) = \delta_0^{(1)}.$$



与上面相仿,也要作出辅助函数  $\bar{f}(x)$  来证明这断语. 在这次能用二次函数作辅助函数,使得它与它的导数就在所指定的点有所指定的跳跃. 容易看出差数  $f(x) - \bar{f}(x)$  将展开成为有  $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$  阶系数的傅里叶级数. 这时不仅这个级数,而且由它逐项微分所得的有  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  阶系数的级数,均一致收敛,从而差数  $f(x) - \bar{f}(x)$  与它的导数同是周期的 (以  $2\pi$  为周期) 及连续的. 由此推得所需要的断语.

3° 在一般情形下, 设  $f, f', \dots, f^{(k-1)}$  在  $[-\pi, \pi)$  上除去点  $\xi_\mu (\mu = 0, 1, \dots, m)$  外连续, 而在点  $\xi_\mu$  处, 这些函数有跳跃, 且其跳跃分别等于

$$\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \dots, \delta_\mu^{(k-1)} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m).$$

此外, 假定导数  $f^{(k)}$  处处 (“接连点” 除外) 存在, 并且在区间  $[-\pi, \pi]$  上有有界变差. 引用符号:

$$\begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu, \\ B_n^{(i)} &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu. \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1; n = 1, 2, \dots)$$

则当  $k$  为奇数及偶数时, 下列公式分别成立:

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} - \frac{A''_n}{n^3} + \frac{B'''_n}{n^4} + \dots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right); \end{cases} \quad (20)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} - \frac{B''_n}{n^3} - \frac{A'''_n}{n^4} + \dots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}+1} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \end{cases} \quad (21)$$

如果已知类似的公式成立, 则反之, 关于函数本身及其  $k-1$  个导数的不连续点与跳跃量可以 (如上所述) 作出结论.

**709. 在区间  $[0, \pi]$  上给出函数时的情形** 如我们所知, 如果函数  $f(x)$  只从 0 到  $\pi$  给定, 则当适当的条件成立时, 可将它在这区间上展开成余弦级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (22)$$

也可展开成正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi) \quad (23)$$



[689]. 在实用上最常遇到这种展开式. 上目的结果也能应用到所考虑的情形, 如果设想将函数  $f(x)$  用下列方式延拓到区间  $[-\pi, 0)$  上的话: (a) 用偶的方式 —— 为的是得到余弦级数; 或者 (b) 用奇的方式 —— 为的是得到正弦级数.

设

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < \pi$$

是在区间  $(0, \pi)$  内的点, 函数与它的一直到  $(k-1)$  级导数在这些点处都有跳跃, 并且与在前面一样, 用

$$\delta_{\mu}^{(0)}, \delta_{\mu}^{(1)}, \dots, \delta_{\mu}^{(k-1)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

表示跳跃量.

在用偶的方式延拓函数的情形下, 在点  $-\xi_{\mu}$  处也重新产生点  $\xi_{\mu}$  处的跳跃, 但其符号相反; 当用奇的方式延拓这个函数时, 在点  $-\xi_{\mu}$  处产生跳跃, 而其符号不变. 又对于偶函数,

$$f(+0) - f(-0) = 0, \quad f(-\pi + 0) - f(\pi - 0) = 0,$$

对于奇函数, 跳跃

$$\begin{aligned} f(+0) - f(-0) &= 2f(+0), \\ f(-\pi + 0) - f(\pi - 0) &= -2f(\pi - 0) \end{aligned}$$

一般地可能异于零. 最后, 我们还注意当微分时, 偶函数变为奇函数, 而奇函数变为偶函数. 如果考虑到所有这些说明, 则关于我们的函数的余弦或正弦展开式的系数  $a_n$  与  $b_n$ , 分别得到形如 (20) 及 (21) 的公式, 但  $A_n^{(i)}$  与  $B_n^{(i)}$  则有这样的数值:

$$\left. \begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(i)} \sin n\xi_{\mu}, \\ B_n^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(i)} \cos n\xi_{\mu} + f^{(i)}(+0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi - 0) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

与这些公式相关, 我们作出下一重要的说明. 设在整个区间  $[0, \pi]$  上, 函数  $f(x)$  与它的直到  $(k-1)$  阶导数连续; 此外, 设  $k$  阶导数也存在. 并且在这区间上有有界变差. 然而一般说来, 对于展开式 (22) 与 (23) 的系数  $a_n$  与  $b_n$ , 不可能断定它们的阶是  $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$  [再参考 707 公式 (8)!]. 实际上, 虽然在这种情形下一切和数  $A_n^{(i)}$  是零, 但是不可能说和数

$$B_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \{f^{(i)}(0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi)\}$$

也是这样. 用奇的方式扩充函数, 在  $x = 0$  处人为地造成了不连续性, 或破坏了函数与它的偶数级导数的周期性; 而用偶的方式扩充函数, 则使得奇数级导数也是这样!



因此, 如果需要完全利用函数的可微分性, 将所述函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上展开成迅速收敛的级数, 则为了这个目的, 用下列条件所确定的  $(2k-1)$  次多项式  $r(x)$  将函数延续到区间  $[-\pi, 0)$  上:

$$\begin{aligned} r(0) &= f(0), r'(0) = f'(0), \dots, r^{(k-1)}(0) = f^{(k-1)}(0), \\ r(-\pi) &= f(\pi), r'(-\pi) = f'(\pi), \dots, r^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi). \end{aligned}$$

[例如可用在第 257 目中所指出的方法作出这种多项式.] 用这种方法, 我们使函数在整个的区间  $[-\pi, \pi]$  保持可微分性.

设对于  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ . 为了作出这个函数的有  $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$  阶系数的展开式, 我们用多项式

$$r(x) = x - \frac{\pi}{2} + x^3 \left[ -\frac{12}{\pi^4}x^2 - \frac{30}{\pi^3}x - \frac{20}{\pi^2} \right] = -\frac{12}{\pi^4}x^5 - \frac{30}{\pi^3}x^4 - \frac{20}{\pi^2}x^3 + x - \frac{\pi}{2}$$

扩充它. 如果对这样扩充出的函数作出通常的傅里叶级数, 则对在区间  $[0, \pi]$  上的函数  $f(x)$ , 就能得到所求的迅速收敛的展开式:

$$\frac{240}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2\nu-1)^4} - \frac{12}{\pi^2(2\nu-1)^6} \right] \cos(2\nu-1)x + \frac{1440}{\pi^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^5} \sin 2\nu x.$$

这里叙述的是马立叶夫所指出的方法.

**710. 分离奇异性质法** 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上是由  $x$  的倍角的余弦级数 (22) 或正弦级数 (23) 所给出, <sup>①</sup> 而且这些展开式的系数有如 (20) 或 (21) 的形式, 其中  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$  是由公式 (24) 所确定. 这些级数收敛得较慢, 并且我们知道函数与它的导数的不连续性是造成这种现象的原因. 对于这种情况, 克雷洛夫院士提出了首创的分离奇异性质法, 应用这种方法可以改善级数的收敛性.

实在说来, 这种方法的本质已经包含在前面的叙述中. 它在于用熟知的三角展开式作出 (逐段为多项式的) 辅助函数  $\bar{f}(x)$ , 使其好似吸收了已给函数  $f(x)$  的展开式中所明白表出的奇异性质. 从函数  $f(x)$  中减去这个辅助函数, 并且相应地从已给函数的展开式中减去辅助函数的展开式, 这样我们就分离了已给展开式的收敛得较慢的一部分, 从而余下的级数已经迅速收敛.

然而, 如果利用已知的展开式, 知道能直接求收敛得较慢的部分的和, 则可最简捷地获得上述结果.

1° 设已给余弦级数 (22), 并且

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \sin n\xi_{\mu}. \quad (25)$$

<sup>①</sup>实用上时常遇到的情况是: 展开式是在区间  $[0, l]$  上用  $\frac{\pi x}{l}$  的倍角的余弦或正弦作出的, 这种情况可由课文所考虑的情况中简单地将  $x$  换成  $\frac{\pi x}{l}$  而得.



给出点

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < \pi$$

并且给出一组数  $\{c_\mu\}$ . 直接确定级数的和

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx.$$

用简单的变换可引导出下面的结果:

$$g(x) = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - \xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \xi_\mu)}{n} \right] = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} \varphi_\mu(x).$$

其中和式

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - \xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \xi_\mu)}{n}$$

是容易算出的, 如果我们回忆到熟知的 [690, 2)] 展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$$

的话, 这展开式的和当  $0 < z < 2\pi$  时是  $\frac{\pi - z}{2}$ , 而且当  $-2\pi < z < 0$  时显然是  $-\frac{\pi + z}{2}$ . 这样,

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -\frac{\pi + x - \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = -\pi + \xi_\mu, & \text{对于 } x < \xi_\mu, \\ \frac{\pi - x + \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = \xi_\mu, & \text{对于 } x > \xi_\mu. \end{cases}$$

于是在每一区间  $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1}) (\mu = 0, 1, \cdots, m)$  的内部,<sup>①</sup>  $g(x) = \text{常数} = \gamma_\mu$ ; 而在点  $\xi_\mu (\mu = 1, 2, \cdots, m)$  处, 它有恰等于  $c_\mu$  的跳跃. 因此我们有  $\gamma_\mu - \gamma_{\mu-1} = c_\mu$ , 从而

$$\gamma_\mu = \gamma_0 + \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_\lambda; \quad (26)$$

又因为  $\varphi_\mu(0) = -\pi + \xi_\mu$  所以

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} (-\pi + \xi_\mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m c_\mu \xi_\mu - \sum_{\mu=1}^m c_\mu. \quad (27)$$

这样, 函数  $g(x)$  便完全确定了.

例如, 设我们有展开式

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} \cos nx.$$

在这里

$$A_n = -\frac{2}{\pi} c_1 \sin n \frac{\pi}{2},$$

<sup>①</sup>为方便计, 我们令  $\xi_0 = 0, \xi_{m+1} = \pi$ .



而且  $c_1 = -\frac{\pi}{2}, \xi_1 = \frac{\pi}{2}$ . 这时

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

或者直接有

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1} = \frac{\pi}{4};$$

然后

$$\gamma_1 = \gamma_0 + c_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

因此, 最后求得函数  $g(x)$  当  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  时等于  $\frac{\pi}{4}$ , 当  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  时等于  $-\frac{\pi}{4}$ .

2° 现在考虑余弦级数 (23), 而且

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \cos n\xi_{\mu} + c_0 - c_{m+1} \cos n\pi \right\}. \quad (28)$$

但在这次我们的目的是直接求级数

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \sin nx$$

的和. 我们有

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{\mu=1}^m \frac{c_{\mu}}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \xi_{\mu})}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - \xi_{\mu})}{n} \right] \\ &\quad + \frac{2c_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{c_{m+1}}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \pi)}{n} + \frac{\sin n(x - \pi)}{n} \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^m \frac{c_{\mu}}{\pi} \varphi_{\mu}(x) + \frac{c_0}{\pi} (\pi - x) - \frac{c_{m+1}}{\pi} \varphi(x), \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\pi - (x + \pi)}{2} - \frac{\pi + (x - \pi)}{2} = -x, \quad \text{关于一切 } x;^{116)} \\ \varphi_{\mu}(x) &= \begin{cases} \frac{\pi - (x + \xi_{\mu})}{2} - \frac{\pi + (x - \xi_{\mu})}{2} = -x, & \text{关于 } x < \xi_{\mu}, \\ \frac{\pi - (x + \xi_{\mu})}{2} + \frac{\pi - (x - \xi_{\mu})}{2} = \pi - x, & \text{关于 } x > \xi_{\mu}. \end{cases} \end{aligned}$$

显然

$$h(+0) = c_0, \quad h(\pi - 0) = c_{m+1};$$

$$h(\xi_{\mu} + 0) - h(\xi_{\mu} - 0) = c_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

<sup>116)</sup>所指的是  $x \in (-\pi, \pi)$ .



同时导数  $h'(x) = \text{常数} = \gamma$  处处 (除去不连续点外) 存在, 其中

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \left( c_{m+1} - c_0 - \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \right). \quad (29)$$

函数  $h(x)$  在每一区间  $(\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1})$  内都是  $x$  的线性函数, 其中  $x$  的系数是  $\gamma$ :

$$\text{当 } x_{\mu} < x < x_{\mu+1} \text{ 时, } h(x) = \gamma x + \delta_{\mu} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m),$$

而且

$$\delta_0 = c_0, \quad \delta_1 = c_0 + c_1, \dots, \quad \delta_m = c_0 + c_1 + \dots + c_m. \quad (30)$$

容易作出函数  $h(x)$  的图解 (图 136). 连接点

$$(0, c_0) \text{ 及 } \left( \pi, c_{m+1} - \sum_1^m c_{\mu} \right)$$

的直线显然有角系数  $\gamma$ . 余下的作法可以从图上看出.

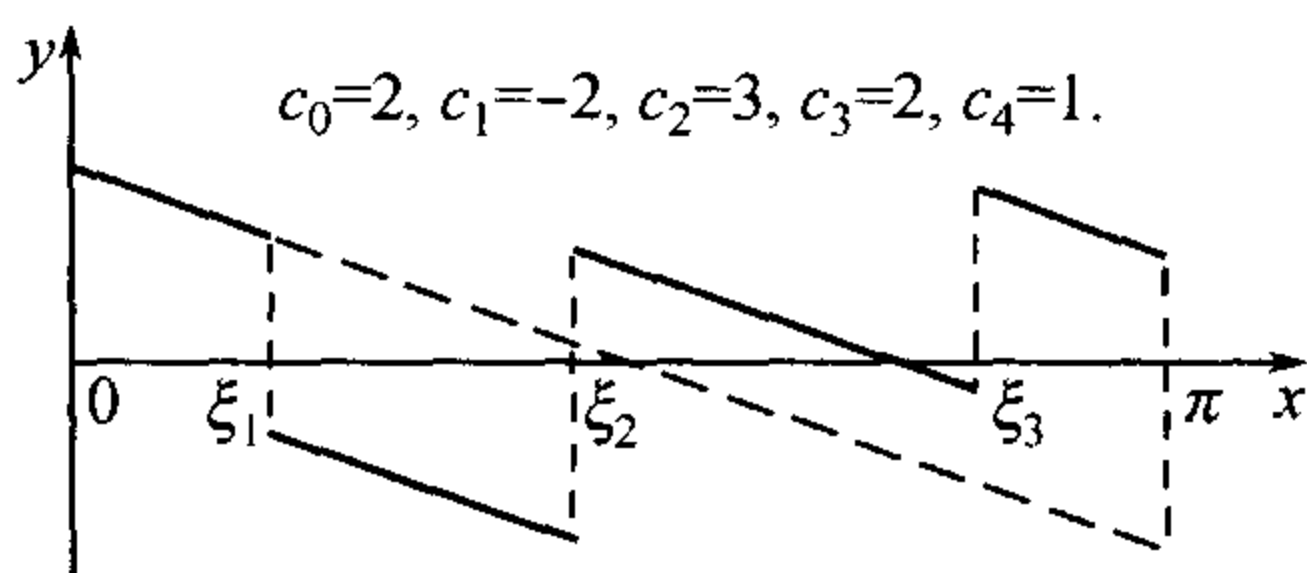


图 136

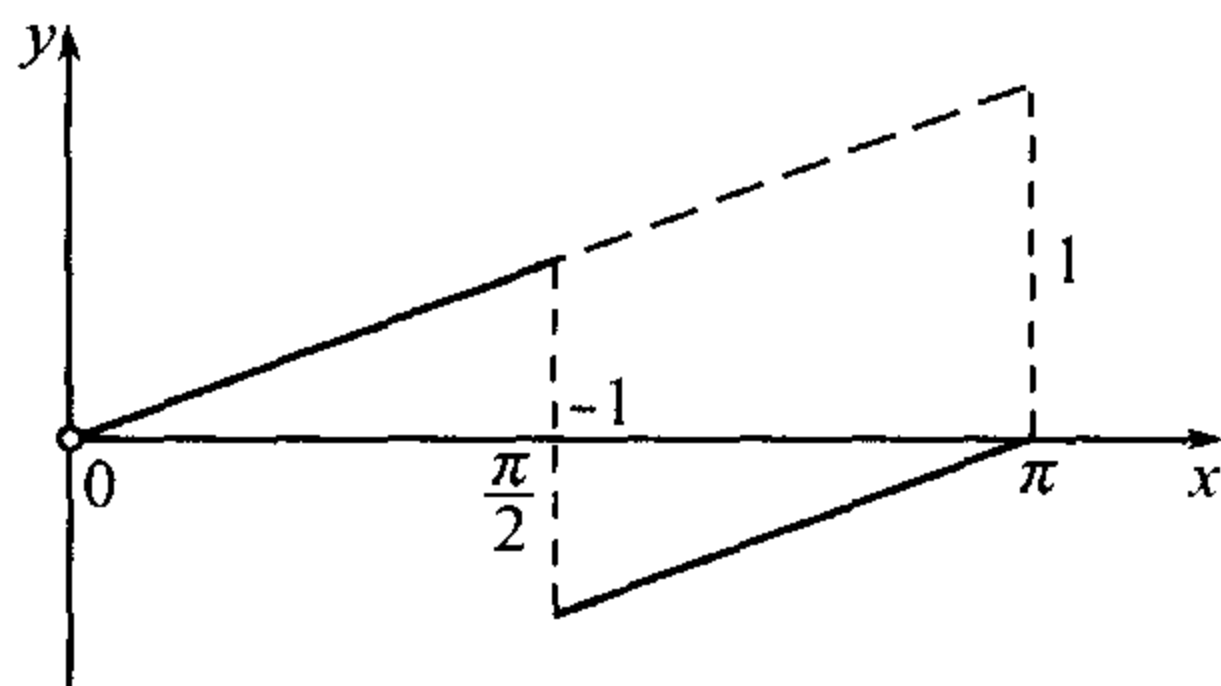


图 137

例如, 设

$$h(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \sin nx,$$

因此

$$B_n = -\frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2}, \quad c_0 = c_2 = 0, \quad c_1 = -1, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

因此, 在这里 (图 137)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} x, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \\ \frac{1}{\pi} x - 1 = \frac{1}{\pi} (x - \pi), & \text{当 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

为了改善级数

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \cos n \frac{\pi}{2} \sin nx \quad (31)$$

的收敛性, 我们要应用这一结果. 因为

$$\frac{n}{n^2 - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n^2 - 1)},$$



所以在所给的情形下,

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)}$$

如果从函数  $f(x)$  中减去刚才求得的函数  $h(x)$ , 则得差数  $f(x) - h(x)$  的展开式

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)} \sin nx,$$

它的系数已经是  $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$  阶!

3° 回到余弦级数(22), 我们现在假定

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

其中  $A_n$  是由公式 (25) 表出, 而  $B'_n$  则由 (28) 中将常数  $c_0, c_1, \dots, c_{m+1}$  换成其他常数  $c'_0, c'_1, \dots, c'_{m+1}$  而得. 因为我们会 [参考 1°] 分离三角级数中与系数展开式的第一阶诸项相关的部分, 所以我们转到第二阶诸项.

设 (为了简化符号, 用  $B_n$  代替  $B'_n$ )

$$g_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2} \cos nx.$$

显然,  $g_1(x)$  是  $x$  的连续函数. 逐项微分这级数, 得到新级数

$$g'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \sin nx.$$

我们已经会求这级数的和 [2°]. 因为在区间  $[0, \pi]$  的任一个不含区间端点及不连续点的闭合部分上, 新级数一致收敛,<sup>①</sup> 所以 (除去这些点外) 实际上它的和表示函数  $g_1(x)$  的导数. 因此, 由 2°,

$$g'_1(x) = \gamma x + \delta_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1}, \quad (\mu = 0, 1, \dots, m)$$

其中  $\gamma$  及  $\delta_\mu$  是由公式(29) 及 (30) 确定的. 积分后, 求得 (考虑到连续性!):

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta_\mu x + \varepsilon_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu \leq x \leq \xi_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m).$$

函数  $g_1(x)$  在分点  $\xi_{\mu+1}$  处的值可同时由两个公式求得, 所以

$$\frac{1}{2}\gamma \xi_{\mu+1}^2 + \delta_\mu \xi_{\mu+1} + \varepsilon_\mu = \frac{1}{2}\gamma \xi_{\mu+1}^2 + \delta_{\mu+1} \xi_{\mu+1} + \varepsilon_{\mu+1}.$$

由此 (如果回忆到  $\delta_{\mu+1} = \delta_\mu + c_{\mu+1}$ ):

$$\varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_\mu - c_{\mu+1} \xi_{\mu+1}.$$

如果已知  $\varepsilon_0$ , 则由这公式可逐步得到  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ . 至于  $\varepsilon_0$ , 则由等式

$$\varepsilon_0 = g_1(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2}$$

<sup>①</sup>这是由级数  $\sum_1^\infty \frac{\sin nz}{n}$  的熟知的性质推出的.



确定. 这级数的和也能求出为有限的形状, 只要回忆到  $B_n$  的表示式, 并且利用已知的 [690,9] 展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

例如, 如果已给

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\frac{\pi}{3}}{n^2} \cos nx,$$

则在这里

$$B_n = -1 + \cos n\frac{\pi}{3}, \quad c_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = 0, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\gamma = 0, \quad \delta_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \delta_1 = 0.$$

为了确定

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{3}}{n^2},$$

我们在上述展开式中先令  $x = 0$ , 然后令  $x = \frac{\pi}{3}$ ; 结果求得  $\varepsilon_0 = \frac{5\pi^2}{36}$ . 这时  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - c_1\xi_1 = -\frac{\pi^2}{36}$ . 最后得

$$g_1(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi^2}{36}, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{\pi^2}{36}, & \text{如果 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

4° 现在在正弦级数 (23) 中, 令

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

其中  $B_n$  与前面一样, 是由公式 (28) 所表出, 而  $A'_n$  则按照 (25) 的形式作出 —— 但将  $c$  换成  $c'$ . 在这里, 只讨论第二阶的项就够了.

考虑级数 (又用  $A_n$  代替  $A'_n$ )

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} \sin nx,$$

它显然表示连续函数. 微分:

$$h'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx = g(x)$$

[参考 1°]. 与以上同样, 不难证实 (除在区间的端点及点  $\xi_\mu$  外)  $g(x)$  实际上是  $h_1(x)$  的导数. 由 1°,

$$h'_1(x) = \gamma_\mu \quad \text{关于 } \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m),$$

其中  $\gamma_\mu$  是由公式 (26) 及 (27) 所确定. 因此

$$h_1(x) = \gamma_\mu x + \delta_\mu \quad \text{关于 } \xi_\mu \leq x \leq \xi_{\mu+1}.$$



而且  $\delta_0 = 0$  [因为  $h_1(0) = 0$ ], 其余的  $\delta_\mu$  则由函数  $h_1(x)$  在点  $\xi_{\mu+1}$  处的连续性的条件所逐步确定:

$$\gamma_\mu \xi_{\mu+1} + \delta_\mu = \gamma_{\mu+1} \xi_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

由此得

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu - c_{\mu+1} \xi_{\mu+1}.$$

例如, 设已给级数

$$h_1(x) = \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots,$$

它可表成下列形式:

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} \sin nx.$$

在这里

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

[参考 1° 中的例], 因此

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}(\pi - x), & \text{如果 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5° 用适当的方式, 对于三角级数, 也能求出与其系数展开式中较高阶项相关的部分的和. 现不建立一般的方法, 而在所给的每个具体情形下, 进行在上面考虑一般形式的级数时所做过的手续, 更为实际.

为了举例, 我们重新回到级数 (31); 在这次令

$$\frac{n}{n^2 - 1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2 - 1)},$$

将  $b_n$  表成下列形式:

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3(n^2 - 1)},$$

与此相应, 将函数  $f(x)$  分成三部分. 其中第一部分是在 2° 中已经计算过的函数. 考虑第二部分

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^3} \sin nx.$$

微分两次, 我们得到

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^2} \cos nx,$$

$$g''(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \sin nx.$$



最后的函数只与  $h(x)$  相差一符号:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\pi}(x - \pi), & \text{如果 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

由此积分, 得

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2 + \gamma_0, & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2\pi}(x - \pi)^2 + \gamma_1, & \text{关于 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

令此处所得的  $g'(\frac{\pi}{2})$  的两个值相等, 得  $\gamma_1 = \gamma_0$ . 在  $g'(x)$  的展开式中直接令  $x = 0$ , 容易确定  $\gamma_0$  的值:  $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$ . 再积分一次, 并且注意  $g(0) = g(2\pi) = 0$ , 我们得到

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6\pi}x^3 + \gamma_0x, & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6\pi}(x - \pi)^3 + \gamma_0(x - \pi), & \text{关于 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases} \textcircled{1}$$

这样, 函数  $g(x)$  就完全确定了, 并且我们最后有

$$f(x) = h(x) + g(x) + \varphi(x),$$

其中函数  $\varphi(x)$ , 虽然其有限形式我们不知道, 但是能由展开式

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2 - 1)} \sin nx$$

给出, 其中系数已是  $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$  阶, 并且显然迅速减小.

## §6. 傅里叶积分

**711. 傅里叶积分作为傅里叶级数的极限情形** 在这里我们要在实质上作出傅里叶对于他的积分公式所作的讨论, 这种讨论虽然不严格, 可是因其简洁所以值得加以注意.<sup>②</sup>

如果在有限区间  $[-l, l]$  上给出函数  $f(x)$ , 则在确定的条件下 (我们在这里不研究这些条件), 可在这区间上将它用三角级数表示出来:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

<sup>①</sup>取此处所得  $g(\frac{\pi}{2})$  的两值相等, 又得到  $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$ .

<sup>②</sup>柯西也曾经不依赖傅里叶而独立推出过这公式.



其中

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{m\pi u}{l} du \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{m\pi u}{l} du \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

[参考 688]. 将  $a_m$  与  $b_m$  用它们的表示式来代替, 则级数可改写成下列形式:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{m\pi}{l}(u-x) du. \quad (1)$$

现设函数  $f(x)$  被定义在整个无穷区间  $(-\infty, +\infty)$  上. 在这种情形下, 不论  $x$  是怎样, 对于任意的  $l > |x|$ , 相应的值  $f(x)$  由展开式 (1) 表出. 在这里取  $l \rightarrow +\infty$  时的极限, 我们设法求出这展开式的“极限形式”.

关于等式右端的第一项, 自然可设它趋近于零.<sup>①</sup> 回到无穷级数, 我们可将余弦符号后的因子  $\frac{m\pi}{l}$  看作某一 (从 0 连续变到  $+\infty$  的) 参数  $z$  所取的间断的数值

$$z_1 = \frac{\pi}{l}, \quad z_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, z_m = \frac{m\pi}{l}, \dots;$$

并且当  $l \rightarrow +\infty$  时, 增量

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$$

显然趋近于零. 用这这符号, 级数可改写成:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l}^l f(u) \cos z_m(u-x) du.$$

它好像是区间  $[0, +\infty]$  上的  $z$  的函数

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

的积分和. 取  $l \rightarrow +\infty$  时的极限, 我们得到的是积分而不是级数; 用这种方法就得到傅里叶积分公式:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

展开差角余弦的表示式, 可表这公式成下列形式:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx] dz,$$

<sup>①</sup> 例如如果假定积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$  收敛, 则这结果就成为明显的了.



其中

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu du, \quad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu du.$$

在这里显然发现与三角展开式相似之点: 只要将取自然数值的参数  $m$  换成连续变化的参数  $z$ , 而将无穷级数换成积分. 系数  $a(z)$  与  $b(z)$  的构成也与傅里叶系数相像.

当然, 所有这些讨论都只有导入法的性质; 还需说明傅里叶公式成立的实际条件. 但是当作出严格的推理时, 我们将要依照对傅里叶级数推理的基本步骤.

**712. 预先的说明** 现假定函数  $f(x)$  在无穷区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积. 在这个假定下, 考虑积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du,$$

其中  $A$  是任意的有限正数, 而  $x_0$  是  $x$  的任一固定的值. 这个积分与傅里叶级数的部分和相似: 对它取  $A \rightarrow +\infty$  时的极限, 则得到傅里叶积分:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du. \quad (2)$$

因为对于任一有限的  $B > 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[-B, B]$  上也绝对可积, 故由第 510 目的定理 4\*, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^A dz \int_{-B}^B f(u) \cos z(u - x_0) du &= \int_{-B}^B f(u) du \int_0^A \cos z(u - x_0) dz \\ &= \int_{-B}^B f(u) \frac{\sin A(u - x_0)}{u - x_0} du. \end{aligned} \quad (3)$$

但积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du \quad (4)$$

以根据假定为收敛的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du$$

为强函数, 所以积分 (4) 在它的值的任一区间上对于  $z$  (当  $u = +\infty$  及  $u = -\infty$  时) 一致收敛. 这样, 积分  $\int_{-B}^B f(u) \cos z(u - x_0) du$  当  $B \rightarrow +\infty$  时一致趋近于极限 (4). 因此, 在等式 (3) 中取  $B \rightarrow +\infty$  时的极限, 则在左端的积分中可在积分号下取极限 [第 506 目的定理 1].<sup>①</sup> 由此, 关于  $J(A)$  得到形如积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(u - x_0)}{u - x_0} du$$

<sup>①</sup> 参考第 508 目的定理 IV, 在那里我们假定被积分函数是连续的. 在这里我们不作这样的假定.



的表示式, 它与狄利克雷积分相像 [681], 而且实际上也正是起着同样的作用, 应用初等变换, 容易将它化成以下形式:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + t) \frac{\sin At}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

为了以后的叙述起见, 对于第 682 目的基本引理, 必须作显而易见的补充如下: 如果函数  $g(t)$  在无穷区间  $[a, +\infty]$  上绝对可积, 则

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \sin ptdt = 0$$

(同样

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \cos ptdt = 0).$$

证明可仿照第 682 目中的引理 (在函数  $f(x)$  有奇异点的情形下) 的证明.

**713. 充分判别法** 用常数  $S_0$  [积分 (2) 的假定值] 乘等式

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt \quad (A > 0)$$

的两端, 从等式 (5) 的两端减去这个结果. 如果也与第 683 目中一样, 为了简便起见, 令

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0,$$

我们便得到

$$J(A) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \frac{\sin At}{t} dt. \quad (6)$$

在这里, 我们也只限于两种情形: (a) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 或 (b) 在这点两侧只可能有第一种不连续. 而且我们假定

$$\text{在情形(a)} \quad S_0 = f(x_0),$$

$$\text{在情形(b)} \quad S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

在这种假定下, 我们现有

**迪尼判别法** 如果对于某一  $h > 0$ , 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

收敛, 则函数  $f(x)$  的傅里叶积分在点  $x_0$  处收敛, 并且有值  $S_0$ .



把积分 (6) 表成两积分的和:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^{\infty}.$$

由第 682 目中的基本引理, 两积分中的第一个当  $A \rightarrow +\infty$  时趋近于零. 至于第二个积分, 则将  $\varphi(t)$  的展开式代入, 我们又分解这积分为两项:

$$\frac{1}{\pi} \int_h^{\infty} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin At dt - \frac{2}{\pi} S_0 \int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt.$$

由于假定函数  $f$  绝对可积, 函数

$$\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t}$$

也绝对可积. 由上目末对于基本引理所作的补充说明, 前式第一项当  $A \rightarrow +\infty$  时趋近于零. 最后, 直接根据反常积分的定义, 积分

$$\int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \int_{Ah}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

显然趋近于零.

于是, 与第 684 目中一样, 可得一些较简单的特殊判别法. 作为一例, 我们提出: 函数在点  $x_0$  处有有限的导数或至少有两个有限的单侧导数, 就足够了.

对于傅里叶积分, 我们也可应用

**狄利克雷-若尔当判别法** 如果在以  $x_0$  为中点的某一区间  $[x_0-h, x_0+h]$  上, 函数  $f(x)$  有有界变差, 则函数  $f(x)$  的傅里叶积分在点  $x_0$  处收敛, 并且有值  $S_0$ .

如果把积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin At}{t} dt$$

表成两积分的和:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^{\infty},$$

则刚才已证实第二个积分当  $A \rightarrow \infty$  时趋近于零. 而第一个积分趋近于

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0+0) + f(x_0-0)] = S_0$$

——这次是根据第 685 目的基本引理. 实际上, 函数  $f(x_0+t) + f(x_0-t)$  在值  $t$  的区间  $[0, h]$  上有有界变差, 从而可表示为两个增函数之差的形式, 对于每个增函数可分别应用引理.



**714. 基本假设的变形** 直到现在为止, 我们的推理建立在第 712 目开始所作的假定上: 函数  $f(x)$  在从  $-\infty$  到  $+\infty$  的整个无穷区间上绝对可积. 然后在所讨论的点  $x_0$  的近邻, 对函数的性质加以各种补充的条件, 我们得到了函数在这点可用傅里叶积分表出的若干充分判别法.,

然而在实用上有时嫌上面所指出的基本假定过于狭隘, 而只假定:

1° 函数  $f(x)$  在每个有限区间上绝对可积, 至于无穷大的条件则换成下面的条件.

2° 对于  $|x| \geq H$ , 函数  $f(x)$  是单调的,<sup>①</sup> 而且

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0. \quad (7)$$

我们记得到第 712 目的推理中, 积分 (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du$$

当  $u = +\infty$  及  $u = -\infty$  时对于  $z$  的一致收敛性起着实质上的作用. 因为关于  $z \geq a > 0$

$$\left| \int_H^u \cos z(u - x_0) du \right| \leq \frac{2}{z} \leq \frac{2}{a},$$

所以由第 515 目 2° 的判别法, 我们现在就能断定这个积分对于  $z$  一致收敛, 但是如我们就要看到的, 在这次只有对于值  $z \geq a$  的一致收敛性, 其中  $a$  是任意的, 但是固定的正数. 这样使我们不得不考虑积分

$$J(A, a) = \frac{1}{\pi} \int_a^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du \quad (A > a > 0),$$

而不考虑积分  $J(A)$ , 取这积分当  $A \rightarrow +\infty$  及  $a \rightarrow 0$  时的二重极限, 即得傅里叶积分. 完全与在第 712 目中所做的一样, 已可得积分  $J(A, a)$  的表示式

$$\begin{aligned} J(A, a) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin At}{t} dt \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin at}{t} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

因此

$$J(A, a) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \frac{\sin At}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin at}{t} dt. \quad (9)$$

首先我们要证明

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin at}{t} dt = 0. \quad (10)$$

把我们的积分表成下列形式:

$$\int_0^\Delta + \int_\Delta^\infty,$$

其中  $\Delta$  在任一情形下都假定是充分大, 使得  $x_0 - \Delta' < -H, x_0 + \Delta > H$ . 现在立刻显而易见

$$\left| \int_0^\Delta \right| \leq a \int_0^\Delta [|f(x_0 + t)| + |f(x_0 - t)|] dt,$$

<sup>①</sup>正确地说来, 对于  $x \geq H$  与  $x \leq -H$  它分别是单调的.



因此不论  $\Delta$  是怎样, 积分  $\int_0^\Delta$  当  $a \rightarrow 0$  时趋近于零.

转到第二个积分, 根据第二中值定理 [487], 并考察到关系式 (7), 我们有

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x_0 \pm t) \frac{\sin at}{t} dt = f(x_0 \pm \Delta) \int_{\Delta}^{\Delta'} \frac{\sin at}{t} dt = f(x_0 \pm \Delta) \int_{a\Delta}^{a\Delta'} \frac{\sin z}{z} dz \quad (\Delta' > \Delta).$$

因为在这里第二个因子是有界量 (我们已经不止一次提到此点); 而由 (7), 增大  $\Delta$  时能使第一个因子任意小, 所以整个表示式也是如此, 这样证明了关系式 (10), 并且与从前一样, 表示式 (8) 或 (9) 的性质也只与含  $A$  的积分有关.

从前我们依靠函数  $f$  在无穷区间上的绝对可积性, 证明了极限等式

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_h^{\infty} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin At}{t} dt = 0$$

(其中  $h$  是某一固定的正数). 利用我们的新假定也能证明此点. 事实上, 取  $\Delta > h$ , 我们有

$$\int_h^{\infty} = \int_h^{\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty}.$$

我们能与处理含参变数  $a$  的类似的积分一样来处理右端第二个积分; 由第 682 目的基本引理, 第一个积分当  $A \rightarrow +\infty$  时趋近于 0.

