

## 习 题

1-1. 已知质点位矢随时间变化的函数形式为

$$\mathbf{r} = R(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$$

其中  $\omega$  为常量. 求: (1) 质点的轨道; (2) 速度和速率。

解: 1) 由  $\mathbf{r} = R(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$  知

$$x = R \cos \omega t$$

$$y = R \sin \omega t$$

消去  $t$  可得轨道方程  $x^2 + y^2 = R^2$

$$2) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega R \sin \omega t \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$v = [(-\omega R \sin \omega t)^2 + (\omega R \cos \omega t)^2]^{\frac{1}{2}} = \omega R$$

1-2. 已知质点位矢随时间变化的函数形式为  $\mathbf{r} = 4t^2 \mathbf{i} + (3 + 2t) \mathbf{j}$ , 式中  $r$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 求: (1) 质点的轨道; (2) 从  $t = 0$  到  $t = 1$  秒的位移; (3)  $t = 0$  和  $t = 1$  秒两时刻的速度。

解: 1) 由  $\mathbf{r} = 4t^2 \mathbf{i} + (3 + 2t) \mathbf{j}$  可知

$$x = 4t^2$$

$$y = 3 + 2t$$

消去  $t$  得轨道方程为:  $x = (y - 3)^2$

$$2) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 8t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{v} dt = \int_0^1 (8t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) dt = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$3) \quad \mathbf{v}(0) = 2\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}(1) = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

1-3. 已知质点位矢随时间变化的函数形式为  $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ ，式中  $r$  的单位为  $\text{m}$ ， $t$  的单位为  $\text{s}$ 。求：（1）任一时刻的速度和加速度；（2）任一时刻的切向加速度和法向加速度。

$$\text{解：} 1) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{i}$$

$$2) \quad v = [(2t)^2 + 4]^{1/2} = 2(t^2 + 1)^{1/2} \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

1-4. 一升降机以加速度  $a$  上升，在上升过程中有一螺钉从天花板上松落，升降机的天花板与底板相距为  $d$ ，求螺钉从天花板落到底板上所需的时间。

解：以地面为参照系，坐标如图，升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$y_1 = y_2 \quad (3)$$

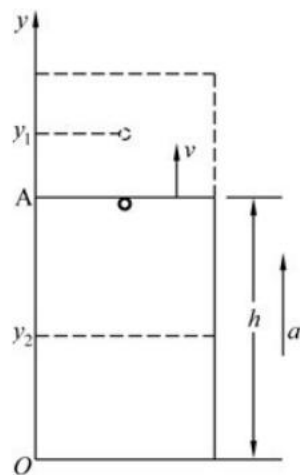


图 1-4

解之  $t = \sqrt{\frac{2d}{g+a}}$

1-5. 一质量为  $m$  的小球在高度  $h$  处以初速度  $v_0$  水平抛出，求：

(1) 小球的运动方程；

(2) 小球在落地之前的轨迹方程；

(3) 落地前瞬时小球的  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ,  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$ .

解：(1)  $\mathbf{x} = v_0 \mathbf{i} t$  式 (1)

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{式 (2)}$$

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \mathbf{i} + (h - \frac{1}{2} g t^2) \mathbf{j}$$

(2) 联立式 (1)、式 (2) 得  $y = h - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$

(3)  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_0 \mathbf{i} - g t \mathbf{j}$  而落地所用时间  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

所以  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_0 \mathbf{i} - \sqrt{2gh} \mathbf{j} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g \mathbf{j}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (-gt)^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{[v_0^2 + (gt)^2]^{1/2}} = \frac{g \sqrt{2gh}}{(v_0^2 + 2gh)^{1/2}}$$

1-6. 路灯距地面的高度为  $h_1$ ，一身高为  $h_2$  的人在路灯下以匀速  $v_1$  沿直线行

走。试证明人影的顶端作匀速运动，并求其速度  $v_2$ 。

证明：设人从 O 点开始行走，t 时刻人影中足的坐标为  $x_1$ ，人影中头的坐标

为  $x_2$ ，由几何关系可得

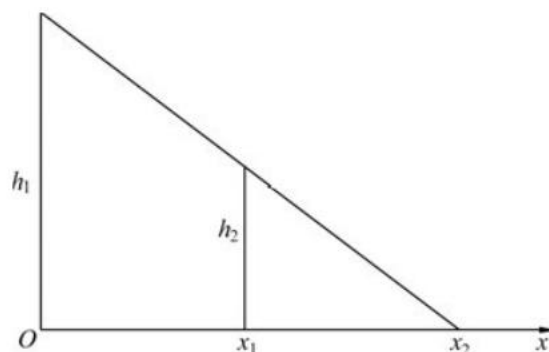
$$\frac{x_2}{x_2 - x_1} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{而} \quad x_1 = v_0 t$$

所以，人影中头的运动方程为

$$x_2 = \frac{h_1 x_1}{h_1 - h_2} = \frac{h_1 t}{h_1 - h_2} v_0$$

$$\text{人影中头的速度} \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} v_0$$

图 1-6



1-7. 一质点沿直线运动，其运动方程为  $x = 2 + 4t - 2t^2$  (m)，在  $t$  从 0 秒到 3 秒的时间间隔内，则质点走过的路程为多少？

$$\text{解：} \quad v = \frac{dx}{dt} = 4 - 4t \quad \text{若} \quad v = 0 \quad \text{解的} \quad t = 1s$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = (2 + 4 - 2) - 2 = 2m$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_1 = (2 + 4 \times 3 - 2 \times 3^2) - (2 + 4 - 2) = -8m$$

$$\Delta x = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 10m$$

1-8. 一弹性球直落在一斜面上，下落高度  $h = 20\text{cm}$ ，斜面对水平的倾角  $\theta = 30^\circ$ ，问它第二次碰到斜面的位置距原来的下落点多远 (假设小球碰斜面前后速度数值相等，碰撞时入射角等于反射角)。

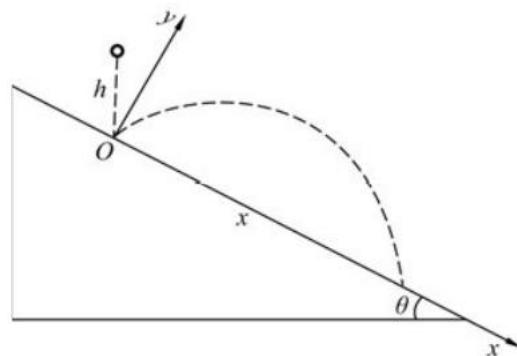


图 1-8



解：小球落地时速度为  $v_0 = \sqrt{2gh}$

— 建立直角坐标系，以小球

第一次落地点为坐标原点如图

$$v_{x0} = v_0 \cos 60^\circ \quad x = v_0 \cos 60^\circ t + \frac{1}{2} g \cos 60^\circ t^2 \quad (1)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 60^\circ \quad y = v_0 \sin 60^\circ t - \frac{1}{2} g \sin 60^\circ t^2 \quad (2)$$

$$\text{第二次落地时} \quad y = 0 \quad t = \frac{2v_0}{g}$$

$$\text{所以} \quad x = v_0 \cos 60^\circ t + \frac{1}{2} g \cos 60^\circ t^2 = \frac{2v_0^2}{g} = 0.8m$$

1-9. 地球的自转角速度最大增加到若干倍时，赤道上的物体仍能保持在地球上而不致离开地球？已知现在赤道上的物体的向心加速度约为  $3.4\text{cm/s}^2$ ，设赤道上重力加速度为  $9.80\text{m/s}^2$ 。

解：赤道上的物体仍能保持在地球必须满足  $g = R\omega^2$

$$\text{现在赤道上物体} \quad \omega' = \sqrt{\frac{3.4 \times 10^{-2}}{R}}$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\frac{9.8}{3.4 \times 10^{-2}}} = 17$$

1-10. 已知子弹的轨迹为抛物线，初速为  $v_0$ ，并且  $v_0$  与水平面的夹角为  $\theta$ 。试分别求出抛物线顶点及落地点的曲率半径。

解：在顶点处子弹的速度  $v = v_0 \cos \theta$ ，顶点处切向加速度为 0。

$$\text{因此有: } g = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(v_0 \cos \theta)^2}{\rho} \quad \rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

$$\text{在落地点速度为 } v_0 \quad g \cos \theta = \frac{v_0^2}{\rho} \quad \rho = \frac{v_0^2}{g \cos \theta}$$

1-11. 飞机以  $v_0 = 100\text{m/s}$  的速度沿水平直线飞行, 在离地面高  $h = 98\text{m}$  时, 驾驶员要把物品投到前方某一地面目标上, 问: 投放物品时, 驾驶员看目标的视线和竖直线应成什么角度? 此时目标距飞机下方地点多远?

$$\text{解: 设此时飞机距目标水平距离为 } x \text{ 有: } x = v_0 t \quad h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{联立方程解得: } x \approx 447\text{m} \quad \theta = \arctan \frac{x}{h} \approx 77.5^\circ$$

1-12. 设将两物体  $A$  和  $B$  分别以初速  $\mathbf{v}_A$  和  $\mathbf{v}_B$  抛掷出去.  $\mathbf{v}_A$  与水平面的夹角为  $\alpha$ ;  $\mathbf{v}_B$  与水平面的夹角为  $\beta$ , 试证明在任何时刻物体  $B$  相对物体  $A$  的速度是常矢量。

解: 两个物体在任意时刻的速度为

$$\mathbf{v}_A = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_B = v_0 \cos \beta \mathbf{i} + (v_0 \sin \beta - gt) \mathbf{j}$$

$$\Delta \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (v_0 \cos \beta - v_0 \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_0 \sin \beta - v_0 \sin \alpha) \mathbf{j}$$

与时间无关, 故  $B$  相对物体  $A$  的速度是常矢量。

1-13. 一物体和探测气球从同一高度竖直向上运动, 物体初速为  $v_0 = 49.0\text{m/s}$ , 而气球以速度  $v = 19.6\text{m/s}$  匀速上升, 问气球中的观察者在第

二秒末、第三秒末、第四秒末测得物体的速度各多少？

物体在任意时刻的速度表达式为  $v_y = v_0 - gt$

故气球中的观察者测得物体的速度  $\Delta v = v_y - v$

代入时间  $t$  可以得到第二秒末物体速度  $\Delta v = 9.8 \text{ m/s}$

第三秒末物体速度  $\Delta v = 0$

第四秒末物体速度  $\Delta v = -9.8 \text{ m/s}$

1-14. 质点沿  $x$  在轴向运动，加速度  $a = -kv$ ， $k$  为常数。设从原点出发时速度为  $v_0$ ，求运动方程  $x = x(t)$ 。

解：  $\frac{dv}{dt} = -kv$        $\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^t -k dt$        $v = v_0 e^{-kt}$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad \int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$$

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

1-15. 跳水运动员自 10m 跳台自由下落，入水后因受水的阻碍而减速，设加速度  $a = -kv^2$ ， $k = 0.4 \text{ m}^{-1}$ 。求运动员速度减为入水速度的 10% 时的入水深度。

解：取水面为坐标原点，竖直向下为  $x$  轴

跳水运动员入水速度  $v_0 = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}$

$$-kv^2 = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \int_{v_0}^{\frac{v_0}{10}} \frac{1}{v} dv = \int_0^x -k dx$$

$$x = \frac{1}{k} \ln 10 = 5.76 \text{ m}$$

1-16. 一飞行火箭的运动学方程为:  $x = ut + u(\frac{1}{b} - t) \ln(1 - bt)$ , 其中  $b$  是与燃料燃烧速率有关的量,  $u$  为燃气相对火箭的喷射速度。求: (1) 火箭飞行速度与时间的关系; (2) 火箭的加速度。

解: (1)  $v = \frac{dx}{dt} = -u \ln(1 - bt)$

(2)  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{ub}{1 - bt}$

1-17. 质点的运动方程为:  $x = R \cos \omega t$ ,  $y = R \sin \omega t$ ,  $z = \frac{h}{2\pi} \omega t$ , 式中  $R$ 、 $h$ 、 $\omega$  为正的常量。求: (1) 质点运动的轨道方程; (2) 质点的速度大小; (3) 质点的加速度大小。

解: (1) 轨道方程为  $x^2 + y^2 = R^2$

$$z = \frac{h}{2\pi} \omega t \quad \text{这是一条空间螺旋线。}$$

在  $Oxy$  平面上的投影为圆心在原点, 半径为  $R$  的圆, 螺距为  $h$

(2)  $v_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

(3)  $a_x = -R\omega^2 \cos \omega t$   $a_y = -R\omega^2 \sin \omega t$   $a_z = 0$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

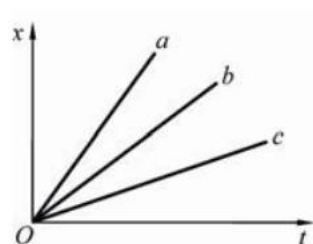
## 思考题

1-1. 质点作曲线运动, 其瞬时速度为  $\mathbf{v}$ , 瞬时速率为  $v$ , 平均速度为  $\bar{\mathbf{v}}$ , 平均速率为  $\bar{v}$ , 则它们之间的下列四种关系中哪一种是正确的?

$$(1) \quad |v| = v, |\bar{v}| = \bar{v}; \quad (2) \quad |v| \neq v, |\bar{v}| = \bar{v}; \quad (3) \quad |v| = v, |\bar{v}| \neq \bar{v}; \quad (4) \quad |v| \neq v, |\bar{v}| \neq \bar{v}$$

答： (3)

1-2. 质点的  $x \sim t$  关系如图, 图中  $a, b, c$  三条线表示三个速度不同的运动. 问它们属于什么类型的运动? 哪一个速度大? 哪一个速度小?



答:  $v_a > v_b > v_c$

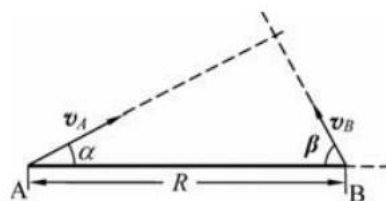
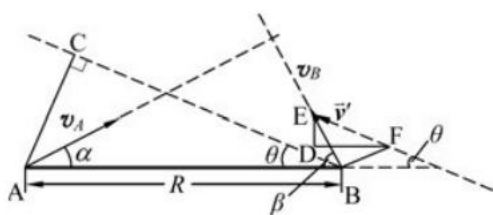
1-3. 结合  $v \sim t$  图, 说明平均加速度和瞬时加速度的几何意义。

答: 平均加速度表示速度  $\Delta v$  在  $\Delta t$  时间内的平均变化率, 它只能粗略地反映运动速度的变化程度和方向, 而瞬时加速度能精确反映质点运动速度的变化及方向。

1-4. 运动物体的加速度随时间减小, 而速度随时间增加, 是可能的吗?

答: 是可能的。加速度随时间减小, 说明速度随时间的变化率减小。

1-5. 如图所示,



两船  $A$  和  $B$  相距  $R$ , 分别以速度  $v_A$  和  $v_B$  匀速直线行驶, 它们会不会相碰? 若不相碰, 求两船相靠最近的距离. 图中  $\alpha$  和  $\beta$  为已知。

答: 方法一 如图, 以  $A$  船为参考系, 在该参考系中船  $A$  是静止的, 而船  $B$  的速度  $v' = v_B - v_A$ .

$v'$  是船  $B$  相对于船  $A$  的速度, 从船  $B$  作一条平行于  $v'$  方向的直线  $BC$ , 它不与船  $A$  相交, 这表明两船不会相碰。

由  $A$  作  $BC$  垂线  $AC$ , 其长度  $r_{\min}$  就是两船相靠最近的距离  $r_{\min} = R \sin \theta$

作  $FD \parallel AB$ , 构成直角三角形  $DEF$ , 故有

$$\sin \theta = \frac{v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha}{v'}$$

在三角形  $BEF$  中, 由余弦定理可得

$$v' = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos(\alpha + \beta)}$$

$$r_{\min} = \frac{v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos(\alpha + \beta)}} R$$

方法二:

两船在任一时刻 $t$ 的位置矢量分别为

$$\mathbf{r}_A = (v_A t \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_B t \sin \alpha) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_B = (R - v_B t \cos \beta) \mathbf{i} + (v_B t \sin \beta) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = [R - (v_B \cos \beta + v_A \cos \alpha)t] \mathbf{i} + [(v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha)t] \mathbf{j}$$

任一时刻两船的距离为

$$r = \sqrt{[R - (v_B \cos \beta + v_A \cos \alpha)t]^2 + [(v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha)t]^2}$$

$$\text{令 } \frac{dr(t)}{dt} = 0$$

$$t = \frac{v_B \cos \beta + v_A \cos \alpha}{(v_B \cos \beta + v_A \cos \alpha)^2 + (v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha)^2} R$$

$$r_{\min} = \frac{v_B \sin \beta - v_A \sin \alpha}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos(\alpha + \beta)}} R$$

1-6. 若质点限于在平面上运动, 试指出符合下列条件的各应是什么样的运动?

$$(1) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0; (2) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq 0; (3) \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0, \frac{d\mathbf{a}}{dt} \neq 0$$

答: (1) 质点作圆周运动.

(2) 质点作匀速率曲线运动.

(3) 质点作抛体运动.

1-7. 一质点作斜抛运动，用  $t_1$  代表落地时，.

(1) 说明下面三个积分的意义：

$$\int_0^{t_1} v_x dt, \quad \int_0^{t_1} v_y dt, \quad \int_0^{t_1} v dt.$$

(2) 用  $A$  和  $B$  代表抛出点和落地点位置，说明下面三个积分的意义：

$$\int_A^B d\mathbf{r}, \quad \int_A^B |d\mathbf{r}|, \quad \int_A^B dr.$$

答:  $\int_0^{t_1} v_x dt$  表示物体落地时  $x$  方向的距离

$\int_0^{t_1} v_y dt$  表示物体落地时  $y$  方向的距离

$\int_0^{t_1} v dt$  表示物体在  $t_1$  时间内走过的几何路程.

$\int_A^B d\mathbf{r}$  抛出点到落地点的位移

$\int_A^B |d\mathbf{r}|$  抛出点到落地点位移的大小

$\int_A^B dr$  抛出点到落地点位移的大小



## 习题

2-1. 质量为  $m$  的子弹以速度  $v_0$  水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为  $k$ ，忽略子弹的重力，求：(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；(2) 子弹进入沙土的最大深度。

解：(1) 由题意和牛顿第二定律可得： $f = -kv = m \frac{dv}{dt}$ ，

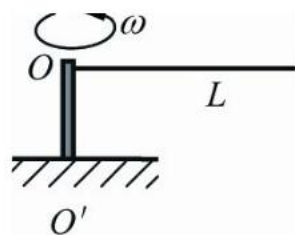
分离变量，可得： $-\frac{k}{m} = \frac{dv}{vdt}$  两边同时积分，所以： $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$

(2) 子弹进入沙土的最大深度也就是  $v=0$  的时候子弹的位移，则：

由  $-\frac{k}{m} = \frac{dv}{vdt}$  可推出： $vdt = -\frac{m}{k} dv$ ，而这个式子两边积分就可以得

到位移： $x_{\max} = \int vdt = \int_{v_0}^0 -\frac{m}{k} dv = \frac{m}{k} v_0$ 。

2-2. 一条质量分布均匀的绳子，质量为  $M$ 、长度为  $L$ ，一端拴在竖直转轴  $OO'$  上，并以恒定角速度  $\omega$  在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯，且忽略重力，求距转轴为  $r$  处绳中的张力  $T(r)$ 。



解：在绳子中距离转轴为  $r$  处取一小段绳子，假设其

质量为  $dm$ ，可知： $dm = \frac{Md}{L}$ ，分析这  $dm$  的绳子的受力情况，因为它做的是

圆周运动，所以我们可列出： $dT(r) = \omega^2 r dm = \omega^2 r \frac{Mdr}{L}$ 。

距转轴为  $r$  处绳中的张力  $T(r)$  将提供的是  $r$  以外的绳子转动的向心力，所以

两边积分： $T(r) = \int_r^L dT(r) = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2)$

2-3. 已知一质量为  $m$  的质点在  $x$  轴上运动，质点只受到指向原点的引力作用，引力大小与质点离原点的距离  $x$  的平方成反比，即  $f = -k/x^2$ ， $k$  是比例常数。设质点在  $x = A$  时的速度为零，求质点在  $x = A/4$  处的速度的大小。

解：由题意和牛顿第二定律可得：
$$f = -\frac{k}{x^2} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

再采取分离变量法可得：
$$-\frac{k}{x^2} dx = mv dv$$

两边同时取积分，则：
$$\int_A^{A/4} -\frac{k}{x^2} dx = \int_0^v mv dv$$

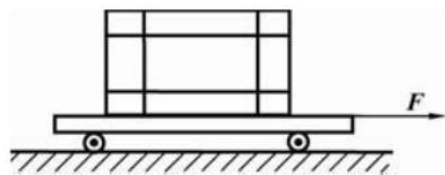
所以：
$$v = \sqrt{\frac{6k}{mA}}$$

2-4. 一质量为  $2\text{kg}$  的质点，在  $xy$  平面上运动，受到外力  $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 24t^2\mathbf{j}$  (SI) 的作用， $t = 0$  时，它的初速度为  $\mathbf{v}_0 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  (SI)，求  $t = 1\text{s}$  时质点的速度及受到的法向力  $\mathbf{F}_n$ 。

解：由题意和牛顿第二定律可得：
$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$
，代入  $\mathbf{f}$  与  $\mathbf{v}$ ，并两边积分，
$$\int_0^1 (4\mathbf{i} - 24t^2\mathbf{j}) dt = \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} m d\mathbf{v}, \quad 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = 2 \times [\mathbf{v} - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})]$$
$$\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$$

速度是  $\mathbf{i}$  方向，也就是切向的，所以法向的力是  $\mathbf{j}$  方向的，则  $\mathbf{F} = -24\mathbf{j}$

2-5. 如图，用质量为  $m_1$  的板车运载一质量为  $m_2$  的木箱，车板与箱底间的摩擦系数为  $\mu$ ，车与



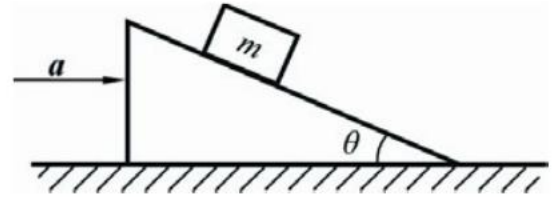
路面间的滚动摩擦可不计，计算拉车的力  $F$  为多少才能保证木箱不致滑动？

解：根据题意，要使木箱不致于滑动，必须使板车与木箱具有相同的加速度，

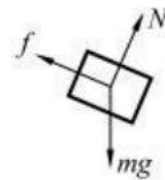
所以列式：
$$a = \frac{F_{msx}}{m_1 + m_2} = \frac{f'}{m_2} = \frac{\mu m_2 g}{m_2}$$

可得：
$$F < \mu(m_1 + m_2)g$$

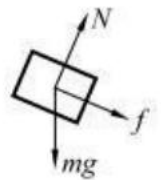
2-6. 如图所示一倾角为 $\theta$ 的斜面放在水平面上，斜面上放一木块，两者间摩擦系数为 $\mu(< \tan \theta)$ 。为使木块相对斜面静止，求斜面加速度 $a$ 的范围。



解：在斜面具有不同的加速度的时候，木块将分别具有向上和向下滑动的趋势，这就是加速度的两个范围，由题意，可得：



(a)有下滑趋势



(b)有上滑趋势

(1) 当木块具有向下滑动的趋势时（见图 a），列式为：
$$\mu N \sin \theta + N \cos \theta = mg$$

$$N \sin \theta - \mu N \cos \theta = ma$$

可计算得到：此时的 $a_1 = \frac{\tan \theta - \mu}{1 + \mu \tan \theta} g$

(2) 当木块具有向上滑动的趋势时（见图 b），列式为：
$$\mu N \sin \theta + mg = N \cos \theta$$

$$N \sin \theta + \mu N \cos \theta = ma$$

可计算得到：此时的 $a_2 = \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} g$

所以 
$$\frac{\tan \theta - \mu}{1 + \mu \tan \theta} g \leq a \leq \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} g$$

2-7. 一质量为  $M$ 、顶角为  $\alpha$  的三角形光滑物体上。放有一质量为  $m$  的物块，如图所示。设各面间的摩擦力均可忽略不计。试按下列三种方法：

(1) 用牛顿定理及约束方程；(2) 用牛顿定律及运动叠加原理；(3) 用非惯性系中力学定律；求解三角形物块的加速度  $a_M$ 。

解：隔离物块和斜面体，画图分析力，列出方程，发现方程完备性不够，即未知数比方程数多，关键在于， $M$  与  $m$  的运动有联系的， $M$  沿地面运动， $m$  沿斜面运动，这就是约束条件。

取地面作为参考系，则  $m$  的运动为：

$$\begin{cases} -N \sin \alpha = ma_x & (1) \\ N \cos \alpha - mg = ma_y & (2) \end{cases}$$

$$M \text{ 的运动方程为: } N \sin \alpha = Ma_M \quad (3)$$

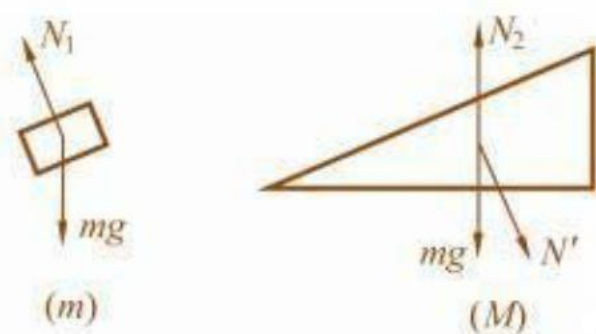
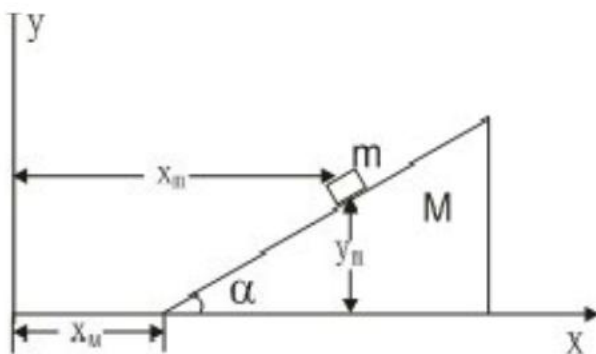
下面列出约束条件的方程：取  $M$  作为参考系，设  $m$  在其中的相对加速度为  $a'$ ，

在  $x, y$  方向的分量分别为  $a'_x$  与  $a'_y$ ，那么：
$$\tan \alpha = \frac{a'_y}{a'_x}$$

利用相对运动的公式， $a_m = a_M + a'$

所以：
$$a'_x = a_x - a_M$$

$$a'_y = a_y$$



$$\text{于是: } \tan \alpha = \frac{a'_y}{a'_x} = \frac{a_y}{a_x - a_M}$$

$$\text{即: } a_x \sin \alpha - a_y \cos \alpha = a_M \sin \alpha \quad (4)$$

由 (1) (2) (3) (4) 联立, 计算可得:

$$a_M = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g$$

2-8. 圆柱形容器内装有一定量的液体, 若它们一起绕圆柱轴以角速度  $\omega$  匀速转动, 试问稳定旋转时液面的形状如何?

解: 受力分析如图

$$N \sin \alpha = \Delta m \omega^2 y \quad (1)$$

$$N \cos \alpha = \Delta m g \quad (2)$$

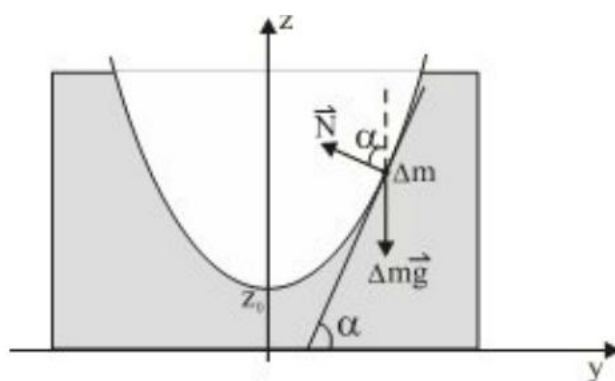
$$\text{两式相比} \quad \tan \alpha = \frac{\omega^2 y}{g} = \frac{dz}{dy}$$

$$\int dz = \int \frac{\omega^2 y}{g} dy \quad z = \frac{\omega^2}{2g} y^2 + C$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时 } z = z_0 \text{ 所以 } C = z_0$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} y^2 + z_0 \quad \text{稳定旋转时液面是一个抛物面}$$

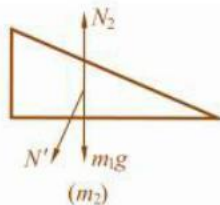
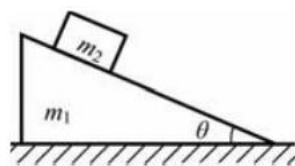
$$\text{由于旋转后成为立体, 故方程变为 } \mathbf{z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + z_0}$$





2-9. 质量为  $m_2$  的物体可以在劈形物体的斜面上无摩擦

滑动，劈形物质量为  $m_1$ ，放置在光滑的水平面上，斜面倾角为  $\theta$ ，求释放后两物体的加速度及它们的相互作用力。



解：隔离物块和斜面体，分析力，列出方程，发现方程完备性不够，即未知数比方程数多，关键

在于， $m_1$  与  $m_2$  的运动有联系的， $m_1$  沿地面运动， $m_2$  沿斜面运动，这就是约束条件。取地面作为参考系，则  $m_2$  的运动为：

$$\begin{cases} -N \sin \theta = m_2 a_x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} N \cos \theta - m_2 g = m_2 a_y \end{cases} \quad (2)$$

$$m_1 \text{ 的运动方程为: } N \sin \theta = m_1 a_1 \quad (3)$$

下面列出约束条件的方程：取  $m_1$  作为参考系，设  $m_2$  在其中的相对加速度为

$$a' \text{, 在 } x, y \text{ 方向的分量分别为 } a'_x \text{ 与 } a'_y \text{, 那么: } \tan \theta = \frac{a'_y}{a'_x}$$

利用相对运动的公式， $a_2 = a_1 + a'$

$$\text{所以: } a'_x = a_x - a_1$$

$$a'_y = a_y$$

$$\text{于是: } \tan \theta = \frac{a'_y}{a'_x} = \frac{a_y}{a_x - a_1}$$

$$\text{即: } a_x \sin \theta - a_y \cos \theta = a_1 \sin \theta \quad (4)$$

由 (1) (2) (3) (4) 联立，计算可得：

$$a_1 = \frac{m_2 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} g; \quad a_2 = -\frac{m_1 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} g; \quad a' = \frac{(m_1 + m_2) \sin \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} g$$

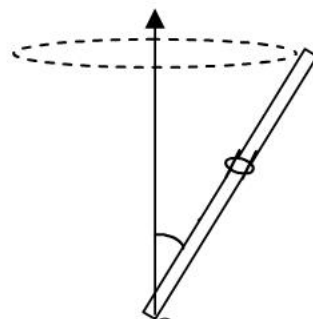
$$\text{相互作用力 } N = \frac{m_1 m_2 \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} g$$

2-10. 一小环套在光滑细杆上，细杆以倾角  $\theta$  绕竖直轴作匀角速度转动，角速度为  $\omega$ ，求：小环平衡时距杆端点  $O$  的距离  $r$ 。

解：根据题意，当小环能平衡时，其运动为绕  $Z$  轴的圆周运动，所以可列式：

$$\begin{cases} N \sin \theta = mg \\ N \cos \theta = m \omega^2 r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{所以，可得： } r = \frac{g}{\omega^2 \tan \theta \sin \theta}$$



2-11. 设质量为  $m$  的带电微粒受到沿  $x$  方向的电力  $\mathbf{F} = (b + cx)\mathbf{i}$ ，计算粒子在任一时刻  $t$  的速度和位置，假定  $t = 0$  时，  $v_0 = 0$ ，  $x_0 = 0$ 。其中  $b$ 、 $c$  为与时间无关的常数，  $m$ 、 $F$ 、 $x$ 、 $t$  的单位分别为  $\text{kg}$ 、 $\text{N}$ 、 $\text{m}$ 、 $\text{s}$ 。

解：根据题意和牛顿第二定律，可列式：  $\mathbf{F} = (b + cx)\mathbf{i} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$ ，

整理可得二阶微分方程：  $m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - cx - b = 0$ 。

令  $\omega^2 = \frac{c}{m}$  下面分  $c$  为正负再做进一步讨论。

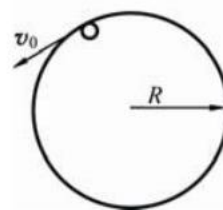
当  $c < 0$  时，  $\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{x} - \frac{b}{m} = 0$ ，可得：  $x = \frac{b}{c} \cos \omega t - \frac{b}{c}$

一次求导，得到：  $v = -\frac{b}{c} \omega \sin \omega t$

当  $c > 0$  时,  $\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x - \frac{b}{m} = 0$  , 可得:  $x = \frac{b}{2c}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - \frac{b}{c}$

一次求导, 得到:  $v = \frac{b\omega}{2c}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

2-12. 在光滑的水平面上设置一竖直的圆筒, 半径为  $R$ , 一小球紧靠圆筒内壁运动, 摩擦系数为  $\mu$ , 在  $t=0$  时, 球的速率为  $v_0$ , 求任一时刻球的速率和运动路程。



解: 在法向上有  $N = m \frac{v^2}{R}$  而  $f = \mu N$

在切向上有  $-f = m \frac{dv}{dt}$

由上面三个式子可得  $\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}$

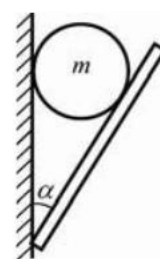
$$-\int_{v_0}^v \frac{1}{v^2} dv = \int_0^t \frac{\mu}{R} dt \quad v = \frac{v_0 R}{R + v_0 \mu t}$$

$$S = \int_0^t v dt = v_0 R \int_0^t \frac{dt}{R + v_0 \mu t} = \frac{R}{\mu} \ln(1 + \frac{v_0 \mu t}{R})$$

### 思考题

2-1. 质量为  $m$  的小球, 放在光滑的木板和光滑的墙壁之间, 并保持平衡, 如图所示. 设木板和墙壁之间的夹角为  $\alpha$ , 当  $\alpha$  逐渐增大时, 小球对木板的压力将怎样变化?

解: 假设墙壁对小球的压力为  $N_1$ , 木板对小球的压力为  $N_2$ . 由受力分析图可知:





$$N_2 \sin \alpha = mg$$

所以当所以  $\alpha$  增大, 小球对木板的压力为  $N_2$  将减小;

$$\text{同时: } N_2 \cos \alpha = N_1$$

$$N_1 = mg \tan \alpha \quad \text{所以 } \alpha \text{ 增大, 小球对墙壁的压力 } N_1 \text{ 也减小。}$$

2-2. 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两滑块 A 和 B 通过一轻弹簧水平连结后置于水平桌面上, 滑块与桌面间的摩擦系数均为  $\mu$ , 系统在水平拉力  $F$  作用下匀速运动, 如图所示. 如突然撤消拉力, 则刚撤消后瞬间, 二者的加速度  $a_A$  和  $a_B$  分别为多少 ?