现在已经显然, 在对于函数  $f(x)$  所作的新假定下, 迪尼及狄利克雷-若尔当判别法 [713] 还是成立.

由整个以上所述, 特别, 得到这样一个应用傅里叶公式的条件: 如果函数  $f(x)$  在整个无穷区间  $[-\infty, +\infty]$  上有有界变差, 而且极限等式 (7) 成立, 则在每点  $x_0$  处, 傅里叶积分收敛并且有值  $S_0$ .

实际上, 在所作假定下, 可表示函数  $f(x)$  成两个有界增函数之差的形式, 并且这两函数当  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时有相等的 [由 (7)] 极限:

$$f_1(+\infty) = f_2(+\infty) = c', \quad f_1(-\infty) = f_2(-\infty) = c''.$$

现引用函数

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_1(x) - c', & \text{关于 } x \geq 0, \\ f_1(x) - c'', & \text{关于 } x < 0, \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} f_2(x) - c', & \text{关于 } x \geq 0, \\ f_2(x) - c'', & \text{关于 } x < 0 \end{cases}$$

来代替  $f_1$  及  $f_2$ . 则与从前一样,

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

但是在这次

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_2(x) = 0,$$

因此对于函数  $\varphi_1, \varphi_2$  中每一个, 条件 1) 及 2) 成立; 此处显然在任一点对这两函数可应用狄利克雷-若尔当判别法.



**715. 傅里叶公式的各种形式** 假定可应用傅里叶公式的充分条件成立, 为了简单起见, 我们设函数  $f(x)$  在所考察的点  $x$  处连续, 如果不连续, 则设条件

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

成立, 即设所考虑的点  $x$  是正则的[684]. 在任一情形下, 得

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (11)$$

由于内层积分显然是  $z$  的偶函数, 所以也可将这公式换写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (12)$$

又容易证明在第 712 目 [或第 714 目] 对于函数  $f(x)$  所作的一般假定下, 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x) du$$

也存在. 而且, 这积分是  $z$  的连续函数,<sup>①</sup> 并且显然是奇函数. 虽然不可能保证这函数从  $-\infty$  到  $+\infty$  的反常积分存在, 但是它在主值的意义下 [484] 一定存在, 而且

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x) du = 0.$$

用  $\frac{i}{2\pi}$  乘这等式, 并且再与 (12) 相加, 便得关系式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz(u-x)} du, \quad (13)$$

其中外层积分是被了解为主值意义下的积分. 柯西首先将公式表示为这种形状.

回到公式 (11), 我们将它写作下列形式:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu du. \end{aligned}$$

如果  $f(u)$  是偶函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu du = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos zu du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu du = 0,$$

<sup>①</sup> 如果以第 714 目中的假定为基础, 则只有在  $z=0$  处可能有例外.



而我们得到只含余弦的简化了的公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xz dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu du. \quad (14)$$

同样, 在  $f(z)$  为奇函数的情形下, 我们得到只含正弦的公式:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xz dz \int_0^{\infty} f(u) \sin zu du. \quad (15)$$

现在设函数  $f(x)$  只是在区间  $[0, +\infty)$  上被给出, 并且在这区间上满足的条件与以前对于整个区间  $(-\infty, +\infty)$  所加的条件相类似, 利用等式 ( $x > 0$ ):

$$f(-x) = f(x) \quad \text{或} \quad f(-x) = -f(x)$$

延拓函数到区间  $(-\infty, 0)$ , 则在第一种情形下, 我们得到在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的偶函数, 在第二种情形下, 得到奇函数. 因此, 对于正值  $x$  (当相应的充分条件成立时), 我们既能应用公式 (14), 又能应用公式 (15).

如果假定函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  处连续, 则在这点也能应用公式 (14), 因为用偶的方式延拓出的函数在这点保持连续性. 一般地在点  $x = 0$  处不能应用公式 (15): 只有在  $f(0)$  是零的情形下, 它才能给出这个值.

这些讨论完全与第 689 目中对于傅里叶级数所述的相类似.

**716. 傅里叶变换** 我们假定傅里叶公式 (12) 可能除去在有限个点外, 关于  $x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的一切值成立. 可设想这公式是由下列两公式叠加而得:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz. \quad (16)$$

函数  $F(z)$  根据第一个公式与函数  $f(x)$  对照, 称为后者的傅里叶变换. 而根据第二个公式, 函数  $f(x)$  是函数  $F(z)$  的傅里叶 (逆) 变换 (区别在  $i$  的符号!). 我们注意, 一般说来, 即使当  $f$  取实数值时, 函数  $F$  取复数值, 然而在这里可假定原始函数  $f$  也取复数值.

当函数  $f(x)$  已给时, 等式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz$$

可当作对于 (在积分符号后的) 未知函数  $F(z)$  的积分方程. 方程的解由公式

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du$$

给出, 自然, 我们也可更换这两个等式的次序.

①如果只对函数  $f(x)$  作上面所说到的假定, 则最后的积分被了解为在主值意义下的积分.



现在回到公式 (14); 如果除去前述的例外值外, 它对于一切正值  $x$  成立, 则能表示它为下列两个 (在这次是实值的并且是完全对称的) 公式的叠加:

$$\left. \begin{aligned} F_c(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \cos zu du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(z) \cos xz dz. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

同样, 公式 (15) 也能分解为两个公式:

$$\left. \begin{aligned} F_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \sin zu du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(z) \sin xz dz. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

函数  $F_c(x)$  及  $F_s(z)$  分别称为函数  $f(x)$  的**傅里叶余弦变换**或**正弦变换**. 如我们所看到, 由  $F_c$ (或  $F_s$ ) 求得函数  $f$  与由  $f$  求得  $F_c(F_s)$  完全一样, 换句话说, 函数  $f$  与  $F_c(F_s)$  互为余弦 (正弦) 变换. 柯西将函数对  $f$  与  $F_c$  或  $f$  与  $F_s$  分别称为**第一种或第二种共轭函数**. 在这里, (17)[或 (18)] 中的每个等式又可当作为积分方程, 其中积分以外的函数是已给的, 而积分号后的函数是要求的; 方程的解由另一等式给出.

比较函数  $F, F_c$  及  $F_s$ , 可叙述如下. 在  $f(x)$  是偶函数的情形下, 我们有

$$F(z) = F_c(z)$$

(用偶的方式延拓函数  $F_c(z)$  到值  $z < 0$ ), 而在  $f(x)$  是奇函数的情形下:

$$F(z) = iF_s(z)$$

(用奇的方式延拓函数  $F_s(z)$  到值  $z < 0$ ). 在一般情形下, 将函数  $f(x)$  分解为偶函数与奇函数

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

的和. 因而

$$F(z) = G_c(z) + iH_s(z). \textcircled{1}$$

由于这种情况, 我们只举出余弦及正弦变换的例子就够了.

1) 设函数  $f(x) = e^{-ax}$  ( $a > 0, x \geq 0$ ); 则函数

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-az} \cos xz dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

是它的余弦变换, 而函数

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-az} \sin xz dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

$\textcircled{1} G_c(z)$  表示函数  $g(x)$  的余弦变换, 而  $H_s(z)$  表示函数  $h(x)$  的正弦变换.



是正弦变换.

因为  $e^{-ax}$  在区间  $[0, +\infty]$  上可积分, 所以下列相互的关系式一定成立:

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz = e^{-ax} \quad (x \geq 0)$$

与

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} dz = e^{-ax} \quad (x > 0),$$

或

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-ax}.$$

在这些积分中我们可看出已知的拉普拉斯积分 [522, 4°].

因此, 在下列函数对的形式下:

$$e^{-ax}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad \text{及} \quad e^{-ax}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

我们在这里有 (柯西的) 第一种与第二种共轭函数的例子. 如果不知道拉普拉斯积分, 则上述的理论指出了计算它的方法.

2) 现在考虑由下列等式所定义的函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{关于 } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{关于 } x = a, \\ 0, & \text{关于 } x > a \end{cases} \quad (a > 0).$$

在这种情形下,

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos zx dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}.$$

如果为了要在这个例子上证实傅里叶公式, 求出所得函数的余弦变换, 则得到狄利克雷的“不连续乘数”[497, 11)]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin az}{z} \cos zx dz,$$

实际上它的值与原始函数  $f(x)$  一致! 同样,

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin zx dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos ax}{x},$$

等等.

读者将在第 718 目中找到傅里叶变换的许多例子.

**717. 傅里叶变换的若干性质** 从对函数  $f(x)$  的种种假定出发, 研究它的傅里叶变换  $F(x)$  的性质.

首先, 如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积, 则函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{ixu} du \quad (19)$$



在整个区间上连续, 并且当  $x \rightarrow \pm\infty$  时趋近于零.

函数的连续性是由于所写出的积分以不含参数  $x$  的收敛积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du$$

为强函数, 从而当  $u = \pm\infty$  时, 它关于  $x$  一致收敛. 证明仿照第 518 目的定理 1 与第 520 目的定理 2, 并参照第 510 目的定理 1 (代替第 506 目的定理 1). 至于函数  $F$  在无穷大的性质, 则建立在第 712 目最后说明的基础上.

现在假定  $x^n f(x)$  也在区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积, 其中  $n$  是自然数. 则函数  $F(x)$  有  $n$  个逐阶导数

$$F'(x), \dots, F^{(n)}(x),$$

它们当  $x \rightarrow \pm\infty$  时都趋近于零.

在积分号下逐次对参数  $x$  求积分 (19) 的微分, 我们得到

$$F^{(k)}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) u^k e^{ixu} du \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

这个积分关于  $x$  一致收敛, 因为有强积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u) u^k| du$$

存在, 于是我们可应用莱布尼茨规则. 证明仿照第 520 目定理 3 的证明, 并参照第 510 目的定理 3\* (代替第 507 目的定理 3). 在这里, 导数在无穷大的性质是借第 712 目最后的说明来建立的.

因此, 函数  $F(x)$  的微分性质主要是由函数  $f(x)$  在无穷大的性质所确定, 反过来说, 由函数  $f(x)$  的微分性质能在某种程度上判断函数  $F(x)$  在无穷大的性质. 这就是说: 如果函数  $f(x)$  与它的前  $n-1$  个导数当  $x \rightarrow \pm\infty$  时趋近于零, 而  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x)$  在区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} x^n F(x) = 0.$$

这点可直接由  $F(x)$  的表示式

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{i}{x} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(u) e^{ixu} du$$

推出, 而这表示式是逐步用分部积分法求得的.

**718. 例题与补充** 1) 证明函数  $e^{-\frac{1}{2}x^2}$  的余弦变换与这函数本身相同. 实际上, 由第 519 目 6), (a) 的公式:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} \cos zx dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$



对于  $x$  微分这等式, 我们得到另一结论: 函数  $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$  的正弦变换与这函数本身恒等.

2) 证明公式

$$(a) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx dz = \begin{cases} 1-x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{如果 } x \geq 1. \end{cases}$$

$$(b) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cos xz dz = \frac{1-e^{-x}}{x} \quad (x \geq 0).$$

提示 计算右端所列出的  $x$  的函数的余弦变换, 并利用两函数的共轭性 (适用傅里叶公式的条件成立!).

3) 关于下列两种情形:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sin x, & \text{关于 } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{关于 } x \geq \pi; \end{cases}$$

或

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & \text{关于 } 0 \leq x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{关于 } x = \pi, \\ 0, & \text{关于 } x > \pi, \end{cases}$$

解积分方程

$$\int_0^{\infty} g(z) \sin xz dz = f(x).$$

提示 函数  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x)$  的正弦变换是它的解.<sup>117)</sup>

答 (a)  $\frac{\sin \pi x}{1-x^2}$ ; (b)  $\frac{x \sin \pi x}{1-x^2}$ .

4) 证明函数  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  同时是它本身的余弦变换及正弦变换.

例如, 我们有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} [522, 5^\circ].$$

5) 利用函数

$$\frac{1}{e^{2\pi x} + 1}$$

的正弦变换求新的积分.

根据第 519 目 8)(b) 的公式, 所述的变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right).$$

<sup>117)</sup> 因此这里可能会发生 3) 题中积分方程求解的唯一性问题. 如果从一开始我们即约定仅仅考虑使形如 (15) 的傅里叶公式成立的函数  $g(x)$ , 答案将是肯定的. 在一般情况下可以证明: 对 3) 题中积分方程右端的无论怎样的  $f(x)$ , 其两个解  $g_1(x)$  与  $g_2(x)$  (关于其中每一个仅假定 3) 题中积分方程左端的反常积分存在) 仅相差一个等价于零的函数 [参看 733]. 这一论断在完全一般的情况下, 由 A. 奥福特 (A. Offord) 在 1940 年证明了, 这已超出了本书的范围; 特别, 由此立即推出上述积分方程可能不多于一个的连续解.



因为原始函数满足于适用傅里叶公式的条件, 所以它是刚才所引的函数的正弦变换.

注意积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

的值, 由此容易得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} dz = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}},$$

或最后用另外的记号,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \quad (a > 0).$$

6) 证明函数

$$\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$$

的正弦变换恒等于这函数本身.

提示 利用第 519 目 8)(a) 的公式.

7) 关于函数  $\cos \frac{1}{2}x^2$  及  $\sin \frac{1}{2}x^2$ , 证实傅里叶公式 (14). (顺便指出, 这两函数不适合我们推演傅里叶公式时所假定的条件!)

我们有

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \frac{1}{2}z^2 \cos xz dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{1}{2}z^2 - xz \right) dz + \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{1}{2}z^2 + xz \right) dz \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left( \frac{1}{2}z^2 - xz \right) dz, \end{aligned}$$

或者令  $z = x + u$ , 并且考虑到已知的弗烈内尔积分的值 [522, 5°]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2}(u^2 - x^2) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos \frac{1}{2}x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2}u^2 du + \sin \frac{1}{2}x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{1}{2}u^2 du \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{1}{2}x^2 + \sin \frac{1}{2}x^2 \right). \end{aligned}$$

同样,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \frac{1}{2}z^2 \cos xz dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{1}{2}x^2 - \sin \frac{1}{2}x^2 \right).$$

现在已经显而易见所得函数的余弦变换就是原始函数, 而这点与傅里叶公式的正确性等价.

8) 证实 (a) 关于函数

$$f(x) = \operatorname{ci} x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

(积分余弦)的傅里叶公式 (14) 成立

(6) 关于函数

$$g(x) = \operatorname{si} x = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$



(积分正弦)的公式 (15) 成立.

对于这些公式是否适用, 我们所建立的条件没有讨论到.

(a) 解 根据第 497,23)(a) 公式:

$$F_c(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos x u du \int_0^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}, & \text{关于 } x > 1, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{关于 } x = 1, \\ 0, & \text{关于 } x < 1. \end{cases}$$

其次

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(z) \cos x z dz = - \int_1^\infty \frac{\cos x z}{z} dz = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \text{ci} x.$$

(6) 提示 利用 497,23)(6).

9) 关于函数  $\frac{1}{x^s}$ , 证实两个傅里叶公式 (14) 及 (15), 其中  $0 < s < 1$ .  
由 539,3),

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos z x}{z^s} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}},$$

然后

$$\frac{1}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}} \int_0^\infty \frac{\cos z x}{z^{1-s}} dz = \frac{1}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s) \cos \frac{\pi(1-s)}{2}}.$$

这就等于  $\frac{1}{x^s}$  (如果考虑到关于  $\Gamma$  函数的余元公式 531, 5°).

同样可证实公式 (15).

10) 关于有零指标的贝塞尔函数  $J_0(x)$ , 证实傅里叶公式 (14).

在 524,5) 中, 我们有过

$$\int_0^\infty J_0(z) \cos z x dz = \begin{cases} 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{当 } x < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

因此

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos u x du \int_0^\infty J_0(z) \cos z u du = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos u x}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi,$$

这实际上等于  $J_0(x)$  [参考 695].

11) 考虑由等式

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, & \text{关于 } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{关于 } x > 1 \end{cases}$$

所确定的函数  $f(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). 它的余弦变换等于

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos z x dz,$$



或者展开余弦为级数并且逐项积分:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{2\nu!} \int_0^1 z^{2\nu} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} dz.$$

但由 534,1),

$$\int_0^1 z^{2\nu} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + n + 1)} = \frac{(2\nu-1)!!(2n-1)!!}{2^{\nu+n+1}(\nu+n)!} \pi.$$

因此, 回忆到有指标  $n$  的贝塞尔函数的展开式 [395,14)], 最后得

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n-1)!! \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!(\nu+n)!} \frac{x^{2\nu}}{2^{n+2\nu}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n-1)!!}{x^n} J_n(x).$$

因为关于原始函数, 适用傅里叶公式的条件成立, 所以函数  $F_c(x)$  的余弦变换一定就是原始函数. 这样引出了有趣的积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(z)}{z^n} \cos xz dz = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)!!} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, & \text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

当  $n=0$  时, 由此得到已知的公式 [524,5)].

12) 在积分对数的表示式

$$\text{li} z = \int_0^z \frac{dt}{\ln t} \quad (0 < z < 1)$$

中, 令  $z = e^{-x} (x > 0)$ , 及  $t = e^{-u}$ , 我们得到

$$\text{li} e^{-x} = - \int_x^{\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

因为当  $x > 1$  时

$$\int_x^{\infty} \frac{du}{ue^u} < e^{-x},$$

而当  $0 < x < 1$  时,

$$\int_x^1 \frac{du}{ue^u} < |\ln x|,$$

所以  $\text{li} e^{-x}$  从 0 到  $+\infty$  可积分, 并且显然适用傅里叶公式 (14) 及 (15).

现在求函数  $\text{li} e^{-x}$  的余弦变换:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{li} e^{-z} \cos xz dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xz dz \int_z^{\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

分部积分, 将它化成下列形式:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\sin zx}{z} dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{arctg} x}{x}$$

[522, 2°]. 于是, 其逆为

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{arctg} z}{z} \cos xz dz = -\frac{\pi}{2} \text{li} e^{-x} \quad (x > 0),$$



这样就求得了新积分的值.

用类似的方法, 利用正弦变换, 求得另一积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+z^2)}{z} \sin xz dz = -\pi \operatorname{li} e^{-x} \textcircled{1} \quad (x > 0).$$

13) 证明在傅里叶公式

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

中, 当前面所指出的任意的充分条件成立时, 可将里面的积分换成在任意有限区间上的积分

$$\int_a^b f(u) \cos z(u-x) du,$$

只要点  $x$  在  $a$  与  $b$  之间就可以了.

提示 不取  $f(u)$ , 我们考虑当  $a < u < b$  时等于  $f(u)$ , 而对于其余的  $u$  值等于零的新函数.

14) 设函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内 (在广义下) 单调减, 并且当  $x \rightarrow +\infty$  时趋近于零; 我们假定这函数在点  $x=0$  的邻域内可积分.  $\textcircled{2}$  证明这时它的正弦变换  $F_s(x)$  关于  $x > 0$  是非负的函数.

由所作假定, 首先推得积分

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(z) \sin xz dz$$

存在 [476, 482]. 我们能将它表示成级数和的形状:

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n\pi}{x}}^{\frac{(n+1)\pi}{x}} f(z) \sin xz dz,$$

这级数的各项正负相间, 而且它们的绝对值递减 (“莱布尼茨型” 的级数, 381). 由此得到所要求的结论.

15) 设  $f(x)$  是在区间  $[0, +\infty]$  上的有界单调减函数, 当  $x \rightarrow +\infty$  时趋近于零. 此外, 我们还假定当  $x > 0$  时, 这函数有负的 (在广义下) 单调增加的导数  $f'(x)$ . 证明这时余弦变换  $F_c(x)$  是在区间  $[0, +\infty]$  上的非负的可积分函数.

如果  $0 < a < A < +\infty$ , 我们有

$$\int_a^A |f'(x)| dx = - \int_a^A f'(x) dx = f(a) - f(A),$$

因此由于函数  $f(x)$  有界, 导数  $f'(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  上可积分. 从而推得

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f'(x) \rightarrow 0.$$

$\textcircled{1}$  对参变数  $x$  求微分, 容易算出中间积分

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\cos xz - 1}{z} dz$$

$\textcircled{2}$  如果函数  $f(x)$  在点  $x=0$  变为无穷大, 则它可能在非常义下可积.



分部积分, 我们得到

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(z) \cos xz dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^\infty f'(z) \sin xz dz;$$

如果对最后一积分应用 14) 中所证明的结果, 则有  $F_c(x) \geq 0$ .

因为关于函数  $f(x)$ , 可应用傅里叶公式的条件成立, 所以当  $x=0$  时, 我们得到

$$f(+0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dz \int_0^\infty f(u) \cos zu du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(z) dz,$$

在这里已包含了关于函数  $F_c(z)$  的可积分性的断语.

**附注** 我们强调这两个定理中的任何一个对于其他型的变换都不是真实的. 关于第 716 目的例 2) 中所考察的函数  $f(x)$ , 相应的余弦变换

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

改变符号. 如果取  $f(x) = e^{-ax}$  [同目的例 1], 则正弦变换

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

虽然关于  $x > 0$  保持正号, 但在区间  $[0, +\infty]$  上不可积分.

**719. 二元函数的情形** 傅里叶公式也能推广到多元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的情形. 我们较详细地研究二元函数  $f(x_1, x_2)$ , 并且假定这函数确定在整个平面  $(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$  上, 而且分别对每一变数可微分.

又设当任意固定  $x_2$  时, 函数  $f(x_1, x_2)$  对于  $x_1$  在区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积; 同样, 当任意固定  $x_1$  时, 它对于  $x_2$  在同一区间上绝对可积分. 当  $x_2$  固定时, 对于单变数  $x_1$  的函数  $f(x_1, x_2)$  应用已知的傅里叶公式<sup>①</sup>(11), 便得到

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, x_2) \cos z_1(u_1 - x_1) du_1.$$

同样, 当  $u_1$  固定时, 变数  $x_2$  的函数  $f(u_1, x_2)$  也能用下一公式表示:

$$f(u_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2.$$

代入前式, 我们就得到所求的公式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z_1(u_1 - x_1) du_1 \int_0^\infty dz_2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_0^\infty dz_2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1(u_1 - x_1) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2. \end{aligned}$$

<sup>①</sup>根据所作假定, 在这里适用这公式的条件成立. 当然我们也能改变这些假定的形状.



与 715 中所做的一样, 在这里也能转换到含指数函数的公式:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i[z_1(u_1 - x_1) + z_2(u_2 - x_2)]} du_2, \quad (20)$$

只要将对  $z_1$  及对  $z_2$  的积分了解为在主值意义下的积分.

如果函数  $f(x_1, x_2)$  对于  $x_1$  及对于  $x_2$  都是偶函数, 则能将整个积分区间化成区间  $[0, +\infty]$ , 而且只保留着余弦:

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \cos z_1 x_1 dz_1 \int_0^\infty \cos z_1 u_1 du_1 \int_0^\infty \cos z_2 x_2 dz_2 \times \int_0^\infty f(u_1, u_2) \cos z_2 u_2 du_2. \quad (21)$$

在奇函数情形下, 在这里必须处处用正弦代替余弦.

对于只在第一象限  $[0, +\infty; 0, +\infty]$  上给出的函数  $f(x_1, x_2)$ , 这两公式也成立, 因为能随意用偶的或奇的方式将函数延拓到整个平面上.(关于含正弦的公式, 坐标轴上的点除外!)

在所有这些公式中, 积分的次序必须如所指出的那样 (只可能交换指标 1 与 2). 如果我们有理由交换两个中间积分的次序, 则公式 (20) 可取特别对称的形式. 在这种情形下, 公式 (20) 与下列两个公式等价:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i(z_1 u_1 + z_2 u_2)} du_2, \\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_2;$$

函数  $F(z_1, z_2)$  称为函数  $f(x_1, x_2)$  的傅里叶变换.

与这相仿, 公式 (21) 也可分解为两个公式, 在这次, 两公式的形状完全相同:

$$F_c(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty du_1 \int_0^\infty f(u_1, u_2) \cos z_1 u_1 \cos z_2 u_2 du_2, \\ f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty F_c(z_1, z_2) \cos z_1 x_1 \cos z_2 x_2 dz_2.$$

在这里  $F_c(z_1, z_2)$  是函数  $f(x_1, x_2)$  的余弦变换; 显然  $f(x_1, x_2)$  也是函数  $F_c(z_1, z_2)$  的余弦变换.

请读者将以上所讲的推到正弦变换.

## §7. 应用

**720. 用行星的平均近点角所作出的它的偏近点角的表示式** 函数的傅里叶级数展开式引导出函数的一种便利的分析表示法, 它对于计算往往是有帮助的. 在下面, 我们从理论天文学中取出这种类型的一个重要的例子.



我们已经遇到过表示行星的偏近点角  $E$  与平均近点角  $M$  之间关系的开普勒方程[83;452,3)]:

$$E = M + \varepsilon \sin E \quad (0 < \varepsilon < 1). \quad (1)$$

根据这个方程,  $E$  是  $M$  的单值可微分函数, 而且是奇函数, 将  $M$  增大  $2\pi$  时, 则显然  $E$  也增大  $2\pi$ . 由此可知  $\sin E$  是  $M$  的 (以  $2\pi$  为周期的) 周期函数, 并且可用  $M$  的倍弧的正弦展开成为级数:

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nM.$$

现在要确定系数  $b_n$ .

由第 689 目的公式 (21),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n &= \int_0^{\pi} \sin E \sin nM dM \\ &= -\sin E \cdot \frac{\cos nM}{n} \Big|_{M=0}^{M=\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nM \frac{d \sin E}{dM} dM. \end{aligned}$$

因为当  $M = 0$  (或  $\pi$ ) 时,  $E = 0$  (或  $\pi$ ), 所以积分外面的项等于零. 在后面的积分中用变数  $E$  代替变数  $M$  (像这样, 变化的区间没有改变), 并且考虑到开普勒方程, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nM \cos E dE = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nE - n\varepsilon \sin E) \cos E dE \\ &= \frac{1}{2n} \left[ \int_0^{\pi} \cos(n+1)E - n\varepsilon \sin E dE + \int_0^{\pi} \cos(n-1)E - n\varepsilon \sin E dE \right]. \end{aligned}$$

由已知的贝塞尔函数  $J_m(x)$  的积分公式,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mE - x \sin E) dE = J_m(x)$$

[例如, 可参考第 695 目]. 因此

$$b_n = \frac{1}{n} [J_{n+1}(n\varepsilon) + J_{n-1}(n\varepsilon)].$$

在另一方面, 不难证明恒等式

$$\frac{x}{2n} [J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] = J_n(x).$$

因此

$$b_n = \frac{2}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon),$$

故

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

最后得

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

所得到的用平均近点角  $M$  表示偏近点角  $E$  的表示式在天体力学中起着重要的作用. 从前我们已经将  $E$  展开为含离心率  $\varepsilon$  的乘幂的展开式, 它的系数与  $M$  有关 [452,2)]. 但是这展开式只有当  $\varepsilon < 0.6627 \dots$  时适用, 譬如关于离心率较大的彗星轨道就不适用; 在这里所建立的公式没有这种缺点.



**721. 弦振动的问题** 傅里叶级数 (与积分) 的最重要的应用是在数学物理方面. 想用例子说明这类应用, 我们从古典的弦振动的问题开始. 它对于函数可否有三角展开式这一问题的提出起了重要的作用.

我们所谓弦就是指能自由弯曲的很轻的线. 设有长度是  $l$  的弦, 它的端点固定在  $x$  轴上  $x=0$  及  $x=l$  两点, 并且在张力  $H$  的作用下, 弦沿着  $x$  轴平衡 (图 138). 设在  $t=0$  时, 弦离开了平衡位置, 而且它的各点具有某些在铅直方向的速度. 于是弦上各点开始在这铅直的平面上振动.<sup>①</sup> 如果假定弦上的每点  $M$  (有横坐标  $x$ ) 严格铅直地振动, 则在时间  $t \geq 0$ , 它与平衡位置的偏差  $y$  是两变量  $x$  与

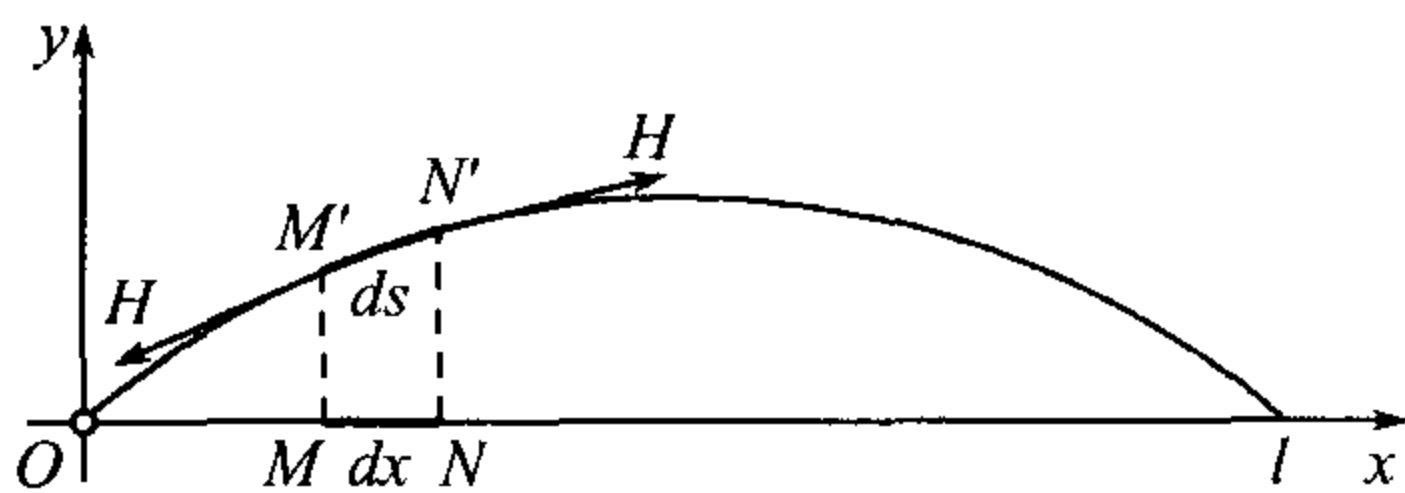


图 138

$t$  的函数:

$$y = y(x, t).$$

现在的问题就是要确定这函数.

我们只讨论弦的小振动. 这时量  $y$  与  $\frac{\partial y}{\partial x}$  都很小 (从而弦离开平衡位置不远并且弯曲不大); 因此我们能省略这些小量的二次项.

取在时间  $t$  的弦元素  $ds = M'N'$  (见图); 由以上所述, 我们可将它的长度算作与它在开始时的原长  $dx = MN$  相等. 这是因为

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx = dx.$$

既然我们将长度的改变略去不计, 就可将弦的张力也算作没有改变.

在所取的弦元素上, 张力  $H$  作用于点  $M'$ , 它的方向是沿着在这点的切线向左; 同样大小的张力作用于点  $N'$ , 它的方向是沿着切线向右. 如果用  $\alpha$  与  $\bar{\alpha}$  分别表示切线的斜角, 则这两张力在铅直方向的分力的和是

$$H(\sin \bar{\alpha} - \sin \alpha) = H \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} \right] = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

在这里, 我们又已省略了小量的二次项: 例如, 我们已经令

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

然后用函数  $\frac{\partial y}{\partial x}$  的微分代替它的增量.

如果用  $\rho$  表示弦的“线性”密度, 则弦元素的质量是

$$\rho ds = \rho dx.$$

于是由牛顿运动定律, 弦元素的质量  $\rho dx$  与加速度  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  的乘积必须等于上面所求得的作用于这段元素上的力:

$$\rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

<sup>①</sup>我们假定图 138 所在的平面是铅直的.



令

$$a^2 = \frac{H}{\rho},$$

最后我们得到描述所研究的现象的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

除了这个方程以外, 未知函数  $y = y(x, t)$  必须还要满足一系列条件, 首先就要满足表示弦端点固定不变的所谓边界或极值条件:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0. \quad (3)$$

其次, 如果函数  $f(x)$  与  $g(x)$ <sup>①</sup> ( $0 \leq x \leq l$ ) 表示弦上的点在  $t = 0$  时的偏差与速度, 则初值条件

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (4)$$

必须成立.

因此, 问题化为求满足方程 (2) 及条件 (3) 与 (4) 的函数  $y(x, t)$ .

依照傅里叶所指出的方法, 先求方程 (2) 的特解, 而且使它满足极值条件 (3), 并与零解不同(我们暂不考虑初值条件). 我们开始求形状为两函数的积的特解, 并且这两函数中的一个只与  $x$  有关, 另一个只与  $t$  有关:

$$y = X(x)T(t).$$

在这种情形下, 方程 (2) 有下列形式:

$$XT'' = a^2 X''T,$$

或

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}, \quad (5)$$

其中撇号表示对于各函数的变量的导数, 因为等式 (5) 的左端与  $x$  无关, 右端与  $t$  无关, 所以它们的共同的值必须与  $x$  及  $t$  都无关, 于是为一常数, 将它取为  $-a^2 \lambda^2 (\lambda > 0)$  之形式. 这时方程 (5) 分解为两个方程:

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0; \quad (6)$$

它们的解 (“一般积分”) 的形状是:

$$T = A \cos a \lambda t + B \sin a \lambda t,$$

$$X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

为了要使得函数  $y = XT$  满足极限条件 (3), 函数  $X$  必须满足这些条件. 令  $x = 0$ , 我们立刻看到  $C = 0$ ; 又令  $x = l$ , 并且考虑到  $D$  不可能为零, 就得到条件

$$\sin \lambda l = 0,$$

<sup>①</sup>当  $x = 0$  或  $x = l$  时, 两函数显然必须为零.



从而, 当  $n$  是自然数时,  $\lambda l = n\pi$ . 因此  $\lambda$  可取下列各值中的一值:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = 2\frac{\pi}{l}, \dots, \lambda_n = n\frac{\pi}{l}, \dots \textcircled{1} \quad (7)$$

当  $\lambda = \lambda_n$  时, 令

$$AD = a_n, \quad BD = b_n,$$

我们得到一系列特解:

$$y_n = (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

不难看到任意个这些解的和也满足上面所提出的条件. 因此推想到考虑所有这些解构成的无穷级数, 并且令

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (8)$$

我们暂且假定这个级数收敛, 并且它的和满足方程 (2); 条件 (3) 显然成立. 现在轮到讨论初值条件 (4), 我们设法定出常数  $a_n, b_n$ , 使得这些条件成立. 假定可以将级数 (8) 对于  $t$  逐项微分, 从而

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n a\lambda_n \sin a\lambda_n t + b_n a\lambda_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (9)$$

在 (8) 与 (9) 中, 令  $t = 0$ , 我们得到条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = g(x). \quad (10)$$

因此只要  $f$  与  $g$  满足可展开为傅里叶级数的条件, 则由第 689 目的公式 (25) 最后确定出所求的系数:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx, \quad b_n = \frac{2}{a\lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx. \quad (11)$$

这样, 我们至少在形式上求得了所提出的问题的全解, 其形状为级数 (8), 而级数的系数则由公式 (11) 所定出.

的确, 它实际上是否是解的问题暂时还没有解决. 为了要回答这个问题, 对于函数  $f$  与  $g$  还要加上一些条件, 就是要设函数  $g$  可微分, 函数  $f$  二次可微分, 而且假定导数  $f''$  与  $g'$  在区间  $[0, l]$  上有有界变差. 这时下列估计值成立:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \lambda_n b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \textcircled{2}$$

①如果我们取比值 (5) 的常数值为  $a^2 \lambda^2$  的形式, 则只有恒等于零的函数  $X$  可能满足极限条件.

②这是由第 708 目的一般公式 (21) 与第 709 目的说明推得的; 在这里用区间  $[0, l]$  代替  $[0, \pi]$  当然不关重要. 这时, 从与弦端点固定这一性质相关的自然的条件

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0$$

出发, 恰好能推出上述各目中用  $B_n$  所表示的数量是零.



两展开式 (10) 实际上在整个区间  $[0, l]$  上成立; 展开式 (8) 也收敛, 而且由它所确定的函数既满足极限条件, 也满足初值条件 [由于级数 (9) 一致收敛, 现在我们知道可以对  $t$  逐项微分!]. 证实这函数满足微分方程要比较复杂些.<sup>①</sup>

我们注意级数 (10) 在区间  $[0, l]$  的范围内也收敛; 与从前一样, 用  $f(x)$  及  $g(x)$  表示它们的和, 由此得到这两函数在整个无穷区间上的开拓, 而且只可能除去在  $kl$  形的点处外 ( $k$  为整数), 它们保持着可微分性. 我们可逐项积分 (在任一有限区间上一致收敛的)  $g(x)$  的级数, 从而

$$-\sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n x = \frac{1}{a} g_1(x),$$

其中  $g_1(x)$  是函数  $g(x)$  的一个原函数. 解除 (8) 中的括号, 可将这表示式换写为下列形式

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_1^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x + at) + \sum_1^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x - at) \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x + at) + \sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x - at) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f(x + at) + f(x - at) + \frac{1}{a} g_1(x + at) - \frac{1}{a} g_1(x - at) \right\}. \end{aligned}$$

对  $t$  并对  $x$  微分两次, 不难证实这函数满足方程 (2)!

对于在这里所考虑的问题, 也可直接求得上面的形式的解答, 但是三角级数 (8) 形的解答有些优点, 因为它揭露出所研究的现象的重要物理特性, 合并 (8) 中在括号内的两项, 将展开式换写为:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left( \frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n \right).$$

我们看到弦的全振动是由一系列各别的振动

$$y_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left( \frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n \right)$$

所组成的. 在这个振动元素中, 弦上各点振动的频率相同, 如果愿意的话, 也可说振动的周期相同, 而与一定高度的音相应. 每点振动的振幅与它的位置有关, 并且等于

$$A_n \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right|.$$

将整个弦分为  $n$  个相等的部分, 在同一部分上的点恒有相同的相, 而在相邻的部分上的点有恰好相反的相. 在图 139 上, 画出了当  $n = 1, 2, 3, 4$  时的弦的位置. 每两部分的分界点静止不动, 这就是所谓“波节”. 各部分的中点 (“波腹”) 则有最大的振幅. 这种现象称为驻波, 因此通常称傅里叶法为驻波法.

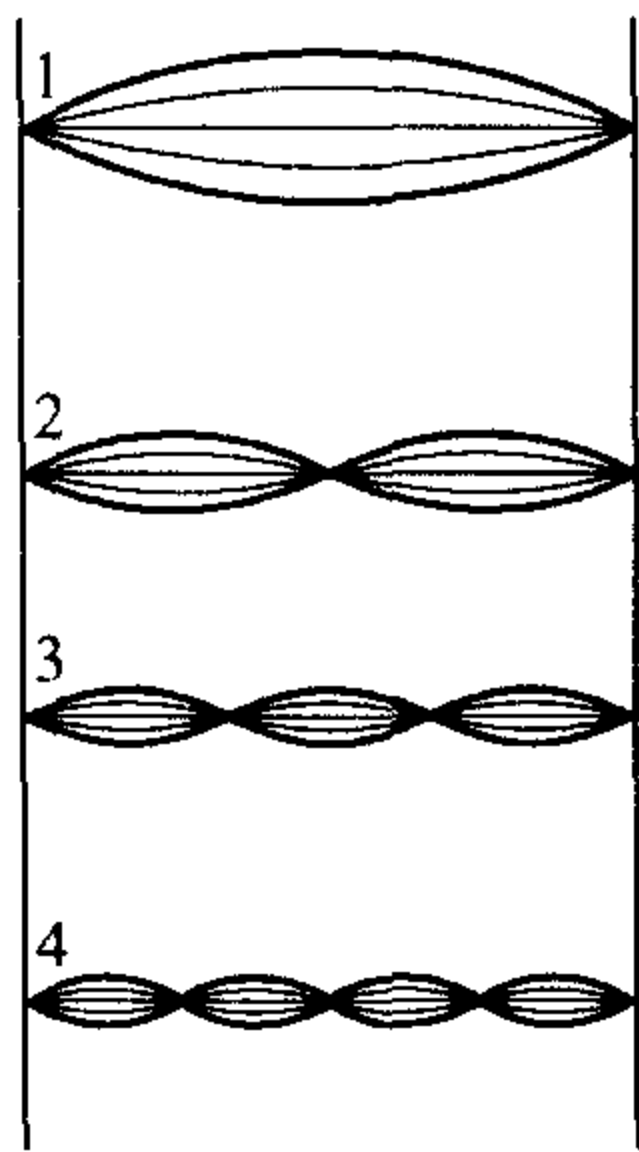


图 139

基音是由第一个分音  $y_1$  所确定; 频率  $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{\rho}}$  及周期  $T_1 = 2l \sqrt{\frac{\rho}{H}}$  则与它相应. 与基音同时, 弦所发出的其余的音 (或称泛音) 表征出确定的声音的

<sup>①</sup>只有当对函数  $f$  与  $g$  加上特别强的限制以致于系数  $\alpha_n$  与  $b_n$  的无穷小阶增高, 才能用逐项微分法证实此点.



“色”或音色. 如果用手指压住弦的中点, 则基音以及奇泛音立受阻碍; 对于这种音, 弦的中点是波腹. 但偶泛音则都保持不变; 对于这种音, 弦的中点是波节. 这时, 在偶泛音中, 以  $T_2 = \frac{1}{2}T_1$  为周期的第二泛音起着基本的作用, 并且弦开始发出原音的八度. 所有这些结果都能从所得问题的解答推演出来!

**722. 在有限长杆上的热传导问题** 设有一长度为  $l$  的均匀细杆放在  $x$  轴上的点  $x = 0$  与  $x = l$  之间. 设杆的断面的面积  $\sigma$  是充分小, 以致于在每一瞬时断面的一切点都可算作有相同的温度, 假定杆的侧面对于周围的介质绝缘,<sup>①</sup> 设已给出在开始时刻  $t = 0$  时, 温度  $u$  的沿着杆的分布, 并用函数  $f(x) (0 \leq x \leq l)$  来表示它, 此外, 又已给出在杆的端点处的热的状况. 我们的问题就是要确定杆上的点的温度为点的横坐标  $x$  与时间  $t$  的函数:

$$u = u(x, t).$$

我们考虑在断面  $x$  与  $x + dx$  之间的杆元素. 在无穷小的时间区间  $dt$  内, 经过左方的断面传入元素内的热量可表示为 [参考 666, 例子的 2)]:

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

其中  $k$  是杆的“内导热系数”取负号是由于热从高温传到低温的地方. 同样, 在同一时间区间内, 热量

$$-k\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt$$

经过右方的断面传出; 改变这里的符号后, 我们得到从右向左经过这个断面的热量, 即传入元素的热量. 因此, 在时间区间  $dt$  内, 在这段元素内积蓄起来的总热量是

$$k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt.$$

从温度的增高  $\frac{\partial u}{\partial t} dt$  是由热量所制约这一事实出发, 我们可用另一种方法算出这热量. 如果用  $c$  及  $\rho$  分别表示构成杆的物质的热容量与密度, 则在此消耗的热可表示为:

$$c\rho\sigma dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

令两个表示式相等, 我们得到基本的热传导微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12)$$

其中为简单起见, 已令

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

(然而, 从第 672 目, 3° 中对于空间所导出的一般方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

<sup>①</sup>我们也能用平面  $x = 0$  与  $x = l$  之间的无限巨壁来代替细杆, 但须假定在每个与  $x$  轴垂直的平面上热的状况保持不变.



出发, 也能导出这个方程, 不过要将  $u$  算作与  $y$  及  $z$  都无关.)

(a) 首先假定在杆的两端点处, 温度保持为常数, 譬如为 0. 这样就导出了边界条件:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

在上面我们已经提到过初值条件:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (13)$$

并且由于边界条件, 必须假定  $f(0) = f(l) = 0$ . 为了求满足方程 (12) 以及所有提出来的条件的函数  $u(x, t)$ , 我们应用傅里叶的方法.

与前面一样, 令  $u = XT$ , 因而方程成为下列形式:

$$XT' = a^2 X''T \quad \text{或} \quad \frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X};$$

如果令这两个比的常数值为  $-a^2 \lambda^2 (\lambda > 0)$ , 则这方程可分解为两个方程

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{从而} \quad T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t} \quad (14)$$

与

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad \text{从而} \quad X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (15)$$

为了要使得函数  $XT$  满足边界条件, 必须有

$$A = 0, \lambda l = n\pi \quad (\text{其中 } n = 1, 2, \dots).$$

因此与在前面的问题中一样,  $\lambda$  只可能有值 (7).<sup>①</sup> 令  $BC = b_n$ , 我们得到一系列特解:

$$u_n = b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

取通解为级数的形状:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x. \quad (16)$$

要想满足初值条件, 必须令

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

如果函数  $f(x)$  连续并且有有界变差, 则要使这展开式成立, 只需取

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

这时, 证明形式上的解就是实际的解没有困难. 既然有因子

$$e^{-a^2 \lambda_n^2 t} = e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

<sup>①</sup>参考第 454 页上的脚注.



的出现, 于是我们可将级数 (16) 对于  $t$  逐项微分, 并且对于  $x$  两次微分; 因为所得的级数对于  $x(0 \leq x \leq l)$  与  $t(t \geq \alpha > 0)$  一致收敛.

(6) 现在设在端点  $x = l$  处温度  $u_0$  保持不变, 而另一端点  $x = 0$  对外不传热, 因此经过它完全没有热的运动. 下列边界条件与这些假定相对应:

$$u(l, t) = u_0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

初值条件还是保持从前的形状.

为方便计, 引用新的未知函数  $v$  来代替  $u$ , 令  $u = u_0 + v$ . 对于  $v$ . 我们显然有这样的方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

极限条件则被换为较简单的条件:

$$v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0.$$

最后, 初值条件变换为

$$v(x, 0) = f(x) - u_0.$$

与通常一样, 令  $v = XT$ , 我们对于  $T$  与  $X$  得到前面的表示式 (14) 与 (15). 因为

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x,$$

所以第二个边界条件给出  $B = 0$ , 而由第一个条件推得

$$\cos \lambda l = 0,$$

因此这时  $\lambda$  可取下列的值

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}, \lambda_2 = 3\frac{\pi}{2l}, \dots, \lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, \dots$$

最后我们得到特解如下:

$$v_n = a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

由此就可作出通解

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

在这种情形下, 初值条件化为非标准形状的展开式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} = f(x) - u_0$$

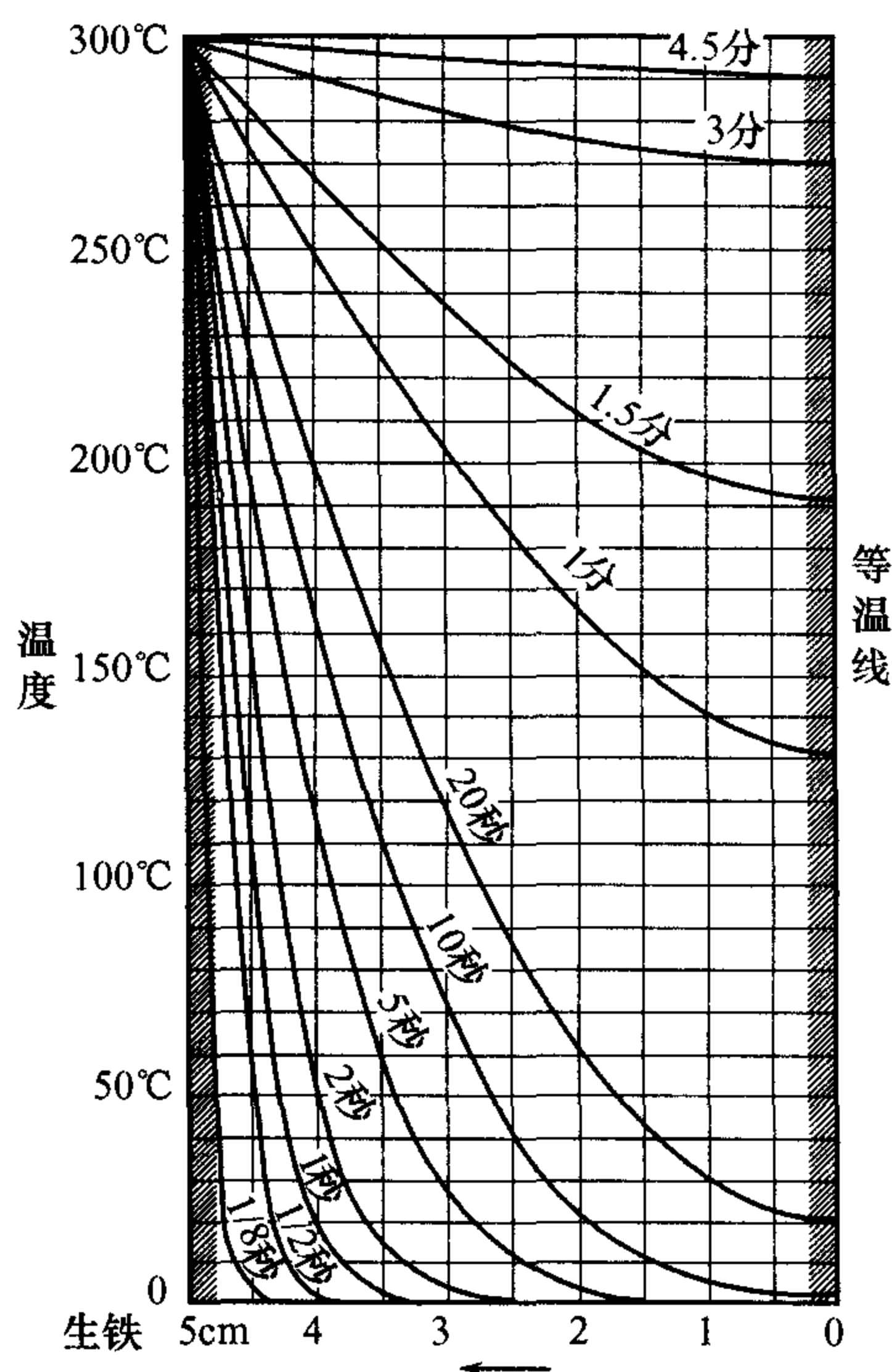


图 140



[参考第 690 目的问题 25)]. 但不难证明当函数  $f(x)$  适合通常的条件时, 如果

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2l} dx - \frac{4}{\pi} u_0 \cdot \frac{1}{2n-1},$$

则这展开式实际成立.

因此, 用刚才所指出的系数值, 最后我们得到

$$u = u_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x,$$

证实它是实际的解的方法, 也与情形 (a) 相同.

特别, 如果  $f(x) = 0$ , 则有展开式

$$u = u_0 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

在这公式中, 当  $u_0 = 300$ ,  $a^2 = 0.139$  时,<sup>①</sup> 对于不同的  $t$  与  $x$ , 已经算出了  $u$  的值, 并且由此在图 140 上作出了表示在不同时刻杆上温度分布的图解.

**723. 无穷长杆的情形** 我们现在对于两端无穷长的杆要解决热传导的问题, 譬如说这杆是放在  $x$  轴上 (或者可对于整个空间解决这个问题, 只要每个垂直于  $x$  轴的平面上的各点温度相同), 这时微分方程还是与从前的一样; 初值条件

$$u(x, 0) = f(x)$$

则必须在整个区间  $(-\infty, +\infty)$  上成立, 而自然没有任何边界条件.

与在前面的情形一样, 我们得到如下列形式的特解:

$$u = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t};$$

但是在这里没有理由从参数  $\lambda$  的一切正值中挑选某些值. 因此, 考虑到常数  $a$  及  $b$  与  $\lambda$  有关:

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda),$$

则要得到通解自然是不用和式而用积分

$$u = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda. \quad (18)$$

为了使得这个——暂且还是形式上的——解满足初值条件, 必须选择函数  $a(\lambda)$  与  $b(\lambda)$  使得对于一切  $x$ ,

$$\int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x).$$

<sup>①</sup>设有一根 5 厘米长的生铁杆, 则在这种情形下

$$\rho = 0.0072 \frac{\text{千克}}{\text{厘米}^3}, \quad c = 0.13 \frac{\text{大卡}}{\text{千克} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad k = 0.00013 \frac{\text{大卡}}{\text{厘米} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{秒}},$$

因此  $a^2 = 0.139$ .



现在假定函数  $f(x)$  满足可应用傅里叶公式的条件, 则这公式可写成下列形式:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz \right\} d\lambda.$$

由此函数  $a(\lambda)$  及  $b(\lambda)$  显然可由公式

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz$$

确定, 在这种情形下, 解 (18) 有下列形式:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda(z-x) dz.$$

如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\infty, +\infty]$  上绝对可积, 则 [521, 定理 5] 在这里可交换对  $\lambda$  及对  $z$  积分的次序:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(z-x) d\lambda.$$

我们可依照第 519 目的 6)(a) 直接计算内层积分; 它等于

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}};$$

因此, 最后可将问题的解表示为简单积分的形式:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} dz. \quad (19)$$

在积分号下对  $t$  并对  $x$  微分 (对  $x$  微分二次), 不难证实这确乎是一个解.

我们还要考虑“半无穷大”的情形, 即杆的一端为无穷长的情形, 例如设这杆是放在  $x$  轴的正的部分上 (如果愿意的话, 或者考虑半空间  $x \geq 0$  的情形). 设在端点  $x = 0$  处, 温度保持为 0. 对于这种情形, 我们可应用前面的解 (19), 不过只要将函数  $f(x)$  (在这里, 它只是对于 0 与  $+\infty$  之间的值给出的), 延拓到  $x$  的负值上, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} dz = 0.$$

因为指数因子是偶的, 所以显然只需用奇的方式延拓函数  $f(x)$ . 这时新问题的解可写作:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(z) \left[ e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2 t}} \right] dz.$$

如果当  $x = 0$  时, 需要有  $u = u_0$ , 则引用新未知函数  $v = u - u_0$ , 不难得到

$$u = u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [f(z) - u_0] \cdot \left[ e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2 t}} \right] dz.$$

在这里我们注意  $f(x) = 0$  时的特殊情形; 这时解有如下的形式:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right\}.$$

当  $u_0 = 300$ ,  $a^2 = 0.139$  时,<sup>①</sup> 对于不同的  $x$  与  $t$ , 用这公式计算  $u$  的值, 并且由此作出在不同时刻杆上温度分布的图解. 这些图解画在图 141 上, 把它与图 140 上的图解相比较是有趣的.

<sup>①</sup>这与生铁杆的情形相应, 参考第 459 页上的脚注.



**724. 边界条件的变形** 我们回到 (722 中所讨论的) 在有限长杆上的热传导问题, 但是要改变边界条件. 这就是说, 与从前一样, 假定端点  $x = 0$  处的温度保持为零, 但设在端点  $x = l$  处, 到 (温度为 0 的) 周围介质中有自由辐射. 在时间区间  $dt$  中, 传到这个端点的热量是 [参考 722]

$$-k\sigma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} dt,$$

又根据牛顿定律 [参考 359, 3)] 辐射出的热量等于

$$h\sigma u(l, t) dt,$$

其中  $h$  是“外导热系数”. 因此, 在端点  $x = l$  处, 下列条件必须成立:

$$-k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = hu(l, t).$$

如果考虑形如  $u = XT$  的特解, 则与在第 722 目中一样, 我们得到

$$T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

由在端点  $x = 0$  处的边界条件得到  $A = 0$ ; 由在端点  $x = l$  处的边界条件导出等式

$$-k\lambda \cos \lambda l = h \sin \lambda l,$$

或

$$\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{k}{hl} \lambda l.$$

因此, 我们得到一系列  $\lambda$  的值:

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{l},$$

其中  $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$  是超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{k}{hl} \xi$$

的正根 [参考 679, 4)]. 通解的形状则为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x,$$

而与 (16) 相似, 但是 (我们强调指出这是重要的) 在这里数  $\lambda_n$  的性质要复杂得多.

由初值条件导出展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\xi_n x}{l} = f(x); \quad (20)$$

我们可将它看作函数  $f(x)$  在区间  $[0, l]$  上的广义傅里叶级数, 并且利用函数

$$\sin \frac{\xi_n x}{l}$$

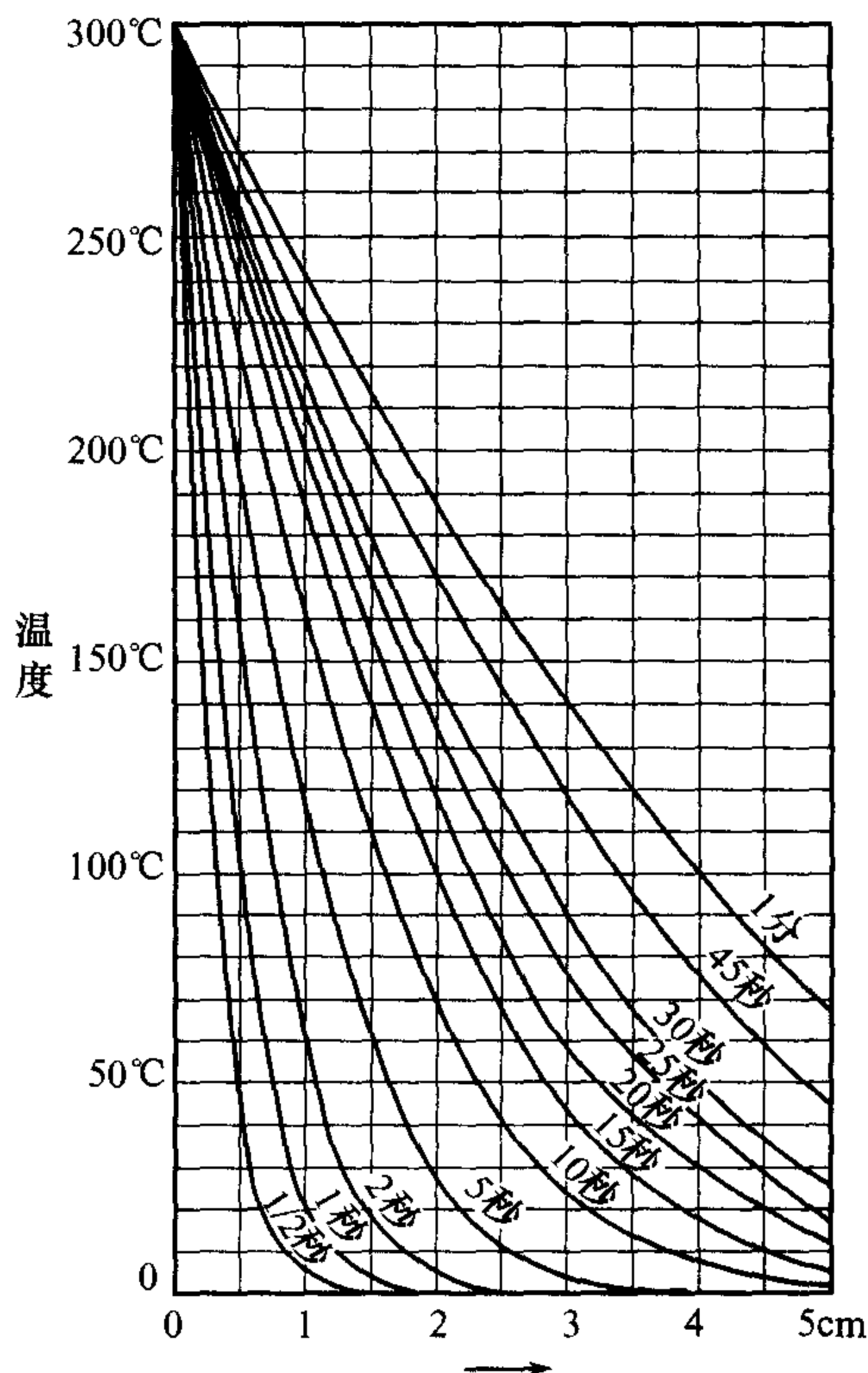


图 141



的正交性 [679,4)] 可用通常的方法确定系数  $b_n$ :

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\xi_n x}{l} dx}.$$

应当加什么条件在函数  $f(x)$  上就能使等式 (20) 成立, 这一问题还是没有解决, 我们只讨论了所提出的问题的形式的解.

**725. 在圆盘上的热传导** 我们还对于一种情形——以  $R$  为半径, 以坐标原点为中心的圆盘的情形——考虑热的问题. 假定圆盘是这样薄, 以致于它的温度不因高度而有所变更, 并设它的上下表面都是绝缘的. 而且我们限于研究温度  $u$  只与极动径向量  $r$  有关 (而与极角  $\theta$  无关) 的情形: 为了进行研究, 只需假定初值与边界条件是怎样的. (在这里, 也可考虑用上下两方无穷长的圆柱来代替表面绝缘的圆盘.)

取一般的热传导微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

[672,3°], 首先由于  $u$  与  $z$  无关, 我们将它换写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

在  $xy$  平面上换用极坐标, 则必须改变括弧中的表示式如下:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

[参考 222,1)], 最后, 考虑到  $u$  与  $\theta$  无关, 我们得到这样的方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (21)$$

设给出温度的初值分布如下:

$$u(r, 0) = \varphi(r) \quad (0 \leq r \leq R),$$

而边界条件化为

$$u(R, t) = 0.$$

在这里也采用傅里叶的方法, 我们先求方程 (21) 如下列形式的特解:

$$u = R(r)T(t);$$

这时我们得到确定这两函数的方程

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad \text{及} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0.$$

由其中第一个方程,  $T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}$ . 如果令  $r = \frac{1}{\lambda} z$  及  $R\left(\frac{1}{\lambda} z\right) = J(z)$ , 则第二个方程变为贝塞尔方程:

$$J'' + \frac{1}{z} J' + J = 0.$$



将  $J$  看作有零指标的贝塞尔函数, 亦即令  $R(r) = J_0(\lambda r)$ , 则由边界条件得

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

在 679, 6) 中, 我们已经提到函数  $J_0(x)$  有无穷个正根  $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$ ; 因此,  $\lambda$  可能有一系列的值如下:

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{R} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

下面的特解与这些值相对应:

$$u_n = c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r),$$

与通常一样, 由此作出通解:

$$u = \sum_1^{\infty} c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r).$$

再只要确定系数  $c_n$ . 在这种情形下, 从没有应用过的初值条件可推出

$$\sum_1^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) = \varphi(r) \quad (0 \leq r \leq R).$$

在 679, 6) 中, 我们已看到, 函数系  $\{J_0(\xi_n x)\}$  在区间  $[0, 1]$  上“加权” $x$  广义正交;<sup>①</sup> 显然, 函数系  $\left\{J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\right\}$  在区间  $[0, R]$  上“加权” $r$  正交. 用通常的方法确定这个广义傅里叶级数的系数, 我们得到

$$c_n = \frac{\int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}.$$

在这里我们也只满足于求得形式的解.

读者看出最后的两例已经越出了通常的傅里叶级数的范围. 现在举出它们是为了使读者明了傅里叶级数的应用问题在数学物理中的正确地位. 它们在那里起着重要的作用. 可是还远不能满足数学物理上的需要: 只要问题的条件略有变更, 则必须应用另一种展开式. 因为傅里叶级数永远是“正交展开式”的最重要且最简单的实例, 所以上述情况丝毫不能减低傅里叶级数及其理论上发展的价值; 其他一切类似的展开式都是以它为典范而作出的, 它们的理论与傅里叶级数的理论有着最密切的联系.

**726. 实用调和分析 · 十二个纵坐标的方法** 在机械及电机工程等许多纯粹实用的问题中, 函数的傅里叶级数展开式或调和分析是不可缺少的. 但在这些情形下, 很少要直接利用欧拉-傅里叶公式来计算展开式的系数:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \text{ ②} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

①参考在第 679 目 6) 的脚注.

②在这里, 我们回到用  $a_0$  (而不用  $\frac{a_0}{2}$ ) 来表示三角展开式中的常数项.



我们要对给出的函数应用调和分析,但是问题在于这些函数通常是用数值表或图解给出的.因此,我们没有函数的分析表示式;有时应用调和分析就是为了用这种方法求得函数的分析表示式(即令是近似的也好).在这些条件下,必须用近似法计算傅里叶系数,当然,在实用上只需要用到三角展开式的前若干项,在多数情况下,傅里叶级数的系数迅速减小,而较远各调和素的影响也随着迅速减小.

通常先给出(或用图解画出)一系列等距离的纵坐标,即函数  $y$  的一系列数值(与变数  $x$  的等距离的各值相对应).应用第九章 (§5) 中所述的方法,可由这些纵坐标近似地计算出 (22) 中各值.但是在这里,计算十分复杂,为了使计算简化,或如所谓使其自动化,已经得到了许多不同的方法,现在我们说明其中一种方法.

譬如设将  $0$  到  $2\pi$  的区间分成  $k$  个相等的部分,并且已知与分点

$$0, \quad \frac{2\pi}{k}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{k}, \quad \dots, \quad (k-1) \frac{2\pi}{k}, \quad 2\pi$$

相对应的纵坐标是

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y_0.$$

这时由梯形公式 [322], 我们有 (当然只是近似地!)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} \left[ \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k \right].$$

由于函数的周期性,  $y_k = y_0$ , 就可将  $a_0$  的值写作:

$$ka_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \quad (23)$$

同样, 对于 (22) 中其他的积分应用梯形公式, 求得

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[ y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k} \right]$$

或

$$\frac{k}{2}a_m = y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k}, \quad (24)$$

同样得到

$$\frac{k}{2}b_m = y_1 \sin m \frac{2\pi}{k} + y_2 \sin m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \sin m \frac{2(k-1)\pi}{k}. \quad (25)$$

首先令  $k = 12$ , 并且从十二个纵坐标

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$$

出发, 与之相当的有等间隔的变量数值:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

或用度数表示, 则有

$$0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ.$$

根据公式, 需要用来乘这些纵坐标的所有因子不外于下列几个:

$$\pm 1; \quad \pm \sin 30^\circ = \pm 0.5; \quad \pm \sin 60^\circ = \pm 0.866.$$



亦即容易证实

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}; \\ 6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin 30^\circ + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin 60^\circ + (y_0 - y_6); \\ 6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 30^\circ + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9); \\ 6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}; \\ 6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ + (y_3 - y_9); \\ 6b_2 &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ; \\ 6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \text{等等.} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

例如

$$\begin{aligned} 6a_1 &= y_0 + y_1 \cos 30^\circ + y_2 \cos 60^\circ + y_3 \cos 90^\circ + y_4 \cos 120^\circ + y_5 \cos 150^\circ \\ &\quad + y_6 \cos 180^\circ + y_7 \cos 210^\circ + y_8 \cos 240^\circ + y_9 \cos 270^\circ \\ &\quad + y_{10} \cos 300^\circ + y_{11} \cos 330^\circ = y_0 + y_1 \sin 60^\circ + y_2 \sin 30^\circ - y_4 \sin 30^\circ \\ &\quad - y_5 \sin 60^\circ - y_6 - y_7 \sin 60^\circ - y_8 \sin 30^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 60^\circ, \end{aligned}$$

即与上面所写出的表示式相符合.

为了使计算 (特别是乘法) 减少到最低限度, 可用龙格 (C.Runge) 所提出的方法来计算. 先依下面所指出的次序写出纵坐标, 并且对每一组上下成对的纵坐标作加法与减法:

	纵坐标						
	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
	$y_{11}$	$y_{10}$	$y_9$	$y_8$	$y_7$		
和	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
差		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	

然后同样抄下这些和与差, 并且再对它们作加法与减法:

	和					差		
	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		$v_1$	$v_2$	$v_3$
	$u_6$	$u_5$	$u_4$			$v_5$	$v_4$	
和	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	和	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
差	$d_0$	$d_1$	$d_2$		差	$\delta_1$	$\delta_2$	

作了所有这些加法与减法后, 就得到了一系列数值  $s, d, \sigma, \delta$ , 我们可用它们表示出未知系数如下:

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\ 6a_1 &= d_0 + 0.866d_1 + 0.5d_2, \\ 6a_2 &= (s_0 - s_3) + 0.5(s_1 - s_2), \\ 6a_3 &= d_0 - d_2, \\ 6b_1 &= 0.5\sigma_1 + 0.866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6b_2 &= 0.866(\delta_1 + \delta_2), \\ 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3 \text{ 等等.} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

不难证实这些公式恰与公式 (26) 相对应.



727. 例 1) 在图 142 上, 给出了某蒸汽机 (在曲柄梢处) 的切线力的图.<sup>①</sup> 由于曲柄轴的扭转振动的问题, 选定切线力  $T$  的调和素作为曲柄转角  $\varphi$  的函数是有趣的. 从图上取出十二个等距离的纵坐标, 并且用上面所指出的方式进行调和分析:

$T$	-7200	-300	7000	4300	0	-5200	-7400
		250	4500	7600	3850	-2250	
$u$	-7200	-50	11500	11900	3850	-7450	-7400
$v$		-550	2500	-3300	-3850	-2950	
$u$	-7200	-50	11500	11900		-550	-2500
	-7400	-7450	3850			-2950	-3850
$s$	-14600	-7500	15350	11900		-3500	-1350
$d$	200	7400	7650			-3300	
					$\sigma$	2400	6350
					$\delta$		

现由公式 (27):

$12a_0 = -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150,$  $6a_1 = 200 + 7400 \times 0.866 + 7650 \times 0.5 = 10433,$  $6a_2 = (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \times 0.5 = -37925,$  $6a_3 = 200 - 7650 = -7450,$  $6b_1 = -3500 \times 0.5 - 1350 \times 0.866 - 3300 = -6219,$  $6b_2 = (2400 + 6350) \times 0.866 = 7578,$  $6b_3 = -3500 + 3300 = -200,$

$a_0 = 429;$  $a_1 = 1739;$  $a_2 = -6321;$  $a_3 = -1242;$  $b_1 = -1037;$  $b_2 = 1263;$  $b_3 = -33.$

因此

$T = 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos 2\varphi + 1263 \sin 2\varphi - 1242 \cos 3\varphi - 33 \sin 3\varphi + \cdots$

集合含同一角的正弦与余弦的各项:

$T = 430 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) + 1240 \sin(3\varphi + 268^\circ) + \cdots$

我们可看到: 在这里,第二调和素的影响最大.

2) 用函数的图解上的十二个纵坐标, 可以求得傅里叶系数. 为了要知道这种方法的精确度是怎样, 我们将它应用到若干有分析式的函数, 并且将近似的与精确的结果加以比较.

先考虑函数  $f(x)$ , 它在区间  $[0, 2\pi]$  上是由下一公式给定:

$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x),$

而对于其余的值  $x$ , 则由周期规律所确定:

$f(x + 2\pi) = f(x).$

这函数的图解画在图 143 上.

<sup>①</sup>考虑到惯性力, 可由指标图作出类似的图.