解: 分别对 A, B 进行受力分析, 由受力分析图可知:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \mu(m_1 + m_2)g \\ F = kx + \mu m_1 g \\ kx = \mu m_2 g \end{array} \right.$$

$$\text{所以 } a_A = \mu \frac{m_1 + m_2}{m_1} g, a_B = 0.$$

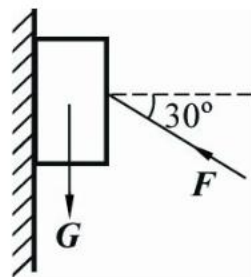
2-3. 如图所示, 用一斜向上的力  $F$  (与水平成  $30^\circ$  角), 将一重为  $G$  的木块压靠在竖直壁面上, 如果不论用怎样大的力  $F$ , 都不能使木块向上滑动, 则说明木块与壁面间的静摩擦系数  $\mu$  的大小为多少?

解: 假设墙壁对木块的压力为  $N$ , 由受力分析图可知:

$$\left\{ \begin{array}{l} F \sin \alpha = G + \mu N \\ N = F \cos \alpha \end{array} \right.$$

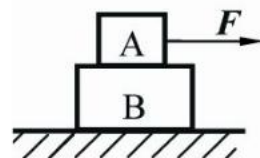
整理上式, 并且根据题意, 如果不论用怎样大的力  $F$ , 都不能使木块向上滑动,

$$\text{则说明: } \frac{1}{2}F \leq G + \mu \frac{\sqrt{3}}{2}F \quad \text{即当 } \frac{1}{2}F < \mu \frac{\sqrt{3}}{2}F \quad \text{此式中 } F \text{ 无论为多大,}$$



总成立，则可得： $\mu > \frac{\sqrt{3}}{3}$

2-4. 质量分别为  $m$  和  $M$  的滑块  $A$  和  $B$ ，叠放在光滑水平桌面上，如图所示。 $A$ 、 $B$  间静摩擦系数为  $\mu_s$ ，滑动摩擦系数为  $\mu_k$ ，系统原处于静止。今有一水平力作用于  $A$  上，要使  $A$ 、 $B$  不发生相对滑动，则  $F$  应取什么范围？

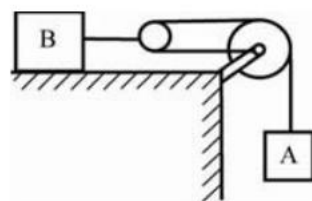


解：根据题意，分别对  $A$ 、 $B$  进行受力分析，要使  $A$ 、 $B$  不发生相对滑动，

必须使两者具有相同的加速度，所以列式： $a = \frac{F_{msx}}{m + M} = \frac{\mu_s mg}{M}$

可得： $F < \mu_s \frac{m(m + M)}{M} g$

2-5. 如图，物体  $A$ 、 $B$  质量相同， $B$  在光滑水平桌面上。滑轮与绳的质量以及空气阻力均不计，滑轮与其轴之间的摩擦也不计。系统无初速地释放，则物体  $A$  下落的加速度是多少？

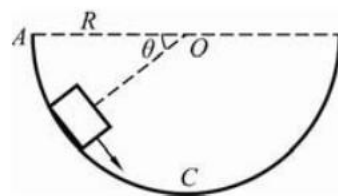


解：分别对  $A$ 、 $B$  进行受力分析，由受力分析图可知：

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ 2T = m_2 a_2 \\ a_2 = \frac{1}{2} a_1 \end{cases}$$

则可计算得到： $a_1 = \frac{4}{5} g$

2-6. 如图所示，假设物体沿着竖直面上圆弧形轨道下滑，轨道是光滑的，在从  $A$  至  $C$  的下滑过程中，下面哪个说法是正确的？



- (A) 它的加速度大小不变，方向永远指向圆心。
- (B) 它的速率均匀增加。
- (C) 它的合外力大小变化，方向永远指向圆心。

(E) 轨道支持力的大小不断增加。

速率的增加由重力沿切线方向的分力提供，由于切线方向始终在改变，所以速率增加不均匀；

外力有重力和支持力，后者的大小和方向都在变化，所以合力的大小方向也在变化。C，D 的说法都不对。

下滑过程中的  $\theta$  和  $v$  都在增大, 所以  $N$  也在增大,  $N = mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R}$

则 E 的说法正确。

2-7. 一小珠可在半径为  $R$  的竖直圆环上无摩擦地滑动, 且圆环能以其竖直直径为轴转动. 当圆环以一适当的恒定角速度  $\omega$  转动, 小珠偏离圆环转轴而且相对圆环静止时, 小珠所在处圆环半径偏离竖直方向的角度为多大?

解：根据题意，当小珠能相对于圆环平衡时，其运动为绕 Z 轴的圆周运动，假设小珠所在处圆环半径偏离竖直方向的角度为  $\theta$ ，可列式：

$$\begin{cases} N \cos \theta = mg \\ N \sin \theta = m \omega^2 R \sin \theta \end{cases}$$

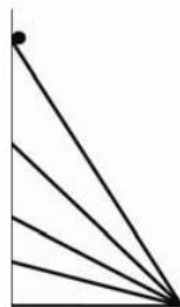
所以, 可得:  $\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$

2-8. 几个不同倾角的光滑斜面，有共同的底边，顶点也在同一竖直面上（如图所示）. 为使一物体（视为质点）从斜面上端由静止滑到下端的时间最短，则斜面的倾角应选

- (A)  $60^\circ$  . (B)  $45^\circ$  .  
(C)  $30^\circ$  . (D)  $15^\circ$  .

解：根据题意，假设底边长为  $s$ ，斜面的倾角为  $\theta$ ，可列式：

$$\frac{1}{2} g \sin \theta t^2 = \frac{s}{\cos \theta}$$



$$t^2 = \frac{4s}{g \sin 2\theta} \quad \text{当 } \theta = 45^\circ \text{ 时, 时间最短。}$$

2-9. 如图所示, 小球 A 用轻弹簧  $O_1A$  与轻绳  $O_2A$  系住; 小球 B 用轻绳  $O_1'B$  与  $O_2'B$  系住, 今剪断  $O_2A$  绳和  $O_2'B$  绳, 在刚剪断的瞬间, A、B 球的加速度量值和方向是否相同?

解: 不同。

对于 a 图, 在剪断绳子的瞬间, 弹簧的伸长没有变化, 所以弹簧的拉力  $F$  不变, A 的加速度应该是由重力和弹簧的拉力提供的合力  $T$ , 所以:

$$\begin{cases} F \sin \alpha = T = ma \\ F \cos \alpha = mg \end{cases}$$

所以加速度大小为:  $a = g \tan \alpha$ , 方向为水平方向。

对于 b 图, 在剪断绳子的瞬间, 绳子拉力  $F$  变化, 它将提供物体做圆周运动, 的加速度应该有切向加速度和法向加速度。所以:

$$\begin{cases} mg \sin \alpha = ma_t \\ T - mg \cos \alpha = ma_n = m \frac{v^2}{R} = 0 \end{cases}$$

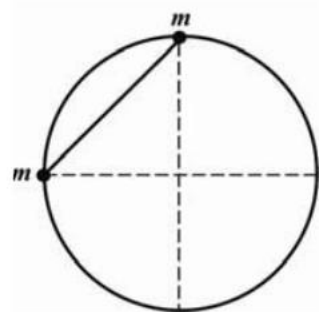
所以加速度大小为:  $a = g \sin \alpha$ , 方向为与绳垂直的切线方向。

2-10. 两质量均为  $m$  的小球穿在一光滑圆环上, 并由一轻绳相连, 环竖直固定放置, 在图中位置由静止释放, 试问释放瞬间绳上张力为多少?

解: 在释放瞬间上面的小球作水平运动, 下面小球作竖直运动, 两者加速度大小相等, 方向互相垂直。

$$T \sin 45^\circ = ma \quad (1)$$

$$mg - T \sin 45^\circ = ma \quad (2)$$



两式联立消去  $a$

$$T = \frac{mg}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}mg}{2}$$

### 习题

3-1. 如图，一质点在几个力作用下沿半径为  $R=20\text{m}$  的圆周运动，其中有一恒力  $F=0.6\text{iN}$ ，求质点从  $A$  开始沿逆时针方向经  $3/4$  圆周到达  $B$  的过程中，力  $F$  所做的功。

$$\text{解： } \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

$$\text{由做功的定义可知： } W = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{r} = 0.6\mathbf{i} \bullet (-20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}) = -12J$$

3-2. 质量为  $m=0.5\text{kg}$  的质点，在  $xOy$  坐标平面内运动，其运动方程为  $x=5t^2$ ,  $y=0.5(\text{SI})$ ，从  $t=2\text{s}$  到  $t=4\text{s}$  这段时间内，外力对质点的功为多少？

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 = (80\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) - (20\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) = 60\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt = d^2\mathbf{r} / dt^2 = 10\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \times 10\mathbf{i} = 5\mathbf{i}$$

$$\text{由做功的定义可知： } W = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{r} = 5\mathbf{i} \bullet 60\mathbf{i} = 300J$$

3-3. 劲度系数为  $k$  的轻巧弹簧竖直放置，下端悬一小球，球的质量为  $m$ ，开始时弹簧为原长而小球恰好与地接触。今将弹簧上端缓慢提起，直到小球能脱离地面为止，求此过程中外力的功。

根据小球是被缓慢提起的，刚脱离地面时所受的力为  $F=mg$ ， $k\Delta x = mg$

$$\text{可得此时弹簧的伸长量为： } \Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$\text{由做功的定义可知： } W = \int_0^{\Delta x} kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{\frac{mg}{k}} = \frac{m^2 g^2}{2k}$$

3-4. 如图，一质量为  $m$  的质点，在半径为  $R$  的半球形容器中，由静止开始自边缘上的  $A$  点滑下，到达最低点  $B$  时，它对容器的正压力数值为  $N$ ，求质点自  $A$  滑到  $B$  的过程中，摩擦力对其做的功。

分析：  $W_f$  直接求解显然有困难，所以使用动能定理，那就要知道它的末速度的情况。



解：求在 B 点的速度：  $N-G=m\frac{v^2}{R}$  可得：  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(N-G)R$

$$mgR + W_f = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

由动能定理：

$$W_f = \frac{1}{2}(N-G)R - mgR = \frac{1}{2}(N-3mg)R$$

3-5. 一弹簧并不遵守胡克定律，其弹力与形变的关系为  $\mathbf{F} = (-52.8x - 38.4x^2)\mathbf{i}$ ，其中  $\mathbf{F}$  和  $x$  单位分别为 N 和 m。

(1) 计算当将弹簧由  $x_1 = 0.522\text{m}$  拉伸至  $x_2 = 1.34\text{m}$  过程中，外力所做之功；

(2) 此弹力是否为保守力？

解：

(1) 由做功的定义可知：

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{0.522}^{1.34} (-52.8x - 38.4x^2)dx = -26.4(x_2^2 - x_1^2) - 12.6(x_2^3 - x_1^3) \\ &= 69.2J \end{aligned}$$

(2) 由计算结果可知，做功与起点和终点的位置有关，与其他因素无关，所以该弹力为保守力。

3-6. 一质量为  $m$  的物体，在力  $\mathbf{F} = (at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j})$  的作用下，由静止开始运动，求在任一时刻  $t$  此力所做功的功率为多少。

解：要求功率就必须知道力和速度的情况，由题意：

$$\mathbf{v} = \int \frac{\mathbf{F}}{m} dt = \int \frac{1}{m}(at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j})dt = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}at^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}bt^3\mathbf{j}\right)$$

所以功率为：

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = (at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}at^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}bt^3\mathbf{j}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}a^2t^3 + \frac{1}{3}b^2t^5\right)$$

3-7. 一质点在三维力场中运动. 已知力场的势能函数为

$$E_p = -ax^2 + bxy + cz.$$

(1) 求作用力  $\mathbf{F}$ ;

(2) 当质点由原点运动到  $x=3$ 、 $y=3$ 、 $z=3$  位置的过程中, 试任选一路径, 计算上述力所做的功。其中  $E_p$  的单位为 J,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的单位为 m,  $F$  的单位为 N.

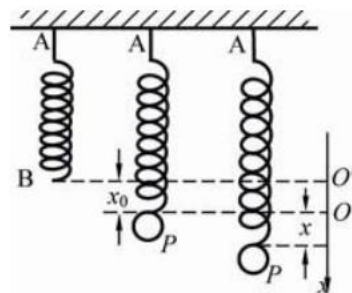
解: (1) 由作用力和势能的关系:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial(-ax^2 + bxy + cz)}{\partial \mathbf{r}} = (2ax - by)\mathbf{i} - bx\mathbf{j} - c\mathbf{k}$$

(2) 取一个比较简单的积分路径:  $\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , 则积分可得:

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int [(2ax - by)\mathbf{i} - bx\mathbf{j} - c\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= 9a - 9b - 3c \end{aligned}$$

3-8. 轻弹簧 AB 的上端 A 固定, 下端 B 悬挂质量为  $m$  的重物。已知弹簧原长为  $l_0$ , 劲度系数为  $k$ , 重物在 O 点达到平衡, 此时弹簧伸长了  $x_0$ , 如图所示。取  $x$  轴向下为正, 且坐标原点位于: 弹簧原长位置  $O'$ ; 力的平衡位置 O。若取原点为重力势能和弹性势能的势能零点, 试分别计算重物在任一位置 P 时系统的总势能。



解: (1) 取弹簧原长位置  $O'$  为重力势能和弹性势能的势能零点, 则重物在任一位置 P (坐标设为  $x'$ ) 时系统的总势能:  $E_p = -mgx' + \frac{1}{2}kx'^2$

(2) 取力的平衡位置 O 为重力势能和弹性势能的势能零点, 则重物在任一

位置 P (坐标设为  $x$ ) 时系统的总势能:  $E_p = -mgx + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$   
而  $mg = kx_0$

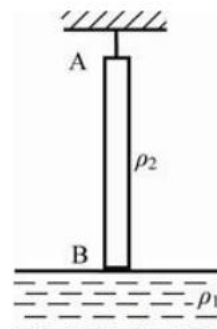


$$\text{所以 } E_p = -mgx + \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

3-9. 在密度为  $\rho_1$  的液面上方, 悬挂一根长为  $l$ , 密度为  $\rho_2$  的均匀棒 AB, 棒的 B 端刚和液面接触如图所示, 今剪断细绳, 设细棒只在浮力和重力

力作用下运动, 在  $\frac{\rho_1}{2} < \rho_2 < \rho_1$  的条件下, 求细棒下落过程中

的最大速度  $v_{\max}$ , 以及细棒能进入液体的最大深度  $H$ 。



解: 分析可知, 棒下落的最大速度是受合力为零的时候, 所以:

$$\rho_2 l s g = \rho_1 h s g, \text{ 则 } h = \frac{\rho_2}{\rho_1} l.$$

在下落过程中, 利用功能原理:  $\frac{1}{2}\rho_2 s l v^2 - \rho_2 s g l h = -\int_0^h \rho_1 g s y dy$

$$\text{所以: } v_{\max} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} g l}$$

进入液体的最大深度  $H$  为细棒运动的速度为零时:

$$-\rho_2 s g l h = -\int_0^H \rho_1 g s y dy \quad \text{所以 } H = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \frac{l}{2}$$

3-10. 若在近似圆形轨道上运行的卫星受到尘埃的微弱空气阻力  $f$  的作用, 设阻力与速度的大小成正比, 比例系数  $k$  为常数, 即  $f = -kv$ , 试求质量为  $m$  的卫星, 开始在离地心  $r_0 = 4R$  ( $R$  为地球半径) 陨落到地面所需的时间。

解: 根据题意, 假设在离地心  $r_0 = 4R$  处质点的速度为  $v_1$ , 地面上的速度为

$v_2$ 。提供卫星运动的力为万有引力： $m \frac{v^2}{r} = G_0 \frac{Mm}{r^2}$ ，所以  $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_0}{R}} = 2$

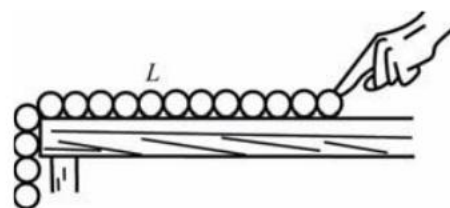
在这个过程中阻力的作用时间可通过动量定理求出：

$$f dt = -k v dt = m dv$$

通过分离变量取积分，可

$$\text{得：} t = \int dt = \int_{v_1}^{v_2} -\frac{m}{kv} dv = \frac{m}{k} \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{k} \ln 2$$

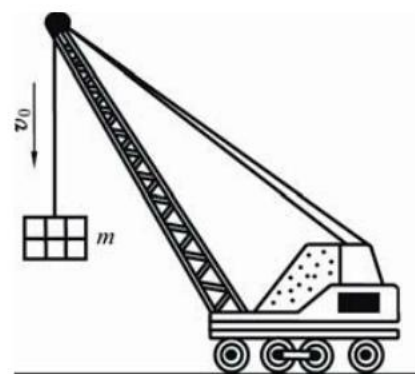
3-11. 一链条放置在光滑桌面上，用手揪住一端，另一端有四分之一长度由桌边下垂，设链条长为  $L$ ，质量为  $m$ ，试问将链条全部拉上桌面要做多少功？



解：直接考虑垂下的链条的质心位置变化，来求做功，则：

$$W = \Delta E_p = \frac{1}{4} mg \times \frac{1}{8} l = \frac{1}{32} mgl$$

3-12. 起重机用钢丝绳吊运质量为  $m$  的物体时以速率  $v_0$  匀速下降，当起重机突然刹车时，因物体仍有惯性运动使钢丝绳有微小伸长。设钢丝绳劲度系数为  $k$ ，求它伸长多少？所受拉力多大？(不计钢丝绳本身质量)



解：当起重机忽然刹车时，物体的动能将转换为钢丝绳的弹性势能：由  $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k x^2$ ，可得：

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

分析物体的受力，可得到绳子的拉力为：

$$T = mg + kx = mg + \sqrt{mk} v_0$$

3-13. 在光滑水平面上，平放一轻弹簧，弹簧一端固定，另一端连一物体 A、

A 边上再放一物体 B，它们质量分别为  $m_A$  和  $m_B$ ，弹簧劲度系数为  $k$ ，原长为

$l$ 。用力推 B，使弹簧压缩  $x_0$ ，然后释放。求：



(1) 当 A 与 B 开始分离时，它们的位置和速度；

(2) 分离之后，A 还能往前移动多远？

解：(1) 当 A 和 B 开始分离时，两者具有相同的速度，根据能量守恒，可得

$$\text{到：} \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}kx_0^2, \text{ 所以：} v = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}}x_0; x = l$$

(2) 分离之后，A 的动能又将逐渐的转化为弹性势能，所以：

$$\frac{1}{2}m_A v^2 = \frac{1}{2}kx^2, \text{ 则：} x_A = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}}x_0$$

3-14. 已知地球对一个质量为  $m$  的质点的引力为  $\mathbf{F} = -\frac{Gm_e m}{r^3}\mathbf{r}$  ( $m_e, R_e$  为

地球的质量和半径)。

(1) 若选取无穷远处势能为零，计算地面处的势能；

(2) 若选取地面处势能为零，计算无穷远处的势能。比较两种情况下的势能差。

解：(1) 取无穷远处势能为零，计算地面处的势能为：

$$E_p = \int_{R_e}^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} -Gm_e m \frac{1}{r^2} dr = -Gm_e m \frac{1}{R_e}$$

(2) 若选取地面处势能为零，计算无穷远处的势能为：

$$E_{\infty} = \int_{\infty}^{R_e} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} -Gm_e m \frac{1}{r^2} dr = Gm_e m \frac{1}{R_e}$$

两种情况下势能差是完全一样的。

3-15. 试证明在离地球表面高度为  $h$  ( $h \ll R_e$ ) 处，质量为  $m$  的质点所具有的

引力势能近似可表示为  $mgh$  .

解：由万有引力的势能函数值，在离地球表面高度为  $h$  ( $h \ll R_e$ ) 处，质量为  $m$  的质点所具有的引力势能为：

$$-G_0 \frac{Mm}{(R_e + h)} = -G_0 \frac{Mm}{(R_e + h)^2} (R_e + h) \approx -G_0 \frac{Mm}{R_e^2} (R_e + h) = -mg(R_e + h)$$

如果以地面作为零电势处，则质点所具有的引力势能近似可表示为  $mgh$  .

### 思考题 3

3-1. 求证：一对内力做功与参考系的选择无关。

证明：对于系统里的两个质点而言，一对内力做功可表示为：

$$A = \vec{f}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \bullet d\vec{r}_2$$

由于外力的存在，质点 1、2 的运动情况是不同的。

$$d\vec{r}_1 \neq d\vec{r}_2, \vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\text{上式可写为：} A = \vec{f}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \bullet d\vec{r}_2 = \vec{f} \bullet (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)$$

也就是内力的功与两个质点的相对位移有关，与参考系的选择无关。

3-2. 叙述质点和质点组动能变化定理，写出它们的表达式，指出定理的成立条件。

质点的动能变化定理：物体受外力  $\vec{F}$  作用下，从 A 运动 B，其运动状态变化，速度为  $v_1$  变化到  $v_2$ ，即动能变化。合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{K2} - E_{K1}$$

质点系的动能定理：质点系总动能的增量等于外力的功与质点系内保守力的功和质点系内非保守力的功三者之和。即质点系总动能的增量等于外力和内力做功之和。

$$\text{公式表达：} A_{\text{外}} + A_{\text{内非}} + A_{\text{内保}} = E_{K2} - E_{K1}$$

3-3.  $A$  和  $B$  两物体放在水平面上, 它们受到的水平恒力  $\boldsymbol{F}$  一样, 位移  $\boldsymbol{s}$  也一样, 但一个接触面光滑, 另一个粗糙.  $\boldsymbol{F}$  力做的功是否一样? 两物体动能增量是否一样?

答: 根据功的定义:  $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

所以当它们受到的水平恒力  $\boldsymbol{F}$  一样, 位移  $\boldsymbol{s}$  也一样时, 两个功是相等的;

当时由于光滑的接触面摩擦力不做功, 粗糙的接触面摩擦力做功, 所以两个物体的总功不同, 动能的增量就不相同。

3-4. 按质点动能定理, 下列式子:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \frac{1}{2} m v_{x_2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x_1}^2$$

$$\int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \frac{1}{2} m v_{y_2}^2 - \frac{1}{2} m v_{y_1}^2$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \frac{1}{2} m v_{z_2}^2 - \frac{1}{2} m v_{z_1}^2$$

是否成立? 这三式是否是质点动能定理的三个分量式? 试作分析。

答: 不成立, 因为功是标量, 不分方向, 没有必要这么写。

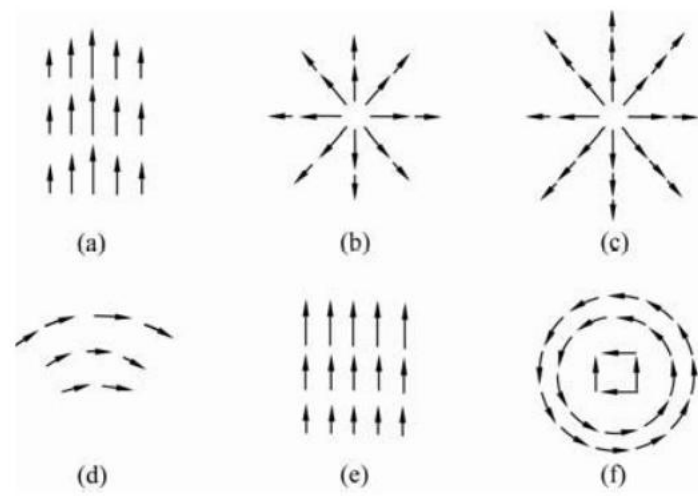
3-5. 在劲度系数为  $k$  的弹簧下, 如将质量为  $m$  的物体挂上慢慢放下, 弹簧伸长多少? 如瞬间挂上让其自由下落弹簧又伸长多少?

答: 如将质量为  $m$  的物体挂上慢慢放下, 弹簧伸长为  $mg=kx$ , 所以  $x = \frac{mg}{k}$

如瞬间挂上让其自由下落, 弹簧伸长应满足能量守恒:  $mgx = \frac{1}{2} kx^2$ , 所以

$$x = \frac{2mg}{k}$$

3-6. 试根据力场的力矢量分布图判断哪些力场一定是非保守的?



图[d]、[f]为非保守力，因为如果对其取环路积分必定不为零。



### 习题

4-1. 如图所示的圆锥摆, 绳长为  $l$ , 绳子一端固定, 另一端系一质量为  $m$  的质点, 以匀角速  $\omega$  绕铅直线作圆周运动, 绳子与铅直线的夹角为  $\theta$ 。在质点旋转一周的过程中, 试求:

- (1) 质点所受合外力的冲量  $\mathbf{I}$ ;
- (2) 质点所受张力  $T$  的冲量  $\mathbf{I}_T$ 。

解:

(1) 根据冲量定理:  $\int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} d\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P}$

其中动量的变化:  $m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0$

在本题中, 小球转动一周的过程中, 速度没有变化, 动量的变化就为 0, 冲量之和也为 0, 所以本题中质点所受合外力的冲量  $\mathbf{I}$  为零

(2) 该质点受的外力有重力和拉力, 且两者产生的冲量大小相等, 方向相反。

重力产生的冲量  $= mgT = 2\pi mg/\omega$ ; 所以拉力产生的冲量  $= 2\pi mg/\omega$ , 方向为竖直向上。

4-2. 一物体在多个外力作用下作匀速直线运动, 速度  $\mathbf{v} = 4\text{m/s}$ 。已知其中一力  $\mathbf{F}$  方向恒与运动方向一致, 大小随时间变化内关系曲线为半个椭圆, 如图。求:

- (1) 力  $\mathbf{F}$  在 1s 到 3s 间所做的功;
- (2) 其他力在 1s 到 s 间所做的功。

解:

(1) 由做功的定义可知:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_1^3 F v dt = v \int_1^3 F dt = v \times S_{\text{椭圆}} = 125.6J$$

(2) 由动能定理可知, 当物体速度不变时, 外力做的总功为零, 所以当该  $\mathbf{F}$  做的功为 125.6J 时, 其他的力的功为 -125.6J。

4-3. 质量为  $m$  的质点在  $Oxy$  平面内运动, 运动学方程为  $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$ , 求:

- (1) 质点在任一时刻的动量;
- (2) 从  $t = 0$  到  $t = 2\pi/\omega$  的时间内质点受到的冲量。

解: (1) 根据动量的定义:  $\mathbf{P} = m\mathbf{v} = m(-\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega b \cos \omega t \mathbf{j})$

(2) 从  $t = 0$  到  $t = 2\pi/\omega$  的时间内质点受到的冲量等于它在这段时间内动

量的变化，因为动量没变，所以冲量为零。

4-4. 质量为  $M=2.0\text{kg}$  的物体（不考虑体积），用一根长为  $l=1.0\text{m}$  的细绳悬挂在天花板上。今有一质量为  $m=20\text{g}$  的子弹以  $v_0=600\text{m/s}$  的水平速度射穿物体。刚射出物体时子弹的速度大小  $v=30\text{m/s}$ ，设穿透时间极短。求：

- (1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小；
- (2) 子弹在穿透过程中所受的冲量。

解：

(1) 解：由碰撞过程动量守恒可得：  $mv_0 = mv + Mv_1$

代入数据  $0.02 \times 600 = 0.02 \times 30 + 2v_1$  可得：  $v_1 = 5.7\text{m/s}$

根据圆周运动的规律：  $T - G = M \frac{v_1^2}{R}$   $T = Mg + M \frac{v_1^2}{R} = 84.6\text{N}$

(2) 根据冲量定理可得：  $I = mv - mv_0 = -0.02 \times 570 = -11.4\text{N} \cdot \text{s}$

4-5. 一静止的原子核经放射性衰变产生出一个电子和一个中微子，已知电子的动量为  $1.2 \times 10^{-22}\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，中微子的动量为  $6.4 \times 10^{-23}\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，两动量方向彼此垂直。(1) 求核反冲动量的大小和方向；(2) 已知衰变后原子核的质量为  $5.8 \times 10^{-26}\text{kg}$ ，求其反冲动能。

由碰撞时，动量守恒，分析示意图，可写成分量式：

$$\begin{cases} m_1 \sin \alpha = m_2 \cos \alpha \\ P = m_1 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha \end{cases}$$

所以  $P = 1.4 \times 10^{-22}\text{kg} \cdot \text{m/s}$   $\theta = \pi - \alpha = 151.9^\circ$

(2) 反冲的动能为：  $E_k = \frac{P^2}{2m} = 0.17 \times 10^{-18}\text{J}$



4-6. 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为  $F = 400 - 4 \times 10^5 t / 3$ ，子弹从枪口射出时的速率为  $300\text{m/s}$ 。设子弹离开枪口处合力刚好为零。求：

- (1) 子弹走完枪筒全长所用的时间  $t$ ；
- (2) 子弹在枪筒中所受力的冲量  $I$ ；
- (3) 子弹的质量。

解：(1) 由  $F = 400 - 4 \times 10^5 t / 3$  和子弹离开枪口处合力刚好为零，则可以  
得到：  $F = 400 - 4 \times 10^5 t / 3 = 0$       算出  $t = 0.003\text{s}$ 。

(2) 由冲量定义：

$$I = \int_0^{0.003} F dt = \int_0^{0.003} (400 - 4 \times 10^5 t / 3) dt = 400t - 2 \times 10^5 t^2 / 3 \Big|_0^{0.003} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

(3) 由动量定理：  $I = \int_0^{0.003} F dt = \Delta P = mv = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$   
所以：  $m = 0.6 / 300 = 0.002 \text{ kg}$

4-7. 有质量为  $2m$  的弹丸，从地面斜抛出去，它的落地点为  $x_c$ 。如果它在飞行到最高点处爆炸成质量相等的两碎片。其中一碎片铅直自由下落，另一碎片水平抛出，它们同时落地。问第二块碎片落在何处。

解：在爆炸的前后，质心始终只受重力的作用，因此，质心的轨迹为一抛物线，它的落地点为  $x_c$ 。

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{因为 } m_1 = m_2 = m, \quad x_1 = \frac{x_c}{2}$$

$$\text{故 } x_c = \frac{mx_c + 2mx_2}{4m}, x_2 = \frac{3}{2}x_c$$

4-8. 两个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的木块  $A$ 、 $B$ ，用一劲度系数为  $k$  的轻弹簧连



接，放在光滑的水平面上。 $A$  紧靠墙。今用力推  $B$  块，使弹簧压缩  $x_0$  然后释放。

(已知  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 3m$ ) 求：

(1) 释放后  $A$ 、 $B$  两滑块速度相等时的瞬时速度的大小；

(2) 弹簧的最大伸长量。

解：分析题意，可知在弹簧由压缩状态回到原长时，是弹簧的弹性势能转换为  $B$  木块的动能，然后  $B$  带动  $A$  一起运动，此时动量守恒，可得到两者相同的速度  $v$ ，并且此时就是弹簧伸长最大的位置，由机械能守恒可算出其量值。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \\ m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v \end{cases}$$

$$\text{所以 } v = \frac{3}{4} x_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\text{那么计算可得： } x = \frac{1}{2} x_0$$

4-9. 二质量相同的小球，一个静止，一个以速度  $v_0$  与另一个小球作对心碰撞，求碰撞后两球的速度。(1) 假设碰撞是完全非弹性的；(2) 假设碰撞是完全弹性的；(3) 假设碰撞的恢复系数  $e = 0.5$ 。

解：由碰撞过程动量守恒以及附加条件，可得

(1) 假设碰撞是完全非弹性的，即两者将以共同的速度前行： $mv_0 = 2mv$

$$\text{所以： } v = \frac{1}{2} v_0$$

(2) 假设碰撞是完全弹性的，

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + mv_2 \\ \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \end{cases}$$

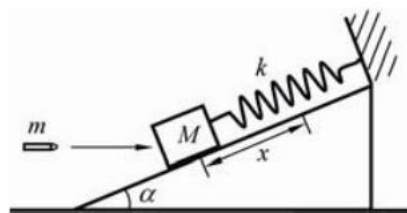
两球交换速度，  $v_1 = 0$        $v_2 = v_0$

(3) 假设碰撞的恢复系数  $e = 0.5$ ，也就是

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + mv_2 \\ \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0.5 \end{cases}$$

$$\text{所以: } v_1 = \frac{1}{4}v_0, \quad v_2 = \frac{3}{4}v_0$$

4-10. 如图，光滑斜面与水平面的夹角为  $\alpha = 30^\circ$ ，轻质弹簧上端固定。今在弹簧的另一端轻轻地挂上质量为  $M = 1.0\text{kg}$  的木块，木块沿斜面从静止开始向下滑动。当木块向下滑  $x = 30\text{cm}$  时，恰好有一质量  $m = 0.01\text{kg}$  的子弹，沿水平方向以速度  $v = 200\text{m/s}$  射中木块并陷在其中。设弹簧的劲度系数为  $k = 25\text{N/m}$ 。求子弹打入木块后它们的共同速度。

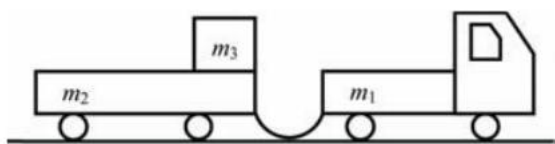


解：由机械能守恒条件可得到碰撞前木块的速度，碰撞过程中子弹和木块沿斜面方向动量守恒，可得：

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Mgx \sin \alpha \quad \Rightarrow v_1 = 0.83 \quad (\text{碰撞前木块的速度})$$

$$Mv_1 - mv \cos \alpha = (m + M) v' \quad \Rightarrow v' = -0.89$$

4-11. 水平路面上有一质量  $m_1 = 5\text{kg}$  的无动力小车以匀速率  $v_0 = 2\text{m/s}$  运动。小车由不可伸长的轻绳与另一质量为  $m_2 = 25\text{kg}$  的车厢连接，车厢前端有一质量为  $m_3 = 20\text{kg}$  的物体，物体与车厢间摩擦系数为  $\mu = 0.2$ 。开始时车厢静止，绳未拉紧。求：



- (1)当小车、车厢、物体以共同速度运动时，物体相对车厢的位移；  
 (2)从绳绷紧到三者达到共同速度所需要的时间。(车与路面间摩擦不计，取  $g = 10\text{m/s}^2$ )

解：(1) 由碰撞过程动量守恒，可得

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2 + m_3) v' \Rightarrow v' = 0.2 \text{ m/s}$$

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \quad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{5 \times 2}{5 + 25} = \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

$$\mu m_3 g s = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v'^2$$

$$s = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v'^2}{\mu m_3 g} = \frac{1}{60} \text{ m}$$

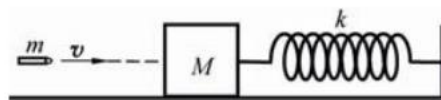
$$(2) \quad m_3 v' = \mu m_3 g t \quad t = \frac{v'}{\mu g} = \frac{0.2}{0.2 \times 10} = 0.1 \text{ s}$$

4-12. 一质量为  $M$  千克的木块，系在一固定于墙壁的弹簧的末端，静止在光滑水平面上，弹簧的劲度系数为  $k$ . 一质量为  $m$  的子弹射入木块后，弹簧长度被压缩了  $L$ .

(1)求子弹的速度；(2)若子弹射入木块的深度为  $s$ ，求子弹所受的平均阻力。

解：(1) 碰撞过程中子弹和木块动量守恒，碰撞结束后的运动由机械能守恒条件可得，

$$\begin{cases} m v_0 = (m + M) v' \\ \frac{1}{2} (m + M) v'^2 = \frac{1}{2} k L^2 \end{cases}$$



计算得到:  $v_0 = \frac{L}{m} \sqrt{k(m+M)}$

(2) 子弹射入木块所受的阻力做功使子弹动能减小, 木块动能增加, 两次作功的位移差为  $s$ , 所以:

$$\begin{cases} fx = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v'^2) \\ fx' = \frac{1}{2} M v'^2 \end{cases} \quad \text{其中 } x - x' = s$$

所以:  $f = \frac{MkL^2}{2ms}$

4-13. 质量为  $M$ 、长为  $l$  的船浮在静止的水面上, 船上有一质量为  $m$  的人, 开始时人与船也相对静止, 然后人以相对于船的速度  $u$  从船尾走到船头, 当人走到船头后人就站在船头上, 经长时间后, 人与船又都静止下来了。设船在运动过程中受到的阻力与船相对水的速度成正比, 即  $f = -kv$ . 求在整个过程中船的位移  $\Delta x$ 。

4-14. 以初速度  $v_0$  将质量为  $m$  的质点以倾角  $\theta$  从坐标原点处抛出。设质点在  $Oxy$  平面内运动, 不计空气阻力, 以坐标原点为参考点, 计算任一时刻:

(1) 作用在质点上的力矩  $M$ ;

(2) 质点的角动量  $L$

解: (1)  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -mgv_0 \cos \theta t \vec{k}$

(2)  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \int_0^t \vec{M} dt = -\frac{mgv_0}{2} \cos \theta t^2 \vec{k}$

4-15. 人造地球卫星近地点离地心  $r_1=2R$ , ( $R$  为地球半径), 远地点离地心  $r_2=4R$ 。求:

(1) 卫星在近地点及远地点处的速率  $v_1$  和  $v_2$  (用地球半径  $R$  以及地球表面附近的重力加速度  $g$  来表示);

(2) 卫星运行轨道在近地点处的轨迹的曲率半径  $\rho$ 。

解: 利用角动量守恒:  $L = r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \Rightarrow 2v_1 = 4v_2$



同时利用卫星的机械能守恒，所以：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_1^2 - G_0 \frac{Mm}{2R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G_0 \frac{Mm}{4R} \\ G_0 \frac{Mm}{R^2} = mg \end{array} \right.$$

$$\text{所以： } v_1 = \sqrt{\frac{2Rg}{3}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{Rg}{6}}$$

$$(2) \quad G_0 \frac{Mm}{\rho^2} = m \frac{v^2}{\rho} \quad \text{可得到： } \rho = \frac{8}{3}R$$

4-16 火箭以第二宇宙速度  $v_2 = \sqrt{2Rg}$  沿地球表面切向飞出，如图所示。在飞离地球过程中，火箭发动机停止工作，不计空气阻力，求火箭在距地心  $4R$  的 A 处的速度。

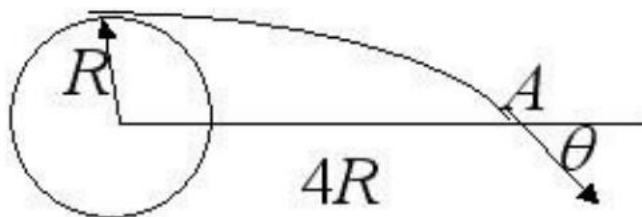
解：第二宇宙速度  $E = 0$ ，由机械能守恒：

$$0 = \frac{1}{2}mv_A^2 - G \frac{Mm}{4R}$$

$$v_A = \sqrt{G \frac{M}{2R}} = \sqrt{\frac{1}{2}gR}$$

$$mv_2 R = mv_A 4R \sin \theta$$

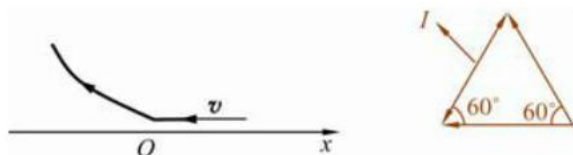
$$v_2 = \sqrt{2Rg} \text{ 代入： } \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



### 思考题 4

4-1. 一  $\alpha$  粒子初时沿  $x$  轴负向以速度  $v$  运动, 后被位于坐标原点的金核所散射, 使其沿与  $x$  轴成  $120^\circ$  的方向运动 (速度大小不变). 试用矢量在图上表出  $\alpha$  粒子所受到的冲量  $I$  的大小和方向。

见图 4-25。

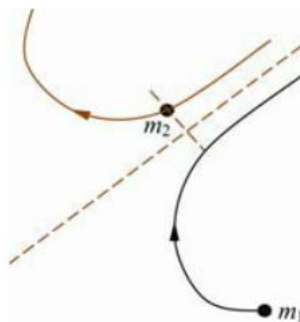


4-2. 试用所学的力学原理解释逆风行舟的现象。

可用动量定理来解释。设风沿与航向成  $\alpha$  角的方向从右前方吹来, 以风中一小块沿帆面吹过来的空气为研究对象,  $\Delta m$  表示这块空气的质量,  $v_1$  和  $v_2$  分别表示它吹向帆面和离开帆面时的速度, 由于帆面比较光滑, 风速大小基本不变, 但是由于  $\Delta m$  的速度方向改变了, 所以一定是受到帆的作用力, 根据牛顿第三定律,  $\Delta m$  必然对帆有一个反作用力  $f'$ , 此力的方向偏向船前进的方向, 将  $f'$  分解为两个分量, 垂直船体的分量与水对船的阻力相平衡, 与船的航向平行的分量就是推动帆及整个船体前进的作用力。

4-3. 两个有相互作用的质点  $m_1$  和  $m_2$  ( $m_2 = \frac{m_1}{2}$ ), 已知在不受外力时它们的总动量为零,  $m_1$  的轨迹如图, 试画出  $m_2$  质点的运动轨迹。

见图 4-26。



4-4. 当质量为  $m$  的人造卫星在轨道上运动时, 常常列出下列三个方程:



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm_em}{r_2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gm_em}{r_1}$$

$$mv_2 \sin \theta_2 = mv_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_em}{r^2}$$

试分析上述三个方程各在什么条件下成立。

4-5. 在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，向东南（斜向上）方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）哪些量守恒？

对于这个系统，能量守恒，因为没有外力做功；

4-6. 体重相同的甲乙两人，分别用双手握住跨过无摩擦滑轮的绳子两端，当他们由同一高度向上爬时，相对于绳子，甲的速度是乙的两倍，则到达顶点情况是：

（A）甲先到达；（B）乙先到达；（C）同时到达；（D）谁先到达不能确定。

答：本题测试的是刚体系统的角动量定理和角动量守恒的概念。

当两小孩质量相等时， $M=0$ 。则系统角动量守恒，两人的实际的速度相同，将同时到达滑轮处，与谁在用力，谁不在用力无关。

选择 C。

## 习题

5-1. 如图，一轻绳跨过两个质量为  $m$ 、半径为  $r$  的均匀圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为  $2m$  和  $m$  的重物，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮轴光滑，两个定滑轮的转动惯量均为  $mr^2/2$ ，将由两个定滑轮以及质量为  $2m$  和  $m$  的重物组成的系统从静止释放，求重物的加速度和两滑轮之间绳内的张力。

解：受力分析如图

$$2mg - T_2 = 2ma \quad (1)$$

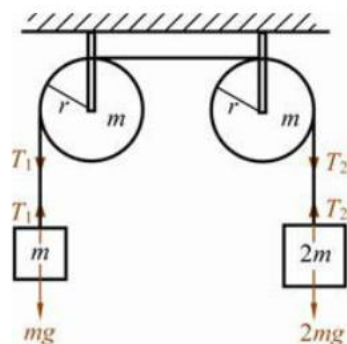
$$T_1 - mg = ma \quad (2)$$

$$(T_2 - T_1)r = J\beta \quad (3)$$

$$(T - T_1)r = J\beta \quad (4)$$

$$a = r\beta \quad (5)$$

联立 
$$a = \frac{1}{4}g, \quad T = \frac{11}{8}mg$$



5-2. 如图所示，一均匀细杆长为  $l$ ，质量为  $m$ ，平放在摩擦系数为  $\mu$  的水平桌面上，设开始时杆以角速度  $\omega_0$  绕过中心  $O$  且垂直与桌面的轴转动，试求：（1）作用于杆的摩擦力矩；（2）经过多长时间杆才会停止转动。

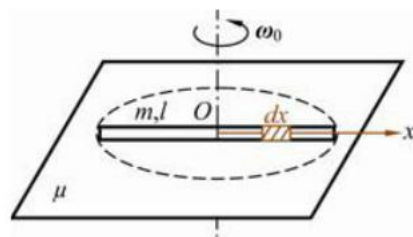
（1） 设杆的线  $\lambda = \frac{m}{l}$ ，在杆上取一小质元

$$dm = \lambda dx$$

$$df = \mu dm g = \mu \lambda g dx$$

$$dM = \mu \lambda g x dx \quad \text{考虑对称}$$

$$M = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \mu \lambda g x dx = \frac{1}{4} \mu m g l$$



(2) 根据转动定律  $M = J\beta = J \frac{d\omega}{dt}$

$$\int_0^t -M dt = \int_{\omega_0}^0 J d\omega$$

$$-\frac{1}{4} \mu m g l t = -\frac{1}{12} m l^2 \omega_0$$

所以  $t = \frac{\omega_0 l}{3\mu g}$

5-3. 如图所示，一个质量为  $m$  的物体与绕在定滑轮上的绳子相联，绳子的质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动。假设定滑轮质量为  $M$ 、半径为  $R$ ，其转动惯量为  $MR^2/2$ ，试求该物体由静止开始下落的过程中，下落速度与时间的关系。

$$mg - T = ma = m \frac{dv}{dt}$$

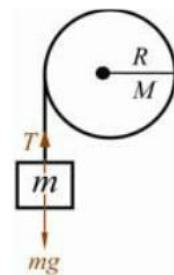
$$TR = J\beta$$

$$\frac{dv}{dt} = R\beta$$

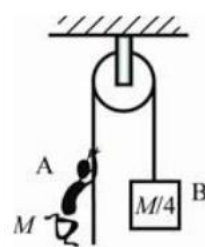
整理  $(m + \frac{1}{2}M) \frac{dv}{dt} = mg$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g dt$$

$$v = \frac{mgt}{m + \frac{M}{2}}$$



5-4. 轻绳绕过一定滑轮，滑轮轴光滑，滑轮的质量为  $M/4$ ，均匀分布在其边缘上，绳子  $A$  端有一质量为  $M$  的人抓住了绳端，而在绳的另一端  $B$  系了一质量为  $M/4$  的重物，如图。已知滑轮对  $O$  轴的转动惯量  $J = MR^2/4$ ，设人从静止开始以相对绳匀速向上爬时，绳与滑轮间无相对滑动，求  $B$  端重物上升的加速度？



解：选人、滑轮与重物为系统，设  $u$  为人相对绳的速度， $v$  为重物上升的速度，系统对轴的角动量

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{4} vR - M(u-v)R + \left(\frac{M}{4} R^2\right) \omega \\ &= \frac{3}{2} MvR - MuR \end{aligned}$$

根据角动量定理  $M = \frac{dL}{dt}$

$$\frac{3}{4} MgR = \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} MvR - MuR \right)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \frac{3}{4} MgR = \frac{3}{2} MR \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2} MRa$$

$$\text{所以} \quad a = \frac{g}{2}$$

5-5. 计算质量为  $m$  半径为  $R$  的均质球体绕其轴线的转动惯量。

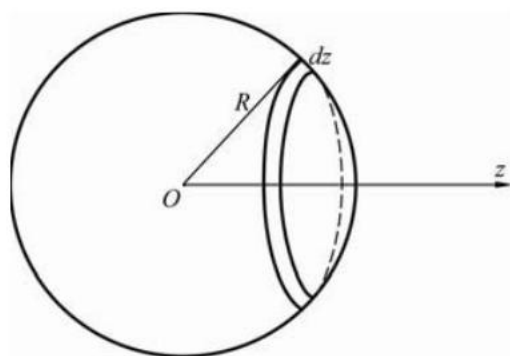
证明：设球的半径为  $R$ ，总重量为  $m$ ，体

$$\text{密度 } \rho = \frac{3m}{4\pi R^3},$$

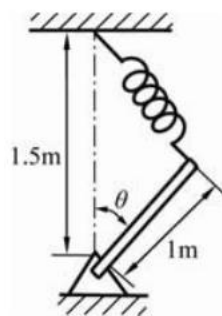
将球体划分为许多厚度为  $dZ$  的圆盘，

则盘的体积为  $\pi(\sqrt{R^2 - Z^2})^2 dZ$

$$J = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \pi \rho (R^2 - Z^2)^2 dZ = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} mR^2$$



5-6. 一轻弹簧与一均匀细棒连接，装置如图所示，已知弹簧的劲度系数  $k = 40\text{N/m}$ ，当  $\theta = 0^\circ$  时弹簧无形变，细棒的质量  $m = 5.0\text{kg}$ ，求在  $\theta = 0^\circ$  的位置上细棒至少应具有多大的角速度  $\omega$ ，才能转动到水平位置？

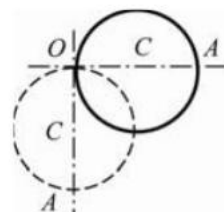


解：机械能守恒

$$mg \frac{1}{2} + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

根据几何关系  $(x + 0.5)^2 = 1.5^2 + 1^2$   $\omega = 3.28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

5-7. 如图所示，一质量为  $m$ 、半径为  $R$  的圆盘，可绕  $O$  轴在铅直面内转动。若盘自静止下落，略去轴承的摩擦，求：



- (1) 盘到虚线所示的铅直位置时，质心  $C$  和盘缘  $A$  点的速率；
- (2) 在虚线位置轴对圆盘的作用力。

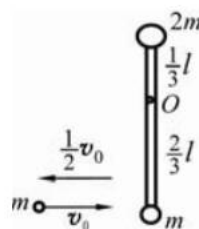
解：在虚线位置的  $C$  点设为重力势能的零点，下降过程机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad J = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}} \quad v_c = R\omega = \sqrt{\frac{4Rg}{3}} \quad v_A = 2R\omega = \sqrt{\frac{16Rg}{3}}$$

$$F_y = mg + mR\omega^2 = \frac{7}{3} mg \quad \text{方向向上}$$

5-8. 如图所示，长为  $l$  的轻杆，两端各固定质量分别为  $m$  和  $2m$  的小球，杆可绕水平光滑固定轴  $O$  在竖直面内转动，转轴  $O$  距两端分别为  $\frac{1}{3}l$  和  $\frac{2}{3}l$ 。轻杆原来静止在竖直位置。今有一质量为  $m$  的小球，以水平速度  $v_0$  与杆下端小球  $m$  作对心碰撞，碰后



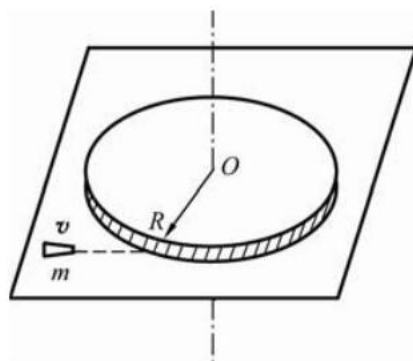
以  $\frac{1}{2}v_0$  的速度返回，试求碰撞后轻杆所获得的角速度。

解：根据角动量守恒 有

$$\frac{2}{3}mv_0l = \left(\frac{2l}{3}\right)^2 m\omega + \left(\frac{l}{3}\right)^2 \cdot 2m\omega - \frac{2}{3}ml \cdot \frac{1}{2}v_0$$

$$\omega = \frac{3v_0}{2l}$$

5-9. 一质量均匀分布的圆盘, 质量为  $M$ , 半径为  $R$ , 放在一粗糙水平面上(圆盘与水平面之间的摩擦系数为  $\mu$ ), 圆盘可绕通过其中心  $O$  的竖直固定光滑轴转动。开始时, 圆盘静止, 一质量为  $m$  的子弹以水平速度  $v$  垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上, 求: (1) 子弹击中圆盘后, 盘所获得的角速度; (2) 经过多少时间后, 圆盘停止转动。(圆盘绕通过  $O$  的竖直轴的转动惯量为  $\frac{1}{2}MR^2$ , 忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩。)



解 (1) 角动量守恒  $mvR = \frac{1}{2}MR^2\omega + mR^2\omega$

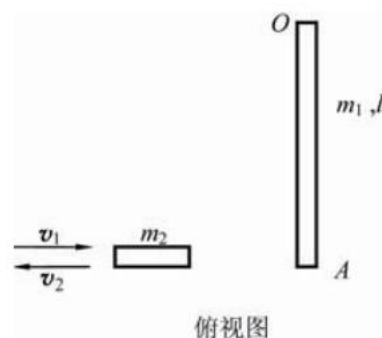
$$\omega = \frac{2mv}{(2m + M)R}$$

$$(2) M = \int dM = \int \mu dmgr = \int_0^R \mu gr \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2}{3} \mu MgR$$

$$\frac{2}{3} \mu MgR \cdot \Delta t = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega - 0, \quad \therefore \Delta t = \frac{2(M + 2m)}{4\mu Mg} R\omega$$

由 (1) 已得:  $\omega = \frac{2mv}{(M + 2m)R}$ , 代入即得  $\Delta t = \frac{3mv}{2\mu Mg}$

5-10. 有一质量为  $m_1$ 、长为  $l$  的均匀细棒, 静止平放在滑动摩擦系数为  $\mu$  的水平桌面上, 它可绕通过其端点  $O$  且与桌面垂直的固定光滑轴转动。另有一水平运动的质量为  $m_2$  的小滑块, 从侧面垂直于棒与棒的另一端  $A$  相碰撞, 设碰撞时间极短。已知小滑块在碰撞前后的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ , 如图所示。求碰撞后从细棒开始转动到停止转动的过程所需的时间。





(已知棒绕  $O$  点的转动惯量  $J = \frac{1}{3}m_1l^2$ )

碰撞时角动量守恒

$$m_2v_1l = \frac{1}{3}m_1l^2\omega - m_2v_2l$$

$$\omega = \frac{3m_2(v_1 + v_2)}{m_1l}$$

细棒运动起来所受到的摩擦力矩

$$M = \int_0^l \mu \frac{m_1}{l} g x dx = \frac{1}{2} \mu m_1 g l$$

$$-M = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_0^t dt = - \frac{\frac{1}{3}m_1l^2 d\omega}{\frac{1}{2}\mu m_1 g l}$$

$$t = \frac{2l\omega}{3\mu g} = \frac{2m_2(v_1 + v_2)}{\mu m_1 g}$$

5-11. 如图所示, 滑轮转动惯量为  $0.01\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , 半径为  $7\text{cm}$ ; 物体的质量为

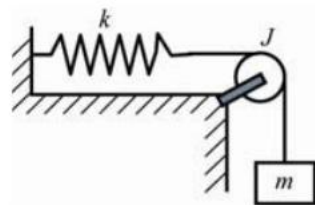
$5\text{kg}$ , 用一细绳与劲度系数  $k = 200\text{N/m}$  的弹簧相连, 若

绳与滑轮间无相对滑动, 滑轮轴上的摩擦忽略不计。求:

(1) 当绳拉直、弹簧无伸长时使物体由静止而下落的最大距离。(2) 物体的速度达最大值时的位置及最大速率。

(1) 机械能守恒。 设下落最大距离为  $h$

$$\frac{1}{2}kh^2 = mgh$$





$$h = \frac{2mg}{k} = 0.49m$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgx$$

$$v = \left[ \frac{2mgx - kx^2}{m + \frac{J}{r^2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

若速度达最大值,  $\frac{dv}{dx} = 0$

$$x = \frac{mg}{k} = 0.245(m)$$

$$v = \left[ \frac{2mgx - kx^2}{m + \frac{J}{r^2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{2 \times 5 \times 9.8 \times 0.245 - 200 \times 0.245^2}{5 + \frac{0.01}{(7 \times 10^{-2})^2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1.31 m/s$$

5-12. 设电风扇的功率恒定不变为  $P$ , 叶片受到的空气阻力矩与叶片旋转的角速度  $\omega$  成正比, 比例系数的  $k$ , 并已知叶片转子的总转动惯量为  $J$ 。(1) 原来静止的电扇通电后  $t$  秒时刻的角速度; (2) 电扇稳定转动时的转速为多大? (3) 电扇以稳定转速旋转时, 断开电源后风叶还能继续转多少角度?

解: (1) 通电时根据转动定律有  $M - M_r = J \frac{d\omega}{dt}$

$$M = \frac{P}{\omega} \quad M_r = k\omega$$

$$\text{代入两边积分} \quad \int_0^t dt = \int_0^\omega \frac{J\omega}{P - k\omega^2} d\omega$$

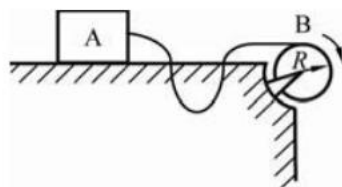
$$\omega = \sqrt{\frac{P}{k} (1 - e^{-\frac{2k}{J}t})}$$

(2) 电扇稳定转动时的转速  $\omega_m = \sqrt{\frac{P}{k}}$

(3)  $-k\omega = J\omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad \int_0^\theta -\frac{k}{J} d\theta = \int_{\omega_m}^0 d\omega$

$$\theta = \frac{J}{k} \sqrt{\frac{P}{k}}$$

5-13. 如图所示，物体 A 放在粗糙的水平面上，与水平桌面之间的摩擦系数为  $\mu$ ，细绳的一端系住物体 A，另一端缠绕在半径为  $R$  的圆柱形转轮 B 上，物体与转轮的质量相同。开始时，物体与转轮皆静止，细绳松弛，若转轮以  $\omega_0$  绕其转轴转动。试问：细绳刚绷紧的瞬间，物体 A 的速度多大？物体 A 运动后，细绳的张力多大？



解：细绳刚绷紧时系统机械能守恒

$$\frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad v = R \omega$$

$$v = \frac{1}{3} R \omega_0$$

$$T - \mu mg = ma$$

$$-TR = J\beta$$

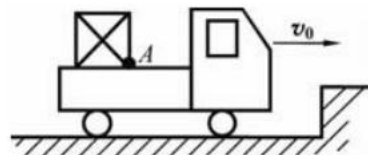
$$T = \frac{\mu mg}{3} \quad a = R\beta$$

5-14. 质量为  $m$  的小孩站在半径为  $R$ 、转动惯量为  $J$  的可以自由转动的水平平台边缘上(平台可以无摩擦地绕通过中心的竖直轴转动)。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然一相对地面为  $v$  的速率沿台边缘逆时针走动时，此平台相对地面旋转的角速度  $\omega$  为多少？

解：此过程角动量守恒  $0 = mrv - J\omega$

$$\omega = \frac{mRv}{J}$$

5-15. 以速度  $v_0$  作匀速运动的汽车上，有一质量为  $m$  ( $m$  较小)，边长为  $l$  的立方体货物箱，如图所示。当汽车遇到前方障碍物急刹车停止时，货物箱绕其底面 A 边翻转。试求：(1) 汽车刹车停止瞬时，货物箱翻转的角速度及角加速度；(2) 此时，货物箱 A 边所受的支反力。



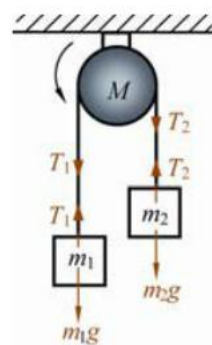
解：(1) 角动量守恒  $mv_0 \frac{l}{2} = \frac{2}{3} ml^2 \omega$   $\omega = \frac{3v_0}{4l}$

根据转动定律  $mg \frac{l}{2} = \frac{2}{3} ml^2 \beta$   $\beta = \frac{3g}{4l}$

(2)  $N_x = ma_{cx} = ma_{cn} \cos 45^\circ - ma_{ct} \cos 45^\circ$

### 思考题

5-1. 一轻绳跨过一具有水平光滑轴、质量为  $M$  的定滑轮，绳的两端分别悬有质量  $m_1$  和  $m_2$  的物体 ( $m_1 < m_2$ )，如图所示。绳与轮之间无相对滑动，某时刻滑轮沿逆时针方向转动，则绳的张力多大？



$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

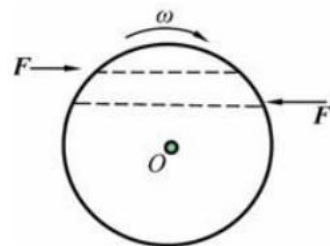
$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (2) \quad \text{插入图 5-29}$$

$$(T_1 - T_2)r = J\beta \quad (3)$$

$$a = r\beta \quad (4)$$

联立方程可得  $T_1$ 、 $T_2$ 。  $T_2 > T_1$

5-2. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴  $O$  以角速度  $\omega$  按图示方向转动, 若如图所示的情况那样, 将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力  $F$  沿盘面方向同时作用到盘上, 则盘的角速度  $\omega$  怎样变化?



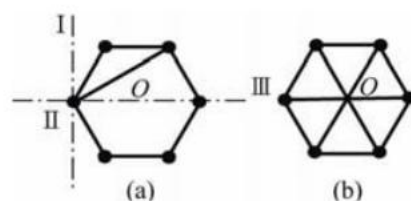
答: 增大

5-3. 个人站在有光滑固定转轴的转动平台上, 双臂伸直水平地举起二哑铃, 在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中, 人、哑铃与转动平台组成的系统的:

- (A) 机械能守恒, 角动量守恒; (B) 机械能守恒, 角动量不守恒,  
(C) 机械能不守恒, 角动量守恒; (D) 机械能不守恒, 角动量不守恒.

答: (C)

5-4. 在边长为  $a$  的六边形顶点上, 分别固定有质量都是  $m$  的 6 个质点, 如图所示。试求此系统绕下列转轴的转动惯量: (1) 设转轴 I、II 在质点所在的平面内, 如图  $a$  所示; (2) 设转轴 III 垂直于质点所在的平面, 如图  $b$  所示。

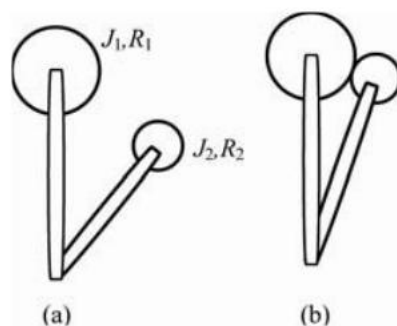


以 I 为轴转动惯量  $J = 9ma^2$

以 II 为轴转动惯量  $J = 3ma^2$

以 III 为轴转动惯量  $J = 7.5ma^2$

5-5. 如图  $a$  所示, 半径分别是  $R_1$  和  $R_2$ 、转动惯量分别是  $J_1$  和  $J_2$  的两个圆柱体, 可绕垂直于图面的轴转动, 最初大圆柱体的角速度为  $\omega_0$ , 现在将小圆柱体向左靠近, 直到它碰到大圆柱体为止。由于相互间的摩擦力, 小圆柱体被带着转动, 最后, 当相对滑动停止时, 两圆柱体各以恒定角



速度沿相反方向转动。

试问这种情况角动量是否守恒？为什么？小圆柱的最终角速度多大？

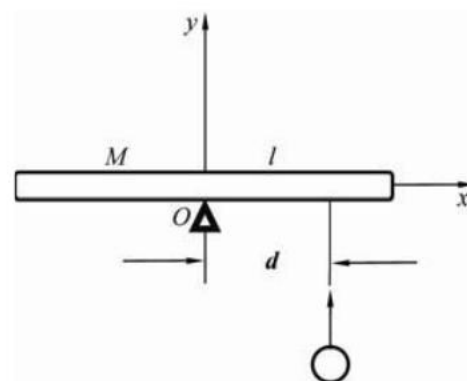
答：角动量守恒，摩擦力的力矩为 0。

$$J_1\omega_0 = J_2\omega \quad \omega = J_1\omega_0 / J_2$$

5-6. 均质细棒的质量为  $M$ ，长为  $L$ ，开始时处于水平方位，静止于支点  $O$  上。一锤子沿竖直方向在  $x = d$  处撞击细棒，给棒的冲量为  $I_0\mathbf{j}$ 。

试讨论细棒被球撞击后的运动情况。

答：撞击过程角动量守恒，棒获得一个角速度向上转动，当转到最大角度时，开始往下运动，最后回到平衡位置。



## 习题

6-1. 设固有长度  $l_0 = 2.50\text{m}$  的汽车，以  $v = 30.0\text{m/s}$  的速度沿直线行驶，问站在路旁的观察者按相对论计算该汽车长度缩短了多少？

$$\text{解： } l = l_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta l = l_0 - l = l_0 \times \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 1.25 \times 10^{-14} \text{m}$$

6-2. 在参考系  $S$  中，一粒子沿直线运动，从坐标原点运动到了  $x = 1.5 \times 10^8 \text{m}$  处，经历时间为  $\Delta t = 1.00\text{s}$ ，试计算该过程对应的固有时。

解：以粒子为  $S'$  系

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 0.866\text{s}$$

6-3. 从加速器中以速度  $v = 0.8c$  飞出的离子在它的运动方向上又发射出光子。求这光子相对于加速器的速度。

解：设加速器为  $S$  系，离子为  $S'$  系

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = c$$

6-4. 两个宇宙飞船相对于恒星参考系以  $0.8c$  的速度沿相反方向飞行，求两飞船的相对速度。

解：设宇宙船 A 为  $S$  系，速度  $0.8c$ ，宇宙船 B 为  $S'$  系，速度  $-0.8c$

根据洛伦兹速度变换公式：  $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$ ，有：

$$0.8c = \frac{-0.8c + u}{1 + \frac{-0.8cu}{c^2}} \quad u = 0.976c$$

6-5. 从  $S$  系观察到有一粒子在  $t_1 = 0$  时由  $x_1 = 100\text{m}$  处以速度  $v = 0.98c$  沿  $x$  方向运动， $10\text{s}$  后到达  $x_2$  点，如在  $S'$  系(相对  $S$  系以速度

$u = 0.96c$  沿  $x$  方向运动)观察, 粒子出发和到达的时空坐标  $t'_1, x'_1, t'_2, x'_2$  各为多少? ( $t = t' = 0$  时,  $S'$  与  $S$  的原点重合), 并算出粒子相对  $S'$  系的速度。

$$\text{解: } t'_1 = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{0 - \frac{0.96c}{c^2} \times 100}{\sqrt{1 - (0.96c/c)^2}} = 1.147 \times 10^{-6} s$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{10 - \frac{0.96c}{c^2} \times 9.8c}{\sqrt{1 - (0.96c/c)^2}} = 2.11s$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{100 - 0.96c \times 0}{\sqrt{1 - (0.96c/c)^2}} = 357.14m$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{9.8c - 0.96c \times 10}{\sqrt{1 - (0.96c/c)^2}} = 2.14 \times 10^8 m$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{0.98c - 0.96c}{1 - \frac{0.96c}{c^2} \times 0.98c} = 1.014 \times 10^8 m/s$$

6-6. 一飞船静长  $l_0$  以速度  $u$  相对于恒星系作匀速直线飞行, 飞船内一小球从尾部运动到头部, 宇航员测得小球运动速度为  $v$ , 试算出恒星系观察者测得小球的运动时间。

解: 设恒星系为  $S$  系, 飞船为系  $S'$

$$\Delta t' = \frac{l_0}{v}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{\Delta t'(1 + \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x'}{\Delta t'})}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{l_0(1 + \frac{u}{c^2} v)}{v\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

6-7. 一个静止的  $K^0$  介子能衰变成一个  $\pi^+$  介子和一个  $\pi^-$  介子, 这两个



$\pi$  介子的速率均为  $0.85c$  . 现有一个以速率  $0.90c$  相对于实验室运动的  $K^0$  介子发生上述衰变。以实验室为参考系，两个  $\pi$  介子可能有的最大速率和最小速率是多少？

$$\text{解：最大速度 } v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{0.85c + 0.9c}{1 + \frac{0.9c \times 0.85c}{c^2}} = 0.992c$$

$$\text{最小速度 } v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{(-0.85c) + 0.9c}{1 + \frac{0.9c \times (-0.85c)}{c^2}} = 0.213c$$

6-8. 一个电子从静止开始加速到  $0.1c$  , 需对它做多少功? , 若速度从  $0.9c$  增加到  $0.99c$  又要做多少功?

解

$$E_k = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (v_2^2/c^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2/c^2)}} \right\} = 0.51 \times 10^6 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (0.1c/c)^2}} - 1 \right\}$$

$$= 2.57 \text{ MeV}$$

$$E_k = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (v_2^2/c^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2/c^2)}} \right\} = 0.51 \times 10^6 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99c/c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9c/c)^2}} \right\}$$

$$= 2.44 \text{ MeV}$$

6-9. 一静止电子(静止能量为  $0.51 \text{ MeV}$  )被  $1.3 \text{ MeV}$  的电势差加速，然后以恒定速度运动。求：(1)电子在达到最终速度后飞越  $8.4 \text{ m}$  的距离需要多少时间？(2)在电子的静止系中测量，此段距离是多少？

$$\text{解： } m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV} \quad E_k = 1.3 \text{ MeV}$$

$$mc^2 = m_0 c^2 + E_k = 1.81 \text{ MeV} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = 2.88 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad t = \frac{l}{v} = \frac{8.4}{2.88 \times 10^8} = 2.92 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2.37m$$

6-10. 有两个中子  $A$  和  $B$ ，沿同一直线相向运动，在实验室中测得每个中子的速率为  $\beta c$ 。试证明相对中子  $A$  静止的参考系中测得的中子  $B$  的总能量为：

$$E = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} m_0 c^2$$

其中  $m_0$  为中子的静质量。

证明：设中子  $A$  为  $S$  系，实验室为  $S'$  系，中子  $B$  相对于中子  $A$  速度为

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} m_0 c^2$$

6-11. 一电子在电场中从静止开始加速，电子的静止质量为  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。

(1) 问电子应通过多大的电势差 才能使其质量增加 0.4% ?