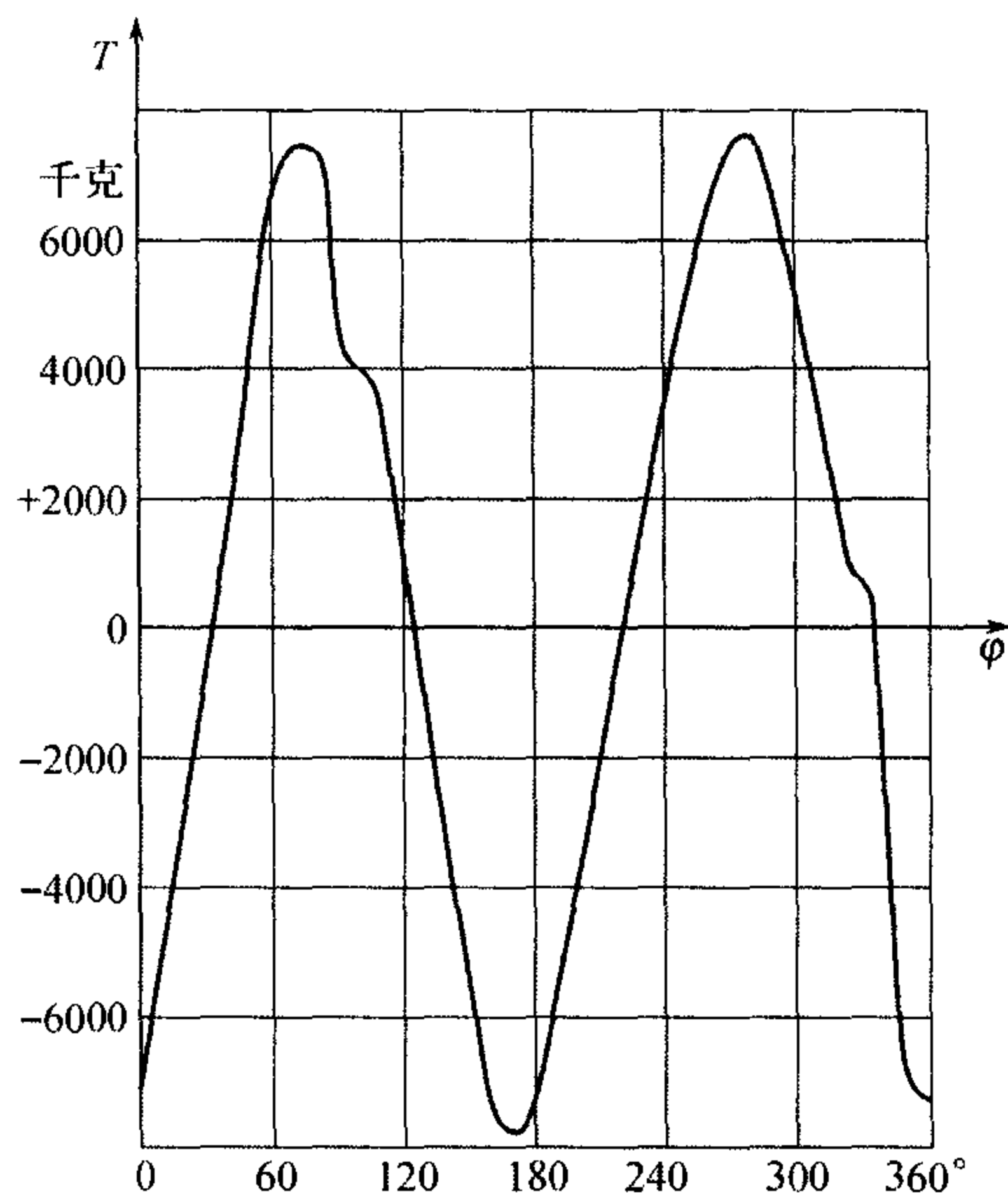


图 142

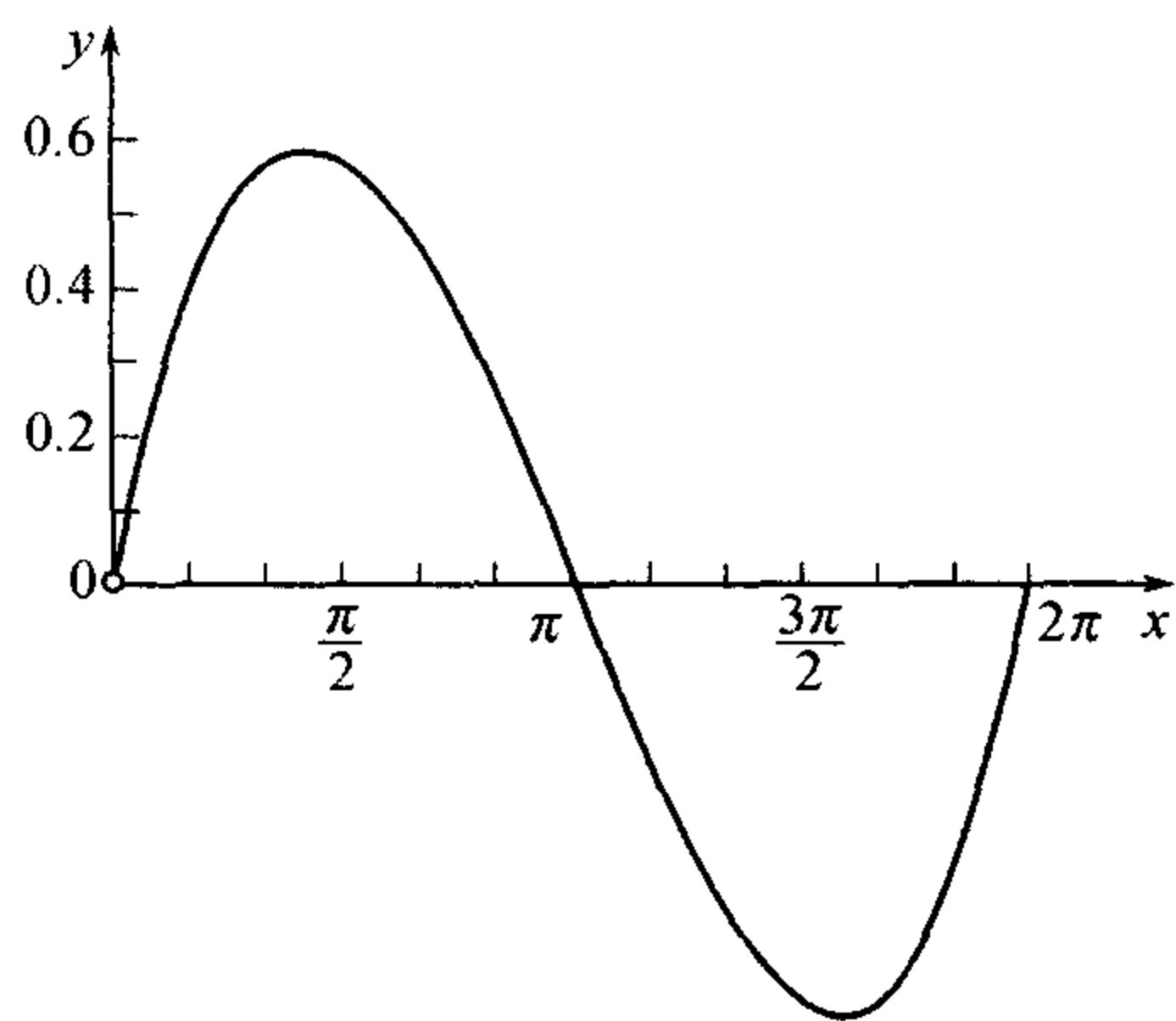


图 143

用计算得出下表:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$y =$	0	0.400	0.582	0.589	0.465	0.255	0
$x =$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$y =$	-0.255	-0.465	-0.589	-0.582	-0.400	0	



在这里可应用不难证实的恒等式:

$$f(2\pi - x) = -f(x).$$

用龙格的方法, 由这些  $y$  的值求得

$$b_1 = 0.608, \quad b_2 = 0.076, \quad b_3 = 0.022;$$

一切数  $u_i$  都是零, 从而一切系数  $a_n$  也都是零 [690, (22)].

同时, 由公式 (22) 直接推出 (应用分部积分三次):

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin mx dx = \frac{6}{m^3 \pi^2},$$

因此

$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0.6079, \quad b_2 = \frac{3}{4\pi^2} = 0.0760, \quad b_3 = \frac{2}{9\pi^2} = 0.0225.$$

与上面的结果相符合!

3) 但是并不是永远可以得到这样精确的结果.

作为第二个例子, 我们取一以  $2\pi$  为周期的函数, 它在区间  $[0, 2\pi]$  上定义如下:

$$y = f(x) = \frac{1}{\pi^2} (x - \pi)^2.$$

它的图解画在图 144 上.

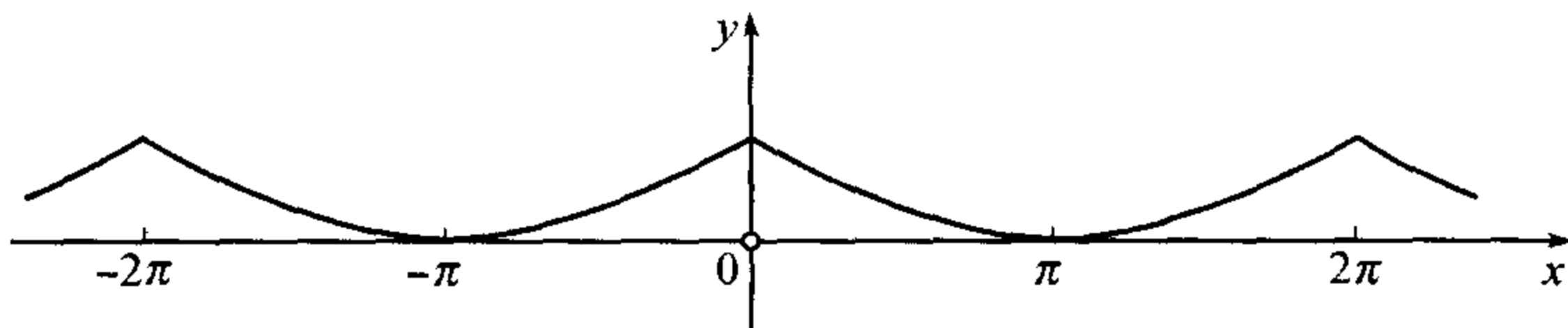


图 144

利用显而易见的恒等式:

$$f(2\pi - x) = f(x),$$

作出下表:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$y =$	1	0.694	0.444	0.250	0.111	0.028	0
$x =$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$y =$	0.028	0.111	0.250	0.444	0.694	1	

这时由龙格的方法, 求得

$$a_0 = 0.338; \quad a_1 = 0.414; \quad a_2 = 0.111; \quad a_3 = 0.056;$$



在这次, 数  $v_i$  与系数  $b_m$  都是零 [690,22)]. 系数的正确的值是:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{3} \doteq 0.333,$$
$$a_m = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos mxdx = \frac{4}{m^2\pi^2} \quad (m \geq 1).$$

特别,

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} \doteq 0.405; \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2} \doteq 0.101; \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \doteq 0.045.$$

这样, 即令前两个系数的相对误差不超过 1.5% ~ 2%, 而后面的系数的误差则达到 10%( $a_2$ ) 甚至 20%( $a_3$ )! 以后 [730] 我们还要研究求得的近似公式的精确性的问题. 但是现在已经可以看出要提高精确性, 必须取较多的纵坐标.

728. 二十四个纵坐标的方法    假定已经给出或已经从图解取出与幅角的值

$$0, \quad \frac{\pi}{12}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \cdots, \quad \frac{23\pi}{12},$$

或

$$0^\circ, \quad 15^\circ, \quad 30^\circ, \quad 45^\circ, \quad \cdots, \quad 345^\circ$$

相对应的二十四个纵坐标

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_{23}.$$

在这次, 近似计算傅里叶系数时所必须与纵坐标相乘的因子不外乎下列几个:

$$\pm 1, \quad \pm \sin 30^\circ, \quad \pm \sin 45^\circ, \quad \pm \sin 60^\circ, \quad \pm \sin 75^\circ.$$

我们现不详细讨论 (因为与前面的讨论完全相仿), 而立即引入还是由龙格所提出的计算方法. 在读者有了经验后, 不必加以说明, 这种方法也是很明显的. 它就是:

	纵 坐 标												
	$y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ y_9 \ y_{10} \ y_{11} \ y_{12}$												
	$y_{23} \ y_{22} \ y_{21} \ y_{20} \ y_{19} \ y_{18} \ y_{17} \ y_{16} \ y_{15} \ y_{14} \ y_{13}$												
和	$u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12}$												
差	$v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{10} \ v_{11}$												
	和						差						
	$u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6$						$v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6$						
	$u_{12} \ u_{11} \ u_{10} \ u_9 \ u_8 \ u_7$						$v_{11} \ v_{10} \ v_9 \ v_8 \ v_7$						
和	$p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6$						和	$r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \ r_6$					
差	$q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5$						差	$s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5$					
	和						差						
	$p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3$						$s_1 \ s_2 \ s_3$						
	$p_6 \ p_5 \ p_4$						$s_5 \ s_4$						
和	$k_0 \ k_1 \ k_2 \ k_3$						和	$m_1 \ m_2 \ m_3$					
差	$l_0 \ l_1 \ l_2$						差	$n_1 \ n_2$					



我们注意不要对于  $q$  与  $r$  各数量作加法及减法.

由所指出的方法求得数量  $k, l, m, n, p, q$ , 及  $r$  后, 用它们将傅里叶系数表示如下:

$$\begin{aligned}
 24a_0 &= k_0 + k_1 + k_2 + k_3, \\
 12a_1 &= [q_0 + 0.5q_4 + 0.6124(q_1 + q_5)] + [0.8660q_2 + 0.7071q_3 + 0.3536(q_1 - q_5)], \\
 12a_2 &= l_0 + 0.8660l_1 + 0.5l_2, \\
 12a_3 &= (q_0 - q_4) + 0.7071(q_1 - q_3 - q_5), \\
 12a_4 &= (k_0 - k_3) + 0.5(k_1 - k_2), \\
 12a_5 &= [q_0 + 0.5q_4 + 0.6124(q_1 + q_5)] - [0.8660q_2 + 0.7071q_3 + 0.3536(q_1 - q_5)], \\
 12a_6 &= l_0 - l_2, \\
 12b_1 &= [0.5r_2 + r_6 + 0.6124(r_1 + r_5)] + [0.7071r_3 + 0.8660r_4 - 0.3536(r_1 - r_5)], \\
 12b_2 &= 0.5m_1 + 0.8660m_2 + m_3, \\
 12b_3 &= (r_2 - r_6) + 0.7071(r_1 + r_3 - r_5), \\
 12b_4 &= 0.8660(n_1 + n_2), \\
 12b_5 &= [0.5r_2 + r_6 + 0.6124(r_1 + r_5)] - [0.7071r_3 + 0.8660r_4 - 0.3536(r_1 - r_5)], \\
 12b_6 &= m_1 - m_3, \text{ 等等.}
 \end{aligned} \tag{28}$$

用二十四个纵坐标, 求其余的系数, 则其精确度逐渐减低.

请读者注意一个细节的问题. 为了得到系数  $a_1$  与  $a_5$  必须先分别计算在方括弧中的表示式, 然后将它们相加(在求  $a_1$  时)及相减(在求  $a_5$  时). 计算系数  $b_1$  与  $b_5$  也与此相仿.

**729. 例** 1) 再回到图 142 上所作出的切线力的图, 从其中取出二十四个纵坐标, 应用新的方法重新进行调和分析:

$T$	-7200	-4150	-300	3250	7000	7450	4300	2750
		-5150	250	2300	4500	6800	7600	6400
$u$	-7200	-9300	-50	5550	11500	14250	11900	9150
$v$		1000	-550	950	2500	650	-3300	-3650

$T$	0	-2650	-5200	-7700	-7400
	3850	650	-2250	-4850	
$u$	3850	-2000	-7450	-12550	-7400
$v$	-3850	-3300	-2950	-2850	

$u$	-7200	-9300	-50	5550	11500	14250	11900
	-7400	-12550	-7450	-2000	3850	9150	
$p$	-14600	-21850	-7500	3550	15350	23400	11900
$q$	200	3250	7400	7550	7650	5100	

$v$	1000	-550	950	2500	650	-3300
	-2850	-2950	-3300	-3850	-3650	
$r$	-1850	-3500	-2350	-1350	-3000	-3300
$s$	3850	2400	4250	6350	4300	



$p$	-14600	-21850	-7500	3550	$s$	3850	2400	4250
	11900	23400	15350			4300	6350	
$k$	-2700	1550	7850	3550	$m$	8150	8750	4250
$l$	-26500	-45250	-22850		$n$	-450	-3950	

于是按照公式 (28)

$a_0 = 427, \quad a_1 = 1685, \quad a_2 = -6426, \quad a_3 = -1175, \quad a_4 = -783,$   
 $a_5 = -163, \quad a_6 = -304, \quad b_1 = -938, \quad b_2 = 1325, \quad b_3 = -87,$   
 $b_4 = -318, \quad b_5 = -398, \quad b_6 = 325.$

故求得展开式:

$T = 427 + 1685 \cos \varphi - 938 \sin \varphi - 6426 \cos 2\varphi + 1325 \sin 2\varphi - 1175 \cos 3\varphi - 87 \sin 3\varphi$   
 $- 783 \cos 4\varphi - 318 \sin 4\varphi - 163 \cos 5\varphi - 398 \sin 5\varphi - 304 \cos 6\varphi + 325 \sin 6\varphi + \cdots,$

或者合并各项并加括弧:

$T = 430 + 1930 \sin(\varphi + 119^\circ) + 6560 \sin(2\varphi + 282^\circ) + 1180 \sin(3\varphi + 266^\circ)$   
 $+ 845 \sin(4\varphi + 248^\circ) + 430 \sin(5\varphi + 202^\circ) + 445 \sin(6\varphi + 317^\circ) + \cdots$

比较这个展开式与第 727 目,1) 中所求出的同一量  $T$  的展开式, 我们看到对于前三个调和素, 其符合程度多少令人满意.

2) 请读者计算第 727 目,3) 中所提出的曲线

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$$

的二十四个纵坐标, 并且利用已指出的方法, 求出系数  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  的近似值.

答  $a_0 \doteq 0.334; a_1 \doteq 0.407; a_2 \doteq 0.104; a_3 \doteq 0.047; a_4 \doteq 0.028; a_5 \doteq 0.019; a_6 \doteq 0.014$ , 而这时正确的数值是:

$a_0 \doteq 0.333; a_1 \doteq 0.405; a_2 \doteq 0.101; a_3 \doteq 0.045; a_4 \doteq 0.025; a_5 \doteq 0.016; a_6 \doteq 0.011.$

为了近似计算函数三角展开式的系数, 除了上面的方法以外, 还有其他的方法: 例如十六个或三十二个纵坐标法 (在航海中, 当研究罗盘的偏差时, 通常要用到这种方法), 三十六个纵坐标法 (在电机工程上采用), 等等. 也还有自动安排计算的各种方法. 在所有这些情形下, 当实际计算傅里叶系数时用来简化计算的方法, 其实质与上面的方法相同.

**730. 傅里叶系数的近似值与精确值的比较** 如果函数  $y = f(x)$  是在区间  $[0, 2\pi]$  上用分析式给出的并且是二阶可微分的, 则可与通常一样 [326], 对于上面所得到的傅里叶系数的近似公式, 求出误差. 在这里, 我们还有另一目的, 就是要作出已给系数的近似值与这系数及其他系数的精确值之间的关系式. 虽然从这些关系式不能导出误差的估计值, 但是还是阐明了整个问题, 并且指出了问题应有的方向.



我们假定所考虑的函数  $y = f(x)$  的区间  $[0, 2\pi]$  上有傅里叶展开式:

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

在这里, 我们故意用大写字母表示傅里叶系数, 使得它们与小写字母所表示的近似值有所区别. 在所写出的等式中, 令  $x = \frac{2i\pi}{k} (i = 0, 1, \dots, k-1)$ , 我们计算出函数的各特别值  $y_i$ :

$$y_i = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{2in\pi}{k}.$$

它们是要在系数近似值的公式 (23), (24) 与 (25) 中出现的.

将  $y_i$  代入上述第一个公式; 交换求和的次序, 我们求得:

$$a_0 = \frac{1}{k} \left\{ kA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos \frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \sin \frac{2in\pi}{k} \right\}.$$

可是不难看出和式

$$\sum_{i=0}^{k-1} \cos \frac{2in\pi}{k}, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \sin \frac{2in\pi}{k}$$

除去  $n$  是  $k$  的倍数的情形外, 都等于零; 而在  $n$  是  $k$  的倍数时, 第一个和式的值是  $k$  (这时第二个和式等于零). 由此立刻得到

$$a_0 = A_0 + A_k + A_{2k} + A_{3k} + \dots \quad (29)$$

将  $y_i$  的表示式代入公式 (24), 并且重新交换求和的次序, 我们得到:

$$\begin{aligned} a_m = \frac{2}{k} & \left\{ A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} \cos i \frac{2n\pi}{k} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} \sin i \frac{2n\pi}{k} \left. \right\} = \frac{1}{k} \left\{ 2A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2(n+m)\pi}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2(n-m)\pi}{k} \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \sin i \frac{2(n+m)\pi}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \sin i \frac{2(n-m)\pi}{k} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

在这里, 也只有当余弦和式所含的因子  $n \pm m$  是  $k$  的倍数时 (也就是当  $n$  的值具有  $pk \pm m$  的形式时, 其中  $p$  是整数), 这些和式才不等于零 (而等于  $k$ ). 如果为了明确起见, 设  $2m \leq k$ , 则对于  $a_m$ , 得到级数如下:

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \dots \quad (30)$$

与这完全相仿, 可得

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \dots \quad (31)$$



这就是我们所想要建立的公式.

由此我们就看出: 譬如说, 只要  $k$  大而  $m$  并不太大,  $a_m$  与  $A_m$  的差是若干个有较大的附标的系数  $A$  的和式. 显然在近似值的精确性的问题中, 傅里叶系数减小的速度起着重要的作用, 而我们知道 [706~708] 这种速度又与延拓在整个区间  $(-\infty, +\infty)$  上的函数的可微分性相关. 第 727 目的例 2) 与 3) 很好地表明了这种情况: 请读者注意例 3) 的图解上的尖点!

令  $k = 12$ , 我们特别有 (限于取余弦的系数为例):

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 + A_{12} + \cdots, & a_1 &= A_1 + A_{11} + \cdots, \\ a_2 &= A_2 + A_{10} + \cdots, & a_3 &= A_3 + A_9 + \cdots \end{aligned}$$

并且同时有

$$a_5 = A_5 + A_7 + \cdots, \quad a_6 = 2A_6 + \cdots (!)$$

等等. 由此可见: 超出了前面两、三个调和素的范围以外, 不可能期望有多少令人满意的精确性.

当转到  $k = 24$  时, 就立刻改善了这些结果:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 + A_{24} + \cdots, & a_1 &= A_1 + A_{23} + \cdots, \\ a_6 &= A_6 + A_{18} + \cdots, & & \text{等等.} \end{aligned}$$

在这里, 一般说来, 对于前面七、八个调和素, 可期望有较好的精确性.



## 第二十章 傅里叶级数 (续)<sup>①</sup>

### §1. 傅里叶级数的运算 · 完全性与封闭性

**731. 傅里叶级数的逐项积分法** 与通常一样, 假定函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上绝对可积. 设它的傅里叶级数是

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1)$$

考虑关于  $-\pi \leq x \leq \pi$  的函数

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx, \quad (2)$$

显然它是连续的, 并且有有界变差 [486, 7°; 568, 4°]; 而且因为

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \pi a_0 = 0, \quad (3)$$

所以它有周期  $2\pi$ . 在这种情形下, 由第 686 目的定理, 可将这个函数在整个区间上展开为傅里叶级数:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (4)$$

---

<sup>①</sup>第十九章主要是讨论函数的傅里叶收敛级数展开式; 在那章中, 这些级数是作为计算的工具而研究的. 在本章中, 我们要从较一般的观点出发, 并且叙述一系列主要在理论上有意义的重要问题.



(而且根据 699, 这级数一致收敛于这个函数).

级数 (1) 及 (4) 的系数之间存在着简单的联系. 实际上, 如果利用第 580 目, 9) 中所推广了的分部积分公式, 则有 (对  $n \geq 1$ )

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

即

$$A_n = -\frac{b_n}{n}.$$

同样, 在这次考虑等式 (3), 我们得到

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

为了求出  $A_0$ , 在 (4) 中令  $x = 0$ :

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (5)$$

在展开式 (4) 中, 代入所求得各系数的值, 则能将它改写为下列形式:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)}{n}.$$

由此, 如果考虑等式 (2), 我们有

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x [a_n \cos nx + b_n \sin nx] dx. \quad (6)$$

显然, 对于任意区间  $[x', x'']$  (其中  $-\pi \leq x' < x'' \leq \pi$ ), 相似的关系式成立:

$$\int_{x'}^{x''} f(x) dx = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] dx.$$

因此, 函数  $f(x)$  的积分可将与它相应的傅里叶级数逐项积分而求得. 我们已经证明: 即令不假定傅里叶级数 (1) 本身收敛于函数  $f(x)$ , 还恒可将它逐项积分, 这个事实很值得注意.

显然可选取另外任一个长为  $2\pi$  的区间来代替  $[-\pi, \pi]$  作为基本区间. 关于在区间  $[0, \pi]$  上且只含余弦或正弦的级数 [689], 这里所讲到的一切也还是完全一样.

积分已知的三角展开式, 可得到另外一些展开式. 如果还是要得到三角展开式, 则应将 (6) 中的  $\frac{a_0}{2}$  这一项移到等式的另一端. 需要注意常数项  $\frac{A_0}{2}$ : 直接由级数 (5) 求和, 或者按照下一公式求积分:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt,$$



就能得到  $\frac{A_0}{2}$  的有限形状.

我们举例说明此点. 如果从 0 到  $x$  积分下一展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

[参考 690, 2], 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + c \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

其中  $c$  或为级数之和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

所确定, 或为积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

所确定. 这样, 我们得到了 690, 9) 中已经独立求得的展开式. 同样, 7)(a) 中的展开式可由 7)(6) 中的展开式求得, 等等.

**附注** 我们着重指出已作的讨论顺便证明了这个事实: 不论区间  $[-\pi, \pi]$  上的绝对可积函数  $f(x)$  是怎样, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (5^*)$$

必收敛, 其中  $b_n$  是  $f(x)$  的傅里叶级数的正弦项的系数[参考 692, 2°]. 在下面 758 中, 我们要用到这个附注.

**732. 傅里叶级数的逐项微分法** 设在区间  $[-\pi, \pi]$  上给出一连续函数  $f(x)$ , 它满足条件  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 并且有 (只可能除了在有限个孤立点处外) 导数  $f'(x)$ ; 又设这个导数在所述的区间上绝对可积分. 这时

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + f(0)$$

[310, 481], 并且如我们刚才已看出, 函数  $f(x)$  的傅里叶级数 (1) 可由函数  $f'(x)$  的傅里叶级数

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx \quad (7)$$

逐项积分而得, 因为根据对  $f(x)$  所加的条件, 上一展开式中没有常数项:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$



在这种情形下, 显然反过来 —— 导数  $f'(x)$  的级数 (7) 可由函数  $f(x)$  的级数 (1) 逐项微分而得.

我们请读者特别注意函数  $f(x)$  的周期性这一假定在这里所起的作用. 当这个条件不成立时,  $f'(x)$  的傅里叶级数的常数项  $\frac{a'_0}{2}$  不等于零, 因此这个级数不能由级数 (1) 逐项微分而得! 例如在展开式 ( $a$  不是整数)

$$\frac{\pi \sin ax}{2 \sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^2 - n^2} \sin nx$$

[690, 7(6)] 的情形下, 逐项微分后得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{a^2 - n^2} \cos nx,$$

它显然不可能是傅里叶级数, 因为它的系数甚至不趋近于零 [682].

**附注** 直到现在为止, 我们已讲过: 将原有函数  $f(x)$  的傅里叶级数逐项微分, 可能求得导数  $f'(x)$  的傅里叶级数 (7). 我们完全没有说到级数 (7) 收敛于  $f'(x)$ ; 应当利用若干充分判别法, 来特别判断这种收敛性 [684, 686].

必须注意: 由于在微分  $\cos nx$  与  $\sin nx$  时有自然数因子  $n$  出现, 所以系数的无穷小阶降低, 并且收敛的机会也减少了. 然而在利用傅里叶级数解决数学物理中的问题时, 往往必须微分这些级数, 而且甚至于要重微分. 为了保证所得的级数收敛, 依照克雷洛夫 [710] 的方法, 预先分出收敛得较慢的部分有时是有用的. 这时, 已知分出了的部分的和的有限形式, 从而可以直接微分, 而余下的级数的系数必须达到的这样的无穷小阶, 使得微分后还是得到一致收敛级数.

**733. 三角函数系的完全性** 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数  $f(x)$  有全等于零的傅里叶系数, 则这函数本身恒等于零. 实际上, 在这种情形下, 由等式 (6) 显然可知: 对于一切  $x$ ,

$$\int_0^x f(x) dx = 0; \quad (8)$$

由此对  $x$  微分, 根据被积函数的连续性 [305, 12°], 我们就得到恒等式

$$f(x) = 0.$$

换句话说, 除了恒等于零的函数外, 在区间  $[-\pi, \pi]$  ① 上没有连续函数与三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (9)$$

中的一切函数正交 [679]. 这个事实可说是表明: 三角函数系在连续函数类中是完全的.

①或在另外任一长为  $2\pi$  的区间上.



如果两连续函数有相同的傅里叶系数, 则它们必恒等, 因为它们的差  $f_1(x) - f_2(x)$  有完全等于零的傅里叶系数. 因此, 连续函数由它的傅里叶系数唯一地确定. 这只是三角函数系的完全性的另外一种表述法.

如果转而考虑不连续函数, 则情况可能不同. 譬如说, 只在有限个点处不等于零的函数已不“恒”等于零, 但显然这时它与 (9) 中任一函数正交, 而且也与每个 (常义或非常义) 可积分函数正交. 我们可作出一个在无穷点集上不等于零的函数, 但仍具有上述性质. 例如下函数  $f(x)$  [70,8), 300,1] 就是这样: 如果  $x$  是形如  $\pm \frac{p}{q}$  ( $\frac{p}{q} < \pi$ ) 的既约分数, 则  $f(x)$  等于  $\frac{1}{q}$ ; 而在区间  $[-\pi, \pi]$  上的其余各点,  $f(x)$  等于零.

然而在所考虑的区间上, 与每个一般可积分函数正交的函数“在实质上”与零没有区别; 我们称这种函数与零等价.

现在可证明: 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上绝对可积分函数  $f(x)$  的傅里叶系数都等于零, 则这函数必与零等价.

实际上, 如果  $g(x)$  是常义可积分的任一函数, 则由 579,1°,

$$(R) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = (S) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dF(x),$$

其中  $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ . 在所作的假定下,  $F(x) = 0$  [参考 (8)], 因此  $f(x)$  与  $g(x)$  正交.

由此不难转到  $g(x)$  是非常义可积的情形. 例如设点  $\pi$  是它的唯一的奇异点. 则在  $[-\pi, \pi - \varepsilon]$  上 ( $\varepsilon > 0$ ), 令  $g^*(x) = g(x)$ , 在  $(\pi - \varepsilon, \pi]$  上, 令  $g^*(x) = 0$ , 由前证可知:

$$\int_{-\pi}^{\pi - \varepsilon} f \cdot g dx = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g^* dx = 0.$$

现在只要取  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的极限.

推广“完全性”的概念, 我们可断定: 三角函数系 (9) 在绝对可积函数类中是完全的. 这个断语的意义是: 除了与零等价的函数外, 在区间  $[-\pi, \pi]$  上没有绝对可积函数与 (9) 中一切函数正交.

最后, 如果两个绝对可积函数有相同的傅里叶系数, 则它们的差与零等价. 如果不认为这种函数“在实质上”有区别, 我们在某种意义上也可说绝对可积函数是由它的傅里叶系数所唯一确定的.

**附注** 关于只在区间  $[0, \pi]$  上的函数系

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

或

$$\sin x, \quad \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots,$$

以上所述的一切还是成立.



**734. 函数的一致近似法 · 魏尔斯特拉斯定理** 如果用函数  $g(x)$  “接近”<sup>①</sup> 在区间  $[a, b]$  上的某一函数  $f(x)$ , 则能根据各种情况, 分别估计这种近似法的性质. 但是当然在所有的情形下, 基本上还是要考虑差式

$$r(x) = f(x) - g(x).$$

如果我们同样注意一个函数与另一函数在一切分别取出的点处的小偏差, 则可取它们的最大偏差, 即数

$$\delta = \sup_{a \leq x \leq b} |r(x)|$$

作为近似的尺度. 在这种情形下, 我们说这是函数  $f(x)$  借助于函数  $g(x)$  的一致近似法.

我们将导出关于连续函数一致近似法的两个基本的魏尔斯特拉斯定理, 在第一个定理中用到三角多项式, 在第二个定理中用到通常的 (代数) 多项式.

**定理 1** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续并且满足条件

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

则无论数  $\varepsilon > 0$  是怎样, 可找到三角多项式

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

使得对于在上述区间上的一切值  $x$  不等式

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (10)$$

一致成立.

首先作出逐段线性的函数  $\varphi(x)$ , 使得在  $[-\pi, \pi]$  上不等式

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

处处成立.

为了要达到这个目的, 用点

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_k = \pi$$

将区间  $[-\pi, \pi]$  分成这样小的部分, 使得在每一个部分上, 函数  $f$  的振幅  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . 我们在区间  $[-\pi, \pi]$  上确定函数  $\varphi(x)$ , 令它在每个个别的区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上等于线性函数

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i),$$

<sup>①</sup>这就是近似地表示的意思



则它在区间的端点与  $f(x)$  符合. 在实质上, 这就是在由方程  $y = f(x)$  所表示的曲线上作内接折线. 如果用  $m_i$  及  $M_i$  表示函数  $f$  在第  $i$  个区间上的最小值与最大值, 则根据条件,  $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$ , 又因为在这个区间上, 函数  $f$  与  $\varphi$  的值均包含在  $m_i$  与  $M_i$  之间, 所以不等式 (11) 在整个区间  $[-\pi, \pi]$  上成立.

与  $f(x)$  一样, 函数  $\varphi(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续, 并且满足条件

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi);$$

而且作为逐段单调的函数, 它在这区间上有有界变差 [568, 1°]. 在这些条件下, 根据狄利克雷-若尔当判别法 [699], 可将  $\varphi(x)$  展开为一致收敛的傅里叶级数:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx.$$

因此当  $n$  充分大时, 如果取这级数的第  $n$  个部分和作为多项式  $T(x)$ , 则它与  $\varphi(x)$  的差小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ : 即关于所考虑的  $x$  的一切值,

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

从 (11) 与 (12) 就得到 (10).

我们现在取递减到零的正数序列  $\{\varepsilon_k\}$ , 并且对于每个数  $\varepsilon = \varepsilon_k$ , 作出在已证的定理中所指出的多项式  $T = T_k(x)$ ; 这样得到一个三角多项式的序列  $\{T_k(x)\}$ , 它在区间  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛于函数  $f(x)$ . 用通常的方式 [427] 从序列转到无穷级数, 我们得到这定理的另一种表述法, 它与前面的表述法显然是同等的: 在定理 1 中所指出的条件下, 可将函数  $f(x)$  展开为一致收敛的级数, 其中各项是三角多项式.

由定理 1 就不难导出

**定理 2** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则无论数  $\varepsilon > 0$  是怎样, 可找到这样的整<sup>118)</sup>代数多项式

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

使得关于在  $[a, b]$  上  $x$  的一切值, 不等式

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

一致成立.

通过简单的代换

$$x = a + \frac{x'}{\pi}(b - a),$$

<sup>118)</sup>在涉及代数多项式时, 使用形容词“整”, 是为了强调在记法  $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$  中出现的仅仅是变量  $x$  的自然数幂.



我们能够在区间  $[0, \pi]$  上讨论这个问题, 因为  $x'$  的整多项式显然也是  $x$  的整多项式. 为了不使符号复杂, 认为原来给出的区间就是  $[0, \pi]$ .

现在将函数  $f(x)$  延拓到整个区间  $[-\pi, \pi]$  上, 令

$$f(-x) = f(x) \quad (0 < x \leq \pi).$$

这样函数还是保持着连续性, 并且显然满足条件  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 在这种情形下, 根据定理 1, 可以找到这样的三角多项式  $T(x)$ , 使得关于在  $-\pi$  与  $\pi$  之间的一切值  $x$ , 我们有

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

如果将  $T$  中的每个三角函数用它的  $x$  的幂级数展开式 [404] 来代替, 则也可将函数  $T$  表示为处处收敛的幂级数:

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

这个级数在区间  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛; 因此当  $n$  充分大时, 如果令这级数的第  $n$  个部分和就是多项式  $P(x)$ , 则关于在区间  $[-\pi, \pi]$  上  $x$  的一切值, 我们有

$$|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

现在只要比较 (14) 与 (15), 即得 (13).

与前面相仿, 我们能给出这个定理的另一种表述法: 我们可将在区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f(x)$  展开为一致收敛的级数, 其中各项是整代数多项式.

**735. 函数的平均近似法 · 傅里叶级数的部分和的极值性质** 当用函数  $g(x)$  接近在区间  $[a, b]$  上的函数  $f(x)$  时, 我们可不用一致近似法, 而在另外一种观点上, 要求两函数只是“平均”近似. 在这种情形下, 可取它们的平均偏差

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |r(x)| dx$$

或均方偏差(在下面, 我们总是用这种偏差)

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x) dx}$$

作为近似的尺度. 而且不考虑这一表示式, 而考虑比较简单数量:

$$\Delta = \int_a^b r^2(x) dx = (b-a)\delta''^2,$$

则更为便利.



我们重新考虑区间  $[a, b]$  上平方可积函数的任一正交系  $\{\varphi_m(x)\} (m = 0, 1, 2, \dots)$  [679]. 设  $f(x)$  是在同一区间上所给出的一个平方可积函数, 并且  $n$  是一个固定的自然数. 我们提出这样的问题: 当任意选取系数  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  时, 从前面  $n+1$  个函数  $\varphi$  的一切线性组合

$$\sigma_n(x) = \gamma_0 \varphi_0(x) + \gamma_1 \varphi_1(x) + \dots + \gamma_n \varphi_n(x) \quad (16)$$

中, 找出那样的函数, 在均方偏差的意义下, 最好近似于函数  $f(x)$ . 换句话说, 就是需要使数量

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$$

达到最小值.

在这里, 代入  $\sigma_n(x)$  的展开式, 我们得到

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n \gamma_m \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \\ & + \sum_{m=0}^n \gamma_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x) dx + 2 \sum_{k < m} \gamma_k \gamma_m \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx. \end{aligned}$$

由于函数系的正交性, 最后一个和式等于零. 引入常数

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x) dx$$

及函数  $f(x)$  的 (广义) 傅里叶系数

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx,$$

则可将  $\Delta_n$  的表示式改写成下列形式:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m \gamma_m + \sum_{m=0}^n \lambda_m \gamma_m^2.$$

为了要在和式符号后得到完全平方, 必须在那里再引入  $\lambda_m c_m^2$  诸项. 对这些项附加加号及减号, 最后就得到:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^n \lambda_m (\gamma_m - c_m)^2.$$

现在显然可见: 当最后一个和式等于零时, 也就是当

$$\gamma_0 = c_0, \quad \gamma_1 = c_1, \quad \dots, \quad \gamma_n = c_n$$



时,  $\Delta_n$  达到它的最小值.

因此, 在一切形如 (16) 的多项式中, 恰好是 (广义) 傅里叶级数的部分和

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

使得数量  $\Delta_n$  达到它可能取得的最小值:

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2. \quad (17)$$

在某种意义下, 傅里叶系数作为一切可能的系数中“最好”的系数, 重新吸引了我们的注意! 重要的是在这里应当指出: 如果某些系数对于固定的  $n$  是“最好的”, 则它们对于较大的值  $n$  也还是“最好的”, 不过这时还要加上一些新的系数罢了!

等式 (17) 称为贝塞尔恒等式. 从这恒等式可推得不等式

$$\sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

及 (如果当  $n \rightarrow +\infty$  时取极限)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (18)$$

这是贝塞尔不等式. 巧妙的是只要函数  $f(x)$  平方可积分, (18) 中的级数永远是收敛的.

当  $n$  增加时, 既然  $\delta_n$  的表示式 (17) 中加入了新的负数项, 所以  $\delta_n$  减小.  $n$  越大, 则和式  $s_n(x)$  越“平均”接近于所考虑的函数  $f(x)$ . 于是自然产生了这个问题: 增大  $n$  是否可以得到任意小的均方偏差, 即是否可以使得当  $n \rightarrow \infty$  时  $\delta_n$  趋近于零?

如果这点成立, 则可说和式  $s_n(x)$  “平均”收敛于函数  $f(x)$  [我们强调指出: 这样完全不假定  $s_n(x)$  在通常字面的意义下“点性”收敛于  $f(x)$ ]. 由贝塞尔恒等式, 显然可见这时 (并且只在这时) 等式 [参考 (18)]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x) dx$$

成立. 我们随着斯捷克洛夫称它是封闭性方程. 但是通常称它是帕塞瓦尔 (M.A. Parseval) 公式, 即由 19 世纪初年考虑过 (三角函数系的) 类似公式的一位数学家而得名 (但是他的讨论是没有根据的).

如果封闭性方程对于每一平方可积分的函数  $f(x)$  成立, 则函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  称为封闭的.

现在我们将整个所讲到的特别应用到三角函数系 (9). 则在进行讨论时, 须用三角多项式

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^n A_m \cos mx + B_m \sin mx$$



来代替 (16), 并且研究由它所给出而由数量

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

所表征的“平均”近似法. 我们看到: 当  $n$  固定时, 傅里叶级数的相应的部分和

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

使得数量  $\Delta_n$  达到它的最小值. 这个最小值是由等式

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right\} \quad (19)$$

(“贝塞尔恒等式”) 所给出的. 与一般情形一样. 由此可见由傅里叶系数的平方所组成的级数收敛:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

(“贝塞尔不等式”).

关于所考虑的具体的函数系 (9), 我们就可完全解决在一般情形下所提出的问题, 解见下目.

**736. 三角函数系的封闭性 · 李雅普诺夫定理** 下面一个值得注意的定理首先是由李雅普诺夫所严格证明的 (关于有界函数的情形).

**定理** 无论平方可积分函数  $f(x)$  是怎样, 永远有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

并且封闭性方程成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (20)$$

我们将证明分成几个阶段:

1° 如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续并且满足条件  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则根据魏尔斯特拉斯第一定理, 有三角多项式  $T(x)$  存在 (我们在这里用  $N$  表示它的阶次), 使得

$$|f(x) - T(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}},$$

其中  $\varepsilon$  是预先任意给出的正数. 这时

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon.$$



既然可将  $T(x)$  随意看作任一阶次为  $n \geq N$  的三角多项式, 则根据傅里叶级数的部分和的极端性质 [735], 当  $n \geq N$  时, 更应有

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

因此当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\delta_n \rightarrow 0$ .

2° 为了要延拓这个结论到另外的情形, 我们先建立一个辅助的不等式.

如果将一个平方可积分函数  $f(x)$  表示为两个平方可积分函数之和的形式:  $f'(x) + f''(x)$ , 则当用撇号表示与它们相对应的数量时, 我们有

$$f(x) - s_n(x) = [f'(x) - s'_n(x)] + [f''(x) - s''_n(x)],$$

从而

$$[f(x) - s_n(x)]^2 \leq 2\{[f'(x) - s'_n(x)]^2 + [f''(x) - s''_n(x)]^2\}, \quad ①$$

而且进一步有

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \leq 2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - s'_n(x)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [f''(x) - s''_n(x)]^2 dx \right\}$$

或者简单地写作:

$$\delta_n \leq 2\{\delta'_n + \delta''_n\}.$$

最后, 我们注意: 从 (应用到函数  $f'$  的) 贝塞尔恒等式 [参考 (19)] 可推得

$$\delta''_n \leq \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx.$$

因此, 结果得到

$$\delta_n \leq 2\{\delta'_n + \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx\}. \quad (21)$$

这就是我们需要的不等式.

3° 现在设函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上常义可积分 (那么它是有界的). 我们可认为  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 因为如果需要的话, 只要改变函数在区间的一个端点上的值. 与证明魏尔斯特拉斯第一定理 [734] 时相同, 作出辅助函数  $\phi(x)$ , 但在这次我们选取区间的细分法使得

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega},$$

①在这里, 我们应用了初等不等式

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$



其中  $\varepsilon$  是预先任意取定的正数,  $\omega_i$  是函数  $f$  在第  $i$  个部分区间上的振幅,  $\Omega$  是函数  $f$  在  $-\pi$  到  $\pi$  的整个区间上的完全振幅 [297].

令

$$f' = \varphi, \quad f'' = f - \varphi.$$

根据 1°, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\delta'_n \rightarrow 0$ , 因此从  $n$  的某一值开始,

$$\delta'_n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在另一方面, 因为在第  $i$  个部分区间上

$$|f''(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \omega_i,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''^2 dx \leq \sum_i \omega_i^2 \Delta x_i \leq \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

现在根据 (21), 已经显然可见: 对于充分大的  $n$ ,

$$\delta_n < \varepsilon,$$

等等.

4° 最后, 设函数  $f(x)$  是非常义可积分的, 但是必须是平方可积的. 为了简单起见, 我们假定在这里  $x = \pi$  是  $f$  (与  $f^2$ ) 的唯一的奇异点. 这时对于已给的  $\varepsilon > 0$ , 可找到  $\eta > 0$ , 使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在这种情形下, 令:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } -\pi \leq x < \pi - \eta \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \geq \pi - \eta \text{ 时,} \end{cases}$$

并且相反地令

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } -\pi \leq x < \pi - \eta \text{ 时,} \\ f(x), & \text{当 } x \geq \pi - \eta \text{ 时.} \end{cases}$$

显然

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx = \int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在另一方面, 把刚才所证明的结果应用到常义可积函数  $f'$ . 应用 (21), 我们可以断定这时也有  $\delta_n \rightarrow 0$ . 这样, 李雅普诺夫定理的证明就完成了.

利用上目中所建立的术语, 我们可以说三角函数系是封闭的.



**737. 广义封闭性方程** 设已经给出在区间  $[-\pi, \pi]$  上平方可积的两个函数  $f(x)$  及  $\varphi(x)$ . 如我们所知 [483,6)], 这时函数  $f + \varphi$  与  $f - \varphi$  也是平方可积的. 如果分别用  $a_m, b_m$  与  $\alpha_m, \beta_m$  分别表示函数  $f$  与  $\varphi$  的傅里叶系数, 则显然  $a_m \pm \alpha_m, b_m \pm \beta_m$  是函数  $f \pm \varphi$  的傅里叶系数.

将封闭性方程分别应用到函数  $f + \varphi$  与  $f - \varphi$ , 我们得到

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m + \alpha_m)^2 + (b_m + \beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f + \varphi]^2 dx$$

与

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m - \alpha_m)^2 + (b_m - \beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f - \varphi]^2 dx.$$

如果将这两个等式两端相减, 则当注意到恒等式

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

时, 我们得到广义封闭性方程

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx. \quad (22)$$

当  $\varphi = f$  时, 由此得方程 (20). 这个一般的公式也称为帕塞瓦尔公式.

广义封闭性方程 (22) 与傅里叶级数的逐项积分的问题有极密切的关系. 系数  $\alpha_m, \beta_m$  用它们的积分表示式来代替:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx dx & (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \beta_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx dx & (m = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

把等式 (22) 改写成下列形式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha_0}{2} \varphi(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha_m \cos mx + b_m \sin mx) \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx.$$

由此可见, 上述等式完全与这个断语等价: 用任意的 (平方可积) 函数  $\varphi(x)$  乘 (平方可积) 函数  $f(x)$  的傅里叶级数后, 则能在从  $-\pi$  到  $\pi$  的区间上逐项积分. (这就是说结果得到两个函数的乘积的积分!)

当然, 在这里区间  $[-\pi, \pi]$  可用它的一部分  $[x', x'']$  来代替, 因为这就归结到 (譬如说) 将函数  $\varphi$  用另外一函数来代替: 这个函数在区间  $[x', x'']$  上与  $\varphi$  一致, 而在这区间外则等于零. 当  $\varphi = 1$  时, 我们回到了在 731 中所建立的论断, 但是在这里有一点限制: 我们还须要假定函数  $f$  是平方可积的.



当对  $f$  与  $\varphi$  加上不对称的条件时, 就是减轻一个函数的条件, 而加重另一个函数的条件时, 我们也能证明公式 (22). 杨 (W.H.Young) 像这样推得了下面的定理: 假定函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上绝对可积, 而函数  $\varphi(x)$  有有界变差, 则公式 (22) 成立.

**证明** 要依靠函数  $\varphi(x)$  的傅里叶级数的部分和  $\sigma_n(x)$  的一个性质, 一直到后面我们才证明这个性质 [744, 5°]: 部分和一致有界. 这就是说, 对于  $-\pi \leq x \leq \pi$  与  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$|\sigma_n(x)| \leq L \quad (L = \text{常数}).$$

我们暂时应用这个性质而不加证明.

不失推理的一般性, 可假定函数  $\varphi(x)$  的不连续点都是正则的 [684], 因此永远有

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2};$$

在这种情形下, 根据狄利克雷-若尔当定理 [686], 关于  $x$  的一切值, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \varphi(x),$$

并且同时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)\sigma_n(x) = f(x)\varphi(x).$$

如果  $f(x)$  有界:

$$|f(x)| \leq M \quad (M = \text{常数}),$$

因此

$$|f(x)\sigma_n(x)| \leq ML \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

则由阿尔采拉定理 [526], 我们断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx. \quad (23)$$

对于无界的(但是绝对可积的)函数的情形, 也可断定这个等式正确. 设  $x = \pi$  是  $f(x)$  是唯一的奇异点. 这时首先对于已给的  $\varepsilon > 0$ , 我们选取  $\eta > 0$ , 使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} |f(x)|dx < \varepsilon;$$

同时不等式

$$\left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx \right| < L\varepsilon, \quad \left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\sigma_n(x)dx \right| < L\varepsilon$$

也成立 (无论  $n$  是怎样, 后一不等式成立). 在区间  $[-\pi, \pi - \eta]$  上 [函数  $f(x)$  在这区间上有界] 与 (23) 相似, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\sigma_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\varphi(x)dx.$$

由此就已容易得到等式 (23).



已证的等式只是公式 (22) 的另一种写法, 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right] dx \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \alpha_m + b_m \beta_m).\end{aligned}$$

在与前面不同的条件下, 作为与傅里叶级数的逐项积分法相关的论断, 我们能够重新表述广义封闭性方程. (而且由于在这里对函数  $f$  与  $\varphi$  加上不对称的条件, 所以有两种不同的表述法.) 我们注意这次可得到第 731 目中的命题作为有完全一般的推论.

**738. 傅里叶级数的乘法** 设已知两个函数  $f$  及  $\varphi$ , 与它们的傅里叶级数:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \varphi(x) &\sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).\end{aligned}$$

我们现在提出的问题是: 要将这两函数的乘积  $f\varphi$  写成傅里叶级数:

$$f(x)\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

也就是要将它的系数用已给的系数  $a, b$  与  $\alpha, \beta$  表示出来.

我们假定函数  $f$  与  $\varphi$  平方可积<sup>①</sup>, 于是关于它们的广义封闭性方程 (22) 成立. 这时由它可直接导出系数  $A_0$  的表示式:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m).$$

确定系数  $A_k, B_k$  时 (当  $k = 1, 2, \dots$  时), 也不难归结到应用公式 (22).  $A_k$  的表示式

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi \cos kx dx$$

与  $A_0$  的表示式的区别是用  $\varphi \cos kx$  代替了  $\varphi$ . 我们设法找出  $\varphi \cos kx$  的傅里叶系数:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \cos mx dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m+k)x dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m-k)x dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}), \\ &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} (\beta_{m+k} + \beta_{m-k}),\end{aligned}$$

<sup>①</sup>我们可不这样假定, 而假定函数  $f$  绝对可积,  $\varphi$  有有界变差.



这些公式不但对于  $m \geq k$  成立, 而且对于  $m < k$  也成立, 如果约定令

$$\alpha_{-h} = \alpha_h, \quad \beta_{-h} = -\beta_h$$

的话. 现在又根据公式 (22),

$$A_k = \frac{a_0 \alpha_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}) + b_m (\beta_{m+k} + \beta_{m-k})].$$

同样得到

$$B_k = \frac{a_0 \beta_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\beta_{m+k} - \beta_{m-k}) - b_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k})].$$

这些公式就解决了所提出的问题.

有趣的是应指出: 系数  $A, B$  的这些表示式能够由函数  $f$  与  $\varphi$  的傅里叶级数的形式乘法求得, 如果在乘法中将余弦与正弦的乘积换成它们的和或差, 并且集合各同类项的话. 我们在这里甚至于完全不假定被乘级数收敛, 那么这种情况就更加值得注意了.

**739. 封闭性方程的若干应用** 在傅里叶级数论本身以及在分析学的其他领域中, 封闭性方程有多种多样的应用. 我们用例子来考虑几种应用.

**1° 傅里叶级数的绝对收敛性** 下面的定理是由 S.N. 伯恩斯坦院士所发现的: 如果以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  满足具有指数  $\alpha > \frac{1}{2}$  的利普希茨条件

$$|f(x+h) - f(x)| \leq L|h|^\alpha,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

收敛, 其中  $a_n, b_n$  是函数  $f$  的傅里叶系数.<sup>①</sup>

我们首先注意: 如果

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

则

$$\begin{aligned} f(x \pm h) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m \cos mh \pm b_m \sin mh) \cos mx \\ + (b_m \cos mh \mp a_m \sin mh) \sin mx] \end{aligned}$$

[690, 26)]. 在这种情形下,

$$f(x+h) - f(x-h) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin mh (b_m \cos mx - a_m \sin mx),$$

<sup>①</sup>由此可知级数  $\sum |a_n|$  与  $\sum |b_n|$  分别收敛, 因之对应的傅里叶级数绝对收敛.



并且根据封闭性方程,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 \sin^2 mh.$$

如果现在考虑到利普希茨条件本身, 则可用数  $Ch^{2\alpha}$  估计左端的积分, 其中  $C$  是常数. 取任意的自然数  $N$ , 令  $h = \frac{\pi}{2N}$ , 则

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leq C_1 N^{-2\alpha}$$

(在这里  $C_1$  表示一新常数), 因此更有

$$\sum_{m > \frac{N}{2}}^N \rho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leq C_1 N^{-2\alpha}.$$

但是关于  $m > \frac{N}{2}$ , 显然,

$$\sin^2 \frac{m\pi}{2N} > \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

因而可断定

$$\sum_{m > \frac{N}{2}}^N \rho_m^2 \leq 2C_1 N^{-2\alpha}.$$

特别, 如果选取  $N = 2^\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ , 我们有

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \rho_m^2 \leq 2C_1 \cdot 2^{-2\nu\alpha}.$$

但是根据熟知的不等式 [133, (5a)],

$$\begin{aligned} \sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \rho_m &\leq \left\{ \sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \rho_m^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} 1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2C_1} \cdot 2^{-\nu\alpha} \cdot 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)} = \sqrt{C_1} 2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)}. \end{aligned}$$

求  $\nu = 1, 2, \dots$  时所有类似的不等式的和, 我们得到

$$\sum_{m=2}^{\infty} \rho_m \leq \sqrt{C_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)} < +\infty,$$

因为当  $a > \frac{1}{2}$  时右端的级数收敛. 这样就将定理证明了.

这里得到的结果极为准确: 我们能用例子证明, 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 它就不能成立.

2° 若干不等式的证明 封闭性方程可以用来证明一系列有用的不等式.



我们先研究斯捷克洛夫首先指出并且成功地应用到数学物理上的不等式. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上连续, 并且在这区间上 (只可能有有限个例外点) 有平方可积的导数  $f'(x)$ . 这时如果条件

$$(a) \quad \int_0^\pi f(x) dx = 0$$

或

$$(b) \quad f(0) = f(\pi) = 0$$

中有一个成立, 则不等式

$$\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^\pi [f(x)]^2 dx \quad (24)$$

成立; 而且在情形 (a) 下, 只有当函数有  $f(x) = A \cos x$  的形式时才能得到等式, 在情形 (b) 下, 则只有当函数有  $f(x) = B \sin x$  的形式时, 才能得到等式.

我们从情形 (a) 开始. 在这种情形下, 函数在区间  $[0, \pi]$  上的余弦展开式中缺常数项:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

因为对于函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的偶性延拓, 条件  $f(-\pi) = f(\pi)$  成立, 则根据第 732 目的法则,

$$f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx.$$

不难看出, 封闭性方程在区间  $[0, \pi]$  上关于余弦级数与正弦级数都成立; 现在根据这个方程则有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

并且同时有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

于是可直接推出不等式 (24), 而且显然, 只有如果

$$a_n = 0 \text{ 在 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

也就是如果  $f(x) = a_1 \cos x$ , 则 (24) 中的等式才可能成立.

在情形 (b) 下, 我们同样考虑函数  $f(x)$  的正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

对于函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的奇性延拓, 根据条件 (b), 在  $x = 0$  处仍有连续性, 而且也具备条件  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 因此可重新应用第 732 目的法则:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx.$$



在这里再应用封闭性方程就能够立刻解决我们的问题.

后来,维尔丁格(W.Wirtinger)建立了若干较一般的不等式. 假定函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续, 并且在这区间上 (只可能有有限个例外点) 有平方可积分的导数  $f'(x)$ . 那么如果条件

$$f(-\pi) = f(\pi) \text{ 及 } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

成立, 则不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \quad (25)$$

成立, 而且关于形如  $f(x) = A \cos x + B \sin x$  的函数能得到等式.

与上面一样, 证明归结于应用封闭性方程到下列级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

与

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

如果特别地假设函数  $f(x)$  是 (a) 偶函数或 (b) 奇函数, 则由 (25) 得到斯捷克洛夫不等式.

在下面, 我们要举出建立更复杂的不等式的例子.

**3° 等周问题** 在具有已给长度  $L$  的一切可能的平面闭曲线中, 需要找出包围着最大面积的图形的那个曲线.

我们已经知道解答是圆周. 现在叙述赫尔维茨(A.Hurwitz)所得到的一个纯粹分析上的证明, 而且只限于考虑光滑曲线.

设长为  $L$  的光滑闭曲线 ( $L$ ) 是用参数方程给出的, 并且取从某一点开始计算的弧长  $s$  作为参数:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq L).$$

换用从 0 到  $2\pi$  之间变化的参数  $t = \frac{2\pi s}{L}$ , 将这些方程写成下列形式:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

我们特别注意下列条件成立:

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \quad \text{及} \quad \psi(0) = \psi(2\pi).$$

根据 [732 目], 显然对函数  $\varphi(t)$  与  $\psi(t)$  的傅里叶级数:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mt + b_m \sin mt, \\ \psi(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos mt + d_m \sin mt, \end{aligned}$$



逐项微分, 就得到它们的导数的傅里叶级数:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\sim \sum_{m=1}^{\infty} mb_m \cos mt - ma_m \sin mt, \\ \psi'(t) &\sim \sum_{m=1}^{\infty} md_m \cos mt - mc_m \sin mt.\end{aligned}$$

在这里应用封闭性方程, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(t)]^2 dt &= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\psi'(t)]^2 dt &= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (c_m^2 + d_m^2).\end{aligned}$$

因为

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = (s'_t)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}, \quad (26)$$

所以

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2). \quad (27)$$

在另一方面, 根据已知的公式 [526(9)], 可将被考虑的曲线所包围图形的面积  $F$  表示为:

$$F = \int_{(L)} x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \psi'(t) dt. \quad (28)$$

在这次应用广义封闭性方程, 将面积的表示式写成下列形式:

$$F = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m(a_m d_m - b_m c_m). \quad (29)$$

在这种情形下, 用  $4\pi$  乘等式 (29), 再从等式 (27) 中减去, 便得到

$$\begin{aligned}L^2 - 4\pi F &= 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) - \sum_{m=1}^{\infty} 2m(a_m d_m - b_m c_m) \right\} \\ &= 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (ma_m - d_m)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m + b_m)^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 - 1)(b_m^2 + d_m^2) \right\},\end{aligned}$$

并且因为在大括号内和式中的一切项都不是负的, 所以 “等周不等式”

$$L^2 - 4\pi F \geq 0,$$

即

$$F \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

永远成立.

①如果假定 (我们能够这样假定) 当参数  $t$  由 0 变到  $2\pi$  时, 则依照正向描出了这曲线.



只有当和式中的一切项都是零时, 就是当

$$d_m = ma_m, \quad b_m = -mc_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad b_m = d_m = 0 \quad (m = 2, 3, \dots)$$

时, 才能在上式中取等号——并且同时面积  $F$  达到它所可能取得的最大值. 这种条件与下列关系式等价:

$$d_1 = a_1, \quad c_1 = -b_1, \quad a_m = b_m = c_m = d_m = 0 \quad \text{关于 } m \geq 2.$$

但这时

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y &= \frac{1}{2}c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t, \end{aligned}$$

从而

$$\left(x - \frac{1}{2}a_0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}c_0\right)^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

所以这曲线就是圆周! 由此证明了圆周的极值性质.

此外我们注意如果应用不等式 (25)<sup>①</sup>, 则不用封闭性方程已能证明等周不等式. 实际上, 不失普遍性, 我们可以假定曲线的重心在  $y$  轴上, 这就是说

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0. \quad (30)$$

则由 (26) 及 (28), 得到

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 + \psi'^2] dt - 2 \int_0^{2\pi} \varphi \psi' dt = \int_0^{2\pi} [\varphi - \psi']^2 dt + \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 - \varphi^2] dt \geq 0$$

——这正是根据不等式 (25), 并且考虑到条件 (30) 而得到的. 在这里只有当  $\varphi(t) = A \cos t + B \sin t$  及  $\psi'(t) = \varphi(t)$  时才能得到等式, 而这时  $\psi(t) = A \sin t - B \cos t + C$ , 等等.

## §2. 广义求和法在傅里叶级数上应用

**740. 基本引理** 为了避免在以下的叙述中重复起见, 我们先作若干一般的讨论, 这些讨论是下面一系列证明的实质. 考虑一般形式的含参数  $\lambda$  的积分 ( $a > 0$ ):

$$J(\lambda) = \int_0^a g(t) \Phi(t, \lambda) dt. \quad (1)$$

设参数的变化区域是某一集合  $\Lambda = \{\lambda\}$ , 它有一有限或无限的聚点  $\omega$ . 假定函数  $\Phi(t, \lambda)$  关于  $t$  在  $[0, a]$  上的值及  $\lambda$  在  $\Lambda$  中的值有意义, 并且当  $\lambda$  是常数时, 这个函数对于  $t$  为常义可积. 此外, 我们还对函数  $\Phi(t, \lambda)$  加上下列三个条件:

$$1^\circ \quad \Phi(t, \lambda) \geq 0;$$

<sup>①</sup>显然, 当将区间  $[-\pi, \pi]$  换作  $[0, 2\pi]$  时, 它亦成立.



2° 不论  $\lambda$  是  $\Lambda$  中的哪个值,

$$\int_0^a \Phi(t, \lambda) dt = 1; \textcircled{1}$$

3° 对于任意的  $\delta, 0 < \delta < a$ , 数量

$$M(\delta, \lambda) = \sup_{t \geq \delta} \Phi(t, \lambda)$$

当  $\lambda \rightarrow \omega$  时趋近于零.

为了简单起见, 我们将满足这些条件的函数  $\Phi$  叫做“正核”.

**引理** 如果  $\Phi(t, \lambda)$  是正核, 而  $g(t)$  是任意的绝对可积函数, 并且极限  $g(+0)$  存在, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega} J(\lambda) = g(+0).$$

**证** 由 2°,

$$g(+0) = \int_0^a g(+0) \Phi(t, \lambda) dt;$$

从等式 (1) 的两端减去这等式, 就得到:

$$J(\lambda) - g(+0) = \int_0^a [g(t) - g(+0)] \Phi(t, \lambda) dt.$$

已给任意的数  $\varepsilon > 0$ , 现在我们选取  $\delta (0 < \delta < a)$ , 使得当  $0 < t \leq \delta$  时,

$$|g(t) - g(+0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

并且我们将上面的积分分解成为两个积分的和:

$$\int_0^a = \int_0^\delta + \int_\delta^a = J_1 + J_2.$$

对于其中第一个积分, 注意 1° 与 2°, 立刻得到一个与  $\lambda$  无关的估计值:

$$|J_1| \leq \int_0^\delta |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面,

$$|J_2| \leq \int_\delta^a |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt \leq M(\delta, \lambda) \int_\delta^a |g(t) - g(+0)| dt. \quad (2)$$

<sup>①</sup>只要假定

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \int_0^a \Phi(t, \lambda) dt = 1$$

就够了, 但是我们不研究这种推广.



由 3°,  $J_2 \rightarrow 0$ , 因此对于充分接近于  $\omega$  的值  $\lambda$ , 就有  $|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 而且同时有

$$|J(\lambda) - g(+0)| < \varepsilon,$$

这就是所需要证明的.

对于以上所讲的我们还要作补充如下. 假定函数  $g$  除去与变量  $t$  有关外, 还与一变量  $x (0 \leq x \leq a)$  有关:

$$g = g(t, x),$$

而且当  $x$  为常数时满足前面的条件. 这时, 如果 1)  $g(t, x)$  对于一切  $t$  与  $x$  一致有界

$$|g(t, x)| \leq L$$

并且 2)  $g(t, x)$  关于  $x$  一致趋近于  $g(+0, x)$ ; 则当  $\lambda \rightarrow \omega$  时, 积分

$$J(\lambda, x) = \int_0^a g(t, x) \Phi(t, \lambda) dt$$

关于  $x$  一致趋近于极限  $g(+0, x)$ .

实际上, 根据 2) 我们可选取前面已考虑过的数  $\delta$  与  $x$  无关. 又因为根据 1),

$$|g(t, x) - g(+0, x)| \leq 2L,$$

所以能改变不等式 (2) 如下:

$$|J_2| \leq 2LaM(\delta, \lambda),$$

其中右端与  $x$  毫无关系. 由此可见对于充分接近于  $\omega$  的值  $\lambda$ , 不等式  $|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  同时关于一切值  $x$  成立, 因而不等式

$$|J(\lambda, x) - g(+0, x)| < \varepsilon$$

同时关于一切值  $x$  成立, 这就是所需要证明的.

**741. 傅里叶级数的泊松-阿贝尔求和法** 设  $f(x)$  又表示以  $2\pi$  为周期并且在任意的有限区间上绝对可积的函数. 考虑它的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (3)$$

并且当任意固定  $x$  时, 对于这个级数应用泊松-阿贝尔广义求和法 [418]. 为此, 我们用  $r^m (m = 0, 1, 2, \dots)$  依次乘这个级数的各项, 其中  $0 < r < 1$ , 并且作出级数

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \quad (4)$$



因为当  $m \rightarrow \infty$  时, 系数  $a_m, b_m$  趋近于零 [682], 所以它们全体有界:

$$|a_m|, |b_m| \leq K \quad (K = \text{常数}),$$

因此级数 (4) 简单地以级数  $2K \sum_0^\infty r^m$  作为强函数, 并且显然收敛.

现须研究当  $r \rightarrow 1$  时它的和  $f(r, x)$  的性质, 为了使研究简化, 我们将  $f(r, x)$  表成积分的形式. 如果把 (4) 中的系数  $a_m, b_m$  用它们的积分表示式

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu du \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu du \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

来代替, 则首先得到

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos m(u-x) du,$$

然后

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x) \right\} du.$$

这种转换是根据第 510 目中的推论进行的: 用绝对可积函数乘大括弧内 (关于  $x$  的一致收敛级数后, 我们可以逐项积分. 因为已知这个级数的和 [例如可参考 418,2]):

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x) = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-x) + r^2},$$

所以最后得到这样的表示式:

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-x) + r^2} du. \quad (5)$$

这个值得注意的积分称为泊松(S.D.Poisson)积分, 它在分析学中许多问题上起着重要的作用.

事实上, 在“广义求和”的观念出现以前好久, 泊松已经研究过级数 (4) 以及从它导出的积分 (5), 但是他的推理是不够严格的. 施瓦茨 (H.A.Schwarz) 才建立了泊松积分的严密理论.

**定理** 设函数  $f(x)$  在所考虑的点  $x$  处有右极限与左极限  $f(x \pm 0)$ . 则

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-x) + r^2} du \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$



特别在连续点处, 这个极限就等于  $f(x)$ .

如果函数  $f(x)$  处处连续, ①则  $f(r, x)$  关于  $x$  一致趋近于  $f(x)$ .

证 与变换狄利克雷积分一样 [681], 对于泊松积分 (5) 作变换, 我们得到

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} dt. \quad (7)$$

为了要把上目中的引理应用到这一积分, 令

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t),$$

并且取函数

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \quad (8)$$

作为核 (“泊松核”). 在这里,  $r$  起着参变数  $\lambda$  的作用, 它的变化的区域是区间  $[0, 1)$ , 而  $\omega = 1$ . 我们要证明函数  $\Phi$  满足前目中对于正核所提出的一切条件.

首先  $\Phi(t, r) > 0$  [参考条件 1°]. 实际上, 当  $r < 1$  时, 分数 (8) 的分子显然是正的; 如果将分母写成下列形式

$$1 - 2r\cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2 \frac{t}{2}, \quad (9)$$

则对于分母也容易作出同样的结论. 其次, 如果在 (7) 中令  $f \equiv 1$ , 则也有  $f(r, x) \equiv 1$ , 并且我们得到

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} dt = 1,$$

这就是说条件 2° 得到满足. 最后, 当  $\delta \leq t \leq \pi$  时 (如果数  $\delta$  是在 0 与  $\pi$  之间任意选取的), 就有  $\sin \frac{t}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$ , 因此 [参考 (9)]

$$1 - 2r\cos t + r^2 \geq 4r\sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

于是

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi(t, r) \leq \frac{1}{\pi} \frac{1-r^2}{4r\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

当  $r \rightarrow 1$  时, 显然  $M(\delta, r) \rightarrow 0$  ( $\delta$  是固定的): 这就是说条件 3° 也得到满足.

在这种情形下, 根据已提到的引理, 我们有

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

这就是所需要证明的.

①请回忆我们假定函数  $f(x)$  有周期  $2\pi$ .



现在设函数  $f(x)$  是处处连续的. 则它必有界:  $|f(x)| \leq K$ , 而且同时

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \right| \leq K.$$

此外, 由于函数  $f(x)$  一致连续, 当  $t \rightarrow +0$  时, 表示式

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

关于  $x$  一致趋近于极限  $f(x)$ . 这样, 再根据前目所作的补充说明, 就证实了定理的最后的断语.

由此, 已证明的定理指出了: 如果函数  $f(x)$  在点  $x$  处连续, 或充其量有第一种不连续, 则可用泊松-阿贝尔法求傅里叶级数 (3) 在点  $x$  处的和, 而且根据不同的情况, 它的“广义和”是

$$f(x) \quad \text{或} \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

**附注** 如果事先只在区间  $[-\pi, \pi]$  上给出了函数  $f(x)$ , 则用通常的方式 [687] 推到周期函数时, 容易看出关于  $-\pi < x < \pi$ , 一切都与前面相同, 而关于  $x = \pm\pi$ ,

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

是泊松积分的极限或级数的“广义和”.

**742. 关于圆的狄利克雷问题的解** 前目中已研究的泊松积分能够应用来解决所谓狄利克雷问题的一种简单而重要的特殊情形. 我们回想: 如果函数  $u = u(x, y)$  与它的导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  在某一区域内连续, 并且满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

(“拉普拉斯方程”), 则  $u(x, y)$  称为在这个区域内的调和函数 [602, 4]. 考虑闭周线  $(L)$  所包围的有限区域  $(D)$ . 则对于这个区域的狄利克雷问题可以表述如下: 任意给出周线  $(L)$  上的连续点函数需要找出在闭区域  $(D)$  上连续, 并且在它的内部调和的函数  $u = u(x, y)$  使得这个函数在周线上与已给函数相符. <sup>①</sup> 当区域  $(D)$  是以原点为中心, 以 1 为半径的圆时, 我们要给出这一问题在这种情形的解. (显然任意圆的情形可以化为这种情形.)