(2) 此时电子的速率是多少?

解： (1)  $E_k = eU$   $\frac{m - m_0}{m_0} = 0.004$

$$eU = mc^2 - m_0 c^2 = 0.004 m_0 c^2$$

$$U = \frac{0.004 m_0 c^2}{e} = 2.05 \times 10^3 \text{ V}$$

$$(2) \quad m = 1.004 m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = 2.7 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6-12. 已知一粒子的动能等于其静止能量的  $n$  倍, 求: (1)粒子的速率, (2)粒子的动量。

$$\text{解: (1)} \quad E_k = nm_0c^2 \quad \text{而}$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

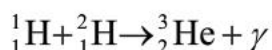
$$\text{整理得} \quad v = \frac{c\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$$

$$(2) \quad E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4 \quad \text{而} \quad E = (n+1)m_0c^2$$

$$P = m_0c\sqrt{n(n+2)}$$

6-13. 太阳的辐射能来源于内部一系列核反应, 其中之一是氢核( ${}^1_1\text{H}$ )

和氘核( ${}^2_1\text{H}$ )聚变为氦核( ${}^3_2\text{He}$ ), 同时放出  $\gamma$  光子, 反应方程为



已知氢、氘和  ${}^3\text{He}$  的原子质量依次为  $1.007825\text{u}$ 、 $2.014102\text{u}$  和  $3.016029\text{u}$ . 原子质量单位  $1\text{u} = 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}$ . 试估算  $\gamma$  光子的能量。

$$\text{解: } \Delta m = 1.007825\text{u} + 2.014102\text{u} - 3.016029\text{u} = 0.979 \times 10^{-29}\text{kg}$$

$$\text{根据质能方程} \quad \Delta E = \Delta mc^2 = \frac{0.979 \times 10^{-29} \times (3 \times 10^8)^2}{1.6 \times 10^{-19}} = 5.51\text{MeV}$$

### 思考题 6

6-1. 关于狭义相对论, 下列几种说法中错误的是下列哪种表述:

- (A) 一切运动物体的速度都不能大于真空中的光速;
- (B) 在任何惯性系中, 光在真空中沿任何方向的传播速率都相同;
- (C) 在真空中, 光的速度与光源的运动状态无关;
- (D) 在真空中, 光的速度与光的频率有关。

答: (D)

6-2. 两飞船  $A$ 、 $B$  均沿静止参照系的  $x$  轴方向运动, 速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ . 由飞船  $A$  向飞船  $B$  发射一束光, 相对于飞船  $A$  的速度为  $c$ , 则该光束相对于飞船  $B$  的速度为多少?

答: 光速  $c$

6-3. 在惯性系  $S$  和  $S'$ , 分别观测同一个空间曲面。如果在  $S$  系观测该曲面是球面, 在  $S'$  系观测必定是椭球面。反过来, 如果在  $S'$  系观测是球面, 则在  $S$  系观测定是椭球面, 这一结论是否正确?

答: 根据运动的相对性这个结论是正确的

6-4. 一列以速度  $v$  行驶火车, 其中点  $C'$  与站台中点  $C$  对准, 从站台首尾两端同时发出闪光。从看来, 这两次闪光是否同时? 何处在先?

答: 根据  $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x)$  由于  $\Delta t = 0$   $\Delta x \neq 0$

所以  $\Delta t' \neq 0$  即对  $C'$  点的观测者来说两次闪光不同时发生, 尾部在先。

6-5. 一高速列车穿过一山底隧道, 列车和隧道静止时有相同的长度  $l_0$ , 山顶上有人看到当列车完全进入隧道中时, 在隧道的进口和出口处同时发生了雷击, 但并未击中列车。试按相对论理论定性分析列车上的旅客应观察到什么现象? 这现象是如何发生的?

答: 对于地面的观察者雷击是在不同地方同时发生的, 但是对于列车上的旅客来说这两个事件不是同时发生的, 他应该看到两次雷击现象。

6-6. 假设在海拔 9000m 高山处产生的  $\mu$  子, 静止时的平均寿命为  $\tau_0 = 2\mu s$ , 以速度  $v = 0.998c$  向山下运动。在下述两参考系中估计在山脚下能否测到  $\mu$  子? (1) 在地面参考系中观测; (2) 在  $\mu$  子参考系中观测。

答: 在  $\mu$  子参考系中观测  $\mu$  子飞过的距离  $l = \tau_0 v = 5.988 \times 10^2 m$

$$\text{对于地面的观测者 } \mu \text{ 子飞过的距离 } l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 9.46 \times 10^3 m$$

$l'$  大于  $9000m$ ，所以可以到达地面。

6-7. 在地球上测量来自太阳赤道上相对的两端辐射的  $H_{\alpha}$  线，其中一条  $H_{\alpha}$  线的波长为  $656nm$ ，且与另一条  $H_{\alpha}$  线的波长相差  $9 \times 10^{-3} nm$ 。假定此效应是由于太阳自转引起的，求太阳自转的周期（太阳的直径是  $1.4 \times 10^6 km$ ）。

答：此题可根据多普勒效应求解，具体解略。

6-8. 设在  $S'$  系中有一粒子，原来静止于原点  $O'$ ，在某一时刻粒子分裂为相等的两半 A 和 B，分别以速率  $u$  沿  $x'$  轴的正向和反向运动。设另一参考系  $S$  以速率  $u$  沿  $-x'$  方向运动。

(1)  $S$  系中测得 B 的速度多大？

(2)  $S$  系中测得 A 和 B 的质量比  $(\frac{m_A}{m_B})$  多大？

答： $S$  系中测得 B 的速度为 0。

A 相对于  $S$  系中的速度：

$$v = \frac{u + u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2}$$

$$m_A = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0(c^2 + u^2)}{c^2 - u^2}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2}$$

## 习题

7-1. 原长为  $0.5\text{m}$  的弹簧，上端固定，下端挂一质量为  $0.1\text{kg}$  的物体，当物体静止时，弹簧长为  $0.6\text{m}$ 。现将物体上推，使弹簧缩回到原长，然后放手，以放手时开始计时，取竖直向下为正向，写出振动式。（ $g$  取  $9.8$ ）

解：振动方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ，

$$\text{在本题中， } kx = mg, \text{ 所以 } k = 9.8; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = \sqrt{98}$$

振幅是物体离开平衡位置的最大距离，当弹簧升长为  $0.1\text{m}$  时为物体的平衡位置，以向下为正方向。所以如果使弹簧的初状态为原长，那么： $A=0.1$ ，

当  $t=0$  时， $x=-A$ ，那么就可以知道物体的初相位为  $\pi$ 。

$$\text{所以： } x = 0.1\cos(\sqrt{98}t + \pi) \quad \text{即} \quad x = -0.1\cos(\sqrt{98}t)$$

7-2. 有一单摆，摆长  $l = 1.0\text{m}$ ，小球质量  $m = 10\text{g}$ 。 $t = 0$  时，小球正好经过

$\theta = -0.06\text{rad}$  处，并以角速度  $\dot{\theta} = 0.2\text{rad/s}$  向平衡位置运动。设小球的运动可看作简谐振动，试求：（ $g$  取  $9.8$ ）

（1）角频率、频率、周期；（2）用余弦函数形式写出小球的振动式。

解：振动方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  我们只要按照题意找到对应的各项就行了。

$$\text{（1）角频率： } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{9.8} = 3.13\text{rad/s},$$

$$\text{频率： } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\sqrt{9.8}}{2\pi} = 0.5\text{Hz},$$

$$\text{周期： } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{9.8}} = 2\text{s}$$

$$\text{（2）根据初始条件：} \begin{cases} \cos\varphi_0 = \frac{\theta}{A} \end{cases}$$

$$\sin \varphi_0 = -\frac{\dot{\theta}}{A\omega} \begin{cases} > 0 (1,2 \text{象限}) \\ < 0 (3,4 \text{象限}) \end{cases}$$

可解得:  $A = 0.088$ ,  $\varphi = -2.32$

所以得到振动方程:  $\theta = 0.088 \cos(3.13t - 2.32)$

7-3. 一竖直悬挂的弹簧下端挂一物体, 最初用手将物体在弹簧原长处托住, 然后放手, 此系统便上下振动起来, 已知物体最低位置是初始位置下方10.0cm处, 求: (1) 振动频率; (2) 物体在初始位置下方8.0cm处的速度大小。

解: (1) 由题知  $2A = 10\text{cm}$ , 所以  $A = 5\text{cm}$ ;

$$\frac{K}{m} = \frac{g}{\Delta x} = \frac{9.8}{5 \times 10^{-2}} = 196 \quad \text{又 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{196} = 14, \text{ 即}$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{7}{\pi}$$

(2) 物体在初始位置下方8.0cm处, 对应着是  $x = 3\text{cm}$  的位置, 所以:

$$\cos \varphi_0 = \frac{x}{A} = \frac{3}{5}$$

$$\text{那么此时的 } \sin \varphi_0 = -\frac{v}{A\omega} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{那么速度的大小为 } v = \frac{4}{5} A\omega = 0.56$$

7-4. 一质点沿  $x$  轴作简谐振动, 振幅为12cm, 周期为2s。当  $t = 0$  时, 位移为6cm, 且向  $x$  轴正方向运动。求: (1) 振动表达式; (2)  $t = 0.5\text{s}$  时, 质点的位置、速度和加速度; (3) 如果在某时刻质点位于  $x = -6\text{cm}$ , 且向  $x$  轴负方向运动, 求从该位置回到平衡位置所需要的时间。

解: 由题已知  $A = 12 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $T = 2.0\text{ s}$

$$\therefore \omega = 2\pi / T = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$



又,  $t=0$  时,  $x_0 = 6\text{cm}$ ,  $v_0 > 0$   $\therefore$  由旋转矢量图, 可知:  $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$

故振动方程为  $x = 0.12 \cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

(2) 将  $t=0.5\text{ s}$  代入得

$$x = 0.12 \cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0.12 \cos \frac{\pi}{6} = 0.104\text{m}$$

$$v = -0.12\pi \sin(\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0.12 \cos \frac{\pi}{6} = -0.188\text{m/s}$$

$$a = -0.12\pi^2 \cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) = -0.12\pi^2 \cos \frac{\pi}{6} = -1.03\text{m/s}^2$$

方向指向坐标原点, 即沿  $x$  轴负向.

(3) 由题知, 某时刻质点位于  $x = -6\text{cm}$ , 且向  $x$  轴负方向运动

即  $x_0 = -A/2$ , 且  $v < 0$ , 故  $\phi_t = 2\pi/3$ , 它回到平衡位置需要走  $\pi/3$ , 所以:

$$\therefore t = \Delta \phi / \omega = (\pi/3) / (\pi) = 1/3\text{s}$$

7-5. 两质点作同方向、同频率的简谐振动, 振幅相等。当质点 1 在  $x_1 = A/2$

处, 且向左运动时, 另一个质点 2 在  $x_2 = -A/2$  处, 且向右运动。求这两个质点的位相差。

解: 由旋转矢量图可知:

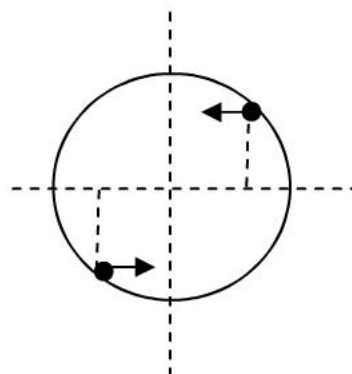
当质点 1 在  $x_1 = A/2$  处, 且向左运动时,

相位为  $\pi/3$ ,

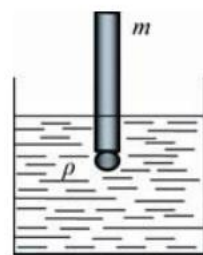
而质点 2 在  $x_2 = -A/2$  处, 且向右运动,

相位为  $4\pi/3$ 。

所以它们的相位差为  $\pi$ 。



7-6. 质量为  $m$  的密度计，放在密度为  $\rho$  的液体中。已知密度计圆管的直径为  $d$ 。试证明，密度计推动后，在竖直方向的振动为简谐振动。并计算周期。



解：平衡位置：当  $F_{\text{浮}} = G$  时，平衡点为 C 处。设此时进入水中的深度为  $a$ ： $\rho g S a = m g$

可知浸入水中为  $a$  处为平衡位置。

以水面作为坐标原点  $O$ ，以向上为  $x$  轴，质心的位置为  $x$ ，则：分析受力：不管它处在什么位置，其浸没水中的部分都可以用  $a-x$  来表示，所以力

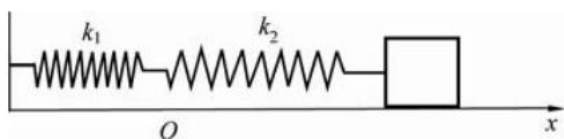
$$F = \rho g(a-x)S - \rho g a S = -\rho g S x = -kx$$

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{\rho g S x}{m} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{令 } \omega^2 = \frac{\rho g S}{m} = \frac{\rho g \pi d^2}{4m}$$

可得到： $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$  可见它是一个简谐振动。

$$\text{周期为： } T = 2\pi / \omega = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$$

7-7. 证明图示系统的振动为简谐振动。其频率为： $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$



证明：两根弹簧的串联之后等效于一根弹簧，所以仍为简谐振动（证明略），其劲度系数满足： $K_1 x_1 = K_2 x_2 = Kx$  和  $x_1 + x_2 = x$

$$\text{可得： } \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \quad \text{所以： } K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$\text{代入频率计算式，可得： } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

7-8. 当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？  
物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

$$E_P = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} A\right)^2 = \frac{1}{4} E_M, \quad E_K = \frac{3}{4} E_M$$

当物体的动能和势能各占总能量的一半：  $\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} kA^2\right) = \frac{1}{2} E_M,$

所以：  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm 0.707 A。$

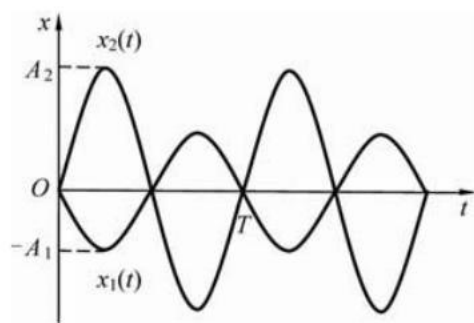
7-9. 两个同方向的简谐振动曲线(如图所示)

(1) 求合振动的振幅。

(2) 求合振动的振动表达式。

解：通过旋转矢量图做最为简单。

先分析两个振动的状态：



$$A_1: \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad A_2: \varphi_2 = -\frac{\pi}{2},$$

两者处于反相状态，（反相  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$ ，  $k = 0, 1, 2, \dots$ ）

所以合成结果：振幅  $A = |A_2 - A_1|$

振动相位判断：当  $A_1 > A_2$ ， $\varphi = \varphi_1$ ；当  $A_1 < A_2$ ， $\varphi = \varphi_2$ ；

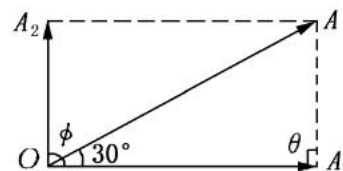
所以本题中，  $\varphi = \varphi_2 = -\frac{\pi}{2},$

振动方程：  $x = (A_2 - A_1) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$

7-10. 两个同方向，同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20cm，与第一

个振动的位相差为  $\frac{\pi}{6}$ 。若第一个振动的振幅为  $10\sqrt{3}\text{cm}$ 。则 (1) 第二个振动的振幅为多少？ (2) 两简谐振动的位相差为多少？

解：由题意可做出旋转矢量图如下。



$$\text{由图知 } A_2^2 = A_1^2 + A^2 - 2A_1A \cos 30^\circ$$

$$= (0.173)^2 + (0.2)^2 - 2 \times 0.173 \times 0.2 \times \sqrt{3} / 2 = 0.01$$

$$\therefore A_2 = 0.1 \text{ m}$$

$$\text{设角 } \angle A_1OA \text{ 为 } \theta, \text{ 则 } A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \theta$$

$$\text{即 } \cos \theta = \frac{A_1^2 + A_2^2 - A^2}{2A_1A_2} = \frac{(0.173)^2 + (0.1)^2 - (0.02)^2}{2 \times 0.173 \times 0.1} = 0$$

即  $\theta = \pi/2$ , 这说明  $A_1$  与  $A_2$  间夹角为  $\pi/2$ , 即二振动的位相差为  $\pi/2$

7-11. 一摆在空中作阻尼振动, 某时刻振幅为  $A_0 = 3\text{cm}$ , 经过  $t_1 = 10\text{s}$  后, 振幅变为  $A_1 = 1\text{cm}$ 。问: 由振幅为  $A_0$  时起, 经多长时间其振幅减为  $A_2 = 0.3\text{cm}$ ?

解: 根据阻尼振动的特征,  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{振幅为 } A = A_0 e^{-\beta t}$$

若已知  $A_0 = 3\text{cm}$ , 经过  $t_1 = 10\text{s}$  后, 振幅变为  $A_1 = 1\text{cm}$ , 可得:  $1 = 3e^{-10\beta}$

那么当振幅减为  $A_2 = 0.3\text{cm}$   $0.3 = 3e^{-\beta t}$  可求得  $t = 21\text{s}$ 。

7-12. 某弹簧振子在真空中自由振动的周期为  $T_0$ , 现将该弹簧振子浸入水中, 由于水的阻尼作用, 经过每个周期振幅降为原来的 90%, 求:

(1) 求振子在水中的振动周期  $T$

(2) 如果开始时振幅  $A_0 = 10$  厘米, 阻尼振动从开始到振子静止求振子经过的路程为多少?

解: (1) 有阻尼时  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad 0.9A_0 = A_0 e^{-\beta T} \quad \beta = -\frac{\ln 0.9}{T}$$

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 + (\ln 0.9)^2} = 1.00014T_0$$

(2)

7-13. 试画出  $x = A \cos(2\omega t + \frac{\pi}{4})$  和  $y = B \cos \omega t$  的李萨如图形。

略, 可参考书上的图形。

7-14. 质点分别参与下列三组互相垂直的谐振动:

$$(1) \quad \begin{cases} x = 4 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\ y = 4 \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = 4 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\ y = 4 \cos\left(8\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = 4 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\ y = 4 \cos\left(8\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

试判别质点运动的轨迹。

解: 质点参与的运动是频率相同, 振幅相同的垂直运动的叠加。

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2xy}{A^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$(1) \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

则方程化为： $x^2 + y^2 - xy = 12$ ，轨迹为一般的椭圆。

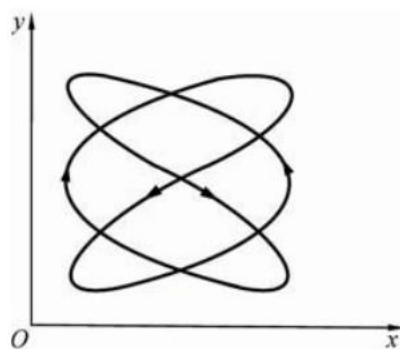
$$(2) \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

则方程化为： $(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2})^2 = 0$   $y = -\frac{A_2}{A_1}x$  轨迹为一直线。

$$(3) \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

则方程化为： $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$  轨迹为一圆。

7-15. 在示波器的水平和垂直输入端分别加上余弦式交变电压，荧光屏上出现如图所示的李萨如图形。已知水平方向振动频率为  $2.7 \times 10^4 \text{ Hz}$ ，求垂直方向的振动频率。



解：通过和书上的李萨如图形想比较，可发现它满足两方向的振动频率比 3：2。由水平方向振动

频率为  $2.7 \times 10^4 \text{ Hz}$ ，可得垂直方向的振动频率为  $1.8 \times 10^4 \text{ Hz}$ 。

### 思考题

7-1. 试说明下列运动是不是简谐振动：

(1) 小球在地面上作完全弹性的上下跳动；

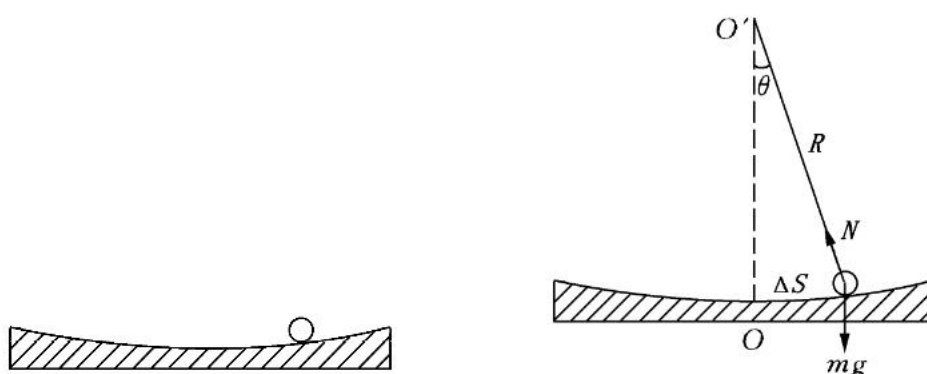
(2) 小球在半径很大的光滑凹球面底部作小幅度的摆动。

答：要使一个系统作谐振动，必须同时满足以下三个条件：一，描述系统的各种

参量，如质量、转动惯量、摆长……等等在运动中保持为常量；二，系统是在自己的稳定平衡位置附近作往复运动；三，在运动中系统只受到内部的线性回复力的作用。或者说，若一个系统的运动微分方程能用  $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2 \xi = 0$  描述时，其所

作的运动就是谐振动。

(1) 拍皮球时球的运动不是谐振动。第一，球的运动轨道中并不存在一个稳定的平衡位置；第二，球在运动中所受的三个力：重力，地面给予的弹力，击球者给予的拍击力，都不是线性回复力。



(2) 小球在图所示的情况中所作的小弧度的运动，是谐振动。显然，小球在运动过程中，各种参量均为常量；该系统（指小球凹槽、地球系统）的稳定平衡位置即凹槽最低点，即系统势能最小值位置点  $O$ ；而小球在运动中的回复力为  $-mg \sin \theta$ ，如题 4-1 图 (b) 所示。题中所述， $\Delta S \ll R$ ，故  $\theta = \Delta S/R \rightarrow 0$ ，所以回复力为  $-mg \theta$ 。式中负号，表示回复力的方向始终与角位移的方向相反。即小球在  $O$  点附近的往复运动中所受回复力为线性的。若以小球为对象，则小球在以  $O'$  为圆心的竖直平面内作圆周运动，由牛顿第二定律，在凹槽切线方向上有

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \theta \quad \text{令 } \omega^2 = g/R, \text{ 则有} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

7-2. 简谐振动的速度和加速度在什么情况下是同号的？在什么情况下是异号的？加速度为正值时，振动质点的速率是否一定在增加？反之，加速度为负值时，速率是否一定在减小？

答：简谐振动的速度： $v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$ ；

加速度： $a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$ ；



要使它们同号，必须使质点的振动相位在第一象限。其他象限的相位两者就是异号的。

加速度为正值时，振动质点的速率不一定在增加，反之，加速度为负值时，速率也不一定在减小。

只有当速度和加速度是同号时，加速度才能使速率增加；反之，两者异号时，加速度使速率减小。

7-3. 分析下列表述是否正确，为什么？

(1) 若物体受到一个总是指向平衡位置的合力，则物体必然作振动，但不一定是简谐振动；

(2) 简谐振动过程是能量守恒的过程，凡是能量守恒的过程就是简谐振动。

答：(1) 的表述是正确的，原因参考 7-1；

(2) 的表述不正确，比如自由落体运动中能量守恒，但不是简谐振动。

7-4. 用两种方法使某一弹簧振子作简谐振动。

方法1：使其从平衡位置压缩  $\Delta l$ ，由静止开始释放。

方法2：使其从平衡位置压缩  $2\Delta l$ ，由静止开始释放。

若两次振动的周期和总能量分别用  $T_1$ 、 $T_2$  和  $E_1$ 、 $E_2$  表示，则它们满足下面那个关系？

(A)  $T_1 = T_2$      $E_1 = E_2$     (B)  $T_1 = T_2$      $E_1 \neq E_2$

(C)  $T_1 \neq T_2$      $E_1 = E_2$     (D)  $T_1 \neq T_2$      $E_1 \neq E_2$

答：根据题意，这两次弹簧振子的周期相同，振幅相差一倍。所以能量不同。选择B。

7-5. 一质点沿  $x$  轴作简谐振动，周期为  $T$ ，振幅为  $A$ ，质点从  $x_1 = \frac{A}{2}$  运动到  $x_2 = A$  处所需要的最短时间为多少？

答：质点从  $x_1 = \frac{A}{2}$  运动到  $x_2 = A$  处所需要的最短相位变化为  $\frac{\pi}{4}$ ，所以运动

的时间为：  $\Delta t = \frac{\frac{\pi}{4}}{\omega} = \frac{T}{8}$ 。

7-6. 一弹簧振子，沿  $x$  轴作振幅为  $A$  的简谐振动，在平衡位置  $x = 0$  处，弹簧振子的势能为零，系统的机械能为  $50\text{J}$ ，问振子处于  $x = A/2$  处时；其势能的瞬时值为多少？

答：由题意，在平衡位置  $x = 0$  处，弹簧振子的势能为零，系统的机械能为  $50\text{J}$ ，所以该振子的总能量为  $50\text{J}$ ，当振子处于  $x = A/2$  处时；其势能的瞬时值为：

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \frac{1}{4}E_M = \frac{50}{4} = 12.5\text{J}。$$

### 习题

8-1. 沿一平面简谐波的波线上, 有相距 2.0m 的两质点 A 与 B, B 点振动相位比 A 点落后  $\frac{\pi}{6}$ , 已知振动周期为 2.0s, 求波长和波速。

解: 根据题意, 对于 A、B 两点,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Delta x = 2m$

而相位和波长之间又满足这样的关系:  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{x_2 - x_1}{\lambda} 2\pi = -\frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi$

代入数据, 可得: 波长  $\lambda = 24m$ 。又已知  $T = 2s$ , 所以波速  $u = \lambda / T = 12m/s$

8-2. 已知一平面波沿 x 轴正向传播, 距坐标原点 O 为  $x_1$  处 P 点的振动式为  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 波速为  $u$ , 求:

(1) 平面波的波动式;

(2) 若波沿 x 轴负向传播, 波动式又如何?

解: (1) 根据题意, 距坐标原点 O 为  $x_1$  处 P 点是坐标原点的振动状态传过来

的, 其 0 点振动状态传到 p 点需用  $\Delta t = \frac{x_1}{u}$ , 也就是说 t 时刻 p 处质点的振动

状态重复  $t - \frac{x_1}{u}$  时刻 0 处质点的振动状态。换言之, 0 处质点的振动状态相当

于  $t + \frac{x_1}{u}$  时刻 p 处质点的振动状态, 则 0 点的振动方程为:

$y = A \cos[\omega(t + \frac{x_1}{u}) + \varphi]$  波 动 方 程 为 :

$$y = A \cos[\omega(t + \frac{x_1}{u} - \frac{x}{u}) + \varphi] = A \cos[\omega(t - \frac{x - x_1}{u}) + \varphi]$$

(2) 若波沿 x 轴负向传播, 0 处质点的振动状态相当于  $t - \frac{x_1}{u}$  时刻 p 处质点的

振动状态，则 O 点的振动方程为： $y = A \cos[\omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi]$

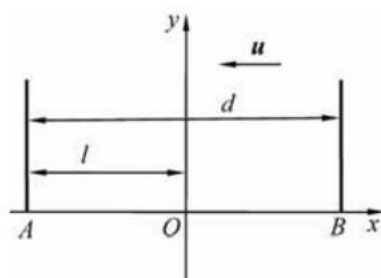
波 动 方 程 为 :

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x_1}{u} - \frac{x}{u}) + \varphi] = A \cos[\omega(t - \frac{x + x_1}{u}) + \varphi]$$

8-3. 一平面简谐波在空间传播，如图所示，已知 A 点的振动规律为  $y = A \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ ，试写出：

(1) 该平面简谐波的表达式；

(2) B 点的振动表达式 (B 点位于 A 点右方  $d$  处)。



解：(1) 仿照上题的思路，根据题意，A 点的振动规律为  $y = A \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ ，它的振动是 O 点传过来的，所以 O 点的振动方程为：

$$y = A \cos[2\pi\nu(t + \frac{l}{u}) + \varphi]$$

那么该平面简谐波的表达式为： $y = A \cos[2\pi\nu(t + \frac{l}{u} + \frac{x}{u}) + \varphi]$

(2) B 点的振动表达式可直接将坐标  $x = d - l$ ，代入波动方程：

$$y = A \cos[2\pi\nu(t + \frac{l}{u} + \frac{d-l}{u}) + \varphi] = A \cos[2\pi\nu(t + \frac{d}{u}) + \varphi]$$

也可以根据 B 点的振动经过  $\frac{d}{u}$  时间传给 A 点的思路来做。

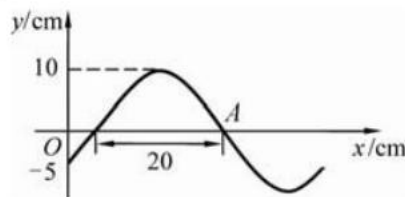
8-4. 已知一沿  $x$  正方向传播的平面余弦波， $t = \frac{1}{3}$  s 时的波形如图所示，且周期  $T$  为 2s。

(1) 写出 O 点的振动表达式；

(2) 写出该波的波动表达式；

(3) 写出 A 点的振动表达式；

(4) 写出 A 点离 O 点的距离。



解：由图可知  $A = 0.1$  m,  $\lambda = 0.4$  m, 由题知  $T = 2$  s,  $\omega = 2\pi/T = \pi$ , 而  $u = \lambda/T = 0.2$  m/s。波动方程为： $y = 0.1 \cos[\pi(t - x/0.2) + \Phi_0]$  m 关键在于确定 O 点的初始相位。

(1) 由上式可知: 0 点的相位也可写成:  $\phi = \pi t + \Phi_0$

由图形可知:  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时  $y_0 = -A/2$ ,  $v_0 < 0$ ,  $\therefore$  此时的  $\phi = 2\pi/3$ ,

将此条件代入, 所以:  $\frac{2\pi}{3} = \pi \frac{1}{3} + \varphi_0$  所以  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

O 点的振动表达式  $y = 0.1 \cos [\pi t + \pi/3] \text{ m}$

(2) 波动方程为:  $y = 0.1 \cos [\pi (t - x/0.2) + \pi/3] \text{ m}$

(3) A 点的振动表达式确定方法与 O 点相似由上式可知:

A 点的相位也可写成:  $\phi = \pi t + \Phi_{A0}$

由图形可知:  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时  $y_0 = 0$ ,  $v_0 > 0$ ,  $\therefore$  此时的  $\phi = -\pi/2$ ,

将此条件代入, 所以:  $-\frac{\pi}{2} = \pi \frac{1}{3} + \varphi_{A0}$  所以  $\varphi_{A0} = -\frac{5\pi}{6}$

A 点的振动表达式  $y = 0.1 \cos [\pi t - 5\pi/6] \text{ m}$

(4) 将 A 点的坐标代入波动方程, 可得到 A 的振动方程, 与 (3) 结果相同, 所以:  $y = 0.1 \cos [\pi (t - x/0.2) + \pi/3] = 0.1 \cos [\pi t - 5\pi/6]$

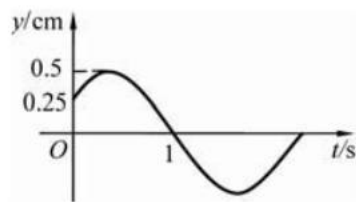
可得到:  $x_A = \frac{7}{30} = 0.233 \text{ m}$

8-5. 一平面简谐波以速度  $u = 0.8 \text{ m/s}$  沿  $x$  轴负方向传播。已知原点的振动曲线如图所示。试写出:

(1) 原点的振动表达式;

(2) 波动表达式;

(3) 同一时刻相距  $1 \text{ m}$  的两点之间的位相差。



解: 由图可知  $A = 0.5 \text{ cm}$ , 原点处的振动方程为:  $y = A \cos (\omega t + \phi)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} t=0 \text{ s 时} & y=A/2 \quad v>0 \quad \text{可知其相位为 } \phi_1 = -\frac{\pi}{3} \\ t=1 \text{ s 时} & y=0 \quad v<0 \quad \text{可知其相位为 } \phi_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

代入振动方程,

$$\begin{cases} \phi = -\frac{\pi}{3} \\ \omega + \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

可得:  $\omega = \frac{5\pi}{6}$   $T = 2\pi / \omega = 12/5$

则  $y = 0.5 \cos \left( \frac{5\pi}{6} t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ cm}$

(2) 沿  $x$  轴负方向传播, 波动表达式:

$$y = 0.5 \cos \left[ \frac{5\pi}{6} \left( t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{3} \right] = 0.5 \cos \left[ \frac{5\pi}{6} \left( t + \frac{5}{4} x \right) - \frac{\pi}{3} \right] \text{ a cm}$$

(3) 根据已知的  $T = 12/5$ ,  $u = 0.8 \text{ m/s}$ , 可知:  $\lambda = \frac{48}{25} \text{ m}$

那么同一时刻相距  $1 \text{ m}$  的两点之间的位相差:  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{25}{24} \pi = 3.27 \text{ rad}$

8-6. 一正弦形式空气波沿直径为  $14 \text{ cm}$  的圆柱形管行进, 波的平均强度为  $9.0 \times 10^{-3} \text{ J/(s} \cdot \text{m)}$ , 频率为  $300 \text{ Hz}$ , 波速为  $300 \text{ m/s}$ 。问波中的平均能量密度和最大能量密度各是多少? 每两个相邻同相面间的波段中含有多少能量?