设给出了这个圆周  $(L)$  上的某一连续点函数. 如果用极角  $\theta$  确定圆周上各点的位置 (图 145), 则这样就等于给出了一个连续

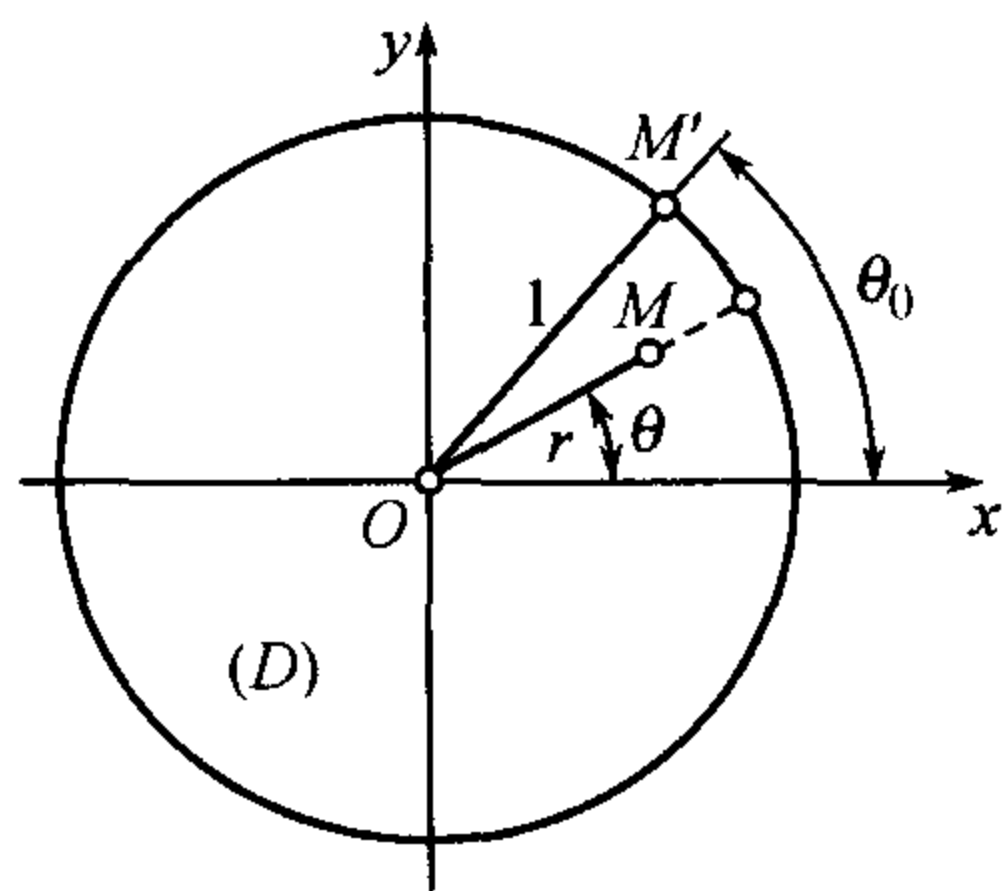


图 145

<sup>①</sup>在第 602 目, 7) 中, 已经证明了调和函数是由在周线上的值所唯一确定的.



函数  $f(\theta)$  (显然有周期  $2\pi$ ). 在圆 ( $D$ ) 的内部也换用极坐标  $r, \theta$  则较为方便, 而将方程 (10) 换成相应变换了的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (10^*)$$

[参考 222,1)]; 因此, 我们要找出当  $r \leq 1$  时的连续函数  $u = u(r, \theta)$ , 使得它当  $r < 1$  时满足方程 (10\*), 而当  $r = 1$  时与  $f(\theta)$  符合.

按照导入的次序, 我们从方程 (10\*) 的最简单的解开始 (不考虑常数解):

$$r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots);$$

用傅里叶的方法就能够将它们找出来 [721]. 不难直接证实这些函数满足方程 (10\*). 用任意的因子  $A_n, B_n$  来乘它们, 并且加入常数项  $A_0$  后, 作出级数

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) r^m,$$

这级数在形式上<sup>①</sup>也满足方程 (10\*). 最后, 考虑边界条件:  $u = (1, \theta) = f(\theta)$ , 我们得到

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta = f(\theta),$$

从而, 与通常一样, 我们断定,  $A_0, A_m, B_m$  是函数  $f(\theta)$  的傅里叶系数:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_m = a_m, \quad B_m = b_m.$$

结果我们得到所提出的问题的 (暂时还是形式上的解):

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta). \quad (11)$$

容易看出这个级数就是函数  $f(\theta)$  的泊松级数; 如果愿意的话, 可用泊松积分

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} du \quad (11^*)$$

来代替它. 要证实所作出的函数实际上满足一切条件.

首先, 因为系数  $a_m$  与  $b_m$  全体有界, 所以不难看出: 如果限于考虑值  $r \leq r_0$  (其中  $r_0 < 1$ , 但是可取作随意接近于 1), 则由 (11) 对  $r$  或对  $\theta$  逐项微分 (一次或两次) 所得到的级数对  $r$  与  $\theta$  都是一致收敛. 在这种情况下, 它们的和就是函数  $u(r, \theta)$  的逐阶导数, 并且既然这个函数的级数的一切项分别满足变换了的拉普拉斯方程, 则这个函数本身在圆内, 亦即当  $r < 1$  时, 也满足这个方程.

函数  $u(r, \theta)$  在圆内对于两变量全体  $(r, \theta)$  是连续的; 这是因为根据第 431 目中的定理 1 (容易将它推广到二元函数的情形), 级数 (11) 同时对于两个变量一致收敛 (当  $r \leq r_0 < 1$  时). 现在证明: 当点  $M(r, \theta)$  从圆的内部趋近于圆周上的点  $M'(1, \theta_0)$  时, 函数  $u(r, \theta)$  恰好趋近于  $f(\theta_0)$ . 实

<sup>①</sup>如果假定可以逐项微分.



际上, 由于函数  $f(\theta)$  的连续性, 对于任意取出的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到这样的  $\delta > 0$ , 使得当  $|\theta - \theta_0| < \delta$  时,

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 因为当  $r \rightarrow 1 - 0$  时,  $u(r, \theta)$  关于  $\theta$  一致趋近于  $f(\theta)$  [741], 所以可将数  $\delta$  设作充分小, 使得当  $|r - 1| < \delta$  时, 对于一切  $\theta$

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 最后当  $|r - 1| < \delta$  及  $|\theta - \theta_0| < \delta$  时, 我们有

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon,$$

这样证明就完成了.

**743. 傅里叶级数的切萨罗-费耶求和法** 如所已知 [681], 可能用狄利克雷积分表示傅里叶级数 (3) 的部分和  $s_n(x)$ :

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} du.$$

在这种情形下, 前面  $n$  个和式的算术平均可写成下列形式:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} du$$

或者在化简后 [参考 418,2)]:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[ \frac{\sin \frac{n}{2}(u-x)}{\sin \frac{1}{2}(u-x)} \right]^2 du.$$

这个积分称为费耶 (L. Fejér) 积分, 因为这位学者首先成功地将算术平均法应用来求傅里叶级数的广义和. 下面的定理也是费耶所发现的 (参考施瓦茨定理):

**定理** 设函数在所考虑的点  $x$  处有右极限与左极限  $f(x \pm 0)$ . 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[ \frac{\sin \frac{n}{2}(u-x)}{\sin \frac{1}{2}(u-x)} \right]^2 du \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$



特别在连续点处, 这个极限等于  $f(x)$ .

如果函数  $f(x)$  处处连续,<sup>①</sup> 则和式  $\sigma_n(x)$  关于  $x$  一致趋近于  $f(x)$ .

证 与狄利克雷积分及泊松积分相似, 我们可将费耶积分表成下列形式:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt. \quad (13)$$

如果如 741 目一样, 令

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t),$$

并且取函数

$$\Phi(t, n) = \frac{1}{n\pi} \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2$$

作为核 (“费耶核”), 则这种情形也适合于第 740 目的一般方法.

容易证实实际上这是 (如在第 740 目中所定义的) 正核 (在这里自然数参数  $n$  代替了  $\lambda; \omega = +\infty$ ). 事实上, 可以立刻看到

$$\Phi(t, n) \geq 0.$$

如果在 (13) 中取  $f \equiv 1$ , 则同时  $s_n \equiv 1$ , 而且也有  $\sigma_n \equiv 1$ , 因此

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt = 1, \quad (14)$$

这就是说费耶核满足第 740 目的条件 2°. 至于条件 3°, 则因容易得到估计值

$$M(\delta, n) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi(t, n) \leq \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

从而也可推出当  $n \rightarrow \infty$  时,  $M(\delta, n) \rightarrow 0$ .

在这种情形下, 应用第 740 目的引理, 就得到极限关系式 (12).

最后, 如在施瓦茨定理的情形一样, 可证实定理最后的结论.

在这次, 由已经证明的定理可以看出: 如果函数  $f(x)$ , 在点  $x$  处连续, 或充其量有第一种不连续, 则可用算术平均法求傅里叶级数 (3) 的和, 而且

$$f(x) \quad \text{或} \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

<sup>①</sup>参考第 499 页的脚注.



分别是它的“广义和”.

根据弗罗贝尼乌斯定理 [421], 从这个断语能够推得到第 741 目中关于泊松-阿贝尔求和法的类似断语.

如果函数  $f(x)$  只在区间  $[-\pi, \pi]$  上被给出, 则对于它也能重述第 741 目末尾所作的附注.

**744. 傅里叶级数广义求和法的若干应用** 在这里, 我们所指的是要由费耶定理引导出若干推论 (虽然为了同一目的, 通过略为复杂的推理, 对于施瓦茨定理也能够这样做). 前两个推论表明一种有趣的情况, 广义求和法可以作为属于常义求和法结论的根据.

1° 如果傅里叶级数 (3) 在某一点  $x$  处收敛, 而函数在这点连续或有通常的不连续, 则级数的和必分别等于

$$f(x) \quad \text{或} \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

实际上, 根据费耶定理, 用算术平均法所求得的级数的“广义和”就是这样. 由于这种方法的正则性 [420], 若级数在通常的意义下有和, 则这个和必须与“广义和”一致.

2° 从费耶定理, 我们能够得到 (关于有界变差的函数的傅里叶级数收敛性的) 狄利克雷-若尔当定理作为推论 [参看 686].

如果  $f(x)$  是在整个区间  $[-\pi, \pi]$  上的有界变差的函数, 则在任一点  $x$  处, 函数有极限  $f(x \pm 0)$ , 并且  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  是傅里叶级数的“广义和”. 另一方面, 已经知道 [707] 有界变差函数的傅里叶系数  $a_n, b_n$  的阶是  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ , 于是根据哈代定理 [422] 就可推得级数 (3) 在通常的意义下收敛, 而且收敛于同样的和式.

可是这还不能包含狄利克雷-若尔当定理. 在第 686 目的叙述中, 这个定理具有所谓“局部”性质. 在那里, 只需要函数在所考虑的点的任一小邻域内有有界变差. 但是我们知道 [683], 恰好是函数在这个邻域内的值决定了傅里叶级数在已给点处的性质以及它的和的大小. 因此, 在实质上不作任何改变, 我们可改变函数在所提到的邻域以外的值使得得到在整个区间  $[-\pi, \pi]$  上的有界变差函数, 而上面所讲就可应用到这个函数上.

3° 如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续, 而且还满足条件

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

则能将它推广到整个数轴上成为处处连续的周期 (以  $2\pi$  为周期) 函数. 在这种情形下, 费耶和的序列  $\{\sigma_n(x)\}$  对于在区间  $[-\pi, \pi]$  上的一切  $x$  一致收敛于  $f(x)$ . 因为每个这样的和都是三角多项式, 所以用显而易见的方式就能得到关于连续周期函数的近似法的魏尔斯特拉斯定理 [734].

4° 从费耶定理能够立即断定三角函数系在连续函数类中是完全的 [参考 733]. 事实上, 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续的函数  $f(x)$  与三角函数系中一切函数正交, 从而它的一切傅里叶系数都等于零, 则  $\sigma_n(x) = 0$ . 这时至少在开区间  $(-\pi, \pi)$  内, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ ; 因此, 在这开区间内,  $f(x) = 0$ , 而根据连续性, 在端点也是如此.



我们还加说明如下, 虽然它与费耶定理无关, 但与费耶和有关.

5° 如果函数  $f(x)$  有界, 并且它在区间  $[-\pi, \pi]$  上变化时包含在  $m$  与  $M$  之间, 则一切费耶和  $\sigma_n(x)$  也包含在同样两界之间.

从积分 (13) 的估计值并考虑到 (14), 立刻推得:

$$\begin{aligned} m &= m \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt \\ &\leq M \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt = M. \end{aligned}$$

关于傅里叶级数的部分和  $s_n(x)$ , 类似的断语不能成立: 在这里表现出这个事实: 狄利克雷核

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

要改变符号, 而与费耶核不同. 我们甚至于不可能保证所有这样的和式有共同的界.

然而, 如果函数  $f(x)$  的傅里叶系数  $a_n, b_n$  的阶是  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ , 则部分和  $s_n(x)$  还是一致有界. 这就是说, 如果对于一切  $n = 1, 2, \dots$ , 我们有

$$n|a_n| \leq A, \quad n|b_n| \leq B,$$

则可断定

$$m - (A + B) \leq s_n(x) \leq M + (A + B).$$

实际上, 将第 422 目的恒等式 (9) 应用于现在的情形, 就得到

$$s_n(x) = \sigma_{n+1}(x) + \frac{\sum_1^n k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{n+1}.$$

但

$$|k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \leq A + B,$$

同时根据已证明的结果,

$$m \leq \sigma_{n+1}(x) \leq M.$$

由此可推得所需要的断语.

譬如说, 如果考虑展开式 [690, 2)]

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi), \quad (15)$$

则在这里  $m = -\frac{\pi}{2}, M = \frac{\pi}{2}, A = 0, B = 1$ . 因此可断言这个级数的部分和的绝对值一致以数  $\frac{\pi}{2} + 1$  为界 [参考 702].

由已证明的断语可作出更一般的结论: 有界变差函数的傅里叶级数的一切部分和一致有界 [参考 737]. 这是因为这种函数的傅里叶系数  $a_n, b_n$  的阶显然是  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  [707].



**745. 傅里叶级数的逐项微分法** 如果对函数  $f(x)$  的傅里叶级数 (3) 逐项求微分, 则一般说来, 即使是在所考虑的点  $x$  处函数  $f(x)$  有有限导数  $f'(x)$ , 所得到的级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \quad (16)$$

是发散的. 刚才所提到过的级数 (15) 可作为例子: 对它逐项微分就得到处处发散的级数

$$\sum_1^{\infty} \cos mx.$$

然而, 法图(P.Fatou) 发现了下面有趣的命题: 如果在点  $x$  处存在着有限的导数  $f'(x)$ , 则级数 (16) 可用泊松-阿贝尔法求和, 并且和式恰好为  $f'(x)$ .

为了证明起见, 把泊松级数 (4) 对于  $x$  求微分:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} r^m m(b_m \cos mx - a_m \sin mx); \quad (17)$$

由于所得到的级数关于  $x$  一致收敛, 在这里可以进行逐项微分法. 如果把泊松积分 (5) 对于  $x$  求微分, 我们也可得到同样的结果:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{2r(1-r^2) \sin(u-x)}{[1-2r \cos(u-x)+r^2]^2} du,$$

而且在这种情形下, 根据第 510 目的定理 3\*, 我们能在积分号下微分. 上面的积分可变换为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{2r(1-r^2) \sin t}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt \\ &= r \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} \cdot \frac{2(1-r^2) \sin^2 t}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t};$$

如果将这表示式改写成下列形式:

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x)}{-t} \right] \cdot \frac{t}{\sin t},$$

则可见

$$g(+0) = f'(x).$$

其次, 我们要证明函数

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2(1-r^2) \sin^2 t}{[1-2r \cos t + r^2]^2}$$



是在第 740 目的意义下的正核. 首先, 显然

$$\Phi(t, r) \geq 0.$$

在 (18) 中, 特别令  $f(x) = \sin x$ . 则

$$f(r, x) = r \sin x, \quad \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = r \cos x, \quad \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} = \cos x.$$

将各式代入 (18), 消去  $r \cos x$  后就得到:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2(1-r^2) \sin^2 t}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt = 1.$$

最后,

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \phi(t, r) \leq \frac{1}{\pi} \frac{2(1-r^2)}{\left[4r \sin^2 \frac{\delta}{2}\right]^2},$$

因此显然当  $r \rightarrow 1$  时,  $M(\delta, r) \rightarrow 0$ .

现在应用第 740 目的引理, 我们看到: 作为级数 (17) 的和的积分 (18), 当  $r \rightarrow 1$  时趋近于  $f'(x)$ . 而这就表明了级数 (16) 可用泊松-阿贝尔法求得和式  $f'(x)$ , 这就是所需要证明的.

**附注 I.** 已证明的定理能够推广到逐次微分法的情形: 如果在所考虑的点处有限的导数  $f^{(p)}(x) (p > 1)$  存在, 则由 (3) 微分  $p$  次所得到的级数可用泊松-阿贝尔法求得和式  $f^{(p)}(x)$ .

**II.** 关于切萨罗求和法, 与法图定理类似的断语不成立. 可是, 如果加强对导数的条件, 并假定它在所考虑的点处连续, 则泊松-阿贝尔求和法也可用切萨罗求和法来代替.

### §3. 函数的三角展开式的唯一性

**746. 关于广义导数的辅助命题** 为了使得在下面讲述标题上的重要问题时不被打断, 我们先作一系列辅助的讨论.

设在某一区间  $[a, b]$  上给出函数  $F(x)$ . 取  $a$  与  $b$  之间的值  $x: a < x < b$ ; 则对于充分小的  $h > 0$ , 差数  $\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x-h)$  有意义. 如果有限的极限

$$F^{[1]}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

存在, 则称它为函数  $F(x)$  在点  $x$  处的广义 (“对称”) 导数. 只要当通常意义下的导数存在时, 广义导数  $F^{[1]}(x)$  就必定存在, 并且与它相等; 这可以直接从下面的关系式看



出: 当  $h \rightarrow +0$  时,

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = \frac{1}{2} \left[ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} \right] \rightarrow F'(x).$$

然而在通常导数不存在的若干情形下, 广义导数还可能存在. 函数

$$F(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad F(0) = 0;$$

就可作为这样的例子; 我们已经知道 [102, 1°] 它在点  $x = 0$  处没有导数; 而在这点它的广义导数等于零.

其次, 考虑二级差分

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 F(x) &= \Delta_h \Delta_h F(x) = \Delta_h F(x+h) - \Delta_h F(x-h) \\ &= [F(x+2h) - F(x)] - [F(x) - F(x-2h)] \\ &= F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h). \end{aligned}$$

如果有限的极限

$$F^{[']}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

存在, 则称它为函数  $F(x)$  在所考虑的点  $x$  处的广义二阶导数. 在这里, 也可证明当通常的二阶导数存在时, 广义二阶导数也存在, 并且与它相等. 实际上, 如果对于  $h$  的两个函数  $\Delta_h^2 F(x)$  与  $4h^2$  应用柯西公式:<sup>①</sup>

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{F'(x+2\theta h) - F'(x-2\theta h)}{4\theta h},$$

则由上面已讲的关于广义 (一阶) 导数的结果, 可以看出当  $h \rightarrow 0$  时, 所得到的表示式趋近于  $F''(x)$ . 例如, 函数

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad F(0) = 0$$

[参考 102, 2°] 表明了逆断语不正确: 已知广义导数  $F^{[']}(x)$  存在时, 不能推出通常的导数  $F''(x)$  存在.

下面的定理说明: 在若干情形下, 广义二阶导数起着与通常的二阶导数相同的作用:

**施瓦茨定理** 如果关于在区间  $[a, b]$  上的连续函数  $F(x)$ , 广义二阶导数在这区间内存在, 并且等于零, 则  $F(x)$  是线性函数. (完全与假定通常导数  $F''(x) = 0$  时一样!)

<sup>①</sup>假定二阶导数  $F''(x)$  在点  $x$  处存在时, 已经包含了假定一阶导数  $F'(x)$  在这点的邻域内存在.



为了证明起见, 我们取任意的数  $\varepsilon > 0$ , 并且作出辅助函数

$$\varphi(x) = \pm \left\{ F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \right\} + \varepsilon(x - a)(x - b),$$

而关于大括号前的两种符号, 我们的讨论都是同样. 这时, 在区间内就有

$$\varphi^{[2]}(x) = 2\varepsilon, \quad (1)$$

因为函数  $F$  的广义二阶导数等于零, 而二次函数的广义二阶导数就是它的通常二阶导数.<sup>①</sup>

函数  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  的端点上为零. 我们将证明它在区间内不能取正值. 实际上, 在相反的情形时, 作为连续函数,  $\varphi(x)$  应在某一内点  $x_0$  处达到它的最大 (正) 值. 但这时我们有

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \leq \varphi(x_0), \quad \Delta_h \varphi(x_0) \leq 0$$

并且, 最后,

$$\varphi^{[2]}(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h \varphi(x_0)}{4h^2} \leq 0,$$

与等式 (1) 矛盾!

于是对于一切  $x$ ,  $\varphi(x) \leq 0$ , 亦即

$$\pm \left\{ F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \right\} \leq \varepsilon(x - a)(b - x) < \varepsilon(b - a)^2,$$

而且无论在括号前取怎样的符号 (正号或负号) 都是一样. 因此我们也有

$$\left| F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \right| < \varepsilon(b - a)^2.$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 可知不等式的左端是零, 从而

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a),$$

这就是所需要证明的.

有时除去在个别的“未知点”外, 条件  $F^{[2]}(x) = 0$  处处成立, 而在“未知点”处不假定这个条件成立. 这时要应用:

**广义施瓦茨定理** 设对于区间  $[a, b]$  上的连续函数  $F(x)$ , 导数  $F^{[1]}(x)$  存在, 并且除去有限个“未知点”

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < b$$

<sup>①</sup>显然: 如果两个函数  $F$  及  $G$  在所考虑的点处有导数  $F^{[1]}$  及  $G^{[1]}$ , 则它们的和或差也有分别等于  $F^{[2]} \pm G^{[2]}$  的广义二阶导数.



外, 在区间内处处等于零. 如果在每个“未知点”处, 即使削弱了的条件

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0 \quad (2)$$

成立, 函数  $F(x)$  在区间  $[a, b]$  上还是线性的.

根据前一定理, 函数  $F(x)$  在两个例外值之间一定是  $x$  的线性函数, 于是 (譬如说) 在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上, 我们有

$$F(x) = cx + d,$$

而在邻接的区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上,

$$F(x) = c'x + d',$$

同时两个表示式在点  $x = x_i$  处相符:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \quad (3)$$

关于  $x = x_i$ , 由条件 (2) 得

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left\{ \frac{F(x_i + 2h) - F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i - 2h) - F(x_i)}{-2h} \right\} = 0.$$

但是在这里左端就是两直线  $y = cx + d$  与  $y = c'x + d'$  的斜率的差. 于是  $c = c'$ , 而这时由 (3) 也有  $d = d'$ , 这就是说, 事实上, 两个直线段是由彼此延长而得. 因为这里所说的可应用任意两个邻接的线段, 所以我们函数的图形在整个区间  $[a, b]$  上是直线, 因而这个函数就是线性的.

#### 747. 三角级数的黎曼求和法 黎曼所发展的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4)$$

求和法在以下起着重要的作用. 这种方法完全不假定级数 (4) 是任何函数的傅里叶级数, 并且可将它应用到完全任意的三角级数上, 不过要级数的系数全体有界:

$$|a_n|, |b_n| \leq L \quad (L = \text{常数}). \quad (5)$$

将级数 (4) 在形式上逐项积分两次, 我们得到级数

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (6)$$

当条件 (5) 成立时, 这级数以收敛级数

$$L \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



为强函数, 因此在  $x$  的任意的变化区间上一致收敛, 并且定出一个连续函数  $F(x)$ . 如果在已给的点  $x$  处存在着有限的极限

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h F(x)}{4h^2},$$

亦即存在着广义二阶导数  $F^{[']}(x)$ , 则称它为级数(4) 在黎曼意义下的“广义和”.

作为例子, 如果将这种方法应用到级数

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \cos nx,$$

则在这里

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

回想 [690,9): 关于  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$  是右端的级数的和, 就有

$$F(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

因此, 关于  $0 < x < 2\pi$ , 显然  $F^{[']}(x) = F''(x) = 0$ , 而级数的“广义和”是零 [参看 418 与 420].

容易证实

$$\Delta_h^2 \cos nx = -2 \cos nx (1 - \cos 2nh) = -4 \cos nx \sin^2 nh$$

及

$$\Delta_h^2 \sin nx = -4 \sin nx \sin^2 nh.$$

从而

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \quad (7)$$

于是黎曼求和法就化成用形如  $\left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2$  的因子乘级数 (4) 的各项, 并取  $h \rightarrow 0$  时的极限.

在这种形式下, 黎曼方法也能够应用到完全任意的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2$$



至少关于充分小的  $h$  收敛, 并且它的和  $\varphi(h)$  当  $h \rightarrow 0$  时趋近于极限  $U$ , 则这就是原级数的“广义和”.

读者可看到黎曼方法属于第 426 目的一般方法内. 在这种情形下,  $h$  起着参数  $x$  的作用 ( $\omega = 0$ ), 而因子

$$\gamma_n(h) = \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \textcircled{1}$$

满足在那里所列举的条件. 关于第一个条件, 这是显然的:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma_n(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 1.$$

至于第二个条件, 则考虑

$$\left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left( \frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 = \int_{(n-1)h}^{nh} \left[ \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' dz$$

及

$$\left| \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left( \frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 \right| \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \left| \left[ \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' \right| dz,$$

我们就会得到

$$\begin{aligned} |\gamma_0(h)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(h) - \gamma_{n-1}(h)| &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left( \frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 \right| \\ &\leq 1 + \int_0^{\infty} \left| \left[ \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' \right| dz. \end{aligned}$$

不难证实这个积分存在, 因为当  $z \rightarrow \infty$  时,

$$\left[ \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' = 2 \sin z \left( \cos z - \frac{\sin z}{z} \right) \frac{1}{z^2} = O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

因此, 黎曼的广义求和法是正则的. 这个事实可以应用到三角级数, 而推出

**黎曼第一定理** 如果三角级数 (4) 在点  $x$  处收敛于和式  $S$ , 则将它形式上逐项积分两次所得到的函数  $F(x)$  在该点处有等于  $S$  的广义二阶导数

$$F^{[']}(x) = S.$$

我们注意: 对于傅里叶级数的情形, 表示式

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

$\textcircled{1} \gamma_0(h)$  简单地了解为一.



容易变换为第 740 目中所研究过带有“正核”那种形式的积分. 这样, 对黎曼求和法就可推出完全与施瓦茨定理 [741] 及费耶定理 [743] 相类似的定理, 对此我们不加研究; 对于我们, 黎曼方法所以重要, 是由于它是研究一般形状的三角级数的强有力的工具.<sup>①</sup> 在这方面必须有

**黎曼第二定理** 如果级数 (4) 的系数  $a_n, b_n$  趋近于零, 则无关于级数的收敛性, 条件 (2) 成立:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0.$$

对于任意固定的  $x$ , 我们令

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \quad u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

这时问题化为证明关系式

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} h = 0. \quad (8)$$

由定理的假设,  $u_n \rightarrow 0$ , 这就是说对于任意给出的  $\varepsilon > 0$ , 可找到这样的数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时,  $|u_n| < \varepsilon$ . 现在我们将所考虑的表示式写成两个表示式的和的形状:

$$S_1 = \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{N-1} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} \cdot h \quad \text{及} \quad S_2 = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} \cdot h.$$

我们有

$$|S_2| < \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 h < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 h.$$

容易证明  $\varepsilon$  的乘数与  $h$  无关的数为界. 例如, 我们已经看到

$$\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{\pi - h}{2}$$

[494,4)]. 因此

$$|S_2| < \frac{\pi}{2} \varepsilon.$$

至于表示式  $S_1$ , 则它显然随着  $h$  趋近于零, 因而当  $h$  充分小时, 它的绝对值比  $\varepsilon$  小. 由此最后得到断语 (8).

<sup>①</sup>黎曼本人完全没有研究过级数的广义求和法. 他发展了这种理论是为了解决所提出的问题: 求出可展开为一般形状三角级数的函数的整个特征. 在这里, 我们不可能叙述黎曼的这些研究.



**748. 关于收敛级数的系数的引理** 下面所证明的命题在以后有用, 而且它也具有独立的意义.

**康托尔(G.Cantor)引理** 如果三角级数 (4)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

至少关于在某一区间  $(d) = [\alpha, \beta]$  上的值  $x$  收敛, 则当  $m \rightarrow \infty$  时, 级数的系数  $a_m, b_m$  必趋近于零.

我们将级数的公项表示成下列形式

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = \rho_m \sin m(x - \alpha_m),$$

其中  $\rho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ . 需要证明  $\rho_m \rightarrow 0$ .

假定不是这样. 则关于无穷多个值  $m$ , 不等式

$$\rho_m \geq \delta \quad (9)$$

成立, 其中  $\delta$  是某一个正的常数.

我们用归纳法作出一序列彼此套着的区间  $\{(d_n)\}$  与一序列增加的值  $\{m_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 使得关于在  $(d_n)$  上的  $x$ ,

$$|\rho_{m_n} \sin m_n(x - \alpha_{m_n})| > \frac{\delta}{2}. \quad (10)$$

我们取得满足不等式 (9), 还满足不等式

$$md > \pi^{\textcircled{1}}$$

的第一个数  $m$  作为  $m_1$ . 当  $x$  在区间  $(d)$  上变化时, 函数  $\sin m_1(x - \alpha_{m_1})$  至少取得值  $\pm 1$  一次; 而这时根据连续性, 也可找到包含在  $(d)$  中的区间  $(d_1)$ , 使得在其中一切点处, 这个函数的绝对值  $> \frac{1}{2}$ , 并且由此注意条件 (9), 就得到关于在  $(d_1)$  上的  $x$ ,

$$|\rho_{m_1} \sin m_1(x - \alpha_{m_1})| > \frac{\delta}{2}.$$

如果已经确定了  $(d_{n-1})$  与  $m_{n-1}$ , 则与刚才完全相仿, 可以确定数值  $m_n$  并且作出包含在  $(d_{n-1})$  中的区间  $(d_n)$ , 使得 (10) 成立. 同时在这里也容易使得条件  $m_n > m_{n-1}$  成立.

我们现在取在一切  $(d_n)$  中的点  $x_0$  (这样的点虽说只一个, 但永远存在). 在这点处, 不等式 (10) 对于一切  $n$  成立, 而且由于不能满足收敛性的必要条件, 级数 (4) 当  $x = x_0$  时发散——即与假设矛盾. 这样就证明了引理.

<sup>①</sup>我们用  $d$  表示区间  $(d) = [\alpha, \beta]$  的长.



**749. 三角展开式的唯一性** 最后, 我们来讲本阶段所要研究的一个基本问题. 如果函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上可展开成一个三角级数 (4), 则这个展开式是不是唯一的呢? 如我们已经提到 [678], 用欧拉-傅里叶公式作出级数的系数表示式时, 在逻辑上没有严密的根据, 那么现在的问题就更有理由了. 下面的定理对这问题作肯定的答复.

**海涅(Heine)-康托尔定理** 如果两个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (4)$$

与

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx \quad (11)$$

在区间  $[-\pi, \pi]$  的一切点处 (即使可能除去有限个“未知点”  $x_1, x_2, \dots, x_k$  外) 收敛于同一和式  $f(x)$ , 则这两个级数恒等, 也就是说

$$a_m = \alpha_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad b_m = \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

将级数 (4) 与 (11) 逐项相减, 则要证明的定理化成了关于零的三角展开式的唯一性的定理.

如果三角级数 (4) 在区间  $[-\pi, \pi]$  上 (可能除去有限个“未知点”外) 收敛于零, 则它的一切系数必须是零:

$$a_m = 0, \quad b_m = 0.$$

我们来证明这一断语.

根据前节的引理, 系数  $a_m$  与  $b_m$  趋近于零: 由此特别推得它们全体有界.

考虑根据假定为连续的黎曼函数 [参考 (6)]. 由黎曼第一定理 [747], 除去“未知点”外, 它的广义二阶导数  $F^{[2]}(x)$  处处等于零. 而根据黎曼第二定理 [747],<sup>①</sup> 甚至于在“未知点”处, 削弱了的条件 (2) 成立, 于是应用广义施瓦茨定理 [746], 就能断定函数  $F(x)$  是线性的;

$$\frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d.$$

重要的是要强调: 这个等式确乎在整个实数轴上成立, 因为关于区间  $[-\pi, \pi]$  已讲过的, 关于任意有限区间也正确. 将求得的等式换写成下列形式:

$$\frac{a_0 x^2}{4} - cx = d + \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

<sup>①</sup>在这里应用它, 就是因为系数  $a_m$  与  $b_m$  趋近于零!



由右端函数的周期性, 立刻可断定  $a_0 = c = 0$ . 这样就得到零的展开式如下:

$$0 = d + \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2}.$$

但这是一个一致收敛的级数! 在这种情形下 [678], 它的系数一定可以用欧拉-傅里叶公式表示出来, 于是我们得到所需要的结论:  $a_m = b_m = 0$ .

**附注** 我们也可用下面的方式来避免引用康托尔引理.

设  $x$  是任意一个异于“未知点”的点, 因此对于这个值  $x$ , 级数 (4) 收敛, 而它的公项当然趋近于零:

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx \rightarrow 0. \quad (12)$$

在级数 (4) 中, 用数值  $x + \delta$  与  $x - \delta$  代替  $x$ , 并且逐项相加, 就得到展开式

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos m\delta;$$

对于一切值  $\delta$ , 只可能有有限个例外 (如果问题是关于  $\delta$  的任一有限变化区间), 这个展开式收敛于零. 但是关于这个带变量  $\delta$  的三角级数, 我们已经知道它的系数趋近于零, 而且对于它 (完全不引用康托尔的引理!) 可以应用上面所叙述的推理, 因此  $a_0 = 0$ , 并且

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

这些等式不仅关于异于“未知点”的点  $x$  成立, 而且由于余弦与正弦函数的连续性, 它们处处成立. 对  $x$  微分, 我们还得到等式

$$b_m \cos mx - a_m \sin mx = 0; \quad (14)$$

最后, 从 (13) 与 (14) 推得  $a_m = b_m = 0$ .

**750. 关于傅里叶级数的最后的定理** 总之, 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上的函数  $f(x)$  可能有三角级数展开式, 则只有一种展开的方法. 那么这个唯一的方法究竟是怎样? 所得级数是否一定就是函数  $f(x)$  的傅里叶级数? ①

我们已经知道有些不能展开成傅里叶级数的函数——即使连续——[703], 但是直到这里还没有解决这个问题: 这种函数是否可以展开成一种三角级数, 其系数异于傅里叶系数.

①当然, 我们要假定函数  $f(x)$  绝对可积分, 因为说到傅里叶级数, 在这里永远就是指 (如同上面一样) 绝对可积分函数的傅里叶级数.



另一方面, 我们容易作出处处收敛 (因此唯一确定一函数) 但同时显然不是傅里叶级数的三角级数, 那么所有上述问题就更加自然了. 例如, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

就是这样. 这个级数在不含形如  $2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的点的任一闭区间上甚至一致收敛 [430], 因而确定一连续函数; 而在形如  $2k\pi$  的点处, 它也显然收敛于零. 但同时这个级数一般不是傅里叶级数, 因为在这里, 第 731 目末尾 [参考在那里的附注] 所推出的傅里叶级数的必要条件不成立: 因为级数  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散! [367,6)]

在本目的定理与下目的推广中, 我们提出的问题得到了最后的解答.

我们先讲勒贝格 (H. Lebesgue) 所作的说明:

**引理** 如果在区间  $[a, b]$  上的连续函数  $F(x)$  在这个区间内处处有广义二阶导数  $F^{[']}(x)$  包含在两个界  $m$  与  $M$  之间:

$$m \leq F^{[']}(x) \leq M,$$

则任意的形如  $\frac{\Delta_h^2 F(x_0)}{4h^2}$  的比值也包含在同样的两个界之间, 当然在这里要假定区间  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$  完全在  $[a, b]$  上.