解: (1)  $\because I = \bar{w} u$

$$\therefore \bar{w} = \frac{I}{u} = 9.0 \times 10^{-3} / 300 = 3 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$w_{\max} = 2 \bar{w} = 0.6 \times 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\begin{aligned} (2) W &= \bar{w} V = \bar{w} \frac{1}{4} \pi d^2 \lambda = \bar{w} \frac{1}{4} \pi d^2 \frac{u}{\nu} \\ &= 3 \times 10^{-5} \times \frac{1}{4} \pi \times (0.14)^2 \times 300 / 300 = 4.62 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

8-7. 一弹性波在媒质中传播的速度  $u = 10^3 \text{ m/s}$ , 振幅  $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 频率  $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ 。若该媒质的密度为  $800 \text{ kg/m}^3$ , 求:

(1) 该波的平均能流密度;

(2) 1 分钟内垂直通过面积  $S = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  的总能量。

解:  $\omega = 2\pi \gamma = 2\pi \times 10^3$

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \frac{1}{2} u \rho A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 800 \times (10^{-4})^2 (2\pi \times 10^3)^2 \\ &= 1.58 \times 10^5 \text{ J} / (\text{m}^2 \cdot \text{s}) \end{aligned}$$

(2) 1 分钟内垂直通过面积  $S = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  的总能量

$$W = ISt = 1.58 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-4} \times 60 = 3.79 \times 10^3 \text{ J}$$

8-8.  $S_1$  与  $S_2$  为左、右两个振幅相等相干平面简谐波源, 它们的间距为

$d = 5\lambda/4$ ,  $S_2$  质点的振动比  $S_1$  超前  $\pi/2$ . 设  $S_1$  的振动方程为  $y_{10} = A \cos \frac{2\pi}{T} t$ , 且媒质无吸收,

(1) 写出  $S_1$  与  $S_2$  之间的合成波动方程;

(2) 分别写出  $S_1$  与  $S_2$  左、右侧的合成波动方程。

$$\text{解: (1) } y_1 = A \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} r_1) \quad y_2 = A \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda} r_2)$$

由题意:  $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \frac{\pi}{2}$  设它们之间的这一点坐标为  $x$ , 则

$$y_1 = A \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y_2 = A \cos[\omega t + \varphi_{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} (\frac{5}{4}\lambda - x)] = A \cos(\omega t + \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

相当于两列沿相反方向传播的波的叠加, 合成为驻波。

$$\text{合成波为: } y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{T} t$$



(2) 在  $S_1$  左侧的点距离  $S_1$  为  $x$ :  $y_1 = A \cos(\omega t + \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda} x)$

$$y_2 = A \cos[\omega t + \varphi_{10} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} (\frac{5}{4} \lambda + x)] = A \cos(\omega t + \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$\text{合成波为: } y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi (\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

在  $S_2$  右侧的点距离  $S_1$  为  $x$ :  $y_1 = A \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} x)$

$$y_2 = A \cos[\omega t + \varphi_{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} (x - \frac{5}{4} \lambda)] = A \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

两列波正好是完全反相的状态, 所以合成之后为 0。

8-9. 设  $S_1$  与  $S_2$  为两个相干波源, 相距  $\frac{1}{4}$  波长,  $S_1$  比  $S_2$  的位相超前  $\frac{\pi}{2}$ 。若

两波在在  $S_1$ 、 $S_2$  连线方向上的强度相同且不随距离变化, 问  $S_1$ 、 $S_2$  连线上在  $S_1$

外侧各点的合成波的强度如何? 又在  $S_2$  外侧各点的强度如何?

解: 由题意:  $\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,

在  $S_1$  左侧的点:  $AS_1=r_1$ ,  $AS_2=r_2$ ,

$$\Delta \phi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{1/4\lambda}{\lambda} = -\pi$$

$r_2$

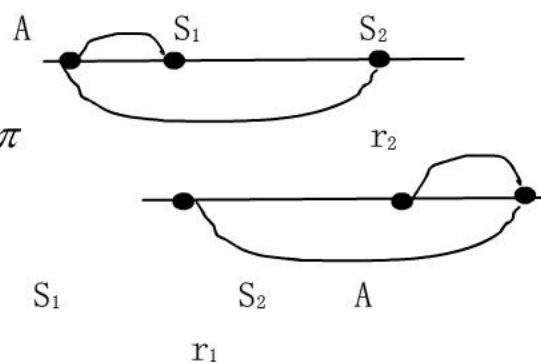
所以  $A=A_1-A_2=0$ ,  $I=0$ ;

在  $S_2$  左侧的点:  $AS_1=r_1$ ,  $AS_2=r_2$ ,

$$\Delta \phi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{-1/4\lambda}{\lambda} = 0$$

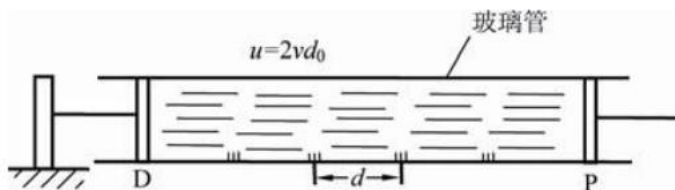
所以  $A=A_1+A_2=2A$ ,  $I=4I_0$ ;

$r_1$



8-10. 测定气体中声速的孔脱 (Kundt) 法如下: 一细棒的中部夹住, 一端有

盘D伸入玻璃管，如图所示。管中撒有软木屑，管的另一端有活塞P，使棒纵向振动，移动活塞位置直至软木屑形成波节和波腹图案。若已知棒中纵波的频率 $\nu$ ，量度相邻波节间的平均距离 $d$ ，可求得管内气体中的声速 $u$ 。试证： $u = 2\nu d$ 。

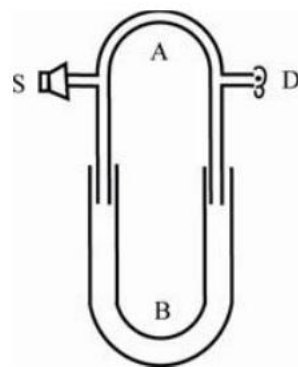


证明：根据驻波的定义，相邻两波节(腹)间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ ，再根据已知条

件：量度相邻波节间的平均距离 $d$ ，所以： $d = \frac{\lambda}{2}$  那么： $\lambda = 2d$

所以波速 $u = \lambda \nu = 2\nu d$

8-11. 图中所示为声音干涉仪，用以演示声波的干涉。S为声源，D为声音探测器，如耳或话筒。路径SBD的长度可以变化，但路径SAD是固定的。干涉仪内有空气，且知声音强度在B的第一位置时为极小值100单位，而渐增至B距第一位置为1.65cm的第二位置时，有极大值900单位。求：



- (1) 声源发出的声波频率；
- (2) 抵达探测器的两波的振幅之比。

解：根据驻波的定义，相邻两波节(腹)间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

相邻波节与波腹的间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$  可得： $\lambda = 4\Delta x = 6.6\text{cm}$

声音的速度在空气中约为 340m/s，所以： $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{340}{6.6 \times 10^{-2}} = 5151(\text{hz})$ 。

根据强度是振幅的平方的关系：声音强度在B的第一位置时为极小值100单位，在第二位置有极大值900单位，所以振幅的相对大小为10与30单位。极小值的

原因是两个振幅相减( $A_1 - A_2 = 10$ )，极大值的原因是两个振幅相加( $A_1 + A_2 = 30$ )。

那么  $A_1 : A_2 = 2 : 1$ 。

8-12. 绳索上的波以波速  $v = 25\text{m/s}$  传播，若绳的两端固定，相距  $2\text{m}$ ，在绳上形成驻波，且除端点外其间有 3 个波节。设驻波振幅为  $0.1\text{m}$ ， $t = 0$  时绳上各点均经过平衡位置。试写出：

(1) 驻波的表示式；

(2) 形成该驻波的两列反向进行的行波表示式。

解：根据驻波的定义，相邻两波节(腹)间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ ，如果绳的两端固定，那么两个端点上都是波节，根据题意除端点外其间还有 3 个波节，可见两端点之间有四个半波长的距离， $\Delta x = 4 \times \frac{\lambda}{2} = 2$ ，所以波长  $\lambda = 1\text{m}$ ， $v = 25\text{m/s}$ ，

所以  $\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 50\pi$  (hz)。又已知驻波振幅为  $0.1\text{m}$ ， $t = 0$  时绳上各点均经

过平衡位置，说明它们的初始相位为  $\frac{\pi}{2}$ ，关于时间部分的余旋函数应为

$$\cos(50\pi t + \frac{\pi}{2})。$$

$$\text{所以驻波方程为： } y = 0.1 \cos 2\pi x \cos(50\pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$(2) \text{ 由合成波的形式为： } y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

可推出合成该驻波的两列波的波动方程为：

$$y_1 = 0.05 \cos(50\pi t - 2\pi x)$$

$$y_2 = 0.05 \cos(50\pi t + 2\pi x - \pi)$$

8-13. 弦线上的驻波波动方程为:  $y = A \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) \cos \omega t$ . 设弦线的质量线密度为  $\rho$ .

(1) 分别指出振动势能和动能总是为零的各点位置。

(2) 分别计算  $0 \rightarrow \frac{\lambda}{2}$  半个波段内的振动势能、动能和总能量。

解: (1) 振动势能和动能总是为零的各点位置是  $\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) = 0$  的地方。

$$\text{即: } \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2} = (2k \pm 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{可得: } x = \frac{k\lambda}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

(2) 振动势能写成:

$$dW_p = \frac{1}{2}k(dy)^2 = \frac{1}{2}\rho dVA^2\omega^2 \cos^2(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) \cos^2 \omega t$$

$0 \rightarrow \frac{\lambda}{2}$  半个波段内的振动势能:

$$\begin{aligned} W_p &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2}k(dy)^2 = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2}\rho dx A^2 \omega^2 \cos^2(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) \cos^2 \omega t \\ &= \frac{\lambda}{8} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

$$dW_k = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}\rho dVA^2\omega^2 \cos^2(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

$0 \rightarrow \frac{\lambda}{2}$  半个波段内的振动动能:

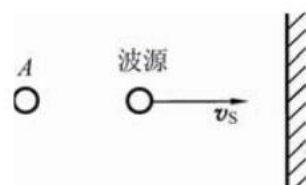
$$W_K = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2} (dmv^2) = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2} \rho dx A^2 \omega^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{\lambda}{8} \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

所以动能和势能之和为：

$$W = W_k + W_p = \frac{\lambda}{8} \rho A^2 \omega^2$$

8-14. 试计算：一波源振动的频率为 2040Hz，以速度  $v_s$  向墙壁接近（如图所示），观察者在 A 点听得拍音的频率为  $\Delta\nu = 3\text{Hz}$ ，求波源移动的速度  $v_s$ ，设声速为 340m/s。



解：根据观察者不动，波源运动，即：  $u_S \neq 0, u_R = 0$ ，观察者认为接受到的

波数变了：  $\nu = \frac{u}{u - u_S} \nu_0$

其中  $u=340$ ，  $\nu = 2043$ ,  $\nu_0 = 2040$ 。分别代入，可得：

$$u_S = 0.5 \text{ m/s}$$

8-15. 光在水中的速率为  $2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$  (约等于真空中光速的  $3/4$ ). 在水中有一束来自加速器的运动电子发出辐射[称切连科夫(Cherenkov)辐射]，其波前形

成顶角 $116^\circ$ 的马赫锥，求电子的速率。

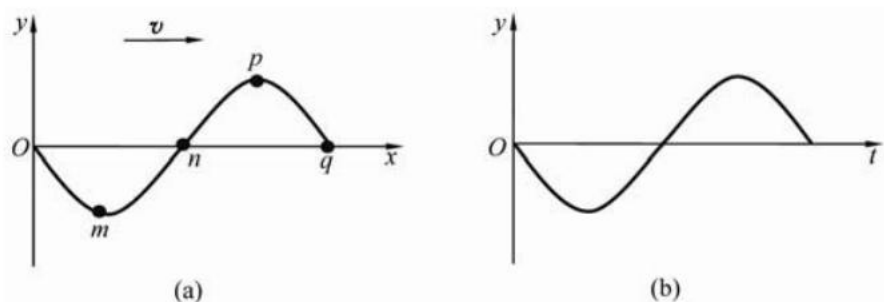
解：  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{v_s}$

$$v_s = \frac{u}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2.25 \times 10^8}{\sin \frac{116^\circ}{2}} = 2.65 \times 10^8 \text{ m/s}$$

### 思考题

8-1. 下图 (a) 表示沿  $x$  轴正向传播的平面简谐波在  $t = 0$  时刻的波形图，则图 (b) 表示的是：

- (a) 质点  $m$  的振动曲线      (b) 质点  $n$  的振动曲线  
(c) 质点  $p$  的振动曲线      (d) 质点  $q$  的振动曲线



答：图 (b) 在  $t=0$  时刻的相位为  $\frac{\pi}{2}$ ，所以对应的是质点  $n$  的振动曲线，选择 b。

8-2. 从能量的角度讨论振动和波动的联系和区别。

答：(1) 在波动的传播过程中，任意时刻的动能和势能不仅大小相等而且相位相同，同时达到最大，同时等于零。而振动中动能的增加必然以势能的减小为代价，两者之和为恒量。

(2) 在波传动过程中，任意体积元的能量不守恒。质元处在媒质整体之中，沿波的前进方向，每个质元从后面吸收能量，又不停的向前面的质元释放能量，能量得以不断地向前传播。而一个孤立振动系统总能量是守恒的。

8-3. 设线性波源发射柱面波，在无阻尼、各向同性的均匀媒质中传播。问波的强度及振幅与离开波源的距离有何关系？

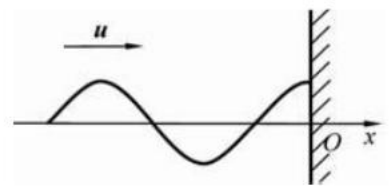
略

8-4. 入射波波形如图所示，若固定点  $O$  处将被全部反射。

(1) 试画出该时刻反射波的波形；

(2) 试画该时刻驻波的波形；

(3) 画出经很短时间间隔  $\Delta t$  ( $\ll T$  周期) 时的驻波波形。



略



### 习题

9-1. 在容积  $V=3\text{L}$  的容器中盛有理想气体, 气体密度为  $\rho=1.3\text{g/L}$ 。容器与大气相通排出一部分气体后, 气压下降了  $0.78\text{atm}$ 。若温度不变, 求排出气体的质量。

解: 根据题意  $pV = \nu RT$ , 可得:  $pV = \frac{m}{M}RT$ ,  $\frac{1}{M}RT = p \frac{V}{m} = \frac{p}{\rho}$

所以当温度不变时, 气体的压强和密度成正比, 初始密度为  $1.3\text{g/L}$ , 后来的密度为:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{p_1} \rho_1$$

则排除的气体的质量为:

$$\Delta m = (\rho_2 - \rho_1)V = \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\rho_1 V = \frac{0.78}{1.78} \times 1.3 \times 3$$

大气压为  $1\text{atm}$ , 容器与大气相通即  $p_2=1\text{atm}$ , 也就是  $p_1=1+0.78=1.78\text{atm}$

$$\Delta m = \frac{0.78}{1.78} \times 1.3 \times 3 = 1.7\text{g}$$

9-2. 有一截面均匀的封闭圆筒, 中间被一光滑的活塞分割成两边。如果其中的一边装有  $0.1\text{kg}$  某一温度的氢气, 为了使活塞停留在圆筒的正中央, 则另一边装入的同一温度的氧气质量为多少?

解: 根据题意, 温度相同的两个气体, 活塞停留在圆筒的正中央, 则两边的体积和压强相同, 又:

$$pV = \nu RT,$$

所以两个气体摩尔数相同,

可得:  $\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$ , 代入数据:  $\frac{0.1}{2} = \frac{m_2}{32}$ , 所以:

$$m_2 = 1.6\text{kg}$$

9-3. 如图所示, 两容器的体积相同, 装有相同质量的氮气和氧气。用一内壁光滑的水平细玻璃管相通, 管的正中间有一小滴水银。要保持水银滴在管的正中间, 并维持氧气温度比氮气温度高  $30^\circ\text{C}$ , 则氮气的温度应是多少?

解: 根据题意, 水银滴停留在管的正中央, 则两边的体积和压强相同, 又:

$pV = \nu RT$ ，所以

$$\frac{T_1}{M_1} = \frac{T_2}{M_2} = \frac{T_1 + 30}{M_2}, \text{ 可得到: } T_1 = 210\text{K}.$$

9-4. 高压氧瓶:  $P = 1.3 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $V = 30\text{L}$ , 每天用  $P_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,

$V_1 = 400\text{L}$ , 为保证瓶内  $P' \geq 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 能用几天?

解: 根据题意  $pV = \nu RT$ ,  $p_1 V_1 = \nu_1 RT$ , 可得:

$$(1.3 \times 10^7 \times 30 - 1.0 \times 10^6 \times 30) / (1.0 \times 10^5 \times 400) = 9$$

9-5. 如图, 长金属管下端封闭, 上端开口, 置于压强为  $P_0$  的大气中。

在封闭端加热达  $T_1 = 1000\text{K}$ , 另一端保持  $T_2 = 200\text{K}$ , 设温度沿管长均匀变化。现封闭开口端, 并使管子冷却到  $100\text{K}$ , 求管内压强。



解: 根据题意管子一端  $T_1 = 1000\text{K}$ , 另一端保持  $T_2 = 200\text{K}$ , 所以函数

$$T = 200 + kx \quad \text{其中 } k = \frac{800}{l}.$$

$$\nu R = \int_0^l \frac{pS}{T} dl = p_0 S \int_0^l \frac{1}{(200 + kx)} dx = \frac{p_0 S}{k} \ln \frac{200 + 800}{200} = \frac{p_0 V}{800} \ln 5$$

$$\text{当封闭开口端, 并使管子冷却到 } 100\text{K} \text{ 时, } \nu R = \frac{pV}{100}$$

$$\text{两式相等, 所以 } P = \frac{p_0}{8} \ln 5$$

9-6. 氢分子的质量为  $3.3 \times 10^{-24} \text{ g}$ ，如果每秒有  $10^{23}$  个氢分子沿着与容器器壁的法线成  $45^\circ$  角的方向以  $10^5 \text{ cm/s}$  的速率撞击在  $2.0 \text{ cm}^2$  面积上(碰撞是完全弹性的)，则器壁所承受的压强为多少？

解：根据气体压强公式：

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{n2mv \cos 45^\circ}{\Delta t S} = \frac{10^{23} \times 2 \times 3.3 \times 10^{-24} \times 10^3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 \times 2 \times 10^{-4}} = 2.33 \times 10^6 \text{ pa}$$

9-7. 一容器内储有氧气，其压强  $p=1.0 \text{ atm}$ ，温度  $T=300 \text{ K}$ ，求容器内氧气的

- (1) 分子数密度；
- (2) 分子间的平均距离；
- (3) 分子的平均平动动能；
- (4) 分子的方均根速度。

解：(1) 由气体状态方程  $p=nkT$  得

$$n=p/(kT)=(1 \times 1.013 \times 10^5)/(1.38 \times 10^{-23} \times 300)=2.45 \times 10^{25}$$

(2) 分子间的平均距离可近似计算

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2.45 \times 10^{25}}} = 3.44 \times 10^{-9} \quad m$$

(3) 分子的平均平动动能

$$\bar{\varepsilon} = (3/2)kT = (3/2) \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \quad J$$

(4) 方均根速度

$$\sqrt{\bar{v}^2} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}} = 483 \quad m \cdot s^{-1}$$

9-8. 在标准状态下，若氧气(视为刚性双原子分子的理想气体)和氦气的体积比  $V_1/V_2 = 1/2$ ，则其内能之比  $E_1/E_2$  为多少？

解：根据  $V_1/V_2 = 1/2$ ，可得：  $\nu_1 T_1 / \nu_2 T_2 = 1/2$ ，  $\frac{i_1}{i_2} = \frac{5}{3}$

那么内能之比为: 
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{i_1}{2} \nu_1 RT_1}{\frac{i_2}{2} \nu_2 RT_2} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

9-9.水蒸气分解为同温度的氢气和氧气, 即  $\text{H}^2\text{O} \rightarrow \text{H}^2 + 0.5\text{O}^2$ , 内能增加了多少?

解: 水蒸气分解后, 一份的三原子的内能变成了 1.5 份的双原子的内能, 所以内能的变化为: 
$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{5}{2}RT + 0.5 \times \frac{5}{2}RT - \frac{6}{2}RT}{\frac{6}{2}RT} = \frac{1.5}{6} = 25\%$$

9-10. 体积为 20L 的钢瓶中盛有氧气 (视为刚性双原子气体), 使用一段时间后, 测得瓶中气体的压强为 2atm, 此时氧气的内能为多少?

解: 由理想气体状态方程:  $pV = \nu RT$ , 以及双原子气体内能公式:  $E = \nu \frac{5}{2} RT$

可得到:  $E = \nu \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} pV = \frac{5}{2} \times 2 \times 1.013 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3} = 10^4 J$

9-11. 已知某种理想气体, 其分子方均根率为 400m/s, 当起压强为 1atm 时, 求气体的密度。

解: 由气体方程:  $\rho = \frac{M}{V}$ ,  $pV = \frac{M}{\mu} RT \Rightarrow \frac{M}{V} = \frac{P\mu}{RT} = \rho \Rightarrow \frac{RT}{\mu} = \frac{P}{\rho}$

可得到:  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$

所以:  $\rho = \frac{3p}{(\sqrt{v^2})^2} = \frac{3 \times 1.01 \times 10^5}{400^2} = 1.9 \text{ kg/m}^3$

9-12. 容器的体积为  $2V_0$ , 绝热板 C 将其隔为体积相等的 A、B 两个部分, A 内储有 1mol 单原子理想气体, B 内储有 2mol 双原子理想气体, A、B 两部分的

压强均为  $p_0$ 。

(1) 求 A、B 两部分气体各自的内能；

(2) 现抽出绝热板 C，求两种气体混合后达到平衡时的压强和温度。

解：(1) 由理想气体内能公式： $E = \nu \frac{i}{2} RT$

A 中气体为 1mol 单原子理想气体： $E = \nu \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} p_0 V_0$

B 中气体为 2mol 双原子理想气体： $E = \nu \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} p_0 V_0$

(2) 混合前总内能  $E_0 = \frac{3}{2} RT_1 + 5RT_2$

由于  $p_0 V_0 = RT_1$        $p_0 V_0 = 2RT_2$

所以  $T_1 = 2T_2$        $E_0 = 4RT_1$

混合后，温度为  $T$ ，内能不变

$$E = \frac{3}{2} RT + 5RT = 4RT_1$$

$$T = \frac{8}{13} T_1 = \frac{8p_0 V_0}{13R}$$

$$p = nkT = \frac{3N_0}{2V_0} kT = \frac{3}{2V_0} RT = \frac{3}{2V_0} R \times \frac{8p_0 V_0}{13R} = \frac{12}{13} p_0$$

9-13. 金属导体中的电子，在金属内部作无规则运动（与容器中的气体分子类似），设金属中共有  $N$  个自由电子，其中电子的最大速率为  $v_m$ ，电子速率在  $v \sim v + dv$  之间的概率为：

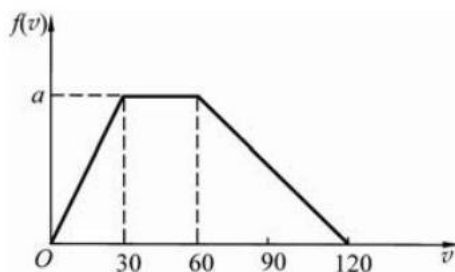
$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} Av^2 dv & v < v_m \\ 0 & v > v_m \end{cases}$$

式中  $A$  为常数。则电子的平均速率为多少？

答:  $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN = \int_0^{v_m} v A v^2 dv = \frac{1}{4} A v_m^4$

9-14. 大量粒子 ( $N_0 = 7.2 \times 10^{10}$  个) 的速率分布函数图象如图所示, 试求:

- (1) 速率小于 30m/s 的分子数约为多少?
- (2) 速率处在 99m/s 到 101m/s 之间的分子数约为多少?
- (3) 所有  $N_0$  个粒子的平均速率为多少?
- (4) 速率大于 60m/s 的那些分子的平均速率为多少?



解: 根据题意:  $N_0 = 7.2 \times 10^{10} = \frac{1}{2} (30 + 120) \times a$

所以  $a = \frac{14.4}{15} \times 10^9$

(1) 速率小于 30m/s 的分子数:

$$N = \frac{1}{2} \times 30 \times a = 1.44 \times 10^{10}$$

(2) 速率处在 99m/s 到 101m/s 之间的分子数:

$$\Delta N = N \int_{99}^{101} f(v) dv = N \left( \int_{99}^{101} \left( 2a - \frac{v}{60} a \right) dv \right) = 6.4 \times 10^7$$

(3) 所有  $N_0$  个粒子的平均速率: 先写出这个分段函数的表达式:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{30}{a} v & (0 \leq v \leq 30) \\ a & (30 \leq v \leq 60) \end{cases}$$

$$2a - \frac{v}{60}a \quad (60 \leq v \leq 120)$$

$$0 \quad (v_0 > 120)$$

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \frac{1}{N} \left[ \int_0^{30} v \frac{30}{a} v dv + \int_{30}^{60} v a dv + \int_{60}^{120} v \left( 2a - \frac{v}{60} a \right) dv \right] = 54 \text{ m/s}$$

(4) 速率大于 60m/s 的那些分子的平均速率

$$\bar{v} = \frac{\int_{60}^\infty v f(v) dv}{\int_{60}^\infty f(v) dv} = \frac{\int_{60}^{120} v \left( 2a - \frac{v}{60} a \right) dv}{\int_{60}^{120} \left( 2a - \frac{v}{60} a \right) dv} = 80 \text{ m/s}$$

9-15. 理想气体分子沿  $x$  方向的速度分布函数:  $f(v_x) = \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v_x^2}{2kT}}$ , 试

据此推导压强公式  $P = nkT$  (已知:  $\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ ).

$$\text{解: 压强的计算式为: } p = \frac{\mu}{V} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{\mu N \sum_{i=1}^N v_{ix}^2}{VN}$$

所以关键在求出  $N$  个分子在  $x$  方向上速度分量平方的平均值:

$$\frac{\sum_{i=1}^N v_{ix}^2}{N} = \overline{v_{ix}^2}, \text{ 根据速度分布函数 } f(v_x) = \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v_x^2}{2kT}}, \text{ 可得:}$$

$$\overline{v_{ix}^2} = \int_0^\infty v_x^2 f(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x^2 \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{KT}{\mu}$$

$$\text{那么利用 } \frac{N}{V} = n, \text{ 可得: } p = \frac{\mu}{V} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{\mu N \sum_{i=1}^N v_{ix}^2}{VN} = nKT$$

9-16. 在麦克斯韦分布下, (1) 计算温度  $T_1 = 300\text{K}$  和  $T_2 = 600\text{K}$  时氧气分

子最可几速率  $v_{p1}$  和  $v_{p2}$ ; (2) 计算在这两温度下的最可几速率附近单位速率区间



内的分子数占总分子数的比率；(3) 计算300K时氧分子在 $2v_p$ 处单位速率区间内分子数占总分子的比率。

解：根据最可几速率的定义： $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1.414 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$

(1) 温度 $T_1 = 300\text{K}$ ： $v_{p1} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{32 \times 10^{-3}}} = 394\text{m/s}$

$T_2 = 600\text{K}$ ： $v_{p2} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 600}{32 \times 10^{-3}}} = 558\text{m/s}$

(2) 在最可几速率附近单位速率区间内的分子数占总分子数的比率就是麦

克斯韦分布函数： $f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^2$

$T=300\text{K}$ ,  $V=394\text{m/s}$  代入： $f(v) = 0.21\%$

$T=600\text{K}$ ,  $V=558\text{m/s}$  代入： $f(v) = 0.15\%$

(3) 计算300K时氧分子在 $2v_p$ 处单位速率区间内分子数占总分子的比率。

即将  $T=300\text{K}$ ,  $v=788\text{m/s}$  代入：

得： $f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^2 = 0.042\%$

9-17. 试将质量为  $\mu$  的单原子理想气体速率分布函数

$4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2 \cdot dv$  改写成按动能  $\varepsilon = \frac{1}{2} \mu v^2$  分布的函数形式  $f(\varepsilon)d\varepsilon$ ，然后

求出其最可几动能及平均动能。

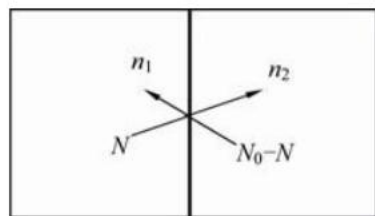
解：根据题意将  $4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2 \cdot dv$  中所有的速度用  $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu}}$  来代替，

则得到：  $f(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} \cdot d\varepsilon$ 。

其最可几动能也就是  $d[f(\varepsilon)d\varepsilon]/d\varepsilon = 0$  所对应的动能，为  $\frac{1}{2}KT$ ；

$$\text{平均动能 } \bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2}KT$$

9-18. 一容器体积为  $2V$ ，一导热隔板把它分成相等的两半，开始时左边盛有压强为  $P_0$  的理想气体，右边为真空。在隔板上有一面积为  $S$  的小孔，求打开小孔后左右两边压强  $P_1$  和  $P_2$  与时间  $t$  的关系（已知单位时间与器壁单位面积相撞的分子数为  $\frac{1}{4}n\bar{v}$ ）。



解：设某时刻左、右分子数分别为  $N$ 、 $N_0-N$ ，则在  $dt$  内左面分子数变化为  $dN = -\frac{1}{4}n_1\bar{v}Sdt + \frac{1}{4}n_2\bar{v}Sdt = \frac{1}{4}\bar{v}S\left(-\frac{N}{V} + \frac{N_0-N}{V}\right)dt = \frac{\bar{v}S}{4V}(N_0-2N)dt$  由  $P=NkT/V$  得：  $dp = (p_0-2p)\frac{\bar{v}S}{4V}dt$ ，由此解得

$$p_L = \frac{p_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{\bar{v}S}{4V}t} \right)$$

$$\text{由 } N_1+N_2=N_0 \text{ 可得 } p_1+p_2=p_0, \therefore p_R = p_0 - p_1 = \frac{p_0}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{v}S}{4V}t} \right)$$

9-19. 试求升高到什么高度时大气压强将减至地面的 75%。设空气的温度为  $0^\circ C$ ，空气的摩尔质量为  $0.0289\text{kg/mol}$ 。

解：根据题意：  $p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ ，由  $p$  求  $h$ ：  $h = \frac{mg}{kT} \ln \frac{p_0}{p}$

已知  $T=273\text{K}$ ;  $\mu=0.0289\text{kg/mol}$ , 则  $m=\frac{\mu}{N_A}$ ;  $\frac{p_0}{p}=\frac{3}{4}$ 。把这些值代入,

则可得: 压强随高度变化的规律  $z=(RT)/(\mu g)\ln(p_0/p)$

$$z=(8.31\times 273/0.0289\times 9.8)\ln(1/0.75)=2.3\times 10^3 \text{ m}$$

9-20. 气缸内盛有一定量的氢气(可视作理想气体), 当温度不变而压强增大一倍时, 氢气分子的平均碰撞频率  $\bar{Z}$  和平均自由程  $\bar{\lambda}$  的变化情况怎样?

解: 根据平均碰撞频率的定义:

$$\bar{Z}=\sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} \quad \text{以及} \quad p=nkT, \quad \bar{v}=1.60\sqrt{\frac{KT}{m}},$$

$$\text{可得到 } \bar{Z}=1.6\sqrt{2}\pi d^2 \frac{p}{KT}\sqrt{\frac{KT}{m}}=1.6\sqrt{2}\pi d^2 \frac{p\sqrt{m}}{\sqrt{KT}},$$

所以当温度不变而压强增大一倍时, 氢气分子的平均碰撞频率  $\bar{Z}$  也将增大一倍。

$$\text{而平均自由程的概念为: } \bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

所以当温度不变而压强增大一倍时, 氢气分子的平均自由程  $\bar{\lambda}$  将减小一倍。

9-21. (1) 分子的有效直径的数量级是多少? (2) 在常温下, 气体分子的平均速率的数量级是多少? (3) 在标准状态下气体分子的碰撞频率的数量级是多少?

解: (1) 由  $pV=\nu RT$ , 假设标准状态下一摩尔的气体, 其体积为

$$V=RT/P, \text{ 有效直径为: } d=\sqrt[3]{\frac{V}{N_A}}, \text{ 大约为 } 10^{-10}\text{m}.$$

$$(2) \bar{v}=1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \text{ 大约为 } 100\text{---}1000\text{m/s}.$$

(3)  $\bar{Z} = \sqrt{2\pi} d^2 n \bar{v}$ , 大约为  $10^8$ — $10^9/\text{s}$ 。

### 思考题

9-1. 气体在平衡状态时有何特征? 平衡态与稳定态有什么不同? 气体的平衡态与力学中所指的平衡有什么不同?

答: 平衡态的特征:

- (1) 系统与外界在宏观上无能量和物质的交换
- (2) 系统的宏观性质不随时间改变。

热平衡态是指: 在无外界的影响下, 不论系统初始状态如何, 经过足够长的时间后, 系统的宏观性质不随时间改变的稳定状态。

它与稳定态或力学中的平衡不是一个概念。

1. 平衡态是一种热动平衡状态。处在平衡态的大量分子并不是静止的, 它们仍在作热运动, 而且因为碰撞, 每个分子的速度经常在变, 但是系统的宏观量不随时间改变。例如: 粒子数问题: 箱子假想分成两相同体积的部分, 达到平衡时, 两侧粒子有的穿越界线, 但两侧粒子数相同。

2 平衡态是一种理想状态

9-2. 对一定量的气体来说, 当温度不变时, 气体的压强随体积的减小而增大; 当体积不变时, 压强随温度的升高而增大。从宏观来看, 这两种变化同样使压强增大; 从微观来看, 它们是否有区别?

答: 有区别。从微观上看:  $p = \frac{2}{3} n \bar{w}$

当温度不变时, 气体的压强随体积的减小而增大是因为: 当  $\bar{w}$  一定时, 体积减小,  $n$  越大, 即单位时间内碰撞到器壁的分子越多, 则  $P$  就越大;

当体积不变时, 压强随温度的升高而增大是因为: 当  $n$  一定时,  $\bar{w}$  越大, 即单位时间内分子对器壁的碰撞越厉害, 则  $P$  就越大。

9-3. 在推导理想气体压强公式的过程中, 什么地方用到了理想气体的分子模型? 什么地方用到了平衡态的概念? 什么地方用到了统计平均的概念? 压强的微观统计意义是什么?