我们考虑函数

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta_{2h} f(x_0)}{4h} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2},$$

它是一个整二次多项式. 直接可证实: 在三点  $x_0 - 2h, x_0, x_0 + 2h$ , 它与  $f(x)$  取相同的值, 因此在这三点, 差数

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

是零. 函数  $\lambda(x)$  在区间  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$  上连续, 并且在它的内部有广义二阶导数:

$$\lambda^{[']}(x) = f^{[']}(x) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}$$

(多项式  $\varphi$  的广义二阶导数就等于通常的二阶导数).  $\lambda(x)$  在区间  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$  内的两点  $x_1$  与  $x_2$  处达到最大值与最小值.<sup>①</sup> 容易证明: 在这两点处我们分别有  $\lambda^{[']}(x_1) \leq 0, \lambda^{[']}(x_2) \geq 0$  [参考第 509 页上的推理], 从而

$$f^{[']}(x_1) \leq \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2} \leq f^{[']}(x_2),$$

这就证明了上述断语.

<sup>①</sup>即令这两值中有一个是零, 函数也在区间内的一点  $x_0$  处达到它.



最后, 我们现在可证明下面的著名的定理:

**杜·布瓦-雷蒙(P. du Bois Reymond)定理** 如果区间  $[-\pi, \pi]$  上的有界可积 (在常义下) 函数  $f(x)$  可以在这个区间上展开成三角级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (15)$$

则这级数必须是它的傅里叶级数.

首先, 从级数的收敛性可推得系数  $a_n, b_n$  有界 [第 748 目引理]. 引用黎曼函数  $F(x)$ , 我们得到表示式  $\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$  的三角级数展开式 (7):

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2;$$

这个展开式 (当  $h$  为常数时) 关于  $x$  一致收敛, 因为它是以形如  $L \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的级数为强函数. 在这种情形下 [678], 级数的系数必须是它的和的傅里叶系数:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx, \\ a_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx, \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我们注意: 如果将函数  $f(x)$  周期延拓到整个实数轴上, 则可设展开式 (15) 在区间  $[-\pi, \pi]$  外也成立. 因此, 根据黎曼第一定理 [747], 关于一切值  $x$ , 我们有

$$F^{[1]}(x) = f(x).$$

由于函数  $f(x)$  有界

$$|f(x)| \leq K,$$

根据前面的引理, 关于一切值  $x$  与  $h$ , 同时也有

$$\left| \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} \right| \leq K. \quad (17)$$

现在我们在等式 (16) 中取得当  $h \rightarrow 0$  时的极限, 而且根据阿尔采拉定理 [526], 在这些等式的左端可在积分号下取极限. 于是我们得到

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

这就是所需要证明的.



**751. 推广** 现在我们不假定函数  $f(x)$  有界, 而且甚至于假设展开式 (15) 在有限个点处不成立. 在这些削弱了的条件下, 下面的定理成立:

**广义杜·布瓦-雷蒙定理** 如果在区间  $[-\pi, \pi]$  上的绝对可积函数  $f(x)$  在这区间上, 只除去有限个点处外, 可展开成三角级数 (15), 则这个级数必须是  $f(x)$  的傅里叶级数. ①

我们首先将函数  $f(x)$  周期延拓到整个实数轴上. ② 但考虑函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

来代替  $f(x)$  比较方便. 在任意的有限区间上 (可能除去有限个点), 没有常数项的展开式成立:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

我们要证明: 第一,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0;$$

其次, 关于  $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx; \quad (19)$$

由此就能得到所需要的关系式 (18).

在这里, 由于系数有界 [根据第 748 目的引理], 所以我们也能引用黎曼函数

$$\Phi(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

(在这次, 它是周期函数, 并且有周期  $2\pi$ ).

我们取区间  $[\alpha, \beta]$ , 它既不含上面所提到的例外点, 也不含函数  $\varphi(x)$  的奇异点; 显然, 对于某一个充分小的  $\delta$ , 区间  $[\alpha - \delta, \beta + \delta]$  也是如此. 由于函数  $\varphi$  有界, 如同上面一样, 我们能断定: 当  $\alpha \leq x \leq \beta, h \leq \delta$  时, 表示式  $\frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2}$  有界. 而且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} = \varphi(x).$$

根据阿尔采拉定理 [526], 对于  $[\alpha, \beta]$  上任意的  $y$ , 我们有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^y \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} dx = \int_{\alpha}^y \varphi(x) dx.$$

① 这个推广是瓦雷-布散 (Ch.J.de la Vallée Poussin) 得到的.

② 如果函数  $f(x)$  不满足条件:  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则为了使得这个条件成立, 预先必须改变函数在区间  $[-\pi, \pi]$  的一个端点的值, 譬如说, 就可改变在展开式 (15) 不成立处的值.



如果令

$$\Phi_1(y) = \int_0^y \Phi(t) dt,$$

则前一关系式能表示为下列形式:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_\alpha^y \varphi(t) dt.$$

因为当  $\alpha \leq y \leq \beta, h \leq \delta$  时, 在大括号中的表示式有界, 所以再应用阿尔采拉定理, 就得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_\alpha^x \{ \cdots \} dy = \int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) dt \quad (\alpha \leq x \leq \beta).$$

其次, 令

$$\Phi_2(x) = \int_0^x \Phi_1(y) dy,$$

我们能够将所得到的关系式写成:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} - (x - \alpha) \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) dt.$$

但是显然  $\Phi_2(x)$  有通常的二阶导数  $\Phi(x)$ , 因此

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} = \Phi(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} = \Phi(\alpha).$$

如果用  $\gamma$  表示 (显然存在的) 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2},$$

则最后得到

$$\int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) dt = \Phi(x) - \Phi(\alpha) - \gamma(x - \alpha).$$

现在容易看到逐次积分

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt$$

(当  $-\pi \leq x \leq \pi$  时) 与前面的逐次积分相差一个线性函数. 因此函数

$$\Psi(x) = \Phi(x) - \int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt \quad (20)$$

在每个形如  $[\alpha, \beta]$  的区间上是线性的. 这就是说, 在每个既不是函数  $\varphi$  的奇异点, 又不是例外点 [在这种点, 展开式 (15) 不成立] 的点  $x$  处, 就有

$$\Psi^{[']}(x) = 0.$$



另一方面, 无例外地在一切点  $x$  处, (2) 型的条件成立: 表示式

$$\frac{\Delta_h^2 \Psi(x)}{2h} = \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{2h} - \frac{1}{2h} \int_x^{x+2h} dy \int_0^y \varphi(t) dt + \frac{1}{-2h} \int_x^{x-2h} dy \int_0^y \varphi(t) dt$$

当  $h \rightarrow 0$  时趋近于零. 实际上, 从黎曼第二定理 [并根据第 748 目的引理] 可推得右端的第一项趋近于零, 又根据关于对积分的变上限求导数的定理 [305, 12°], 可知另外两项的和也是这样.

在这种情形下, 根据广义施瓦茨定理 [746], 在任意的有限区间上, 从而在一切一般的值  $x$  处, 我们有:

$$\Psi(x) = cx + d. \quad (21)$$

现在设

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx;$$

将它逐项积分两次 [731], 就得到

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt = \frac{\alpha_0 x^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2}. \quad (22)$$

比较 (20), (21) 及 (22), 我们得到展开式

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4} + cx + d = \sum_1^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2},$$

它无例外地关于一切实值  $x$  成立.

因为右端是  $x$  的连续周期函数, 而且也就是有界函数, 所以必有  $c = 0$ , 并且也有

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0.$$

现在可以看到: 级数

$$-d + \sum_1^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2}$$

处处收敛于零, 并且是一致收敛的. 于是推得 [678 或 749] 它的一切系数都是零, 因而条件 (19) 成立:

$$\begin{aligned} a_n = \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \\ b_n = \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

这样证明就完成了.

由此可见: 对于以上所讲述的函数的三角展开式, 我们奠定了它的整个理论基础, 而且表明了特别注意到傅里叶级数是有理由的.



# 附录 极限的一般观点

**752. 在分析中所遇到的极限的各种类型** 极限的观念贯穿着整个分析课程. 但在课程的各部分中所采取的形式却迥乎不同.

我们起初是研究最简单的情形 —— 通过可数数列的整序变量极限 [22,23]; 在这情形下详尽地发展了极限论(第一章).

然后极限概念被推广到单变量或多变量函数极限的情形 [52,165].<sup>①</sup> 极限的过程变复杂了, 但在大体上保持了固有的特性.

在积分学中, 我们研究了黎曼与达布积分和的极限 [295,296,301]. 在这里, 极限过程与所给的区间分割发生了联系, 和以前的研究相比较, 显出了很大的独特之处.

在第十章弧长 [内接折线长的极限,330] 及平面图形面积 [内含的与外包的诸矩形面积的极限,336] 等概念的定义中, 我们所碰到的极限, 在一定程度上, 与积分和这一类型的极限相近.

最后, 在第三卷中读者还将面临其他极限的建立, 这些极限系由另外的一些 (不同于上述的) 极限过程结果中得到的.

所有提到的极限的各个类型, 在原则上, 可以简化成整序变量的极限. 我们在全部叙述范畴内特别强调了这一概念, 起初是详细说明 [53,166,295], 后来就只限于提示一下极限定义以“整序变量说法”解释的可能性. 不待说, 复杂的极限过程化为简单的整序变量极限, 其本身就是有好处的. 而在另一方面, 即不必每次重新建立极限理论的初等定理, 它<sup>②</sup> 对我们也是重要的.

虽然所有我们遇到的各种极限可用类似的方法归结为整序变量极限, 然而须要

<sup>①</sup>极限的定义我们总是指“ $\varepsilon - \delta$ 说法”.  
<sup>②</sup>译者注: 指各种极限类型可简化为整序变量极限这一事实



择定这一变量, 并从这变量的值的集合中选出特别的一个数序列来, 无疑是含有技巧成分的. 所以毕竟不能由此做出极限的一般定义来.

现在这附录的整个一章就是为了要建立极限的一般观点, 包罗所有在分析中遇到的各种极限作为一些个别情形, 并在这基础上做出广义极限论的概略.

以下所讲的观点起初系由沙杜诺夫斯基提出, 其后是穆尔 (E.H.Moore) 与司密斯 (H.L.Smith). (然而必须指明, 我们所用的问题叙述方式决不是唯一可能的方式.)

**753. 有序集合 (狭义的)** 从以前研究过的有极限的变量的范例, 引出了下面的思考: 为了讲变量的极限时总有意义, 变量的变化域就不能是“漫无组织的”, 而应由确定的法则规定成定向的或有序的. 关于这一点, 我们首先建立有序集合的一般基本概念.

设有集合  $\mathcal{P} = \{P\}$ , 由任意性质的元素  $P$  所组成. 假设对于确定的两个不同元素  $P, P'$ , 认定其中的一个 (例如  $P'$ ) 在另一个 ( $P$ ) 的后面, 记成  $P' \succ P$ , 就说对于元素对  $P, P'$ , 建立起了序. 对于  $\mathcal{P}$  中所有可能的每对不同元素, 或仅对于其中某些对, 建立序的法则皆恒需合乎下面两个要求:

I) 假设  $P_1 \succ P_2$ , 则不能同时  $P_2 \succ P_1$ .

II) 假设  $P_1 \succ P_2$ , 并且  $P_2 \succ P_3$ , 则必须  $P_1 \succ P_3$  (即“后于”关系具有传递性质).

假设根据某项法则, 对于所有从  $\mathcal{P}$  中取出的每对不同元素, 建立起了合乎要求 I, II 的序, 则集合  $\mathcal{P}$  称为**有序的**<sup>119)</sup> (或者更精确些说, **狭义的有序集合**, 而非广义的有序集合, 至于广义有序集合将于下一目中来研究).

下面是有序集合的例子:

1) 任意的实数集合  $\{x\}$ , 假若依增序 (当  $x' > x$  时  $x' \succ x$ )<sup>①</sup> 或依减序 (当  $x' < x$  时  $x' \succ x$ ) 排列这些数, 则自然而然成为有序的了.

这个例子可以用几何的形式表示: 在水平的直线上任一点集, 若认为两点里靠右边的 (或者是靠左边的) 一个是后面的, 则被排为有序的了.

2) 现在我们来研究由二维 (数学的) 空间中一些点  $M(x, y)$  所组成的任意集合  $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ . 这个集合可以排成有序的, 比如说, 用下列的办法:

$$M'(x', y') \succ M(x, y), \text{ 假若 } x > x', \text{ 或 } x = x', y > y'.$$

在所有这些情形容易验证符合要求 I, II.

为了在研究变量极限时便于利用所引进的概念, 我们将附带地假定在所研究的集合  $\mathcal{P}$  中没有“最后的”元素 (即在所有其余的元素之后). 这样一来, 无论从  $\mathcal{P}$  中取出什么样的元素  $P$ , 永远可以找到元素  $P'$ , 使  $P'$  在  $P$  之后:  $P' \succ P$ .

<sup>①</sup>从这个简单例子以后, 将习惯于用符号  $\succ$  表示“后于”关系, 犹如用符号  $>$  (“大于”一样).

<sup>119)</sup>术语**线性有序集**同样通用.



**754. 有序集合 (广义的)** 我们将于下文见到, 对所研究的集合  $\mathcal{P}$  中每一对元素皆建立起序的假定, 时常须得放弃, 而只在某些对元素上建立了序 (符合要求 I, II), 也就可以满意了. 然而在这种情形下, 我们还将要求成立这样的条件:

III) 对于集合  $\mathcal{P}$  的每两个元素  $P, P'$ , 在此集合中可以找出元素  $P''$ , 在它们两个的后面:

$$P'' \succ P, \quad P'' \succ P',$$

(对于元素  $P$  及  $P'$ , 无论序是否已经建立起来, 在此条件下是一律的.)<sup>120)</sup>

这个条件已使  $\mathcal{P}$  里不可能存在最后的元素了.

易见, 每个狭义有序集合, 只要它没有最后元素, 则必满足条件 III. 实际上,  $P$  与  $P'$  无论是  $\mathcal{P}$  中什么元素, 此时它们的序皆已建立了; 比如说, 设  $P' \succ P$ . 因为  $P'$  不是最后的元素, 于是在  $\mathcal{P}$  中可找到元素  $P'' \succ P'$ ; 根据  $\succ$  关系的传递性, 立得  $P'' \succ P$ , 这就是要证的.

假令符合于所有三个条件 I, II, III 的序, 虽仅建立在集合  $\mathcal{P}$  的某些对元素上, 我们也将称集合  $\mathcal{P}$  为**有序的 (广义的)**.<sup>①</sup>

现在我们引这样的集合的例子:

3) 我们来研究以  $a$  为聚点 [52] 的实数  $x$  的集合  $\mathcal{X}$ ; 设  $a$  自身不属于  $\mathcal{X}$ .

我们假设

$$x' \succ x, \text{ 如果 } |x' - a| < |x - a|,$$

于是值较近于  $a$  者便是后面的.

条件 I, II 显然成立. 假如  $\mathcal{X}$  中没有两个值, 与  $a$  等距而位于  $a$  的不同侧, 则集合  $\mathcal{X}$  将是狭义有序的. 假如有这样一对值, 则对于它们, 用我们的法则显然建立不起序来.

现在我们来验证条件 III. 从  $\mathcal{X}$  中取出任意数  $x$  和  $x'$ . 因为  $x$  和  $x'$  都不是  $a$ , 而  $a$  对于  $\mathcal{X}$  说是聚点, 所以在  $\mathcal{X}$  中一定可以找到这样的  $x''$ , 比  $x$  和  $x'$  离  $a$  更近; 于是  $x'' \succ x$  并且  $x'' \succ x'$ .

这样一来, 集合  $\mathcal{X}$  在任何情形下, 是广义有序的.

4) 命  $\mathcal{X}$  是以  $\infty$  为聚点的数集合. 用下面的条件:

$$x' \succ x, \text{ 如果 } |x'| > |x|,$$

$\mathcal{X}$  可以排成有序的.

所有的条件 I, II, III 尽皆成立. 如果  $\mathcal{X}$  中没有一对仅在符号上不同的值  $x$ , 则集合将是狭义有序的. 如果有这样一对值, 则对于它们, 次序不曾建立起来, 于是只可说是广义有序的.

<sup>①</sup>也说是“部分有序的”、“半有序的”或“非全部有序的”集合.

<sup>120)</sup>配置了满足条件 III 的次序的集合  $\mathcal{P}$  常常称为有向集.



5) 今取以  $M_0(a, b)$  为聚点 [163] 的二维空间任意点集合  $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ . 并假定坐标  $a$  与  $b$  皆是有限的; 设点  $M_0$  不属于集合  $\mathcal{M}$ .

我们规定:

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

假如

$$\max(|x' - a|, |y' - b|) < \max(|x - a|, |y - b|)$$

和 3) 一样, 所有条件 I, II, III 此处皆成立. 例如我们来验证条件 III. 设在  $\mathcal{M}$  中给定两点  $M(x, y)$  与  $M'(x', y')$ ; 因为它们皆非  $M_0$ , 于是

$$\sigma = \max(|x - a|, |y - b|) > 0$$

并且

$$\sigma' = \max(|x' - a|, |y' - b|) > 0.$$

命  $\delta$  为二数中较小者; 由于  $M_0$  对于  $\mathcal{M}$  说是聚点, 故可在  $\mathcal{M}$  中找到这样的点  $M''(x'', y'')$ , 使  $|x'' - a| < \delta$  并且  $|y'' - b| < \delta$ . 于是

$$M'' \succ M, \quad \text{并且} \quad M'' \succ M'.$$

这就是要证的. 这样, 由于所规定的法则, 集合  $\mathcal{M}$  确实被排成有序的 (广义的) 了.

假若点  $M_0$  的坐标中任一个, 比如说  $a$ , 等于  $\infty$ . 则可修正我们的法则, 例如把  $|x - a|$  换成  $\frac{1}{|x|}$  等等.

6) 我们还举刚才讲的集合  $\mathcal{M}$  的另一排列序的方法作为例子 ( $a$  与  $b$  算作是有限的).

可以这样规定:

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

假如

$$|x' - a| + |y' - b| < |x - a| + |y - b|,$$

或者这样:

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

假如

$$\sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2} < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

建议读者验证一下, 在两种情形下条件 I, II, III 皆适合.

7) 命  $\mathcal{M}$  为 “整点”  $(m, n)$  的集合 (此处  $m, n$  是自然数), 具有聚点  $(+\infty, +\infty)$ . 和 5) 相类似, 可依照下列法则:

$$(m', n') \succ (m, n), \text{ 如果 } \min(m', n') > \min(m, n),$$



将此集合排列成有序的. 或者更简单一些, 按照这样的排列规律:

$$(m', n') \succ (m, n), \text{ 如果 } m' > m \text{ 并 } n' > n.$$

此处条件 I, II, III 亦皆适合.

8) 现在我们从另外的范畴中取例子. 设由割点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

将给定的区间  $[a, b]$  分为有限部分, 令所有可能的这样的分割  $R$  便是所研究的集合  $\mathcal{R}$  的元素.

若以  $\lambda$  表示这些子区间长度中的最大的, 于是就很自然地可将各种分割  $R$  依照  $\lambda$  的减序排列; 对应着较小的  $\lambda$  的分割算是后面的.

条件 I, II 的适合是显然的. 条件 III 也不难验证: 对应着值  $\lambda$  与  $\lambda'$  的两个分割, 不论是什么样的, 总是能够做出一个分成更小子区间的分割来, 这分割对应了一个比  $\lambda$  和  $\lambda'$  都小的数  $\lambda''$ .

这样一来, 集合  $\mathcal{R}$  成为有序的了, 然而仅只是广义的: 对于具有同一  $\lambda$  的两个不同的分割, 序不曾建立起来.

9) 对于刚才研究的集合  $\mathcal{R} = \{R\}$ , 可以用另外的法则来建立序: 分割  $R'$  算是在分割  $R$  的后面, 假若  $R'$  是用往  $R$  的割点中加入新割点的办法, 由  $R$  得到的. 由此得到的也只是在广义下的有序: 例如, 对于具有完全不同的割点的两个分割, 序并未建立起来.

**755. 有序变量及其极限** 现在我们来研究变化域为  $\mathcal{X}$  的变量  $x$ . 可以设想这个区域  $\mathcal{X}$  是直接地排成有序的了 (狭义的或广义的), 或者 —— 更一般的 —— 设想  $\mathcal{X}$  的值  $x$  与某一有序集合  $\mathcal{P} = \{P\}$  (由任意性质的元素所组成的) 的元素  $P$  有一单值对应. 此时变量  $x$  也称为有序的.

仿照  $\mathcal{P}$  来排列  $x = x_P$  的值的集合, 就是认作

$$x_{P'} \succ x_P, \text{ 如果 } P' \succ P (\text{在 } \mathcal{P} \text{ 里}).$$

这是一般形式下的仿造, 这种仿造我们已经对整序变量  $x_n$  做过了, 即是把它的值与自然序数 —— “号码” 对应起来, 并依照它们的增序而排列:

$$x_{n'} \succ x_n, \text{ 如果 } n' > n.$$

若能判别集合  $\mathcal{P}$  的元素  $P$ ,<sup>①</sup> 我们便可以根据这些 “附标”  $P$  来判别我们的变量的值  $x = x_P$ . 在这些情形中, 我们承认 (和在整序变量情形中一样) 可能有相等的值具不同的附标.<sup>121)</sup>

<sup>①</sup>译者注: 指判别序的先后.

<sup>121)</sup> 这样一来, 被排序的不是变量的值, 而是变量的附标. 当一个变量不止一次取同一个值时, 这一保留声明是很重要的.



特别着重指出,即讲到有序变量时,我们实际上并不把它与它的值在空间或时间中的位置等任何概念相混.较后的值不见得比较前的值占“更远的位置”;变量取较后的值也不见得就比取较前的值“更迟”等等.但若通常准许用“从某个地方开始”或“从某个变化瞬间开始”之类的表示法,则此也无非是为了言语上的形象化而已.

有序变量  $x = x_P$  的极限 (或者有时说有序集合  $\{x_P\}$  的极限) 的定义与整序变量 (或序列) 的极限的定义完全类似:

变量  $x = x_P$  有有限极限  $a$ , 假若对每个数  $\varepsilon > 0$ , 可以从  $\mathcal{P}$  里找出这样的附标  $P_\varepsilon$ , 使得对于所有的  $P \succ P_\varepsilon$  其对应的值  $x = x_P$  满足不等式

$$|x - a| = |x_P - a| < \varepsilon.$$

在第 23 目里的定义中,  $P_\varepsilon$  显然就是  $N_\varepsilon$ : 事实上, 关系  $n \succ N_\varepsilon$  与不等式  $n > N_\varepsilon$  是等价的.

完全照样, 给出无穷极限的定义:

变量  $x = x_P$  有极限  $\infty$ , 假若对每个数  $E > 0$ , 可以从  $\mathcal{P}$  里找出这样的附标  $P_E$ , 使得只要  $P \succ P_E$ , 就有  $|x| = |x_P| > E$ .

关于有确定符号的无穷,  $+\infty$  或  $-\infty$ , 不难将以上定义加以修正.

此时, 和通常一样, 写成:

$$\lim x = a(\infty, +\infty, -\infty) \quad \text{或} \quad x \rightarrow a(\infty, +\infty, -\infty).$$

我们且来看一些实例.

**756. 例题** 我们从变量  $x$  的变化域  $\mathcal{X}$  是直接排成有序的例子开始.

1) 命  $\mathcal{X} = \{x\}$  是有聚点  $a$  的任意实数集合, 依照  $|x - a|$  的减序排列 [参看第 754 目例 3)]. 显然, 对应的变量  $x$  有极限  $a$ : 不论怎样取  $\varepsilon > 0$  总可以在  $\mathcal{X}$  里找出异于  $a$  的  $x_\varepsilon$ , 使得只要  $|x_\varepsilon - a| < \varepsilon$ , 则对于  $x \succ x_\varepsilon$  必有  $|x - a| < \varepsilon$ .

相似的, 如果  $\mathcal{X} = \{x\}$  具有聚点  $\infty$ , 并依照  $|x|$  的增序把这集合排成有序的 [参阅第 754 目例 4)], 则  $x \rightarrow \infty$ .

然而比较常碰到的情形是: 把变量的值与附标  $P$  (在某一有序集合  $\mathcal{P}$  中) 做成对应. 下面所引入的这一类的例子具有特殊的重要性: 它们示明在本课程内所研究的各个极限类型, 实际上, 可被认作以上所讲的一般性定义的特殊表现.

2) 我们来研究函数极限 [第 52 目]

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \tag{1}$$

的概念. 为了简单起见, 限于有限的  $a$  与  $A$  的情形.

设函数  $f(x)$  被确定在具有聚点  $a$  的区域  $\mathcal{X} = \{x\}$  内; 值  $a$  自己不在  $\mathcal{X}$  之内, 或者至少在极限 (1) 的定义之下不认为在  $\mathcal{X}$  之内. 这个函数便是此处要讨论其极限



的变量, 而  $x$  就作为附标  $P$ . 我们将  $x \rightarrow a$  的意义了解成这样, 即:  $x$  的变化域  $\mathcal{X}$  系依  $|x - a|$  的减序而排列的 [第 754 目, 3)]. 于是函数值的集合  $\{f(x)\}$  也依照相应的样式排出次序来了, 因之等式 (1)——按照一般性定义——得到了确切的意义. 这就是说: 对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 总可以从  $\mathcal{X}$  中找出这样的值  $x_\varepsilon$ , 使得对于  $x \succ x_\varepsilon$ , 即是只要  $|x - a| < |x_\varepsilon - a|$ , 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (2)$$

成立.

设  $|x_\varepsilon - a| = \delta$ , 以上条件可以改写成:  $|x - a| < \delta$ . 反之, 如果  $|x - a| < \delta$  时不等式 (2) 成立, 则在条件  $|x_\varepsilon - a| < \delta$  之下取定  $x_\varepsilon$  以后, 可以断言, 对于  $x \succ x_\varepsilon$  (2) 成立. 这样一来, 新的函数极限定义和以前的 [第 52 目] 是等价的.

### 3) 二元函数的极限

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \quad (3)$$

的定义可以完全类似地用有序变量的术语表出.

设函数  $f(M) = f(x, y)$  确定于具有聚点  $M_0(a, b)$  的区域  $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$  之中;  $M_0(a, b)$  本身在等式 (3) 的定义之下不算进去.  $\mathcal{M}$  中的点  $M(x, y)$  作为附标. 按照在第 754 目 5) 中所做的那样, 将集合  $\mathcal{M}$  排列出序来 (即是按照这种意义来了解  $M \rightarrow M_0$  或  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ ), 其后我们又照样地排列函数值的集合<sup>122)</sup>  $\{f(M)\} \equiv \{f(x, y)\}$  成为有序的, 于是按照有序变量极限的一般性定义, 等式 (3) 有了意义.

并且在这里可以立即看出, 等式 (3) 的新的了解法和以前的 [第 165 目] 是等价的.

假如不用第 754 目 5) 中所指出的  $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$  的排列法则, 而以第 754 目 6) 中所引入的法则作基础, 则极限的定义在实际上还是一样的.

### 4) 对于依赖于两个正整数下标的变量 $x_{m,n}$ , 极限

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} x_{m,n} = A$$

的概念建筑在以下的数对  $(m, n)$  排列法则上:

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{若 } \min(m', n') > \min(m, n)$$

[参看第 754 目 7)]. 这与第 165 目最后所讲到的那个极限定义相符.

假如我们由同样在 7) 中曾提到的, 更简单些的排列法则

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{若 } m' > m, n' > n$$

<sup>122)</sup> 此处, 如同前述变量的情形, 所指是函数值的附标, 即事实上是把所有形如  $(M, f(M))$  的“对”排序, 其中  $M$  是  $\mathcal{M}$  中的点.



出发, 所得结果仍然相同.

所有以上所论, 推广到多元函数的情形并无困难.

5) 最后, 我们回到确定于区间  $[a, b]$  的有界函数  $f(x)$  的黎曼或达布积分和的极限问题上来. 这些和数与借任意割点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$

将区间  $[a, b]$  分为若干部分的分割  $R$  有关, 并且极限过程是按照  $\lambda \rightarrow 0$  进行的 (此处  $\lambda = \max \Delta x_i$ ). 在第 754 目 8) 中, 我们已按照  $\lambda$  的减序而把区间所有可能的分割的集合  $\mathcal{R} = \{R\}$  排成有序的了. 于是达布和的值  $s$  与  $S$  也就与此相应的排成有序的了.

要作成黎曼积分和  $\sigma$ , 除了区间的分割以外, 还须在每一子区间中取点. 这样一来, 黎曼和就是由不仅有割点而且还有介点的总的集合所确定的了. 这些集合 (并且随之黎曼和) 也可以依照  $\lambda$  的减序而排成有序的.

此刻已经很清楚, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S$$

也可按照这里发展的广泛方式来讲了.

同时注意, 假如按照第 754 目 9) 的法则来排列集合  $\{\sigma\}, \{s\}, \{S\}$  的次序, 则实际上恒得同一极限. 建议读者根据第 297 目及第 301 目的结果把这证明一下, 当作练习.

关于弧长 [第 330 目]、平面图形面积 [第 336 目] 的曲线积分、二重积分与曲面积分 [544;550;589;631;635] 等定义中所研究过的极限的问题, 类似的也都被解决了.

**757. 关于函数极限的附注** 在讲到极限 (1) 时, 我们已规定了用唯一的、完全确定的方法去排列集合  $\mathcal{X} = \{x\}$  [第 754 目 3)], 并且随之函数值的集合  $\{f(x)\}$  也如法排列. 以前面所讲的  $x$  趋近于  $a$  的“标准”法则为基础,  $\{f(x)\}$  的极限的定义就和第 52 目中用“ $\varepsilon - \delta$  的说法”所给出的那个定义是等价的了.

然而  $x$  在集合  $\mathcal{X}$  中, 或在任何以  $a$  为聚点并依任意法则排列的  $\mathcal{X}$  子集合中, 以  $a$  为极限而变化时, 却很可能并不按照  $x$  趋近于  $a$  的“标准”法则. 函数  $f(x)$  的值就得每次仿照  $x$  而排列.

因此, 等式 (1) 也可以了解成这样:

自变量  $x$  不论按照什么法则趋于极限  $a$ , 函数  $f(x)$  恒趋于同一极限  $A$ .

这个定义和第 53 目中用“整序变量的说法”给出的定义差不多, 只是在这里把任意的, 趋于  $a$  的,  $x$  值的序列换成了更为广泛的具有极限  $a$  的任意有序集合.

要证刚才所引入的定义与在前目中所给的定义的等价性, 只需说明: 由在第 52 目的意义下的极限 (1) 存在, 可以得出前述命题. 设对任意的  $\varepsilon > 0$ , 可以找出这样的



$\delta > 0$ , 使得只要  $|x - a| < \delta$ , 不等式 (2) 就成立. 不论  $x$  按照什么法则趋于  $a$ , 根据极限定义, 应该存在这样的值  $\bar{x}$ , 使得对于  $x \succ \bar{x}$  有  $|x - a| < \delta$ , 于是对于这样的  $x$  值不等式 (2) 也成立, 事实上也就是说,  $f(x) \rightarrow A$ .

对于二元 (或多元) 函数, 也可做出像这样的附注.

**758. 极限理论的推广** 最后, 我们来把在第一章中对于整序变量所证明的各个定理推广到有序变量的一般场合. 如果一步一步地考察对于整序变量的极限理论的建立, 则做出这个推广并无困难.

每当那里讲到某种关系对于具有号码  $n$  (大于某  $N$ ) 的值  $x_n$  成立, 则这里就该讲到它对于具有附标  $P \succ$  某  $P'$  的值  $x = x_P$  成立.

例如, 我们来证与第 26 目 1) 相类似的命题:

假若有序变量  $x_P$  趋于极限  $a$ , 并且  $a > p(a < q)$ , 则至低限度, 从某个地方开始,  $x_P > p(x_P < q)$ .

取了  $\varepsilon < a - p(\varepsilon < q - a)$ , 我们找出这样的  $P'$ , 使得对于  $P \succ P'$  有  $|x_P - a| < \varepsilon$ ; 对于这些  $x_P$ , 显然也有

$$x_P > a - \varepsilon > p(x_P < a + \varepsilon < q).$$

第 26 目中  $2^\circ \sim 4^\circ$  的命题也照样被推广了, 最后一个尚可述其大意如次: 若变量  $x$  有 (有限的) 极限  $a$ , 则至低限度, 从某个地方开始, 它是有界的 [参看第 55 目 I,  $4^\circ$ ].

在证明极限的唯一性时 [第 26 目  $5^\circ$ ], 要特别利用到条件 III [第 754 目].

我们来反证, 设同时  $x_P \rightarrow a, x_P \rightarrow b$ , 并  $a < b$ . 如果在  $a$  与  $b$  之间取出  $r$ , 则一方面对于  $P \succ P', x_P < r$ , 另一方面对于  $P \succ P'', x_P > r$ . 但恰恰根据 III, 可以找得这样的附标  $P$ , 使得同时既  $P \succ P'$  又  $P \succ P''$ ; 于是同时  $x_P < r$  并且  $x_P > r$ , 这就发生了预期的矛盾.

单调变量的定义由以下形式推广到有序变量: 变量  $x_P$  称作是单调增加的 (或广义的单调增加), 如果从  $P' \succ P$  永远可以推出  $x_{P'} > x_P$  (或  $x_{P'} \geq x_P$ ).

单调增函数  $f(x)$  (如果把它的值依自变量  $x$  的增序而排列) 或正项二重级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$$

的部分和  $A_m^{(n)}$  (如果规定

$$\text{当 } m' > m \text{ 并 } n' > n \text{ 时 } A_{m'}^{(n')} > A_m^{(n)},$$

可以作为这样的变量的例子.

如法可以建立单调减少的变量的概念.



注意达布和  $s$  与  $S$  的已知特性 [第 296 目]. 今若只照在第 754 目例 9) 中所做的那样来排列区间分割, 则显然小和数  $s$  成为单调增加的变量, 而大和数  $S$  成为单调减少的变量. 但若取其他排列方法 [第 754 目 8)] 时, 就不能这样讲了.

现在甚易推广第 34 目关于单调整序变量的定理:

单调增加的变量  $x = x_P$  恒有极限. 如果变量上有界, 则此极限是有限的, 反之则为  $+\infty$ .

假定变量是有界的, 命  $a = \sup\{x_P\}$ , 则所有的  $x_P \leq a$ , 并且另一方面无论  $\varepsilon > 0$  是个什么数, 可找得这样的附标  $P_\varepsilon$ , 使得  $x_{P_\varepsilon} > a - \varepsilon$ . 但是此后只要  $P \succ P_\varepsilon$ , 就有  $x_P > x_{P_\varepsilon}$ , 所以更有  $x_P > a - \varepsilon$ . 这样一来, 不等式  $|x_P - a| < \varepsilon$  对于  $P \succ P_\varepsilon$  成立, 因之  $x_P \rightarrow a$ .

假定变量  $x_P$  是无界的, 则对于每一个数  $E > 0$ , 可以找得这样的  $P_E$ , 使得  $x_{P_E} > E$ . 于是对于  $P \succ P_E$ , 就更有  $x_P > E$ , 因之  $x_P \rightarrow +\infty$ . 定理得证.

第 34 目关于单调整序变量极限的定理及第 57 目关于单调函数极限存在的定理, 还有第 394 目关于正项二重级数收敛性的定理, 都被包含在这个定理之中而作为一些特殊情形了. 读者知道, 此处所做的一些说明, 仅不过是把上述几处的个别定理证明中所曾有的, 在一般形式中翻了一下版而已.

我们注意, 只要站在第 754 目 9) 的法则的观点上, 达布和  $s$  与  $S$  的有限极限的存在可从所证的一般性定理中立即推得, 至于  $s$  与  $S$  的极限的重合 (在第 301 目曾研究过), 则仍待证明.

作为较复杂的例子, 我们来证明**收敛性原理**[参看第 39 目]:

有序变量  $x_P$  有有限的极限, 必须而且只需, 对于每个数  $\varepsilon > 0$  存在这样的附标  $P_\varepsilon$ , 使得只要  $P \succ P_\varepsilon$  并  $P' \succ P_\varepsilon$ , 不等式

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$$

即成立.

按照第 39 目中的推理的大意, 首先来肯定这个条件的**必要性**, 假令  $x_P \rightarrow a$ , 则对于数  $\frac{\varepsilon}{2}$  可找得这样的  $\bar{P}$ , 使得对于  $P \succ \bar{P}$  有  $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 设  $P \succ \bar{P}$  并  $P' \succ \bar{P}$ , 即得  $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  并  $|a - x_{P'}| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 因之  $|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$ ; 此时就可以将  $\bar{P}$  取作  $P_\varepsilon$ .

要证明其**充分性**, 先假定条件成立.

我们在全体实数域中依照以下法则做一分割. 每一实数  $\alpha$ , 如果自某个地方开始

$$x > \alpha,$$

则将其归入  $A$  部. 而所有其余实数  $\alpha'$  则一齐归入  $B$  部. 易见, 这个法则确乎规定了分割. 我们只证一下  $A$  与  $B$  都是非空的.

对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 根据假定, 可找到与之对应的  $P_\varepsilon$ , 使得只要  $P \succ P_\varepsilon$  并



$P' \succ P_\varepsilon$ , 即有

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon \quad \text{或} \quad x_{P'} - \varepsilon < x_P < x_{P'} + \varepsilon.$$

因此,(当  $P' \succ P_\varepsilon$  时)  $x_{P'} - \varepsilon$  是数  $\alpha$  之一以及  $x_{P'} + \varepsilon$  是数  $\alpha'$  之一, 业已显然, 后半句话严格来讲仍要利用到条件 III: 倘若  $x_{P'} + \varepsilon$  是  $\alpha$  的一个, 那么比如说对于  $P \succ \bar{P}$  不等式  $x_P > x_{P'} + \varepsilon$  成立, 则 (借助于 III) 取  $P$  使既有  $P \succ P_\varepsilon$  又有  $P \succ \bar{P}$ , 即同时兼有  $x_P < x_{P'} + \varepsilon$  与  $x_P > x_{P'} + \varepsilon$  了!

根据戴德金定理 [第 10 目], 存在有二部之间的分界数  $a$ ,

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

特别在  $P' \succ P_\varepsilon$  时

$$x_{P'} - \varepsilon \leq a \leq x_{P'} + \varepsilon, \quad \text{即} \quad |x_{P'} - a| \leq \varepsilon,$$

由此推出  $x_P \rightarrow a$ .

这个定理得到了很有意思的应用. 它不仅包含了我们熟知的第 39 目及第 58 目的定理, 作为特殊情形, 而且更导致了新的结果. 例如收敛性原理借它的助力被推广到了多元函数, 二重级数等. 它还给出了弧的可度长的条件 [第 330 目]. 建议读者自己述出这个条件, 要注意到如果条件对于整个弧成立, 则对于部分弧也成立; 这样一来, 以前需要我们冗长讨论的命题 [第 247 目], 现在只消三言两语就可以证明了.

**759. 同序变量** 为了要推广到那些其中同时出现有两个 (或多个) 变量的命题, 我们引入同序变量的概念. 如果两个变量  $x$  与  $y$  借助于同一有序集合  $\mathcal{P} = \{P\}$  而排列成为有序的, 即将  $x$  及  $y$  的值与  $\mathcal{P} = \{P\}$  的元素做成单值对应, 那么就称  $x$  与  $y$  为同序变量 ( $x$  与  $y$  的具有同样附标  $P$  的值  $x_P$  与  $y_P$  算作是对应的).

例如, 若是我们对于同一个自变量  $x$  (具有有序变化区域  $\mathcal{X}$ ) 有两个函数  $f(x)$  与  $g(x)$ , 则此二函数将是同序变量. 而由同一  $x$  值 (它就作为附标  $P$ ) 所确定的它们的值, 将是对应的.

这里是另一例子. 设对于确定在某区间  $[a, b]$  上的函数  $f(x)$  及  $g(x)$  作出了积分和

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{与} \quad \tau = \sum_i g(\xi_i) \Delta x_i.$$

很容易看出, 此处便是将由同一割点  $x_i$  及介点  $\xi_i$  的总集所确定的和数算作是对应的; 这割点与介点的总集在目前就是附标  $P$ ; 如果将和数  $\sigma, \tau$  与这些总集一道, 皆依  $\lambda = \max \Delta x_i$  的减序而排列, 则我们又得到了同序变量.

现在, 以等号或数学运算符号连接两个变量  $x, y$  时, 我们将假定它们是同序的, 而且是指具同一附标的对应值  $x_P, y_P$  而言, 如果像以前对待整序变量的号码  $n$  一样来对待这些附标, 则以前关于整序变量的各种论证, 可以毫不费力地全套搬来.



例如我们来证这个定理 (推广了的第 29 目引理 2):

假若变量  $x_P$  (至低限度自某个地方开始) 是有界的, 并且它的同序变量  $\alpha_P$  是个无穷小, 则它们的乘积也将是无穷小.

假定说, 对于  $P \succ P'$

$$|x_P| \leq M \quad (0 < M = \text{常量}).$$

给定任一  $\varepsilon > 0$ , 可根据数  $\frac{\varepsilon}{M}$ , 找到这样的  $P''$ , 使得对于  $P \succ P''$ , 有

$$|\alpha_P| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

依照条件 III, 存在这样的  $P_0$ , 使得

$$P_0 \succ P' \quad \text{并} \quad P_0 \succ P''.$$

如若  $P \succ P_0$ , 则 (由 II) 同时有

$$P \succ P' \quad \text{并} \quad P \succ P'',$$

因之前面的两个不等式皆成立, 于是

$$|x_P \alpha_P| = |x_P| \cdot |\alpha_P| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

这就证明了我们的命题.

经过所引的这些例子, 读者可以清楚地看到, 整套的极限理论确乎 (保持证明中的主要线索) 被移植到有序变量的一般场合了.

**760. 借助于参数的排列法** 所有我们遇到的极限概念在分析中的应用场合, 变量  $x_P$  的附标集合  $\mathcal{P} = \{P\}$  的排列法总是千篇一律的. 所用的排列法可以一般地描述成下面的样式.

把  $\mathcal{P}$  中的每一个元素  $P$  与某个参数的值  $t$  对应起来, 并且同一个  $t$  还可以与很多的  $P$  相对应; 所有这样的  $P$  的集合以  $\mathcal{P}_t$  表之. 我们假定所有的  $t > 0$ , 并且存在有任意小的值  $t$ , 使相应的  $\mathcal{P}_t$  不是空的.

现在我们规定, 在两个元素  $P$  之间, 对应于较小的参数值  $t$  的一个算作是后面的 (就是说我们“依参数的减序”来排列  $P$ ). 而对于对应同一个  $t$ , 因之属于同一个集合  $\mathcal{P}_t$  的两个元素  $P$  (以及对于对应的  $x$  值), 则并不分出先后次序. 此时条件 I, II, III 尽皆符合. 关于 I, II 这是很容易看出的; 我们来验证一下条件 III. 设  $P$  与  $P'$  是集合  $\mathcal{P}$  的任意两个元素, 对应参数值  $t$  与  $t'$ . 根据假定, 可找到这样的值  $t''$ , 既小于  $t$  及  $t'$ , 而又使相应的  $\mathcal{P}_{t''}$  不是空的. 于是  $\mathcal{P}_{t''}$  中任意的  $P''$  既在  $P$  的后面, 又在  $P'$  的后面.



读者不难验出, 所有已有的应用极限概念的场所, 都是按这样处理的. 对于具附标  $n$  的整序变量  $x_n$ , 可取  $t = \frac{1}{n}$ . 至于函数  $f(x)$  及其当  $x \rightarrow a$  时的极限, 则其附标  $x$  的集合是依照参数  $t = |x - a|$  的减序而排列的. 同样, 在二元函数  $f(M) = f(x, y)$  [此处点  $M(x, y)$  作为附标] 的情形下定义  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$  时函数的极限, 就可以用参数

$$t_1 = \max\{|x - a|, |y - b|\}, \quad t_2 = |x - a| + |y - b|$$

或

$$t_3 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

中的任一个来描述  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$  的过程. 对于达布和

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i,$$

割点的集合作为是附标; 而转变到黎曼和

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

时, 则还要把点  $\xi_i$  的集合也算进去. 在这两种情形下, 这些附标皆是借助于参数  $t = \max \Delta x_i$  而排列的. 在定义弧长时, 则是把部分弧直径中的最大的作为参数. 以及诸如此类.

当变量  $x$  的变化域  $\mathcal{X}$ , 或是 —— 更精确些 —— 附标集合  $\mathcal{P} = \{P\}$ , 系按照上述方式借助于参数  $t$  而排列的时候, 显然总可以将极限 (限于有限的极限) 的定义给成下列的形式: 数  $a$  说是  $x$  的极限, 假如对于每个数  $\varepsilon > 0$  对应有这样的  $\delta > 0$ , 使得只要  $x$  所对应的参数值  $t < \delta$ , 就有

$$|x - a| < \varepsilon.$$

借助于参数的排列法, 我们在第三卷中还将利用到. 然而这个简单的排列法终归难以满足数学分析中较高级的支系的需求. 关于一般不能用引入参数的方式来做排列法, 可取第 754 目 9) 的法则为例, 这在次目的讨论中就会明白.

**761. 化简成整序变量** 直到目前为止, 在所有具体情况中, 当我们碰到极限概念时, 总可在某种意义上把问题化简成整序变量的极限. 这种把极限概念以“整序变量的说法”表达的可能性, 在以前的论述中甚为重要.

现在我们来研究一下, 在一般场合中有序变量  $x = x_P$  的情形是怎样的.

为了这个目的, 我们引入对于给定的有序集合  $\mathcal{P} = \{P\}$  的临界子序列的概念. 从  $\mathcal{P}$  中取出的元素的序列

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, \quad (4)$$



如果合乎以下条件: 无论从  $\mathcal{P}$  中取出怎样的元素  $P'$  来, 号码充分大的元素  $P_n$  总在  $P'$  的后面

$$P_n \succ P' \quad (\text{对于 } n > N),$$

则称之为  $\mathcal{P} = \{P\}$  的临界子序列.

如果变量  $x$  借助于附标  $P$  (属于  $\mathcal{P}$ ) 而排列, 则当集合  $\mathcal{P}$  中存在有临界子序列时, 我们就称从  $\mathcal{X}$  里对应地抽出的  $x$  值序列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (5)$$

为  $\mathcal{X} = \{x\}$  的临界子序列.

首先就发生了问题: 是否至少存在一个子序列 (4), 对于  $\mathcal{P}$  说乃是临界的? 或是同样的, 是否至少存在一个子序列 (5), 对于  $\mathcal{X}$  说乃是临界的?

应该指明, 当集合  $\mathcal{P}$  的排列系借助于某个参数  $t$  时 (如前目所阐明者), 临界子序列的建立总不困难: 取定序列  $\{t_n\}, t_n \rightarrow 0$ , 并使所有的集合  $\mathcal{P}_{t_n}$  非空, 然后从每个  $\mathcal{P}_{t_n}$  中择取元素  $P_n$  组成序列  $\{P_n\}$ , 显然即所欲求者.

然而在一般情形下, 对于有序集合  $\mathcal{P} = \{P\}$ , 可以根本不存在任何一个临界子序列.

例如我们来研究依第 754 目 9) 的法则而排列的, 定区间  $[a, b]$  的各种有限分割<sup>①</sup>集合  $\mathcal{R} = \{R\}$ .

我们从反面来看, 假如对于  $\mathcal{R}$  存在有分割的临界子序列

$$R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$$

每一个  $R_n$  对应一个割点的有限集合. 不难做出这样的区间  $[a_1, b_1] (a < a_1 < b_1 < b)$ , 使得其中不含  $R_1$  内任何一个割点. 然后做出区间  $[a_2, b_2] (a_1 < a_2 < b_2 < b_1)$ , 不含  $R_2$  的割点, 如此类推以至无穷. 在第  $n$  次是做出区间  $[a_n, b_n] (a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1})$ , 其中不含  $R_n$  的割点. 如若此时注意使  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , 则依照第 38 目关于内含区间的引理, 可得唯一的点  $c = \lim a_n = \lim b_n$ , 属于所有的区间  $[a_n, b_n]$ . 这个点显然不与任何一个  $R_n$  的任何一个割点相重合. 假如现在取区间  $[a, b]$  的任一分割  $R'$ , 其中  $c$  是一个割点, 则根据第 754 目 9) 的法则, 任何一个  $R_n$  皆不能说是在  $R'$  的后面, 乃与临界子序列的定义冲突. 这个矛盾就证明了这样的子序列事实上根本没有.

[顺便提一下, 由此就可以推出, 第 754 目 9) 的集合  $\mathcal{R} = \{R\}$  的排列法不可能在前目的意义下以参数表达!]

现在我们假定: 附标集合  $\mathcal{P}$  以及随之有序变量  $x$  的变化域  $\mathcal{X}$ , 皆含有临界子序列. 在这种情形下 (并且显然也只在此情形下) 变量  $x$  的极限的问题可按通常的办法化简成整序变量的极限的问题:

<sup>①</sup>这些  $R$ , 如曾指出过的, 可以作为附标, 例如作为确定于  $[a, b]$  的任一函数的达布和的附标.



要变量  $x$  有极限  $a$ , 必须而且只需, 每一个通过  $\mathcal{X}$  的临界子序列的整序变量  $x_n$  趋于此极限.

事实上, 假设  $x \rightarrow a$  (此处我们为了明确起见, 假定  $a$  是有限的), 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$|x_P - a| < \varepsilon, \text{ 只要 } P \succ P_\varepsilon.$$

但若取出任意的临界子序列 (4), 则对于充分大的  $n$ , 根据定义, 将有  $P_n \succ P_\varepsilon$ , 因之

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| < \varepsilon.$$

这就是说, 整序变量  $x_n \rightarrow a$ .

反之, 假设每个这样的整序变量趋于  $a$ . 为了要证明即有  $x \rightarrow a$ , 我们假定相反的: 对于某个  $\varepsilon > 0$ , 无论从  $\mathcal{P}$  中取出什么样的  $P'$  来, 总可找到  $P \succ P'$ , 使得  $|x_P - a| \geq \varepsilon$ . 取定  $\mathcal{P}$  的某一个临界子序列  $\{P'_n\}$ . 按照所说的, 对于每一个  $P'_n$ , 在  $\mathcal{P}$  中可找出元素  $P_n \succ P'_n$ , 使得

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots).$$

不难证明, 子序列  $\{P_n\}$  对于  $\mathcal{P}$  也是临界的, 也就是说子序列  $\{x_n\}$  对于  $\mathcal{X}$  是临界的, 于是上面的不等式与原来的假设矛盾.

**762. 有序变量的上极限与下极限** 我们来研究有序变量  $x$ , 它的值是由附标  $P$  (属于  $\mathcal{P}$ ) 给出的. 对于任意的  $P$ , 我们用那些在  $x_P$  之后的  $x$  值, 即对应于附标  $P' \succ P$  的  $x$  值, 组成集合  $\mathcal{X}_P$ , 并找出它的确界

$$\sup \mathcal{X}_P \quad \text{与} \quad \inf \mathcal{X}_P$$

(可能是无穷). 其中每一个都是带有附标  $P$  的有序变量, 并且其中第一个是单调减少的, 而第二个是单调增加的 (在第 758 目的意义之下). 此时, 根据关于单调变量的定理, 存在有确定的 (有限的或无穷的) 极限.

$$\left. \begin{aligned} M^* &= \lim(\sup \mathcal{X}_P) \\ M_* &= \lim(\inf \mathcal{X}_P).^{①} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

一般的就分别称之为变量  $x$  的上极限或下极限, 并记如

$$M^* = \overline{\lim} x, \quad M_* = \underline{\lim} x.$$

这两个极限的相等是在一般意义下 [第 755 目] 变量  $x$  极限存在的必要且充分的条件.

①所研究的变量还可能采取广义的值  $\pm\infty$ , 而这种情形并不发生困难.



事实上,若存在有有限的极限

$$a = \lim x, \quad (7)$$

则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 可找到这样的附标  $P_\varepsilon$ , 使得对于  $P \succ P_\varepsilon$ , 有

$$a - \varepsilon < x_P < a + \varepsilon. \quad (8)$$

于是又有

$$a - \varepsilon \leq \inf \mathcal{X}_{P_\varepsilon} \leq M_* \leq M^* \leq \sup \mathcal{X}_{P_\varepsilon} \leq a + \varepsilon,$$

因之, 由于  $\varepsilon$  是任意的,

$$M^* = M_* = a.$$

反之, 若这个等式成立 ( $a$  是有限的), 则由于 (6), 对于  $\varepsilon > 0$  又可找出这样的  $P_\varepsilon$ , 使得

$$a - \varepsilon < \inf \mathcal{X}_{P_\varepsilon} \leq \sup \mathcal{X}_{P_\varepsilon} < a + \varepsilon,$$

所以 (8) 成立, 并且由此推得 (7).

建议读者进行  $a = \pm\infty$  的情形研究.

数  $M^*$  与  $M_*$  (在它们是有限的情形下) 可以用与第 42 目中研究过的性质 I, II 完全类似的性质作为特征. 例如我们来看  $M^*$ .

假如任意取出数  $\varepsilon > 0$  及附标  $P_0$ , 则存在这样的  $P_\varepsilon \succ P_0$ , 使得

$$M^* - \varepsilon < \sup \mathcal{X}_{P_\varepsilon} < M^* + \varepsilon.$$

由此根据上确界的定义即得

**数  $M^*$  的性质 I:** 对于所有的  $P \succ P_\varepsilon$  有  $x_P < M^* + \varepsilon$

**数  $M^*$  的性质 II:** 至少可找到一个这样的值  $x_{P'}$  (此处  $P' \succ P_0$ ), 使得

$$x_{P'} > M^* - \varepsilon.$$

现在假定集合  $\mathcal{P} = \{P\}$  包含有临界子序列 (4), 并与我们的变量值的临界子序列 (对于  $\mathcal{X}$ ) 相对应. 如若这种的序列中的某一个有极限, 则称之为变量  $x$  的**部分极限**[参看第 40 目与第 59 目].

此时可以证明: 以上所定义的上极限与下极限  $M^*, M_*$  同时还分别是变量  $x$  所有的部分极限的最大者与最小者[亦如在第 40 目与第 59 目中一样].

实际上 (如果还假定上极限是有限的), 从性质 I 立见: 随便哪一个部分极限都不能超过  $M^*$ . 为了要做出一个  $\mathcal{X}$  的临界子序列 (5), 使之趋于  $M^*$  (这就说明  $M^*$  本身也是一个部分极限), 我们且先从随便一个  $\mathcal{P}$  的临界子序列

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$$



入手. 然后借助于性质 I, II[参看第 40 目], 我们便归纳地做出了这样的子序列 (4), 使得: 第一, 有

$$P_n \succ P'_n$$

[因之 (4) 对于  $\mathcal{P}$  也是临界的!], 并且第二,  $x_n = x_{P_n}$  满足双重不等式

$$M^* - \varepsilon_n < x_n < M^* + \varepsilon_n,$$

此处  $\varepsilon_n$  是任意取的趋于 0 的正项整序变量. 甚易看出, 子序列 (5) 对  $\mathcal{X}$  说是临界的, 且以  $M^*$  为其极限.

从读者所熟悉的范畴中还可以再指出一个上极限及下极限的例子. 例如, 易见达布上积分  $I^*$  及下积分  $I_*$  [第 296 目, 第 301 目] 分别为积分和 (黎曼和)  $\sigma = \sum f(\xi_i) \Delta x_i$  于  $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$  时的上极限与下极限.



# 索引

$\Gamma$  函数, 124, 183, 323, 378  
 $n$  维单纯形, 321  
 $n$  维球面, 323  
 $n$  维球体, 322  
 $n$  维区域, 317  
 $n - 1$  维曲面上的积分, 318

## A

阿贝尔, 189  
阿尔采拉, 90  
阿尔采拉定理, 488  
阿基米德定律, 278

## B

贝塞尔函数, 112, 329, 347  
闭路, 12  
边界条件, 453  
变换保持面积不变者, 162  
波腹, 455  
波节, 455  
伯恩施坦, 416  
泊松, 227  
泊松-阿贝尔广义求和法, 497  
泊松核, 499  
不是傅里叶级数的三角级数, 517  
布尼亚科夫斯基不等式, 113

部分和, 505  
部分和的估值, 415

## C

侧, 196  
场的引力, 25  
场中力的功, 306  
初值条件, 453  
纯量, 300  
纯量场, 301  
存在的条件, 251

## D

达布, 66  
达布和, 97, 251  
达布下积分及上积分, 98  
单侧曲面, 194  
单层, 224  
单连通, 35, 140, 274  
等量面, 301  
迪尼判别法, 355, 356, 401, 435  
笛卡儿叶形线, 21  
狄利克雷, 124, 358, 505  
狄利克雷-若尔当判别法, 360, 403, 436  
狄利克雷公式, 324



狄利克雷积分, 352  
 狄利克雷判别法, 360  
 狄利克雷条件, 360  
 狄利克雷问题, 500  
 第二型曲面积分, 231  
 第二型曲面积分为第一型曲面积分, 237  
 第二型曲面积分为寻常二重积分, 237  
 第一型曲面积分, 222  
 点的曲线坐标, 145  
 点集, 97  
 杜·布瓦-雷蒙, 410  
 对区域的导数, 104  
 对区域的微分法, 103  
 多重傅里叶级数, 397

## E

二元函数, 449  
 二重积分, 93, 96, 97, 105, 192, 222  
 二重积分存在的条件, 97  
 二重积分的性质, 101  
 二重积分中的变量变换, 143, 163  
 二重级数, 192

## F

法图, 506  
 反常二重积分, 171, 192  
      $\sim$  的绝对收敛性, 173  
 反常积分, 177  
      $\sim$  的变量变换, 178  
      $\sim$  的主值, 192, 439  
 反常三重积分, 257  
 反演法, 147  
 方向, 12  
 方向导数, 302  
 非单连通区域, 38  
 费耶, 410  
 费耶核, 503  
 分部积分法, 71  
 封闭的, 483

封闭性方程, 483  
 弗罗贝尼乌斯, 504  
 傅里叶, 341  
 傅里叶变换, 450  
 傅里叶公式, 439  
 傅里叶积分, 432, 435  
 傅里叶级数, 345, 481  
      $\sim$  的乘法, 489  
      $\sim$  的复数形式, 392  
      $\sim$  的阶, 419  
      $\sim$  的绝对收敛性, 490  
      $\sim$  的奇异性质, 410  
      $\sim$  的无穷小阶, 420  
      $\sim$  的一致收敛性, 401  
 傅里叶余弦变换, 441

## G

改善级数的收敛性, 425  
 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式, 271  
 高斯积分, 42  
 高斯曲率, 219  
 高斯系数, 205  
 格拉姆, 340  
 格林公式, 137  
 公式, 124, 218, 263  
 共轭函数, 441  
 共轭三角级数, 395  
 古尔丹定理, 134, 291  
 关于, 514  
 管量场, 308  
 惯矩, 131  
 惯性积, 132, 270  
 惯性椭球面, 270  
 惯性椭圆, 132  
 广义的极坐标, 158  
 广义傅里叶级数, 349  
 广义傅里叶系数, 349  
 广义球坐标, 295  
 规范的, 346



**H**

哈密顿, 302  
 函数, 253  
 函数 $B$ , 170  
 函数的平均近似法, 481  
 函数系, 483  
 和, 8  
 赫尔姆霍尔茨, 314  
 赫尔维茨, 493  
 弧长, 4, 293  
 化, 12  
 化第二型曲线积分为斯蒂尔切斯积分, 91  
 化二重积分为逐次积分, 94, 175  
 化斯蒂尔切斯积分为黎曼积分, 72  
 化为, 222  
 化为普通定积分, 3  
 化为逐次积分, 116

**J**

奇函数, 350, 364, 365  
 积分, 30, 44  
 积分当作区域的可加函数, 103  
 积分对数, 447  
 积分方程, 123, 440, 441  
 积分和, 2, 65, 97  
 积分可化为, 318  
 积分余弦, 445  
 积分正弦, 446  
 吉布斯现象, 408  
 极惯矩, 131  
 极值性质, 481  
 极坐标, 146, 156, 329  
 极坐标下面积元素, 152  
 级数的泊松-阿贝尔求和法, 497  
 几何图像上的积分, 273  
 剪力, 80  
 截头圆柱, 135  
 静矩, 78, 130, 228, 263

**K**

卡特兰, 218  
 卡特兰公式, 125  
 开普勒方程, 451  
 柯尔莫戈洛夫, 414  
 柯西, 432, 442  
 可积函数, 97, 252  
 可加, 253  
 可加函数, 253  
 可求长曲线, 1, 63  
 可求积的曲面, 201  
 可以看见的元素角, 43  
 克雷洛夫, 425  
 空间, 274  
 空间的变换, 279  
 空间的极坐标, 281  
 空间定向, 197  
 库斯科夫公式, 291

**L**

拉格朗日, 314, 386  
 拉普拉斯, 442  
 拉普拉斯方程, 313  
 莱布尼茨, 187, 225, 368  
 勒贝格, 410  
 勒让德, 183  
 勒让德多项式, 186, 347  
 黎曼求和法, 510  
 离心矩, 132, 270  
 离心力, 270  
 李雅普诺夫, 484  
 利普希茨, 68, 355  
 利普希茨判别法, 355  
 立体的吸引力, 298  
 立体的旋转, 269  
 立体角, 275  
 立体在自身上的位势, 316  
 立体质量, 250  
 力场, 50, 306



力场中的功, 50  
 力函数, 50  
 连续的有界变差函数, 61  
 连续性方程, 311  
 两立体间的引力, 315  
 刘维尔, 187  
 刘维尔公式, 126, 170, 184  
 流量, 307  
 流体闭路, 313  
 流体运动的基本方程, 311  
 龙格, 465  
 螺旋曲面, 213

## M

马立叶夫, 425  
 密度, 104, 224, 263  
 面积, 214  
 面积定义的特殊情况, 208  
 面积元素, 152  
 命题, 506  
 默比乌斯带, 194

## N

拟平稳过程, 28  
 牛顿定律, 7  
 牛顿位势, 50, 225  
 牛顿引力场, 50, 303  
 牛顿引力定律, 224

## O

欧拉-傅里叶公式, 343, 345  
 欧拉常数, 380  
 偶函数, 350, 364

## P

帕塞瓦尔, 483  
 平均偏差, 481  
 平面区域变换, 143  
 平面图形的旋转体, 134  
 平面图形的质量, 106, 129  
 普通定积分, 12

## Q

恰当微分, 30  
 恰当微分的判别, 33  
 切比雪夫, 113  
 球层, 230, 231  
 球坐标, 214, 286, 295  
 求三角级数的有限和法, 386  
 区间的可加函数, 90, 106  
 区域的导数, 253  
 区域微分法, 306  
 曲面, 196, 224, 230  
     ~ 的侧, 193  
     ~ 的定向, 196  
     ~ 的积分, 193, 224, 274  
     ~ 的极坐标方程, 215  
     ~ 的面积, 205, 214  
     ~ 的质量, 224  
 曲面上的质量的引力, 224  
 曲面坐标下, 284  
 曲线, 1, 7  
     ~ 的质量, 7  
 曲线积分, 12, 32  
     (第二型)~, 9  
     (第一型)~, 2  
 曲线积分与道路无关, 29  
 曲线积分与积分, 30  
 曲线坐标, 279  
 曲线坐标下, 152  
 曲线坐标中面积, 150  
 泉源, 305  
 泉源密度, 305  
 泉源生产率, 305  
 全变差, 52, 58, 62

## R

热传导, 456  
 热传导方程, 312  
 热传导微分方程, 456  
 热流向量, 303



若尔当, 52, 63

## S

三角插值法, 349

三角多项式, 479

三角级数, 342

三解函数系的封闭性, 484

三重积分, 251

三重积分的性质, 252

三重积分中的变量变换, 293

散度, 305

熵, 52

上, 12

施瓦茨, 199

势函数, 307

收敛, 435

收敛判定法, 180

数量积, 301

双侧曲面, 194

双纽线, 155

斯蒂尔切斯, 66, 71

斯蒂尔切斯积分, 65

~ 的几何说明, 82

~ 的计算, 74

~ 的性质, 70

斯捷克洛夫, 492, 493

斯托克斯公式, 241

索宁, 329

## T

汤姆森定理, 314

梯度, 302

体积, 240, 245, 317

体积密度, 250

体积元素, 284, 286

调和成分, 343

调和函数, 343

调和函数, 142, 276, 500

调和素, 343

调和振动, 343

通常积分的分部积分, 82

图形, 131

椭球面, 216

椭球体, 135, 298

椭球坐标, 281, 291

椭圆, 20

椭圆积分, 218

椭圆坐标, 150

## W

弯矩, 80

维尔丁格, 493

维维亚尼, 127

维维亚尼立体, 166, 210

位势, 231, 298

位势场, 50, 307

位势函数, 50

温度场, 303

涡管, 315

涡线, 314

沃尔泰拉, 123

无穷长杆的情形, 459

## X

吸引力, 264

系数的引理, 514

下积分及上积分作为极限, 100

弦振动, 452

线性密度, 1

向量, 300

向量场, 301

向量的环流量, 306

向量管, 301

向量积, 29, 301

向量面, 301

向量通过曲面的流量, 303

向量线, 301

星形线, 8, 16, 20, 160

形状无关, 274

旋度, 305, 307



旋转曲面, 212

旋转曲线, 214

旋转体, 291

循环常数, 40, 49

## Y

雅可比, 152, 324

一立体在另一立体上的位势, 316

一致收敛性, 345

已知断面立体体积的, 263

引理, 358

引力, 230

应用, 263, 313, 315, 450

用沿折线上的积分来逼近, 17

有界变差, 52

有界变差函数, 52, 418

有界变差函数的傅里叶级数, 505

有界变差函数的判定法, 59

有界变差函数类, 54

有限长杆上, 456

右手, 13

右手定向, 13, 197

右手坐标系, 197

余切的简单分数形式展开式, 371

余弦变换, 450

余项估值, 414

与路径无关, 249

元素, 286

原函数, 30, 32, 40, 105, 114

圆柱坐标, 286, 290

## Z

在圆盘上的热传导, 462

在球坐标下的面积元素, 215

展布, 273

展布大立体上的积分, 294

正核, 496

正交函数系, 346

正弦变换, 450

正则的, 356

直径, 97

质点引力, 7

质量, 264

中值定理, 83, 87, 103, 253

重积分, 317

重心, 7, 130, 131, 133, 224, 263

周期函数, 341

逐次积分, 254

柱面的, 214

柱形长条, 131

柱形长条体积, 93

柱形长条下体积, 263

左手, 13, 197

左手定向, 197

左手系, 13

坐标系, 13

坐标线, 145



# 校订后记

---

Г. М. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》一书, 在我国 20 世纪 50 年代以来的数学教育中曾产生过巨大的影响. 大体说来, 现在 50 岁以上的数学工作者, 鲜有不知此书的, 鲜有未读过 (参考过) 此书的. 它内容丰富而论述深刻 (虽然从今天看来, 处理方法是经典的), 使许多学习过数学类各专业的人受益良多.

本书最早的中译本是根据俄文 1951 年第 4 版 (一、二卷) 和 1949 年版 (第三卷) 译出的, 于 1954 — 1956 年先后由商务印书馆和高等教育出版社出版、印行. 1959 年又根据俄文 1958 年版对其中第一卷作过修订. 中译本是由多所高等学校的多位数学老师分别翻译, 高等教育出版社多位编辑经手的.

这次高等教育出版社在国家自然科学基金委员会天元数学基金的支持下, 根据 2003 年印行的俄文版进行修订. 由于本书的各位译者大多年事已高 (有的已经谢世), 高等教育出版社在得到主要译者的首肯后, 让我来担任全书的校订工作, 这既使我感到荣幸, 又感到诚惶诚恐, 如履薄冰. 在校订过程中, 原书各位译者认真仔细的工作作风和高质量的翻译, 让我深感敬佩, 并得到很多教益. 从 2003 年印行的俄文版中, 我们看到, 担任本书俄文版的校订、编辑工作的圣彼得堡大学的 A. A. 弗洛连斯基教授除改正原先各版中一些印刷错误外, 又从读者的角度出发, 对书中可能产生不便的地方增加了 122 个注释. 他们这种为使经典名著臻于完善的、认真细致的作风值得我们借鉴.

对本书的校订工作主要在两个方面: 一方面是在新版中 (应是 1959 年以前) 作者作了不少的修订与增删, 尤其是第二卷与第三卷中改动较多. 而由于历史的原因, 在 20 世纪 60 年代以后, 高等教育出版社与各位译者一直没有机会按新版修订译本. 因而这次需要作不少补译的工作. 还有就是翻译 122 个编者注的工作. 另一方面是,



涉及数学名词、外国数学家的中译名的规范问题. 由于在 1993 年, 全国自然科学名词委员会 (现改称全国科学技术名词委员会) 已颁布了《数学名词》, 所以校订中首先以此为准, 对数学名词、外国数学家中译名作了统一性的订正. 在此范围之外的则以《中国大百科全书·数学卷》、《数学百科全书》(五卷本) 以及张鸿林、葛显良先生编订的《英汉数学词汇》为准. 此外还参考了齐玉霞、林凤藻、刘远图先生合编的《新俄汉数学词汇》. 还有个别的在上述范围之外的名词以及其他一些难于处理的问题, 则是由张小萍、沈海玉、郭思旭三人经商讨后定下来的.

还应当说明的是, 书中有关物理、力学方面的量和单位, 有少数地方与我国现在执行的国家标准不一致. 但是, 改动它们会导致计算过程和结果中数据的改变, 作为译本, 恐怕反而不妥当, 宜保留原作的用法为好. 还有个别数学符号也与我国目前适用的不一致, 也未作改动.

本书的校订过程, 充分体现为一种集体的力量和成果. 首先是本书的策划张小萍编审, 她为本书的修订、出版工作作了周到细致的安排, 并负责一至三卷的终审工作, 作了十分仔细的审阅并提出很多重要意见; 沈海玉先生对一、三卷作了认真的通读加工和校阅, 提出了许多很好的意见; 李植教授和邵常虹老师为本书翻译了俄文版《编者的话》. 在补译过程中, 我经常得到外语分社田文琪编审在俄译中表达方面耐心而宝贵的指教. 对以上各位的指导、合作与帮助, 表示由衷的感谢!

由于个人的水平所限, 虽经努力, 但在新加内容的补译工作方面、在个别译名的确定方面等, 错误和疏漏恐难于避免, 还请读者不吝指正.

郭思旭

2005 年 8 月



# 俄罗斯数学教材选译

• 数学天元基金资助项目 •

书名	作者
数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
数学分析讲义	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
代数学引论 I: 基础代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 II: 线性代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 III: 代数结构基础	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (I) 几何曲面、变换群与场	В. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (II) 流形上的几何与拓扑	В. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (III) 同调论引论	В. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
奇异摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿尔诺德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
连续介质力学 (I)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (II)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 \* 者已出版.

**订购办法:**

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇  
款订购. 书款通过邮局汇款或银行转帐均可.  
购书免邮费, 发票随后寄出.

**通过邮局汇款:**

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部  
邮政编码: 100011

**通过银行转帐:**

单位名称: 北京高教沙滩读者服务部  
开 户 行: 北京银行德外支行  
银行帐号: 700120102030302  
单位地址: 北京西城区德外大街 4 号  
电 话: 010-58581118, 010-58581117,  
010-58581116, 010-58581115, 010-58581114  
传 真: 010-58581113



本书是一部卓越的数学科学与教育著作。自第一版问世 50 多年来，本书多次再版，至今仍被俄罗斯的综合大学以及技术和师范院校选作数学分析课程的基本教材之一，并被翻译成多种文字，在世界范围内广受欢迎。

本书所包括的主要内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分。本书第一卷包括实变量一元与多元微分学及其基本应用；第二卷研究黎曼积分理论与级数理论；第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换。

本书的特点是：一、含有大量例题与应用实例；二、材料的叙述通俗、详细和准确；三、在极少使用集合论的（包括记号）同时保持了叙述的全部严格性，以便读者容易初步掌握本课程的内容。

本书可供各级各类高等学校的数学分析与高等数学课程作为教学参考书，是数学分析教师极好的案头用书。