答: 压强的求解公式中用到了理想气体的分子模型, 把分子作为质点来研究;

对每个分子状态的假定用到了平衡态的概念；

从一个分子对器壁的作用力推广到所有分子对器壁的作用力，计算分子的平均速度都用到了统计平均的概念；

压强的微观统计意义是压强是大量分子碰撞器壁的平均效果，是对大量分子对时间对面积的一个统计平均值。对一个分子而言，它对器壁的碰撞是偶然的，但就大量分子而言，其碰撞的统计平均效果就表现为持续的均匀压强。

9-4. 容器内有质量为  $m$ ，摩尔质量为  $M$  的理想气体，设容器以速度  $\mathbf{v}$  作定向运动，今使容器突然停止，问：（1）气体的定向运动机械能转化什么形式的能量？（2）下面两种气体分子速度平方的平均值增加多少？①单原子分子；②双原子分子；（3）如果容器再从静止加速到原来速度  $\mathbf{v}$ ，那么容器内理想气体的温度是否还会改变？为什么？

答：（1）一般来说，气体的宏观运动不会影响其微观的内动能，但是当容器忽然停止运动时，大量分子的定向运动的动能将通过与器壁的以及分子间的碰撞而转换为热运动的能量，会使容器内气体的问题有所升高。

$$(2) \quad \overline{w} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{v^2}, \text{ 所以: } \overline{v^2} = \frac{3KT}{m}, \text{ 温度增加多少, 其速度}$$

平方的平均值也做相应的增加。

（3）宏观量温度是一个统计概念，是大量分子无规则热运动的集体表现，是分子平均平动动能的量度，分子热运动是相对质心参照系的，平动动能是系统的内动能。温度与系统的整体运动无关。所以当容器再从静止加速到原来速度  $\mathbf{v}$ ，那么容器内理想气体的温度不会改变。

9.5 叙述下列式的物理意义：

$$(1) \frac{1}{2}kT; (2) \frac{3}{2}kT; (3) \frac{i}{2}kT; (4) \frac{i}{2}RT; (5) \frac{m}{M} \frac{i}{2}RT; (6) \frac{m}{M} \frac{i}{2}R(T_2 - T_1).$$

答：（1）在平衡态下，分子热运动能量平均地分配在分子每一个自由度上的能量均为  $\frac{1}{2}kT$ 。

（2）在平衡态下，分子平均平动动能  $\frac{3}{2}kT$ 。

(3) 在平衡态下，自由度为  $i$  的分子平均总能量  $\frac{i}{2}kT$ 。

(4) 1 摩尔自由度为  $i$  的分子组成的系统内能为  $\frac{i}{2}RT$ 。

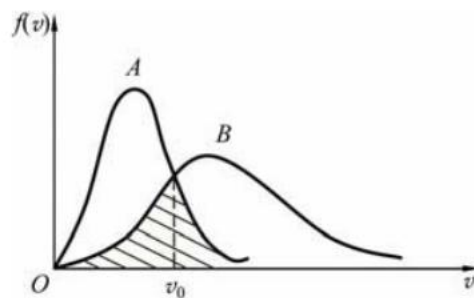
(5) 由质量为  $M$ ，摩尔质量为  $M_{\text{mol}}$ ，自由度为  $i$  的分子组成的系统的内能为  $\frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$ 。

(6) 由质量为  $M$ ，摩尔质量为  $M_{\text{mol}}$ ，自由度为  $i$  的分子组成的系统的内能的变化为  $\frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$ 。

9-6. 氦气、氧气分子数均为  $N$ ， $T_{\text{O}_2} = 2T_{\text{He}}$ ，速率分布曲线如图，且阴影面积为  $S$ ，求：(1) 哪条是氦气的速率分布曲线？

(2)  $\frac{v_{\text{P}_{\text{O}_2}}}{v_{\text{P}_{\text{He}}}}$ ；(3)  $v_0$  的意义？

(4)  $\int_{v_0}^{\infty} N[f_B(v) - f_A(v)]dv$  为多少？对应的物理意义是什么？



答：(1) 由  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$  可知，对于氧气和氦气，即使  $T_{\text{O}_2} = 2T_{\text{He}}$ ，氦气的  $v_p$  还是大于氧气，所以图形中， $v_p$  大的曲线是氦气，即 B 图是氦气的。

$$(2) \frac{v_{\text{P}_{\text{O}_2}}}{v_{\text{P}_{\text{He}}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{O}_2} \mu_{\text{He}}}{T_{\text{He}} \mu_{\text{O}_2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{1 \times 32}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3)  $v_0$  的意义：在这速率附近、速率区间  $dv$  内的氦气和氧气的分子数相同。

(4)  $\int_{v_0}^{\infty} N[f_B(v) - f_A(v)]dv$  为在  $v_0$  右边的两曲线的面积差乘以  $N$ ；

对应的物理意义是  $v_0 \rightarrow \infty$  的速率区间内氦气分子比氧气分子多多少个。

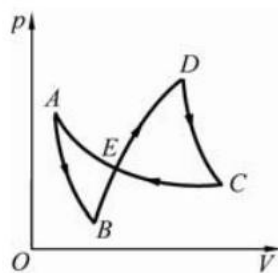
9-7. 两种理想气体分子数分别为  $N_A$  和  $N_B$ ，某一温度下，速率分布函数分别为  $f_A(v)$  和  $f_B(v)$ ，问此温度下 A 和 B 组成系统的速率分布函数如何？

答： 
$$f(v) = \frac{N_A f_A(v) + N_B f_B(v)}{N_A + N_B}$$



## 习题

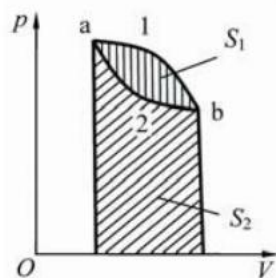
10-1. 如图所示,  $AB$ 、 $DC$  是绝热过程,  $CEA$  是等温过程,  $BED$  是任意过程, 组成一个循环。若图中  $EDCE$  所包围的面积为  $70\text{J}$ ,  $EABE$  所包围的面积为  $30\text{J}$ ,  $CEA$  过程中系统放热  $100\text{J}$ , 求  $BED$  过程中系统吸热为多少?



解: 由题意可知在整个循环过程中内能不变, 图中  $EDCE$  所包围的面积为  $70\text{J}$ , 则意味着这个过程对外做功为  $70\text{J}$ , 也就是放热为  $70\text{J}$ ;  $EABE$  所包围的面积为  $30\text{J}$ , 则意味着这个过程外界对它做功为  $30\text{J}$ , 也就是吸热为  $70\text{J}$ , 所以整个循环中放热是  $70-30=40\text{J}$ 。

而在这个循环中,  $AB$ 、 $DC$  是绝热过程, 没有热量的交换, 所以如果  $CEA$  过程中系统放热  $100\text{J}$ , 则  $BED$  过程中系统吸热为  $100+40=140\text{J}$ 。

10-2. 如图所示, 已知图中画不同斜线的两部分的面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ 。



(1) 如果气体的膨胀过程为  $a-1-b$ , 则气体对外做功多少?

(2) 如果气体进行  $a-2-b-1-a$  的循环过程, 则它对外做功又为多少?

解: 根据做功的定义, 在  $P-V$  图形中曲线围成的面积就是气体在这一过程所作的功。则:

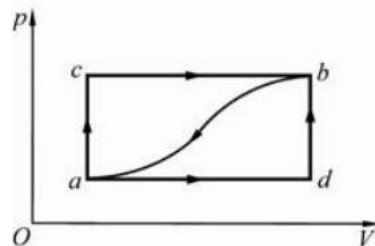
(1) 如果气体的膨胀过程为  $a-1-b$ , 则气体对外做功为  $S_1+S_2$ 。

(2) 如果气体进行  $a-2-b-1-a$  的循环过程, 则它对外做功为:  $-S_1$ 。

10-3. 一系统由如图所示的  $a$  状态沿  $acb$  到达  $b$  状态, 有  $334\text{J}$  热量传入系统, 系统做功  $126\text{J}$ 。

(1) 经  $adb$  过程, 系统做功  $42\text{J}$ , 问有多少热量传入系统?

(2) 当系统由  $b$  状态沿曲线  $ba$  返回状态  $a$  时, 外界对系统做功为  $84\text{J}$ , 试问系统是吸热还是放热? 热量传递了多少?



解：由 acb 过程可求出 b 态和 a 态的内能之差

$$Q = \Delta E + A, \Delta E = Q - A = 334 - 126 = 208 \text{ J}$$

adb 过程，系统作功  $A = 42 \text{ J}$ ， $Q = \Delta E + A = 208 + 42 = 250 \text{ J}$  系统吸收热量

ba 过程，外界对系统作功  $A = -84 \text{ J}$ ， $Q = \Delta E + A = -208 - 84 = -292 \text{ J}$  系统放热

10-4. 温度为  $25^\circ\text{C}$ 、压强为  $1\text{atm}$  的  $1\text{mol}$  刚性双原子分子理想气体，经等温过程体积膨胀至原来的 3 倍。

(1) 计算该过程中气体对外的功；

(2) 假设气体经绝热过程体积膨胀至原来的 3 倍，那么气体对外的功又是多少？

解：(1) 在等温过程气体对外作功：

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.31 \times (273 + 25) \ln 3 = 2.72 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在绝热过程中气体对外做功为：

$$A = -\Delta E = -\nu C_V \Delta T = -\nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) = -\frac{5}{2} R (T_2 - T_1)$$

由绝热过程中温度和体积的关系  $V^{\gamma-1} T = C$  得到温度  $T_2$ ： $T_2^\gamma = \frac{T_1^\gamma V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

$$\text{代入上式：} A = -\frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = 2.2 \times 10^3 \text{ J}$$

10-5. 汽缸内有  $2\text{mol}$  氦气，初始温度为  $27^\circ\text{C}$ ，体积为  $20\text{L}$ 。先将氦气定压膨胀，直至体积加倍，然后绝热膨胀，直至回复初温为止。若把氦气视为理想气体，求：

(1) 在该过程中氦气吸热多少？

(2) 氦气的内能变化是多少？

(3) 氦气所做的总功是多少？

解：(1) 在定压膨胀过程中，随着体积加倍，则温度也加倍，所以该过程吸收的热量为：

$$Q_p = \nu C_p \Delta T = 2 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 1.25 \times 10^4 J$$

而接下来的绝热过程不吸收热量，所以本题结果就是这个；

(2) 由于经过刚才的一系列变化，温度回到原来的值，所以内能变化为零。

(3) 根据热力学第二定律，氦气所做的总功就等于所吸收的热量为： $1.25 \times 10^4 J$ 。

10-6. 0.02kg 的氦气（视为理想气体），温度由  $17^\circ\text{C}$  升为  $27^\circ\text{C}$ ，若在升温过程中：

- (1) 体积保持不变；
- (2) 压强保持不变；
- (3) 不与外界交换能量。

分别求出气体内能的改变、吸收的热量、外界对气体做功。

解：(1) 等体过程

由热力学第一定律得  $Q = \Delta E$

吸热  $Q = \Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu (i/2) R (T_2 - T_1)$

$$Q = \Delta E = 5 \times (3/2) \times 8.31 \times (300 - 290) = 623 J$$

对外做功  $A = 0$

(2) 等压过程

$$Q = \nu C_p (T_2 - T_1) = \nu [(i+2)/2] R (T_2 - T_1)$$

吸热  $Q = 5 \times (5/2) \times 8.31 \times (300 - 290) = 1038.5 J$

$$\Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1)$$

内能增加  $\Delta E = 5 \times (3/2) \times 8.31 \times (300 - 290) = 623 J$

对外做功  $A = Q - \Delta E = 1038.5 - 623 = 415.5 J$

(3) 绝热过程

由热力学第一定律得  $A = \Delta E$

做功与内能的变化均为  $A = \Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu (i/2) R (T_2 - T_1)$

$$A = \Delta E = 5 \times (3/2) \times 8.31 \times (300 - 290) = 623 J$$

吸热  $Q = 0$

10-7. 一定量的刚性双原子分子气体，开始时处于压强为  $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ ，体积为  $V_0 = 4 \times 10^{-3} \text{m}^3$ ，温度为  $T_0 = 300 \text{K}$  的初态，后经等压膨胀过程温度上升到  $T_1 = 450 \text{K}$ ，再经绝热过程温度回到  $T_2 = 300 \text{K}$ ，求整个过程中对外做的功。

解：等压过程末态的体积  $V_1 = \frac{V_0}{T_0} T_1$  等压过程气体对外做功

$$A_1 = p_0(V_1 - V_0) = p_0 V_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = 200 J$$

根据热力学第一定律，绝热过程气体对外做的功为

$$A_2 = -\Delta E = -\nu C_\nu (T_2 - T_1)$$

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{R T_0}, C_\nu = \frac{5}{2} R$$

这里 
$$A_2 = -\frac{5 p_0 V_0}{R T_0} (T_2 - T_1) = 500 J$$

则 气体在整个过程中对外所做的功  $A = A_1 + A_2 = 700 J$

10-8.  $\nu$  摩尔的某种理想气体，状态按  $V = a / \sqrt{p}$  的规律变化 (式中  $a$  为正常量)，当气体体积从  $V_1$  膨胀到  $V_2$  时，求气体所作的功及气体温度的变化  $T_1 - T_2$  各为多少？

解：在这过程中，气体做功  $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$

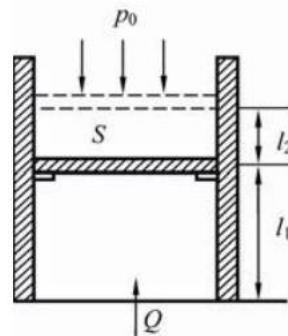
$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a^2}{V^2} dV = \left( -\frac{a^2}{V^{-1}} \right)_{V_1}^{V_2} = a^2 \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

由理想气体状态方程： $PV = \nu RT$ ，可知  $\frac{PV}{T} = \frac{\frac{a^2}{V^2} V}{T} = \frac{a^2}{VT} = \nu R$

所以：  $T = \frac{a^2}{\nu R V}$ ，那么温度的变化为：  $T_2 - T_1 = \frac{a^2}{\nu R} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$



10-9. 一侧面绝热的气缸内盛有  $1\text{mol}$  的单原子分子理想气体. 气体的温度  $T_1 = 273\text{K}$ , 活塞外气压  $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$ , 活塞面积  $S = 0.02\text{m}^2$ , 活塞质量  $m = 102\text{kg}$  (活塞绝热、不漏气且与气缸壁的摩擦可忽略). 由于气缸内小突起物的阻碍, 活塞起初停在距气缸底部为  $l_1 = 1\text{m}$  处. 今从底部极缓慢地加热气缸中的气体, 使活塞上升了  $l_2 = 0.5\text{m}$  的一段距离, 如图所示. 试通过计算指出:



(1) 气缸中的气体经历的是什么过程?

(2) 气缸中的气体在整个过程中吸了多少热量?

解: (1) 可分析出起初气缸中的气体的压强由于小于  $P_2$  ( $P_2 = \text{外界压强} + \text{活塞重力}$  产生的压强), 所以体积不会变, 是一个等容升温的过程, 当压强达到  $P$  时, 它将继续做一个等压膨胀的过程, 则气缸中的气体的过程为: 等容升温+等压膨胀.

$$(2) \quad p_1 = \frac{\nu RT}{V} = \frac{1 \times 8.31 \times 273}{0.02 \times 1} = 1.13 \times 10^5$$

$$p_2 = p_0 + \frac{mg}{s} = 1.01 \times 10^5 + \frac{102 \times 10}{0.02} = 1.52 \times 10^5$$

$$\text{等容升温: } Q_V = \nu \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2} \Delta p V = \frac{3}{2} (p_2 - p_1) V$$

$$\text{等压膨胀: } Q_p = \nu \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = \nu \frac{5}{2} R(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$Q = Q_V + Q_p = 4.9 \times 10^3 \text{J}$$

10-10. 一定量的理想气体在  $p-V$  图中的等温线与绝热线交点处两线的斜率之比为 0.714, 求其摩尔定容热容.

解: 绝热线的斜率  $K_1$ :

$$K_1 = \frac{dP}{dV} = \frac{d \left( \frac{P_A V_A^\gamma}{V^\gamma} \right)}{dV} = -\gamma P_A V_A^\gamma V^{-\gamma-1} = -\gamma P V^\gamma V^{-\gamma-1} = -\gamma \frac{P}{V}$$

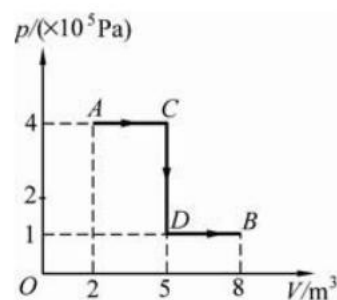
等温线的斜率  $K_2$ : 
$$K_2 = \frac{dP}{dV} = \frac{d\left(\frac{P_A V_A}{V^\gamma}\right)}{dV} = -\gamma P_A V_A V^{-2} = -\gamma P V V^{-2} = -\frac{P}{V}$$

根据题意:  $\frac{K_2}{K_1} = 0.714 = \frac{1}{\gamma}$ , 则:  $\gamma = \frac{1}{0.714}$

所以: 
$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8.31}{\frac{1}{0.714} - 1} = 20.8 \text{ J}$$

10-11. 一定量的理想气体, 从  $A$  态出发, 经  $p-V$  图中所示的过程到达  $B$  态, 试求在这过程中, 该气体吸收的热量。

解: 分析  $A$ 、 $B$  两点的状态函数, 很容易发现  $A$ 、 $B$  两点的温度相同, 所以  $A$ 、 $B$  两点的内能相同, 那么, 在该过程中, 该气体吸收的热量就等于这一过程对外界所做的功, 也就是  $ACDB$  曲线所围成的面积。



$$Q = A = 3 \times 4 + 3 \times 1 = 1.5 \times 10^6 \text{ J}$$

10-12. 设一动力暖气装置由一台卡诺热机和一台卡诺制冷机组合而成。热机靠燃料燃烧时释放的热量工作并向暖气系统中的水放热, 同时, 热机带动制冷机。制冷机自天然蓄水池中吸热, 也向暖气系统放热。假定热机锅炉的温度为  $t_1 = 210^\circ \text{C}$ , 天然蓄水池中水的温度为  $t_2 = 15^\circ \text{C}$ , 暖气系统的温度为  $t_3 = 60^\circ \text{C}$ , 热机从燃料燃烧时获得热量  $Q_1 = 2.1 \times 10^7 \text{ J}$ , 计算暖气系统所得热量。

解: 由  $\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ , 可得:

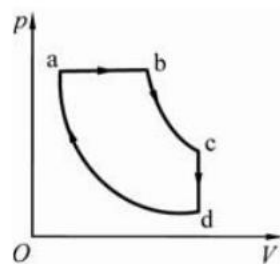
$$\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{333}{483} = 1 - \frac{Q_2}{2.1 \times 10^7}, \text{ 则得到 } Q_2 \text{ 和 } A。$$

$$\text{而制冷机的 } \omega = \frac{Q_2'}{A} = \frac{Q_2'}{Q_1' - Q_2'} = \frac{T_2'}{T_1' - T_2'}$$

$$\omega = \frac{Q_2'}{A} = \frac{T_2'}{T_1' - T_2'} = \frac{288}{45}, \text{ 可得 } Q_2'$$

$$\text{则: } Q = Q_1 + Q_2' = 6.27 \times 10^7 J。$$

10-13. 单原子理想气体作题图所示的  $abcda$  的循环, 并已求得如表中所填的三个数据, 试根据热力学定律和循环过程的特点完成下表。



过程	$Q$	$A$	$\Delta E$
$a-b$ 等压	250 焦耳		
$b-c$ 绝热		75 焦耳	
$c-d$ 等容			
$d-a$ 等温	-125	-125 焦耳	0
循环效率 $\eta = 20\%$			

解: 根据热力学定律:  $Q = \Delta E + A$

以及循环过程的特点:

$$a-b \text{ 等压过程: 已知 } Q_p = \nu \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} p(V_2 - V_1) = 250 J,$$

$$\text{则: } A_p = p(V_2 - V_1) = 100, \Delta E = 150 J$$

$$b-c \text{ 绝热过程: } Q = 0, \text{ 所以 } \Delta E = A = -75$$

$$c-d \text{ 等容过程: } A=0, \text{ 而且整个过程中内能之和为零, 所以 } \Delta E = -75 J。$$

$$d-a \text{ 等温过程: } \Delta E = 0, \text{ 所以 } Q=A=-125 J。$$



循环效率为:  $\eta = A_{\text{净}} / Q_1 = 50 / 250 = 20\%$ 。

过程	$Q$	$A$	$\Delta E$
$a \rightarrow b$ 等压	250 焦耳	100	150
$b \rightarrow c$ 绝热	0	75 焦耳	-75
$c \rightarrow d$ 等容	-75	0	-75
$d \rightarrow a$ 等温	-125	-125 焦耳	0
循环效率 $\eta = 20\%$			

10-14. 如图,  $abcd$  为 1mol 单原子分子理想气体的循环过程, 求:

- (1) 气体循环一次, 在吸热过程中从外界共吸收的热量;
- (2) 气体循环一次做的净功;
- (3) 证明  $T_a T_c = T_b T_d$ 。

解: (1) 过程  $ab$  与  $bc$  为吸热过程,

$$\begin{aligned}
 \text{吸热总和为 } Q_1 &= C_V(T_b - T_a) + C_p(T_c - T_b) \\
 &= \frac{3}{2}(p_b V_b - p_a V_a) + \frac{5}{2}(p_c V_c - p_b V_b) \\
 &= 800 \text{ J}
 \end{aligned}$$

(2) 循环过程对外所作总功为图中矩形面积

$$W = p_b(V_c - V_b) - p_d(V_d - V_a) = 100 \text{ J}$$

(3)  $T_a = p_a V_a / R$ ,  $T_c = p_c V_c / R$ ,  $T_b = p_b V_b / R$ ,  $T_d = p_d V_d / R$ ,

$$\begin{aligned}
 T_a T_c &= (p_a V_a p_c V_c) / R^2 = (12 \times 10^4) / R^2 \\
 T_b T_d &= (p_b V_b p_d V_d) / R^2 = (12 \times 10^4) / R^2
 \end{aligned}$$

10-15. 一可逆卡诺机的高温热源温度为  $127^\circ\text{C}$ , 低温热源温度为  $27^\circ\text{C}$ , 其每次循环对外做的净功为 8000J。今维持低温热源温度不变, 提高高温热源的温度, 使其每次循环对外做的净功为 10000J, 若两个卡诺循环都工作在相同的两条绝热线之间。求:

- (1) 第二个热循环机的效率;
- (2) 第二个循环高温热源的温度。

解: 根据卡诺循环效率公式  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25$ 。

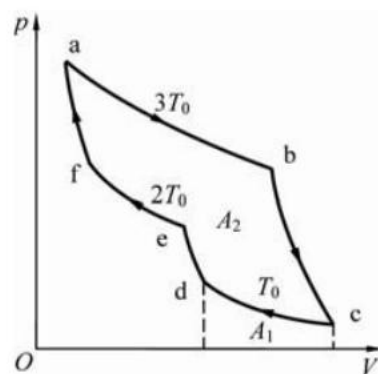
$$Q = \frac{A}{\eta} = 32000 \text{ J}$$

由于在同样的绝热线之间, 他们的总热量相等, 都是 32000J, 所以第二个热机的

$$\text{效率为: } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1'} = \frac{10000}{32000} = \frac{5}{16} = 31.25\%$$

$$\text{并可得到 } T_1' = 436K$$

10-16. 如图所示的循环中  $a \rightarrow b$ ,  $c \rightarrow d$ ,  $e \rightarrow f$  为等温过程, 其温度分别为:  $3T_0$ ,  $T_0$ ,  $2T_0$ ;  $b \rightarrow c$ ,  $d \rightarrow e$ ,  $f \rightarrow a$  为绝热过程。设  $c \rightarrow d$  过程曲线下的面积为  $A_1$ ,  $abcdefa$  循环过程曲线所包围的面积为  $A_2$ . 求: 该循环的效率。



$$\text{解: 根据定义: } \eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{A_2}{Q_{ab}}$$

$$\text{从循环过程的图形上又可得: } A_2 = Q_{ab} - Q_{cd} - Q_{ef}$$

$$\text{其中 } Q_{cd} = A_1$$

$$Q_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{利用等温过程 ab, cd, ef, 可得: } Q_{ab} = \nu R 3T_0 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_{bc} = \nu R T_0 \ln \frac{V_d}{V_c}, \quad Q_{ef} = \nu R 2T_0 \ln \frac{V_f}{V_e}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$\text{再利用 绝热过程的体积温度关系, 可得: } T_a V_a^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

$$T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}, \quad T_d V_d^{\gamma-1} = T_e V_e^{\gamma-1}$$

所以  $V_b V_d V_f = V_a V_c V_e$

把热量计算的式子中，相加减后可得：

$$\frac{1}{2} Q_{ef} = \frac{1}{3} Q_{ab} + Q_{cd} \quad \text{代入 } A_2 = Q_{ab} - Q_{cd} - Q_{ef}$$

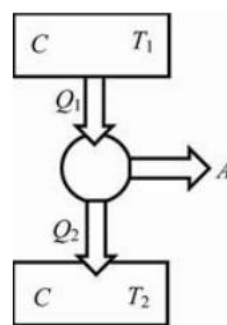
$$\text{可得: } A_2 = \frac{1}{3} Q_{ab} + A_1$$

$$\text{所以 } \eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{A_2}{Q_{ab}} = \frac{A_2}{3(A_2 - A_1)}$$

10-17. 两有限大热源，其初温分别为  $T_1$  和  $T_2$ ，热容与温度无关均为  $C$ ，有一热机工作于这两热源之间，直至两热源具有共同的温度为止。求这热机能输出的最大功为多少？

解：设热源最后达到的共同温度为  $T_3$ ，

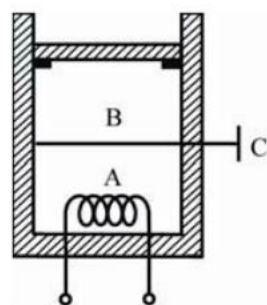
$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_3} \frac{CdT}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_3}{T_1} + C \ln \frac{T_3}{T_2} = C \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} \geq 0$$



理想可逆机效率最高，此时  $\Delta S=0$ ， $\therefore T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$

$$A_{\text{max}} = Q_1 - Q_2 = C(T_1 - T_3) - C(T_3 - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

10-18. 如图所示，一圆柱形绝热容器，其上方活塞由侧壁突出物支持着，其下方容积共10L，被隔板C分成体积相等的A、B两部分。下部A装有1mol氧气，温度为  $27^\circ\text{C}$ ；上部B为真空。抽开隔板C，使气体充满整个容器，且平衡后气体对活塞的压力正好与活塞自身重量平衡。



(1) 求抽开C板后，气体的终态温度以及熵变；

(2) 若随后通过电阻丝对气体缓慢加热使气体膨胀到 20L，求该过程的熵变。

解：(1) 抽开 C 板后，气体处于在真空中的绝热变化，由于在真空中，气体体积的变化不做功，所以  $A=0$ ，又是绝热变化，所以  $Q=0$ ，这样  $\Delta E=0$ ，也就是说温度不变， $T=300\text{K}$ ；

那么要计算这一过程的熵变，我们设计一个可逆过程为：等温膨胀。

$$\text{所以： } \Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\Delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{P}{T} dV = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$$

(2) 第二过程中压强不变，所以可设计为等压膨胀过程。

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{2} R \ln 2$$

### 思考题

10-1. 一定量的理想气体，开始时处于压强，体积，温度分别为  $p_1, V_1, T_1$  的平衡态，后来变到压强，体积，温度分别为  $p_2, V_2, T_2$  的终态。若已知  $V_2 > V_1$ ，且  $T_2 = T_1$ ，则以下各种说法中正确的是：

- (A) 不论经历的是什么过程，气体对外净作的功一定为正值。
- (B) 不论经历的是什么过程，气体从外界净吸的热一定为正值。
- (C) 若气体从始态变到终态经历的是等温过程，则气体吸收的热量最少。
- (D) 如果不给定气体所经历的是什么过程，则气体在过程中对外净作功和从外界净吸热的正负皆无法判断。

答：如果不给定过程，我们只能根据  $T_2 = T_1$ ，得知这一过程中内能不变，但是做功情况无法由  $V_2 > V_1$  得出，因为做功的计算与过程的选择有关，本题选择 D。

10-2. 一定量理想气体, 从同一状态开始把其体积由  $V_0$  压缩到  $\frac{1}{2}V_0$ , 分别经历以下三种过程: (1) 等压过程; (2) 等温过程; (3) 绝热过程. 其中什么过程外界对气体做功最多; 什么过程气体内能减小最多; 什么过程气体放热最多?

答: 由画图可以直接看出:

(3) 绝热过程 中 外界对气体做功最多;

(3) 绝热过程 中 气体内能减小最多;

(2) 等温过程 中 气体放热最多?

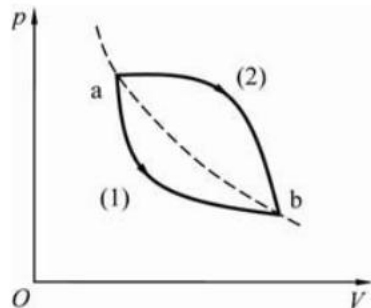
10-3. 一定量的理想气体, 从  $p-V$  图上初态  $a$  经历(1)或(2)过程到达末态  $b$ , 已知  $a$ 、 $b$  两态处于同一条绝热线上(图中虚线是绝热线), 则气体在

(A) (1)过程中吸热, (2) 过程中放热.

(B) (1)过程中放热, (2) 过程中吸热.

(C) 两种过程中都吸热.

(D) 两种过程中都放热.



答: 从题意可以知道,  $a$ 、 $b$  两态处于同一条绝热线上, 图中虚线是绝热线, 所以这条虚线围成的面积  $A + \Delta E_{ab} = 0$ 。

对应 (1) 过程,  $Q_1 = \Delta E + A_1$ , 从图上可以看出:  $A_1 < A$ , 所以  $A + \Delta E_{ab} < 0$ , 也就是  $Q_1 < 0$ , 这就是放热过程。

对应 (2) 过程,  $Q_2 = \Delta E + A_2$ , 从图上可以看出:  $A_2 > A$ , 所以  $A + \Delta E_{ab} > 0$ , 也就是  $Q_2 > 0$ , 这就是吸热过程。

所以本题选择 B。

10-4. 试说明为什么气体热容的数值可以有无穷多个? 什么情况下气体的热容为零? 什么情况下气体的热容是无穷大? 什么情况下是正值? 什么情况下是负值?

答: 根据气体热容的定义: 系统在某一无限小过程中吸收热量  $dQ$  与温度变化  $dT$  的比值称为系统在该过程的热容量。而从  $T_1$  的温度变化到  $T_2$  可以经历无穷

多个过程, 每个过程的吸收热量都可能不同。所以  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$  就不一样。

当气体温度变化而不吸收热量时，气体的热容为零，比如绝热膨胀。

当气体的温度不变而吸收热量时，气体的热容无穷大，比如等温变化。

当气体温度升高，但为放热过程时，热容为负值。

10-5. 某理想气体按  $pV^2 = \text{恒量}$  的规律膨胀，问此理想气体的温度是升高了，还是降低了？

答：根据题意  $pV^2 = C$  而  $\frac{pV}{T} = \text{恒量}$ ，将两个式子相除，可得：

$VT = \text{恒量}$ ，所以如果该理想气体膨胀，此气体的温度降低。

10-6. 一卡诺机，将它作热机使用时，如果工作的两热源的温度差愈大，则对做功就愈有利；如将它当作制冷机使用时，如果两热源的温度差愈大，对于制冷机是否也愈有利？为什么？

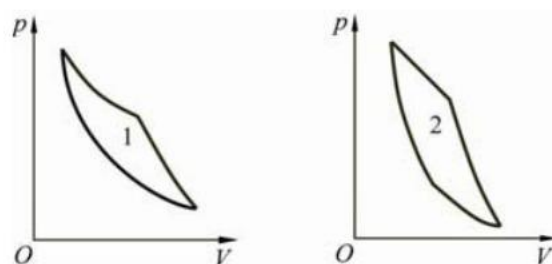
答：卡诺热机：  $\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  所以温差越大，  $\frac{T_2}{T_1}$  就越小，  $\eta_{\text{卡}}$  就越大；

但是对于制冷机：卡诺逆循环的致冷系数：  $\omega_{\text{卡}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ ，温差越大，

则  $\omega_{\text{卡}} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$  越小，提取同样的热量，则所需做功也越多，对致冷是不利的。

10-7. 卡诺循环 1、2，如图所示.若包围面积相同，功、效率是否相同？

答：封闭曲线所包围的面积表示循环过程中所做的净功。若包围面积相同，则两次循环所做的功相同。但由于  $\eta = A_{\text{净}} / Q_1$ ， $A_{\text{净}}$  面积相同，效率不一定相同，因为  $\eta$  还与吸热  $Q_1$  有关。



10-8. 一条等温线和一条绝热线有可能相交两次吗?为什么?

答: 不可能。

反证法: 若两条曲线有两个交点, 则组成闭合曲线而构成了一循环过程, 这循环过程只有吸热, 无放热, 且对外做正功, 热机效率为 100%, 违背了热力学第二定律。

10-9. 两条绝热线和一条等温线是否可能构成一个循环? 为什么?

答: 不能, 用反证法证明说明: 假设两条绝热线 A、B 相交于点 1, 与另一条等温线 C 分别相交于点 3、2, 那么 1231 构成一个正循环,

如图 a 所示, 则该正循环对外作正功, 只有在等温过程放热。这样既不吸热又对外作有用功, 显然是违反热力学第一定律,

如图 b 所示, 则该正循环对外作正功, 只有在等温过程吸热。这样成为从单一热源吸热对外作有用功的热机, 显然是违反热力学第二定律。

10-10. 所谓第二类永动机是指什么? 它不可能制成是因为违背了什么关系?

答: 第二类永动机: 从一个热源吸热并全部变为功。违背热力学第二定律, 所以无法造成。



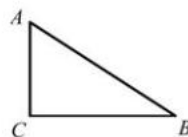
## 习题

11-1. 直角三角形  $ABC$  的  $A$  点上, 有电荷  $q_1 = 1.8 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $B$  点上有电荷  $q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{C}$ , 试求  $C$  点的电场强度(设  $BC = 0.04 \text{m}$ ,  $AC = 0.03 \text{m}$ ).

解:  $q_1$  在  $C$  点产生的场强  $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 AC^2}$

$q_2$  在  $C$  点产生的场强  $E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 BC^2}$

$C$  点的合场强  $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 3.24 \times 10^4 \text{V/m}$  方向如图



11-2. 用细的塑料棒弯成半径为  $50 \text{cm}$  的圆环, 两端间空隙为  $2 \text{cm}$ , 电量为  $3.12 \times 10^{-9} \text{C}$  的正电荷均匀分布在棒上, 求圆心处电场强度的大小和方向.

解: 棒长  $l = 2\pi r - d = 3.12 \text{m}$

电荷线密度  $\lambda = \frac{q}{l} = 1.0 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$

若有一均匀带电闭合线圈, 则圆心处的合场强为 0, 有一段空隙, 则圆心处场强等于闭合线圈产生电场再减去  $d = 0.02 \text{m}$  长的带电棒在该点产生的场强. 由于  $d \ll r$ , 该小段可看成点电荷  $q' = \lambda d = 2.0 \times 10^{-11} \text{C}$

圆心处场强  $E_0 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{2.0 \times 10^{-11}}{(0.5)^2} = 0.72 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

方向由缝隙指向圆心处

11-3. 将一“无限长”带电细线弯成图示形状, 设电荷均匀分布, 电荷线密度为  $\lambda$ , 四分之一圆弧  $AB$  的半径为  $R$ , 试求圆心  $O$  点的场强.

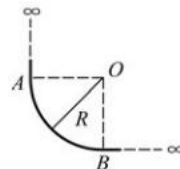
解: 设  $O$  为坐标原点, 水平方向为  $x$  轴, 竖直方向为  $y$  轴

半无限长导线  $A\infty$  在  $O$  点的场强  $E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (i - j)$

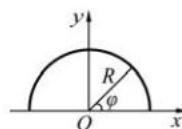
半无限长导线  $B\infty$  在  $O$  点的场强  $E_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (-i + j)$

$AB$  圆弧在  $O$  点的场强  $E_3 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (i + j)$

总场强  $E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (i + j)$



11-4. 带电细线弯成半径为  $R$  的半圆形, 电荷线密度为  $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$ , 式中  $\lambda_0$  为一常数,  $\phi$  为半径  $R$  与  $x$  轴所成的夹角, 如图所示. 试求环心  $O$  处的电场强度.



$$\text{解: } dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0 \sin \phi d\phi}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$dE_x = dE \cos \phi \quad \text{考虑到对称性} \quad E_x = 0$$

$$dE_y = dE \sin \phi$$

$$E_y = \int dE \sin \phi = \int_0^\pi \frac{\lambda_0 \sin^2 \phi d\phi}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} \quad \text{方向沿 } y \text{ 轴负向}$$

11-5. 一半径为  $R$  的半球面, 均匀地带有电荷, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求球心  $O$  处的电场强度.

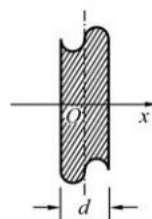
解: 把球面分割成许多球带, 球带所带电荷  $dq = 2\pi r \sigma dl$

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi r x \sigma dl}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$x = R \cos \theta \quad r = R \sin \theta \quad dl = R d\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} i$$

11-6. 图示一厚度为  $d$  的“无限大”均匀带电平板, 电荷体密度为  $\rho$ . 求板内、外的场强分布, 并画出场强随坐标  $x$  变化的图线, 即  $E-x$  图线(设原点在带电平板的中央平面上,  $Ox$  轴垂直于平板).



解: 在平板内作一个被平板的中间面垂直平分的闭合圆柱面  $S_1$  为高斯面

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S \quad \sum q = 2x\rho\Delta S$$

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \quad (|x| \leq \frac{d}{2})$$

$$\text{同理可得板外一点场强的大小 } E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \quad (|x| > \frac{d}{2})$$

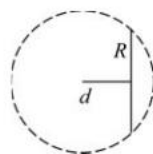
11-7. 设电荷体密度沿  $x$  轴方向按余弦规律  $\rho = \rho_0 \cos x$  分布在整个空间, 式中  $\rho_0$  为恒量. 求空间的场强分布.

解: 过坐标  $\pm x$  处作与  $x$  轴垂直的两平面  $S$ , 用与  $x$  轴平行的侧面将之封闭, 构成高斯面. 根据高斯定理有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho d\tau = \frac{S}{\varepsilon_0} \int_{-x}^x \rho_0 \cos x dx = \frac{2\rho_0 S \sin x}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \sin x$$

11-8. 在点电荷  $q$  的电场中, 取一半径为  $R$  的圆形平面(如图所示), 平面到  $q$  的距离为  $d$ . 试计算通过该平面的  $\mathbf{E}$  的通量.



解: 通过圆平面的电通量与通过与  $A$  为圆心、 $AB$  为半径、圆的平面为周界的球冠面的电通量相同。

球冠面的面积  $S = 2\pi rH$  其中  $r = \sqrt{d^2 + R^2}$

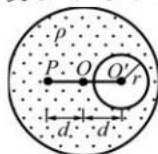
通过该球冠面的电通量  $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi rH}{4\pi r^2} = \frac{qH}{2\varepsilon_0 r}$  而  $H = r(1 - \cos\alpha)$

$$\text{所以 } \Phi = \frac{q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos\alpha) = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

11-9. 一球体内均匀分布着电荷体密度为  $\rho$  的正电荷, 若保持电荷分布不变, 在该球体中挖去半径为  $r$  的一个小球体, 球心为  $O'$ , 两球心间距离  $\overline{OO'} = d$ , 如图所示. 求:

(1) 在球形空腔内, 球心  $O'$  处的电场强度  $\mathbf{E}_0$ .

(2) 在球体内  $P$  点处的电场强度  $\mathbf{E}$ . 设  $O'$ 、 $O$ 、 $P$  三 points 在同一直径上, 且  $\overline{OP} = d$ .



解: (1) 利用补偿法, 以  $O$  为圆心, 过  $O'$  点作一个半径为  $d$  的高斯面. 根据高斯定理有

$$\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi d^3}{\varepsilon_0} \quad E_0 = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0} \quad \text{方向从 } O \text{ 指向 } O'$$

(2) 过  $P$  点以  $O$  为圆心, 作一个半径为  $d$  的高斯面. 根据高斯定理有

$$\oint \mathbf{E}_{P_1} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi d^3}{\varepsilon_0} \quad E_{P_1} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}$$

过  $P$  点以  $O'$  为圆心, 作一个半径为  $2d$  的高斯面。根据高斯定理有

$$\oint \mathbf{E}_{P_2} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad E_{P_2} = \frac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}$$

$$E = E_{P_1} - E_{P_2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( d - \frac{r^3}{4d^2} \right) \quad \text{方向为径向}$$

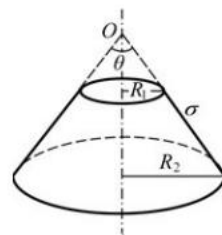
11-10. 如图所示, 一锥顶角为  $\theta$  的圆台, 上下底面半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 在它的侧面上均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求顶点  $O$  的电势。(以无穷远处为电势零点)

解: 以顶点为原点, 沿轴线方向为  $x$  轴, 在侧面上取面元

$$dS = R d\varphi \cdot \frac{dx}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad R = x \tan \frac{\theta}{2} \quad r = \frac{x}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma \tan \frac{\theta}{2} d\varphi dx$$

$$U = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \tan \frac{\theta}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1/\tan \frac{\theta}{2}}^{R_2/\tan \frac{\theta}{2}} dx = \frac{\sigma(R_2 - R_1)}{2\varepsilon_0}$$



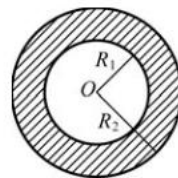
11-11. 图示为一个均匀带电的球壳, 其电荷体密度为  $\rho$ , 球壳内表面半径为  $R_1$ , 外表面半径为  $R_2$ . 设无穷远处为电势零点, 求空腔内任一点的电势.

解:  $E_1 = 0 \quad r < R_1$

$$E_2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

$$E_3 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \quad r > R_2$$

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned}$$



11-12. 电荷以相同的面密度 $\sigma$ 分布在半径为 $r_1 = 10\text{cm}$ 和 $r_2 = 20\text{cm}$ 的两个同心球面上. 设无限远处电势为零, 球心处的电势为 $U_0 = 300\text{V}$ .

(1) 求电荷面密度 $\sigma$ .

(2) 若要使球心处的电势也为零, 外球面上应放掉多少电荷?

$$(\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \text{m}^{-2})$$

解: (1)  $E_1 = 0 \quad r < r_1$

$$E_2 = \frac{\sigma r_1^2}{\varepsilon_0 r^2} \quad r_1 < r < r_2$$

$$E_3 = \frac{\sigma(r_1^2 + r_2^2)}{\varepsilon_0 r^2} \quad r > r_2$$

$$U_0 = \int_0^{r_1} E_1 \cdot dr + \int_{r_1}^{r_2} E_2 \cdot dr + \int_{r_2}^{\infty} E_3 \cdot dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1^2}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{r_2}^{\infty} \frac{\sigma(r_1^2 + r_2^2)}{\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (r_1 + r_2)$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U_0}{r_1 + r_2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 300}{30 \times 10^{-3}} = 8.85 \times 10^{-9} \text{C/m}^2$$

(2) 设外球面上放电后电荷密度 $\sigma'$ , 则有

$$U'_0 = (\sigma r_1 + \sigma' r_2) / \varepsilon_0 = 0 \quad \sigma' = -r_1 / r_2 \sigma$$

外球面上应变为带负电, 共应放掉电荷 $q'$

$$q' = 4\pi r_2^2 (\sigma - \sigma') = 4\pi r_2^2 (\sigma + r_1 / r_2 \sigma)$$

$$= 4\pi r_2 (r_1 + r_2) \sigma$$

$$= 4\pi r_2 (r_1 + r_2) \varepsilon_0 U_0 / (r_1 + r_2)$$

$$= 4\pi \varepsilon_0 r_2 U_0 = 4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 300 \times 0.2 = 6.67 \times 10^{-9} \text{C}$$

11-13. 如图所示, 半径为 $R$ 的均匀带电球面, 带有电荷 $q$ . 沿某一半径方向上有一均匀带电细线, 电荷线密度为 $\lambda$ , 长度为 $l$ , 细线左端离球心距离为 $r_0$ . 设球和线上的电荷分布不受相互作用影响, 试求细线所受球面电荷的电场力和细线在该电场中的电势能(设无穷远处的电势为零).

解: 以 $O$ 点为坐标原点, 有一均匀带电细线的方向为 $x$ 轴

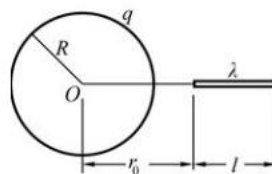
$$\text{球面在轴上任一点的场强} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$F = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \lambda dx = \frac{\lambda q l}{4\pi\varepsilon_0 r_0 (r_0 + l)}$$

方向沿 $X$ 正方向.

$$dW = dq' E dx$$

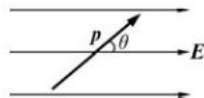
$$W = \int_{r_0}^{r_0+l} \lambda dx \int_x^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0 + l}{r_0}$$



11-14. 一电偶极子的电矩为  $\mathbf{p}$ , 放在场强为  $\mathbf{E}$  的匀强电场中,  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{E}$  之间夹角为  $\theta$ , 如图所示. 若将此偶极子绕通过其中心且垂直于  $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{E}$  平面的轴转  $180^\circ$ , 外力需做功多少?

解:  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad M = pE \sin \theta$

$$W = \int M d\theta = \int_{\theta}^{\pi+\theta} pE \sin \theta d\theta = 2pE \cos \theta$$



11-15. 两根相同的均匀带电细棒, 长为  $l$ , 电荷线密度为  $\lambda$ , 沿同一条直线放置. 两细棒间最近距离也为  $l$ , 如图所示. 假设棒上的电荷是不能自由移动的, 试求两棒间的静电相互作用力.

解: 以棒的一端为坐标原点, 棒长为  $x$  轴方向

$$dF = dq'E$$

$$\begin{aligned} F &= \int_{2l}^{3l} \lambda dr \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (r-x)^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{2l}^{3l} \left( \frac{1}{r-l} - \frac{1}{r} \right) dr \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$



方向沿  $X$  轴正向; 左棒受力:  $F' = -F$

11-16. 如图所示, 一个半径为  $R$  的均匀带电圆板, 其电荷面密度为  $\sigma$  ( $>0$ ) 今有一质量为  $m$ , 电荷为  $-q$  的粒子 ( $q > 0$ ) 沿圆板轴线 ( $x$  轴) 方向向圆板运动, 已知在距圆心  $O$  (也是  $x$  轴原点) 为  $b$  的位置上时, 粒子的速度为  $v_0$ , 求粒子击中圆板时的速度 (设圆板带电的均匀性始终不变).

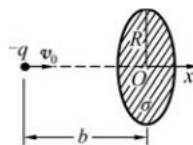
$$\text{解: } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

$$F = qE = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = mv \frac{dv}{dx}$$

$$\int_{v_0}^v mvdv = \int_b^0 \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) dx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} (x + \sqrt{R^2 + x^2})$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} (R + b - \sqrt{R^2 + b^2})}$$



### 思考题

11-1. 两个点电荷分别带电  $q$  和  $2q$ , 相距  $l$ , 试问将第三个点电荷放在何处它所受合力为零?

$$\text{答: } \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 (l-x)^2} \quad x = l(\sqrt{2}-1) \quad \text{即离点电荷 } q \text{ 的距离为 } l(\sqrt{2}-1)$$

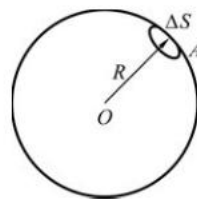
11-2. 下列几个说法中哪一个是正确的?

- (A) 电场中某点场强的方向, 就是将点电荷放在该点所受电场力的方向。
- (B) 在以点电荷为中心的球面上, 由该点电荷所产生的场强处处相同。
- (C) 场强方向可由  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$  定出, 其中  $q$  为试验电荷的电量,  $q$  可正、可负,  $\mathbf{F}$  为试验电荷所受的电场力。

(D) 以上说法都不正确。

答: C

11-3. 真空中一半径为  $R$  的均匀带电球面, 总电量为  $q$  ( $q < 0$ ). 今在球面上挖去非常小的一块面积  $\Delta S$  (连同电荷), 且假设不影响原来的电荷分布, 则挖去  $\Delta S$  后球心处的电场强度大小和方向.



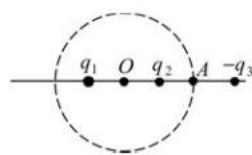
答:  $\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$$E = \frac{\sigma\Delta S}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{方向指向小面积元}$$

11-4. 三个点电荷  $q_1$ 、 $q_2$  和  $-q_3$  在一直线上, 相距均为  $2R$ , 以  $q_1$  与  $q_2$  的中心  $O$  作一半径为  $2R$  的球面,  $A$  为球面与直线的一个交点, 如图. 求:

(1) 通过该球面的电通量  $\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ;

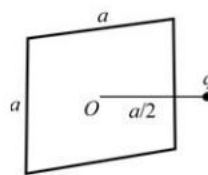
(2)  $A$  点的场强  $\mathbf{E}_A$ .



解:  $\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$

$$E_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 (3R)^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

11-5. 有一边长为  $a$  的正方形平面, 在其中垂线上距中心  $O$  点  $a/2$  处, 有一电荷为  $q$  的正点电荷, 如图所示, 则通过该平面的电场强度通量为多少?



11-6. 对静电场高斯定理的理解, 下列四种说法中正确的是

- (A) 如果通过高斯面的电通量不为零, 则高斯面内必有净电荷
- (B) 如果通过高斯面的电通量为零, 则高斯面内必无电荷
- (C) 如果高斯面内无电荷, 则高斯面上电场强度必处处为零
- (D) 如果高斯面上电场强度处处不为零, 则高斯面内必有电荷

答: A

11-7. 由真空中静电场的高斯定理  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$  可知

- (A) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强一定为零
- (B) 闭合面内的电荷代数和不为零时, 闭合面上各点场强一定都不为零
- (C) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定都为零
- (D) 闭合面内无电荷时, 闭合面上各点场强一定为零

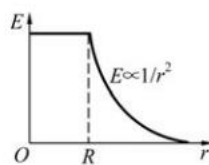
答: C



11-8. 图示为一具有球对称性分布的静电场的  $E \sim r$  关系曲线. 请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的.

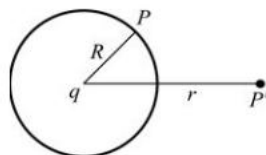
- (A) 半径为  $R$  的均匀带电球面.  
 (B) 半径为  $R$  的均匀带电球体.  
 (C) 半径为  $R$ 、电荷体密度  $\rho = Ar$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体.  
 (D) 半径为  $R$ 、电荷体密度  $\rho = A/r$  ( $A$  为常数) 的非均匀带电球体.

答: D



11-9. 如图, 在点电荷  $q$  的电场中, 选取以  $q$  为中心、 $R$  为半径的球面上一点  $P$  处作电势零点, 则与点电荷  $q$  距离为  $r$  的  $P'$  点的电势为

- (A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$   
 (C)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r - R)}$  (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

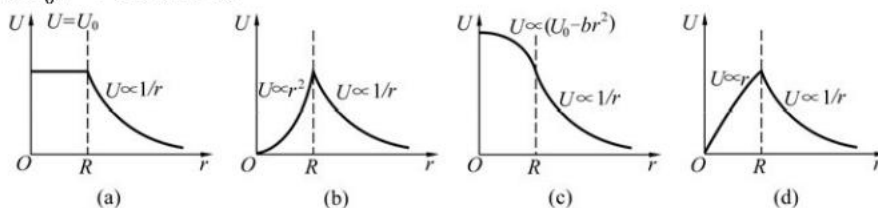


答: B

11-10. 密立根油滴实验, 是利用作用在油滴上的电场力和重力平衡而测量电荷的, 其电场由两块带电平行板产生. 实验中, 半径为  $r$ 、带有两个电子电荷的油滴保持静止时, 其所在电场的两块极板的电势差为  $U_{12}$ . 当电势差增加到  $4U_{12}$  时, 半径为  $2r$  的油滴保持静止, 则该油滴所带的电荷为多少?

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{U_{12}}{d} q &= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g \\ \frac{4U_{12}}{d} q' &= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi (2r)^3 g \\ q' &= 2q = 4e \end{aligned}$$

11-11. 设无穷远处电势为零, 则半径为  $R$  的均匀带电球体产生的电场的电势分布规律为(图中的  $U_0$  和  $b$  皆为常量):



答: C

11-12. 无限长均匀带电直线的电势零点能取在无穷远吗?

答: 不能

## 习题

12-1. 一半径为0.10米的孤立导体球, 已知其电势为100V (以无穷远为零电势), 计算球表面的面电荷密度.

$$\text{解: } U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{U\epsilon_0}{R} = \frac{100 \times 8.85 \times 10^{-12}}{0.1} = 8.85 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

12-2. 两个相距很远的导体球, 半径分别为  $r_1 = 6.0\text{cm}$ ,  $r_2 = 12.0\text{cm}$ , 都带有  $3 \times 10^{-8}\text{C}$  的电量, 如果用一导线将两球连接起来, 求最终每个球上的电量.

解: 半径分别为  $r_1$  的电量为  $q_1$ ,  $r_2$  电量为  $q_2$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (1)$$

$$q_1 + q_2 = 6 \times 10^{-8} \quad (2)$$

$$\text{联立} \quad q_1 = 2 \times 10^{-8} \text{ C} \quad q_2 = 4 \times 10^{-8} \text{ C}$$

12-3. 有一外半径为  $R_1$ , 内半径  $R_2$  的金属球壳, 在壳内有一半半径为  $R_3$  的金属球, 球壳和内球均带电量  $q$ , 求球心的电势.

$$\text{解: } E_1 = 0 \quad r < R_3$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad R_3 < r < R_2$$

$$E_3 = 0 \quad R_2 < r < R_1$$

$$E_4 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R_1$$

$$U_0 = \int_0^{R_3} E_1 \cdot dr + \int_{R_3}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{R_1} E_3 \cdot dr + \int_{R_1}^{\infty} E_4 \cdot dr$$

$$= \int_{R_3}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_1}^{\infty} \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right)$$

12-4. 一电量为  $q$  的点电荷位于导体球壳中心, 壳的内外半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ . 求球壳内外和球壳上场强和电势的分布, 并画出  $E \sim r$  和  $V \sim r$  曲线.

$$\text{解: } E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad 0 < r < R_1$$

$$E_2 = 0 \quad R_1 < r < R_2$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R_2$$

$$\begin{aligned} 0 < r \leq R_1 \quad U &= \int_r^{R_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

$$R_1 < r \leq R_2 \quad U = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$r \geq R_2 \quad U = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

12-5. 半径  $R_1 = 0.05m$ , 带电量  $q = 3 \times 10^{-8}C$  的金属球, 被一同心导体球壳包围, 球壳内半径  $R_2 = 0.07m$ , 外半径  $R_3 = 0.09m$ , 带电量  $Q = -2 \times 10^{-8}C$ 。试求距球心  $r$  处的  $P$  点的场强与电势。(1)  $r=0.10m$  (2)  $r=0.06m$  (3)  $r=0.03m$

解:  $E_1 = 0 \quad r < R_1$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

$$E_3 = 0 \quad R_2 < r < R_3$$

$$E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R_3$$

$$(1) \quad r > R_3 \quad E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9 \times 10^3 N$$

$$U = \int_r^{\infty} E_4 \cdot dr = \int_r^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} = 900V$$

$$(2) \quad R_1 < r < R_2 \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 7.5 \times 10^4 N$$

$$U = \int_r^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 1.64 \times 10^3 V$$

$$(3) \quad r < R_1 \quad E_1 = 0$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 2.54 \times 10^3 V$$

12-6. 两块带有异号电荷的金属板 A 和 B，相距 5.0mm，两板面积都是  $150\text{cm}^2$ ，电量分别为  $\pm 2.66 \times 10^{-8}\text{C}$ ，A 板接地，略去边缘效应，求：(1) B 板的电势；(2) AB 间离 A 板 1.0mm 处的电势.

$$\text{解: } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2.66 \times 10^{-8}}{8.85 \times 10^{-12} \times 150 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^5 \text{ V/m}$$

$$U_B = -Ed = 2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} = -1000\text{V}$$

$$\text{离 A 板 1.0mm 处的电势 } U = -Ed = 2 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3} = -200\text{V}$$

12-7. 实验表明，在靠近地面处有相当强的电场  $E$  垂直于地面向下，大小约为  $130\text{V/m}$ . 在离地面  $1.5\text{km}$  的高空的场强也是垂直向下，大小约为  $25\text{V/m}$ .

(1) 试估算地面上的面电荷密度(设地面为无限大导体平面);

(2) 计算从地面到  $1.5\text{km}$  高空的空气中的平均电荷密度.

$$\text{解: (1) } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

考虑到电场  $E$  垂直于地面向下，故  $E = -130\text{V/m}$

$$\sigma = \epsilon_0 E = -8.85 \times 10^{-12} \times 130 = -1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

$$(2) \Delta E = \int_R^{R+h} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \int_R^{R+h} \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho h}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{\epsilon_0 \Delta E}{h} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (130 - 25)}{1.5 \times 10^3} = 6.2 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

12-8. 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属圆柱(内)和圆筒(外)构成，设内圆柱半径为  $R_1$ ，电势为  $V_1$ ，外圆筒的内半径为  $R_2$ ，电势为  $V_2$ . 求其离轴为  $r$  处 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的电势.

$$\text{解: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 (V_1 - V_2)}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$V = V_1 - \int_{R_1}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = V_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1}$$

$$= V_1 - (V_1 - V_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

12-9. 半径分别为  $a$  和  $b$  的两个金属球, 它们的间距比本身线度大得多, 今用一细导线将两者相连接, 并给系统带上电荷  $Q$ , 求:

(1) 每个球上分配到的电荷是多少? (2) 按电容定义式, 计算此系统的电容.

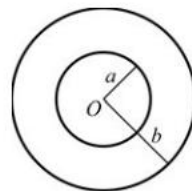
解: (1)  $\frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r_a} = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b}$  ①

$$q_a + q_b = Q \quad ②$$

$$q_a = \frac{Qa}{a+b} \quad q_b = \frac{Qb}{a+b}$$

(2) 根据电容的定义:  $c = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 b}} = 4\pi\epsilon_0(a+b)$

12-10. 图示一球形电容器, 在外球壳的半径  $b$  及内外导体间的电势差  $U$  维持恒定的条件下, 内球半径  $a$  为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小? 求这个最小电场强度的大小.



解:  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 Uab}{b-a}$$

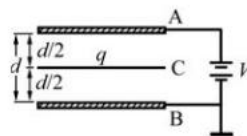
所以  $E = \frac{Uab}{(b-a)r^2}$

要使内球表面附近的电场强度最小 ( $r = a$ ), 必须满足  $\frac{dE}{da} = 0$

$$a = \frac{b}{2} \quad \text{此时} \quad E = \frac{4U}{b}$$

12-11. 一空气平板电容器, 极板 A、B 的面积都是  $S$ , 极板间距离为  $d$ . 接上电源后, A 板电势  $U_A = V$ , B 板电势  $U_B = 0$ . 现将一带有电荷  $q$ 、面积也是  $S$  而厚度可忽略的导

体片 C 平行插在两极板的中间位置, 如图所示, 试求导体片 C 的电势.



$$\text{解: } E_{AC} = \frac{q_A}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0}$$

$$E_{CB} = \frac{q_A + q}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma_A + \sigma}{\epsilon_0}$$

$$V = E_{AC} \frac{d}{2} + E_{CB} \frac{d}{2} \quad \text{而} \quad V_C = E_{CB} \frac{d}{2}$$

$$\text{所以 } V_C = \frac{1}{2} \left( V + \frac{q}{2\epsilon_0 S} d \right)$$

12-12. 两金属球的半径之比为 1:4, 带等量的同号电荷. 当两者的距离远大于两球半径时, 有一定的电势能. 若将两球接触一下再移回原处, 则电势能变为原来的多少倍?

$$\text{解: 接触之前的电势能 } W_0 = Q^2 \int_L^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

接触之后两球电势相等电荷重新分布, 设小金属球带电为  $q$ , 大金属球带电为  $q'$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad q + q' = 2Q$$

$$\text{解得 } q = \frac{2}{5} Q \quad q' = \frac{8}{5} Q$$

$$W = qq' \int_L^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{16}{25} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{16}{25} W_0$$

### 思考题

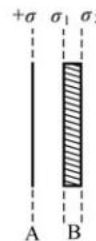
12-1. 一平行板电容器, 两导体板不平行, 今使两板分别带有  $+q$  和  $-q$  的电荷, 有人将两板的电场线画成如图所示, 试指出这种画法的错误, 你认为电场线应如何分布.

答: 应该垂直板面



12-2. 在“无限大”均匀带电平面 A 附近放一与它平行, 且有一定厚度的“无限大”平面导体板 B, 如图所示. 已知 A 上的电荷面密度为  $+\sigma$ , 则在导体板 B 的两个表面 1 和 2 上的感生电荷面密度为多少?

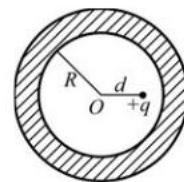
$$\text{答: } \sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$$



12-3. 充了电的平行板电容器两极板(看作很大的平板)间的静电作用力  $F$  与两极板间的电压  $U$  之间的关系是怎样的?

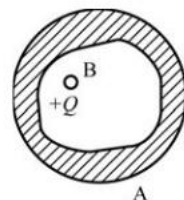
答: 对静电能的求导可以求得电场作用于导体上的力.

12-4. 一个未带电的空腔导体球壳, 内半径为  $R$ . 在腔内离球心的距离为  $d$  处 ( $d < R$ ), 固定一点电荷  $+q$ , 如图所示. 用导线把球壳接地后, 再把地线撤去. 选无穷远处为电势零点, 则球心  $O$  处的电势为多少?



答:  $U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$

12-5. 在一个原来不带电的外表面为球形的空腔导体  $A$  内, 放一带有电荷为  $+Q$  的带电导体  $B$ , 如图所示. 则比较空腔导体  $A$  的电势  $U_A$  和导体  $B$  的电势  $U_B$  时, 可得什么结论?



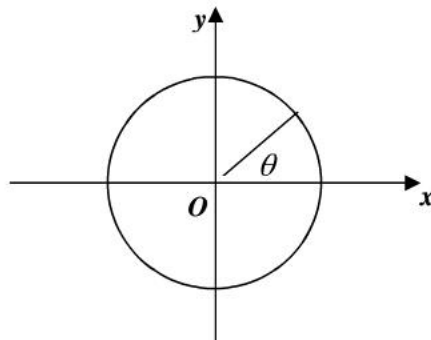
答:  $U_A$  和  $U_B$  都是等势体  $U_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

$$U_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



### 习题

13-1. 如图为半径为  $R$  的介质球，试分别计算下列两种情况下球表面上的极化面电荷密度和极化电荷的总和. 已知极化强度为  $P$  (沿  $x$  轴).



$$(1) P = P_0; (2) P = P_0 \frac{x}{R}.$$

解: (1)  $q' = \oint \sigma' ds = \oint P \cos \theta ds$

由于  $P = P_0$  介质被均匀极化, 所以  $q' = 0$

(2) 在球面上任取一个球带

$$\begin{aligned} q' &= \int \sigma' ds = \int P \cos \theta ds = 2 \int_0^{\pi/2} P_0 \frac{x}{R} \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \\ &= -2P_0 R \int_1^0 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \\ &= \frac{4\pi P_0 R^2}{3} \end{aligned}$$

13-2. 平行板电容器, 板面积为  $100\text{cm}^2$ , 带电量  $\pm 8.9 \times 10^{-7}\text{C}$ , 在两板间充满电介质后, 其场强为  $1.4 \times 10^6\text{V/m}$ , 试求: (1) 介质的相对介电常数  $\epsilon_r$  (2) 介质表面上的极化电荷密度.

解: (1)  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$

$$\epsilon_r = \frac{Q}{\epsilon_0 ES} = \frac{8.9 \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12} \times 1.4 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-4}} = 7.18$$

$$(2) \sigma' = P = D - \epsilon_0 E = \frac{Q}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = 7.66 \times 10^{-5} \text{C/m}^2$$

13-3. 面积为  $S$  的平行板电容器, 两板间距为  $d$ , 求: (1) 插入厚度为  $\frac{d}{3}$ , 相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质, 其电容量变为原来的多少倍? (2) 插入厚度为  $\frac{d}{3}$  的导电板, 其电容量又变为原来的多少倍?

解: (1)  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \cdot \frac{2}{3} d + \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \cdot \frac{d}{3}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2d\varepsilon_r + d} = \frac{3\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r} C_0$$

(2) 插入厚度为  $\frac{d}{3}$  的导电板, 可看成是两个电容的串联

$$C_1 = C_2 = \frac{3\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{3}{2} C_0$$

13-4. 在两个带等量异号电荷的平行金属板间充满均匀介质后, 若已知自由电荷与极化电荷的面电荷密度分别为  $\sigma_0$  与  $\sigma'$  (绝对值), 试求: (1) 电介质内的场强  $E$ ; (2) 相对介电常数  $\varepsilon_r$ .

$$\text{解: (1) } \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{(\sigma_0 - \sigma')S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{(\sigma_0 - \sigma')}{\varepsilon_0}$$

$$(2) \quad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0 - \sigma'} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'}$$

13-5. 电学理论证明: 一球形均匀电介质放在均匀外电场中会发生均匀极化. 若已知此极化介质球的半径为  $R$ , 极化强度为  $\mathbf{P}$ . 求极化电荷在球心处产生的场强  $E'$ .

解: 球面上极化电荷的面密度  $\sigma' = P \cos \theta$

$$\text{球面上极化电荷元在球心处产生的场强 } dE' = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

由对称性可知只有场强的  $z$  分量对球心处的电场有贡献

$$dE'_z = -dE' \cos \theta$$

把球面分割成许多球带, 它在球心处产生的场强

$$dE'_z = -dE' \cos \theta = -\frac{\sigma'(2\pi R \sin \theta) R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos \theta$$

$$E'_z = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma'(2\pi R \sin \theta) R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

13-6. 一圆柱形电容器, 外柱的直径为 4cm, 内柱的直径可以适当选择, 若其间充满各向同性的均匀电介质, 该介质的击穿电场强度大小为  $E_0 = 200\text{kV/cm}$ . 试求该电容器可能承受的最高电压.

$$\begin{aligned}\text{解: } E &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} & \lambda &= 2\pi\epsilon r E_0 \\ U &= \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr = r E_0 \ln \frac{R}{r} \\ \frac{dU}{dr} &= 0 & E_0 \ln \frac{R}{r} - E_0 &= 0 & r_0 &= \frac{R}{e} \\ U_{\max} &= r_0 E_0 \ln \frac{R}{r_0} = \frac{R E_0}{e} = 147\text{KV}\end{aligned}$$

13-7. 一平行板电容器, 中间有两层厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$  的电介质, 它们的相对介电常数为  $\epsilon_{r_1}$  和  $\epsilon_{r_2}$ , 极板面积为  $S$ , 求电容量.

$$\begin{aligned}\text{解: } D_1 &= D_2 = \sigma = \frac{Q}{S} \\ E_1 &= \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} S} & E_2 &= \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} S} \\ U &= E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} S} + \frac{Q d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} S} \\ C &= \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r_2}}}\end{aligned}$$

13-8. 计算均匀带电球体的静电能, 设球体半径为  $R$ , 带电量为  $Q$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } E_1 &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r &< R \\ E_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r &> R \\ W &= \iiint \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

13-9. 半径为 2.0cm 的导体外套有一个与它同心的导体球壳, 球壳的内外半径分别为

4.0cm 和 5.0cm. 当内球带电量为  $3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$  时, 求: (1) 系统储存了多少电能? (2) 用导线把壳与球连在一起后电能变化了多少?

解: (1)  $E_1 = 0$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2, R < r < R_1)$$

球与球壳之间的电能

$$W_1 = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^{R_1} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$$

球壳外部空间的电能

$$W_2 = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_2}^{\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$$

系统储存的电能  $W = W_1 + W_2 = 18.2 \times 10^{-5} \text{ J}$

(2) 球与球壳内表面所带电荷为 0  $W_1 = 0$

外表面所带电荷不变  $W = W_2 = 8.1 \times 10^{-5} \text{ J}$

13-10. 球形电容器内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 充有电量  $Q$ . (1) 求电容器内电场的总能量;

(2) 证明此结果与按  $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  算得的电容器所储电能值相等。

解: (1)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2$

$$W = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

(2) 球形电容器的电容  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2} \quad \text{结果一样}$$

13-11. 一平行板电容器的板面积为  $S$ , 两板间距离为  $d$ , 板间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的

均匀介质. 分别求出下述两种情况下外力所做的功: (1) 维持两板上电荷密度  $\sigma_0$  不变而把

介质取出；(2) 维持两板上电压  $U$  不变而把介质取出。

解：(1) 板间充满均匀介质时  $W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 Sd = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2 Sd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

取出介质后  $W_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2 Sd}{\varepsilon_0}$

外力所做的功等于静电场能量的增加  $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2 Sd}{\varepsilon_0} (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$

(2) 板间充满均匀介质时  $W_1 = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} U^2$

取出介质后  $W_2 = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} U^2$

$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} U^2 (1 - \varepsilon_r)$

#### 思考题

13-1. 介质的极化强度与介质表面的极化面电荷是什么关系？

答：  $\sigma' = P \cos \theta$

13-2. 不同介质交界面处的极化电荷分布如何？

答：  $\sigma'_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{n_1}$        $\sigma'_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{n_2}$

$\sigma_p = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{e}_n$  即在两种介质的交界面上，极化电荷的面密度等于两种介质的极化强度的法向分量之差。

13-3. 介质边界两侧的静电场中  $\mathbf{D}$  及  $\mathbf{E}$  的关系如何？

答：在两种介质的交界面上，若无自由电荷电位移矢量在垂直界面的分量是连续的，平行于界面的分量发生突变。电场强度在垂直界面的分量是不连续的，有突变。

13-4. 真空中两点电荷  $q_A$ 、 $q_B$  在空间产生的合场强为  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$  系统的电场能为

$$W_e = \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$= \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_A^2 d\tau + \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_B^2 d\tau + \iiint_{V_0} \varepsilon_0 \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B d\tau.$$

(1) 说明等式后面三项能量的意义；

(2) A、B 两电荷之间的相互作用能是指哪些项？

(3) 将 A、B 两电荷从给定位置移至无穷远，电场力做功又是哪些项？

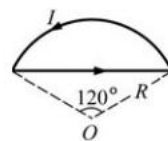
答：第一项表示点电荷 A 所形成的电场的能量，第二项是点电荷 B 所形成的电场的能量，第三项是两个点电荷的相互作用能。

## 习题

14-1. 如图所示的弓形线框中通有电流  $I$ , 求圆心  $O$  处的磁感应强度  $B$ .

解: 圆弧在  $O$  点的磁感应强度  $B_1 = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{6R}$

方向垂直纸面向外



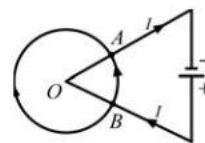
直导线在  $O$  点的磁感应强度  $B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos 60^\circ} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi R}$

方向垂直纸面向里

总场强  $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \right)$  方向垂直纸面向里

14-2. 两根长直导线沿半径方向引到铁环上  $A$ 、 $B$  两点, 并与很远处的电源相连, 如图所示. 求环中心  $O$  点的磁感应强度  $B$ .

解: 设两段圆弧电流对  $O$  的磁感应强度大小分别为  $B_1$ 、



$B_2$ , 导线长度分别为  $L_1$  和  $L_2$ , 横截面积为  $S$ , 电阻

率为  $\rho$ , 电流  $I_1$  和  $I_2$  的关系

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho \frac{L_2}{S}}{\rho \frac{L_1}{S}} = \frac{L_2}{L_1} \quad \text{即} \quad I_1 L_1 = I_2 L_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{L_1} \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 L_1}{r}$$

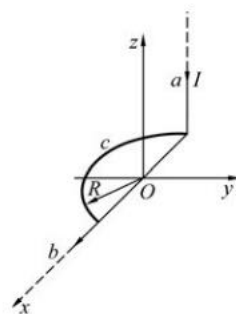
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{L_2} \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_2 L_2}{r}$$

由于两段圆弧电流对  $O$  的磁感应强度方向相反, 所以  $B = 0$

14-3. 无限长细导线弯成如图所示的形状, 其中  $c$  部分是在  $xoy$  平面内半径为  $R$  的半圆, 试求通以电流  $I$  时  $O$  点的磁感应强度。

解: a 段  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

b 段  $B_2 = 0$



$$\text{c 段 } B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$\text{O 点的总场强 } B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{j} + \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k} \quad \text{方向如图}$$

14-4. 无限长直圆柱形导体内有一无限长直圆柱形空腔（如图所示），空腔与导体的两轴线平行，间距为  $a$ ，若导体内的电流密度均匀为  $\mathbf{j}$ ， $\mathbf{j}$  的方向平行于轴线。

求腔内任意点的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

解：采用补偿法，以导体的轴线为圆心，过空腔中任一点作闭合回路

$$\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \mathbf{j} \pi r^2 \quad B_1 = \frac{\mu_0 \mathbf{j} r}{2}$$

同理还是过这一点以空腔导体的轴线为圆心作闭合回路

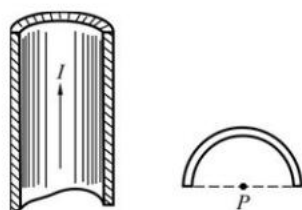
$$\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \mathbf{j} \pi (a-r)^2 \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mathbf{j} (a-r)}{2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{a}$$

14-5. 在半径  $R = 1\text{cm}$  的无限长半圆柱形金属片中，有电流  $I = 5\text{A}$  自下而上通过，如图所示。试求圆柱轴线上一点  $P$  处的磁感应强度的大小。

解：将半圆柱形无限长载流薄片细分成宽为  $d\mathbf{l} = R d\theta$  的长直电流

$$d\mathbf{I} = \frac{d\mathbf{l}}{\pi R} = \frac{d\theta}{\pi}$$



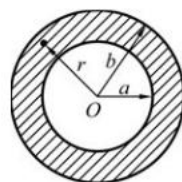
$$\text{在 P 点处的磁感应强度 } dB = \frac{\mu_0 d\mathbf{I}}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$$

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta$$

$$B_x = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.37 \times 10^{-5} \text{T}$$

14-6. 如图所示的空心柱形导体，柱的半径分别为  $a$  和  $b$ ，导体内载有电流  $I$ ，设电流  $I$  均匀分布在导体横截面上。证明导体内部各点 ( $a < r < b$ ) 的磁感应强度  $B$  由下式给出：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$



试以  $a = 0$  的极限情形来检验这个公式， $r \geq b$  时又如何？

解：可根据安培环路定理

$$I' = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \times \pi(r^2 - a^2)$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r}$$

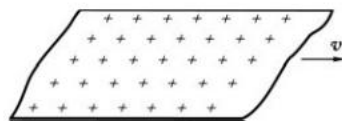
$$a = 0 \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} \quad \text{实心圆柱载流导线内部的磁感应强度}$$

$$r \geq b \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{相当于带电直导线}$$

14-7. 一橡皮传输带以速度  $\mathbf{v}$  匀速向右运动, 如图所示, 橡皮带上均匀带有电荷, 电荷面密度为  $\sigma$ 。

(1) 求橡皮带中部上方靠近表面一点处的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小;

(2) 证明对非相对论情形, 运动电荷的速度  $\mathbf{v}$  及它所产生的磁



场  $\mathbf{B}$  和电场  $\mathbf{E}$  之间满足下述关系:  $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$  (式中  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ )

解: (1) 垂直于电荷运动方向作一个闭合回路  $abcd$ , 根据安培环路定理有

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 Li$$

其中  $i = \sigma v$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$$

(2) 匀速运动的点电荷产生的磁场和电场分别为

$$B = \frac{\mu_0 q v (1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin \theta}{4\pi r^2 (1 - \frac{v^2 \sin^2 \theta}{c^2})^{3/2}} \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2 \sin^2 \theta}{c^2})^{3/2}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\left| \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right| = \frac{v E \sin \theta}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 v \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2 \sin^2 \theta}{c^2})^{3/2}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{\mu_0 q v (1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin \theta}{4\pi r^2 (1 - \frac{v^2 \sin^2 \theta}{c^2})^{3/2}} = B$$

所以  $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$

14-8. 一均匀带电长直圆柱体, 电荷体密度为  $\rho$ , 半径为  $R$ 。若圆柱绕其轴线匀速旋转, 角速度为  $\omega$ , 求:



(1) 圆柱体内距轴线  $r$  处的磁感应强度的大小;

(2) 两端面中心的磁感应强度的大小。

解: (1) 过  $r$  点作一个闭合回路, 此回路的电流

$$I = \int_r^R \omega \rho l r dr = \frac{1}{2} \omega \rho l (R^2 - r^2)$$

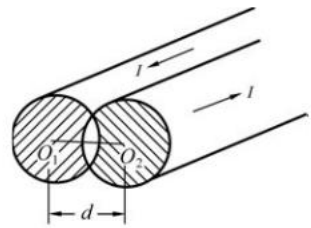
根据安培环路定理  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 \omega \rho}{2} (R^2 - r^2)$$

(2) 带电长直圆柱体旋转相当于螺线管, 端面的磁感应强度是中间磁感应强度的一半,

所以端面的磁感应强度  $B = \frac{\mu_0 \omega \rho R^2}{4}$

14-9. 如图所示, 两无限长平行放置的柱形导体内通过等值、反向电流  $I$ , 电流在两个阴影所示的横截面的面积皆为  $S$ , 两圆柱轴线间的距离  $O_1 O_2 = d$ . 试求两导体中部真空部分的磁感应强度。



解: 利用补偿法, 在真空部分任取一点, 真空部分在那一点产生

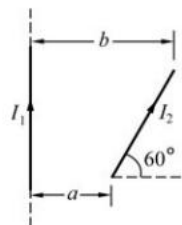
的磁感应强度为  $B_0$ , 其中一个阴影在那一点产生的磁场为  $B_1$ , 另一个为  $B_2$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \frac{I}{S} \pi r^2}{2\pi r} - B_0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \frac{I}{S} \pi (d-r)^2}{2\pi (d-r)} - (-B_0)$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I d}{2S}$$

14-10. 无限长直线电流  $I_1$  与直线电流  $I_2$  共面, 几何位置如图所示. 试求直线电流  $I_2$  受到电流  $I_1$  磁场的作用力。



解: 在直线电流  $I_2$  上任意取一个小电流元  $I_2 dl$ , 此电流元到长直线

的距离为  $x$ , 无限长直线电流  $I_1$  在小电流元处产生的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ}$$

$$F = \int_a^b \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

14-11. 在电视显象管的电子束中, 电子能量为  $12000\text{eV}$ , 这个显像管的取向使电子沿水平方向由南向北运动。该处地球磁场的垂直分量向下, 大小为  $B = 5.5 \times 10^{-5}\text{T}$ , 问: (1) 电子束将偏向什么方向? (2) 电子的加速度是多少? (3) 电子束在显象管内在南北方向上通过  $20\text{cm}$  时将偏转多远?

解: (1) 根据  $f = qv \times B$  可判断出电子束将偏向东

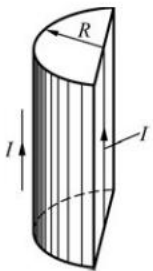
$$(2) E = \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{2E/m}$$

$$f = qvB = ma$$

$$a = \frac{qvB}{m} = \frac{qB}{m} \sqrt{2E/m} = 6.28 \times 10^{14} \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(3) y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{L}{v}\right)^2 = 3\text{mm}$$

14-12. 一半径为  $R$  的无限长半圆柱面导体, 载有与轴线上长直导线的电流  $I$  等值反向的电流, 如图 14-52 所示。试求轴线上长直导线单位长度所受的磁力。



$$\text{解: } dF = Idl \times B \quad \text{而} \quad B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

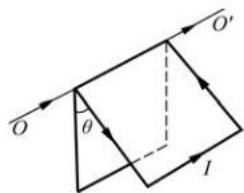
$$\text{故} \quad dF = BI_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2 R^2} dl$$

$$dF_x = dF \cos \theta \quad F_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2 R^2} \cos \theta R d\theta = 0$$

$$dF_y = dF \sin \theta \quad F_y = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2 R^2} \sin \theta R d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi^2 R}$$

$$I_1 = I_2 \quad \text{所以} \quad F_y = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$

14-13. 截面积为  $S$ 、密度为  $\rho$  的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴  $OO'$  转动, 如图 14-53 所示。导线放在方向竖直向上的匀强磁场中, 当导线中的电流为  $I$  时, 导线离开原来的竖直位置偏转一个角度  $\theta$  而平衡。求磁感应强度。



解：设正方形的边长为  $a$ ，质量为  $m$ ， $m = \rho a S$ 。平衡时重力矩等于磁力矩

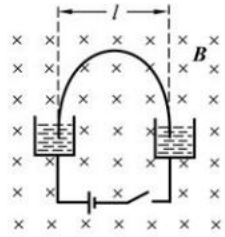
$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \quad \text{磁力矩的大小} \quad M = BIa^2 \sin(90^\circ - \theta) = BIa^2 \cos \theta$$

$$\text{重力矩为} \quad M = mga \sin \theta + 2mg \cdot \frac{a}{2} \sin \theta = 2mga \sin \theta$$

$$\text{平衡时} \quad 2mga \sin \theta = BIa^2 \cos \theta$$

$$B = \frac{2mg}{Ia} \tan \theta = \frac{2\rho Sg}{I} \tan \theta$$

14-14. 有一个  $U$  形导线，质量为  $m$ ，两端浸没在水银槽中，导线水平部分的长度为  $l$ ，处在磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场中，如图 14-54 所示。当接通电源时， $U$  导线就会从水银槽中跳起来。假定电流脉冲的时间与导线上升时间相比可忽略。试由导线跳起所达到的高度  $h$  计算电流脉冲的电荷量  $q$ 。



解：跳起来达到最大高度这个过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$\text{接通电流时有} \quad BIl = m \frac{dv}{dt} \quad \text{而} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\int_0^q Bldq = \int_0^v mdv \quad q = \frac{mv}{Bl} = \frac{m}{Bl} \sqrt{2gh}$$

14-15. 半径为  $R$  的半圆形闭合线圈，载有电流  $I$ ，放在均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，如图 14-55 所示。求

- (1) 线圈所受力矩的大小和方向（以直径为转轴）；
- (2) 若线圈受上述磁场作用转到线圈平面与磁场垂直的位置，则力矩做功为多少？

$$\text{解：(1)} \quad \mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} \quad \mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

$$M = p_m B \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 IB \quad \text{方向为垂直于 } B \text{ 的方向向上}$$

$$(2) \quad W = I\Delta\phi = I(B \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 - 0) = \frac{1}{2} IB \pi R^2$$

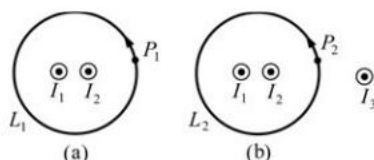
### 思考题

14-1. 在图 (a) 和 (b) 中各有一半半径相同的圆形回路  $L_1$ 、 $L_2$ ，圆周内有电流  $I_1$ 、 $I_2$ ，

其分布相同，且均在真空中，但在 (b) 图中  $L_2$  回路外有电流  $I_3$ ， $P_1$ 、 $P_2$  为两圆形回路上的对应点，则：

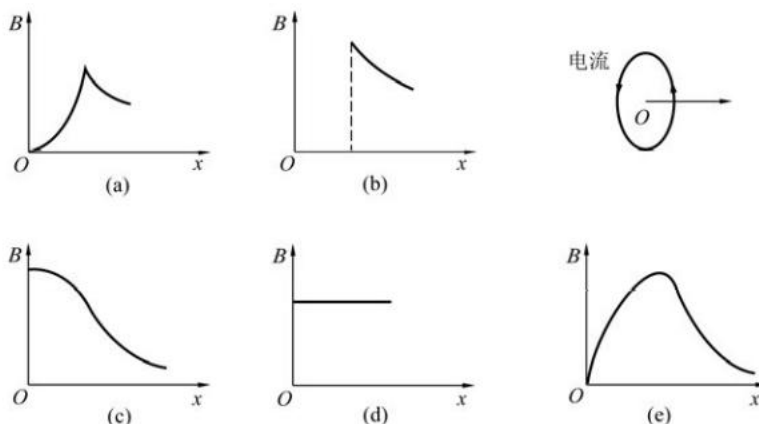
$$(A) \oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad B_{P_1} = B_{P_2}; \quad (B) \oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad B_{P_1} = B_{P_2};$$

$$(C) \oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad B_{P_1} \neq B_{P_2}; \quad (D) \oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad B_{P_1} \neq B_{P_2}.$$



答:  $B$  的环流只与回路中所包围的电流有关, 与外面的电流无关, 但是回路上的磁感应强度却是所有电流在那一点产生磁场的叠加。所以 C 对。

14-2. 哪一幅图线能确切描述载流圆线圈在其轴线上任意点所产生的  $B$  随  $x$  的变化关系? ( $x$  坐标轴垂直于圆线圈平面, 原点在圆线圈中心  $O$ )



答: 载流圆线圈在其轴线上任意点所产生的磁感应强度  $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$

$$x=0 \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad x \gg R \quad B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$

根据上述两式可判断 C 图对

14-3. 取一闭合积分回路  $L$ , 使三根载流导线穿过它所围成的面. 现改变三根导线之间的相互间隔, 但不越出积分回路, 则:

(A) 回路  $L$  内的  $\sum I$  不变,  $L$  上各点的  $B$  不变;

(B) 回路  $L$  内的  $\sum I$  不变,  $L$  上各点的  $B$  改变;

(C) 回路  $L$  内的  $\sum I$  改变,  $L$  上各点的  $B$  不变;

(D) 回路  $L$  内的  $\sum I$  改变,  $L$  上各点的  $B$  改变.

答: B 对

14-4. 一载有电流  $I$  的细导线分别均匀密绕在半径为  $R$  和  $r$  的长直圆筒上形成两个螺线管 ( $R = 2r$ ), 两螺线管单位长度上的匝数相等. 两螺线管中的磁感应强度大小  $B_R$  和  $B_r$  应满足:

(A)  $B_R = 2B_r$ ; (B)  $B_R = B_r$ ; (C)  $2B_R = B_r$ ; (D)  $B_R = 4B_r$ .

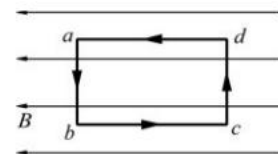
答：对于长直螺线管  $B = \mu_0 nI$ ，由于两螺线管单位长度上的匝数相等，所以两螺线管磁感应强度相等。

14-5. 均匀磁场的磁感应强度  $B$  垂直于半径为  $r$  的圆面。今以该圆周为边线，作一半球面  $S$ ，则通过  $S$  面的磁通量的大小为多少？

答：  $\phi = B\pi r^2$

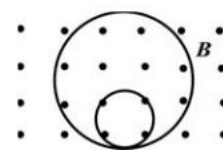
14-6. 如图，匀强磁场中有一矩形通电线圈，它的平面与磁场平行，在磁场作用下，线圈向什么方向转动？

答：  $ab$  受力方向垂直纸面向里，  $cd$  受力向外，在力偶矩的作用下，  $ab$  垂直纸面向里运动，  $cd$  垂直纸面向外运动，从上往下看，顺时针旋转。



14-7. 一均匀磁场，其磁感应强度方向垂直于纸面，两带电粒子在磁场中的运动轨迹如图所示，则

- (A) 两粒子的电荷必然同号；
- (B) 粒子的电荷可以同号也可以异号；
- (C) 两粒子的动量大小必然不同；
- (D) 两粒子的运动周期必然不同。



答： 应该选 B

## 习题

15-1. 一圆柱形无限长导体，磁导率为  $\mu$ ，半径为  $R$ ，通有沿轴线方向的均匀电流  $I$ 。

求：

(1) 导体内任一点的  $H$ 、 $B$  和  $M$ ；(2) 导体外任一点的  $H$ 、 $B$ 。

解：(1)  $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I'$  而  $I' = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$

$$H = \frac{Ir}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{\mu_r I r}{2\pi R^2} - \frac{I r}{2\pi R^2} = \frac{I r (\mu_r - 1)}{2\pi R^2}$$

(2)  $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$$

15-2. 螺绕环平均周长  $l = 10\text{cm}$ ，环上绕有线圈  $N = 200$  匝，通有电流  $I = 100\text{mA}$ 。

试求：(1) 管内为空气时  $B$  和  $H$  的大小；

(2) 若管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4200$  的磁介质， $B$  和  $H$  的大小。

解：(1)  $B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I = 4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 10^{-3} = 2.5 \times 10^{-4} \text{T}$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 200 \text{ A/m}$$

(2)  $H = \frac{N}{L} I = 200 \text{ A/m}$

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 4200 \times 200 = 1.05 \text{T}$$

15-3. 螺绕环内通有电流  $20\text{A}$ ，环上所绕线圈共  $400$  匝，环的平均周长为  $40\text{cm}$ ，环内磁感应强度为  $1.0\text{T}$ ，计算：

(1) 磁场强度；(2) 磁化强度；(3) 磁化率；(4) 和相对磁导率。

解：  $H = \frac{N}{L} I = \frac{400}{0.4} \times 20 = 2 \times 10^4 \text{ A/m}$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} - 2 \times 10^4 = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 = \frac{B}{\mu_0 H} - 1 = 38.8$$

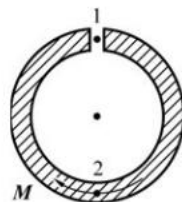


$$\text{磁化面电流密度 } \sigma_s = M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$$

$$\text{磁化面电流 } i_s = \sigma_s L = 7.76 \times 10^5 \times 0.4 = 3.1 \times 10^5 \text{ A}$$

$$\mu_r = \chi_m + 1 = 38.8 + 1 = 39.8$$

15-4. 一永磁环的磁化强度为  $M$ ，磁环上开有一很窄的细缝。求图中 1、2 点处的磁感应强度  $B$  值和磁场强度  $H$  值。



$$\text{解: } M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

$$H_1 \neq H_2$$

$$\text{由于是一个永磁环 } \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{所以 } H_2 = 0$$

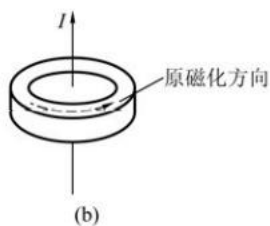
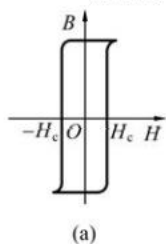
$$B_1 = B_2 = \mu_0 M$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = M$$

15-5. 图 a 为铁氧体材料的  $B-H$  磁滞曲线，图 b 为此材料制成的计算机存贮元件的环形磁芯。磁芯的内、外半径分别为 0.5mm 和 0.8mm，矫顽力为  $H_c = \frac{500}{\pi} \text{ A/m}$ 。设磁芯的磁化方向如图 b 所示，欲使磁芯的磁化方向翻转，试问：

(1) 轴向电流如何加？至少加至多大时，磁芯中磁化方向开始翻转？

(2) 若加脉冲电流，则脉冲峰值至少多大时，磁芯中从内而外的磁化方向全部翻转？



$$\text{解: (1) } H_c = \frac{i_{\max}}{2\pi r_{\text{内}}}$$

$$i_{\max} = 2\pi r_{\text{内}} H_c = 2\pi \times 0.5 \times 10^{-3} \times \frac{500}{\pi} = 0.5 \text{ A}$$

$$(2) i_{\max} = 2\pi r_{\text{外}} H_c = 2\pi \times 0.8 \times 10^{-3} \times \frac{500}{\pi} = 0.8 \text{ A}$$

### 思考题

15-1. 何谓顺磁质、抗磁质和铁磁质，它们的区别是什么？

答：顺磁质：磁介质在磁场中磁化后，产生的附加磁场的方向与原来的磁场方向相同。

抗磁质：磁介质在磁场中磁化后，产生的附加磁场的方向与原来的磁场方向相反。

铁磁质：磁介质在磁场中磁化后，产生的附加磁场的方向与原来的磁场方向相同，并且附加磁场远远大于原来磁场。

15-2. 将电介质与磁介质加以比较.

答：略

15-3. 何谓磁滞回线？

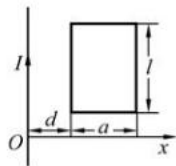
答：对于铁磁质来说，磁感应强度  $B$  随磁场强度  $H$  的变化而变化所形成的闭合曲线就叫磁滞回线。见教材 P107 页图 15-11。

15-4. 在两个分界面，磁感应强度和磁场强度的关系如何？

答：在两个分界面磁场强度的法向分量是连续的，磁感应强度的法向分量不连续。

## 习题

16-1. 直导线中通以交流电, 如图所示, 置于磁导率为  $\mu$  的介质中, 已知:  $I = I_0 \sin \omega t$ , 其中  $I_0$ 、 $\omega$  是大于零的常量. 求: 与其共面的  $N$  匝矩形回路中的感应电动势.

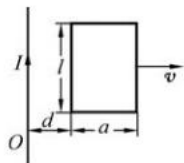


解:  $B = \frac{\mu I}{2\pi x}$

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N\mu I_0 \omega l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \cos \omega t$$

16-2. 如图所示, 长直导线中通有电流  $I = 5.0A$ , 在与其相距  $d = 0.5cm$  处放有一矩形线圈, 共 1000 匝, 设线圈长  $l = 4.0cm$ , 宽  $a = 2.0cm$ . 不计线圈自感, 若线圈以速度  $v = 3.0cm/s$  沿垂直于长导线的方向向右运动, 线圈中的感生电动势多大?

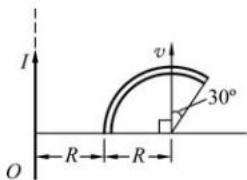


解:  $\varepsilon_{ab} = NB_2 lv$        $\varepsilon_{dc} = NB_1 lv$

$$\varepsilon = \varepsilon_{dc} - \varepsilon_{ab}$$

$$= NB_1 lv - NB_2 lv = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) lv = \frac{\mu_0 I a l v N}{2\pi d(d+a)} = 1.92 \times 10^{-4}$$

16-3. 电流为  $I$  的无限长直导线旁有一弧形导线, 圆心角为  $120^\circ$ , 几何尺寸及位置如图所示. 求当圆弧形导线以速度  $v$  平行于长直导线方向运动时, 弧形导线中的动生电动势.



解: 连接  $AO$ 、 $OB$ , 圆弧形导线与  $AO$ 、 $OB$  形成闭合回路, 闭合回路的电动势为 0, 所以圆弧形导线电动势与  $AOB$  直导线的电动势相等.

$$\varepsilon_{AO} = \int v \times B \cdot dl = - \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I v}{2\pi x} dx = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 2$$

$$\varepsilon_{OB} = \int v \times B \cdot dl = - \int_{2R}^R \frac{\mu_0 I v}{2\pi x} dx = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{5}{4}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AO} + \varepsilon_{OB} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{5}{2}$$

16-4. 电阻为  $R$  的闭合线圈折成半径分别为  $a$  和  $2a$  的两个圆, 如图所示,



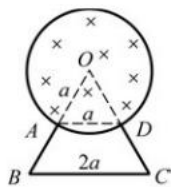
将其置于与两圆平面垂直的匀强磁场内, 磁感应强度按  $B = B_0 \sin \omega t$  的规律变化。已知

$a = 10\text{cm}$ ,  $B_0 = 2 \times 10^{-2}\text{T}$ ,  $\omega = 50\text{rad/s}$ ,  $R = 10\Omega$ , 求线圈中感应电流的最大值。

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{R} \cdot [-\pi a^2 + \pi(2a)^2] \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{3\pi a^2 B_0 \omega \cos \omega t}{R}$$

$$I_{\max} = \frac{3\pi a^2 B_0 \omega}{R} = \frac{3\pi \times 0.1^2 \times 2 \times 10^{-2} \times 50}{10} = 9.42 \times 10^{-3}\text{A}$$

16-5. 如图所示, 半径为  $a$  的长直螺线管中, 有  $\frac{dB}{dt} > 0$  的磁场, 一直导线弯成等腰梯形的闭合回路  $ABCD$ , 总电阻为  $R$ , 上底为  $a$ , 下底为  $2a$ , 求: (1)  $AD$  段、 $BC$  段和闭合回路中的感应电动势; (2)  $B$ 、 $C$  两点间的电势差  $U_B - U_C$ 。



解:  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$E_1 = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB}{dt} \quad r < a$$

$$E_2 = -\frac{a^2}{2r} \cdot \frac{dB}{dt} \quad r > a$$

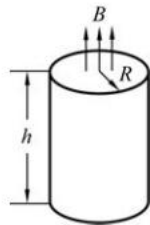
$$\begin{aligned} \varepsilon_{AD} &= \int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int E \cos \theta dl \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{a^2 - (a/2)^2}}{r} dl \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \varepsilon_{BC} = \int \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\pi a^2}{6} \frac{dB}{dt}$$

$$\text{整个闭合回路的电动势 } \varepsilon = \varepsilon_{BC} - \varepsilon_{AD} = \left( \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \right) \frac{dB}{dt} \quad \text{逆时针方向}$$

$$U_B - U_C = -\left( \frac{\pi + \sqrt{3}}{10} \right) a^2 \frac{dB}{dt}$$

16-6. 圆柱形匀强磁场中同轴放置一金属圆柱体, 半径为  $R$ , 高为  $h$ , 电阻率为  $\rho$ , 如图所示。若匀强磁场以  $\frac{dB}{dt} = k (k > 0, k \text{ 为恒量})$  的规律变化,



求圆柱体内涡电流的热功率。

解：在圆柱体内任取一个半径为  $r$ ，厚度为  $dr$ ，高为  $h$  的小圆柱通壁

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

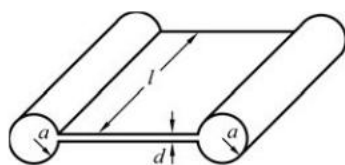
$$\text{电阻 } R = \rho \frac{2\pi r}{h dr}$$

$$dP = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{h}{\rho} \frac{dB}{dt} \cdot r dr$$

$$P = \int_0^R \frac{\pi h}{2\rho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot r^3 dr = \frac{\pi h k^2 R^4}{8\rho}$$

16-7. 将金属薄片弯成如图所示回路，两端为半径为  $a$  的圆柱面，中间是边长为  $l$ ，间隔为  $d$  的两正方形平面，且  $l \gg a$ ， $a \gg d$ 。(1) 试求该回路的自感系数；(2) 若沿圆柱面的轴向加变化磁场

$B = B_0 + kt$ ，试求回路中的电流  $I(t)$ 。(回路中的电阻很小，可忽略不计)



$$\text{解：(1) } B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{I}{l}$$

$$\begin{aligned} W &= wV = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot \pi a^2 l + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot l^2 d \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{l} \pi a^2 + \frac{1}{2} \mu_0 I^2 d \end{aligned}$$

$$\text{根据 } W = \frac{1}{2} LI^2$$

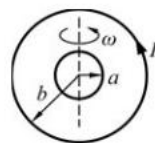
$$L = \frac{2\mu_0 \pi a^2}{l} + \mu_0 d$$

$$(2) \varepsilon = L \frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \quad d\Phi = S \cdot dB$$

$$I = \frac{S}{L} \int k dt = \frac{2\pi a^2 + ld}{\frac{2\mu_0 \pi a^2}{l} + \mu_0 d} kt = -\frac{lkt}{\mu_0}$$

16-8. 一螺绕环，每厘米绕 40 匝，铁心截面积  $3.0\text{cm}^2$ ，磁导率  $\mu = 200\mu_0$ ，绕组中通有电流  $5.0\text{mA}$ ，环上绕有二匝次级线圈，求：(1) 两

绕组间的互感系数；(2) 若初级绕组中的电流在  $0.10\text{s}$  内由  $5.0\text{A}$  降低到 0，次级绕组中的互感电动势。



$$\text{解：(1) } B = \mu nI \quad \Phi = NBS = N\mu nIS$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = N\mu nS = 2 \times 200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 10^2 \times 3 \times 10^{-4} = 6.03 \times 10^{-4} H$$

$$(2) \quad \varepsilon = M \frac{dI}{dt} = 6.03 \times 10^{-4} \times \frac{5-0}{0.1} = 3.02 \times 10^{-2} V$$

16-9. 如图, 半径分别为  $b$  和  $a$  的两圆形线圈 ( $b \gg a$ ), 在  $t=0$  时共面放置, 大圆形线圈通有稳恒电流  $I$ , 小圆形线圈以角速度  $\omega$  绕竖直轴转动, 若小圆形线圈的电阻为  $R$ ,

求: (1) 当小线圈转过  $90^\circ$  时, 小线圈所受的磁力矩的大小; (2) 从初始时刻转到该位置的过程中, 磁力矩所做功的大小。

解:  $B = \frac{\mu_0 I}{2b}$  任一时间穿过小线圈的磁通量  $\Phi = B\pi a^2 \cos \omega t$

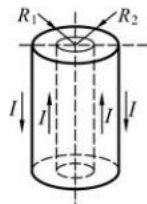
$$\text{小线圈的感应电流 } i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B\omega\pi a^2}{R} \sin \omega t$$

$$\text{当 } \omega t = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } p_m = i\pi a^2 = \frac{B\omega\pi^2 a^4}{R}$$

$$M = Bp_m = \frac{B^2\omega\pi^2 a^4}{R} = \frac{\mu_0^2 I^2 \omega \pi^2 a^4}{4Rb^2}$$

$$W = \int i\pi a^2 B d\theta = \frac{B^2\omega\pi a^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{B^2\omega\pi^2 a^4}{R} = \frac{\mu_0^2 I^2 \omega \pi^3 a^4}{16Rb^2}$$

16-10. 一同轴电缆由中心导体圆柱和外层导体圆筒组成, 两者半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 导体圆柱的磁导率为  $\mu_1$ , 筒与圆柱之间充以磁导率为  $\mu_2$  的磁介质。电流  $I$  可由中心圆柱流出, 由圆筒流回。求每单位长度电缆的自感系数。



解:  $B_1 = \frac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2} \quad r < R_1$

$$B_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \quad R_1 < r < R_2$$

$$W_m = \int \frac{B^2}{2\mu} dV = \int \frac{B_1^2}{2\mu_1} dV + \int \frac{B_2^2}{2\mu_2} dV$$

$$= \frac{1}{2\mu_1} \left[ \int_0^{R_1} \left( \frac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \right] + \left[ \frac{1}{2\mu_2} \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \right]$$

$$= \frac{\mu_1 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_2 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m = LI^2 / 2$$

$$\text{单位长度自感 } L = \frac{\mu_1}{8\pi} + \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

16-11. 一电感为  $2.0\text{H}$ ，电阻为  $10\Omega$  的线圈突然接到电动势  $\mathcal{E} = 100\text{V}$ ，内阻不计的电源上，在接通  $0.1\text{s}$  时，求：（1）磁场总储存能量的增加率；（2）线圈中产生焦耳热的速率；（3）电池组放出能量的速率。

$$\text{解：（1） } I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 3.9\text{A}$$

$$W(t) = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = LI \cdot \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} I e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) e^{-\frac{R}{L}t} = 238\text{J/s}$$

$$\text{（2） } P = I^2 R = 3.9^2 \times 10 = 152\text{J/s}$$

$$\text{（3） 电池组放出能量的速率 } P = I\mathcal{E} = 390\text{J/s}$$

16-12. 在一对巨大的圆形极板（电容  $C = 1.0 \times 10^{-12}\text{F}$ ）上，加上频率为  $50\text{Hz}$ ，峰值为  $1.74 \times 10^5\text{V}$  的交变电压，计算极板间位移电流的最大值。

$$\text{解： } I_D = C \frac{dU}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t \quad \omega = 2\pi f$$

$$I_{Dm} = \omega C U_m = 2\pi f C U_m = 2\pi \times 50 \times 1.0 \times 10^{-12} \times 1.74 \times 10^5 = 5.46 \times 10^{-5}\text{A}$$

### 思考题

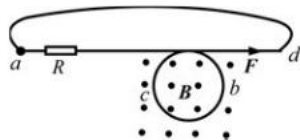
16-1. 图为用冲击电流计测量磁极间磁场的装置。小线圈与冲击电流计相接，线圈面积为  $A$ ，匝数为  $N$ ，电阻为  $R$ ，其法向  $\vec{n}$  与该处磁场方向相同，将小线圈迅速取出磁场时，冲击电流计测得感应电量为  $q$ ，试求小线圈所在位置的磁感应强度。

$$\text{解： } q = \int I dt = \frac{1}{R} \int \mathcal{E} dt = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{NBA}{R}$$

$$B = \frac{Rq}{NA}$$



16-2. 图中  $abcd$  电路有电阻  $R$ ，其中  $bc$  段的一部分绕成圆形，圆形区域有一与回路平面垂直的均匀磁场  $B$ ，在圆形导线的一边施加恒力  $F$ ，由于  $a$  端固定，假定该圆开始的半径为  $r_0$ ，并维持以圆形的方式收缩，设导线非常柔软，忽略导线的质量，问需要多长的时间圆形部分完全闭合？



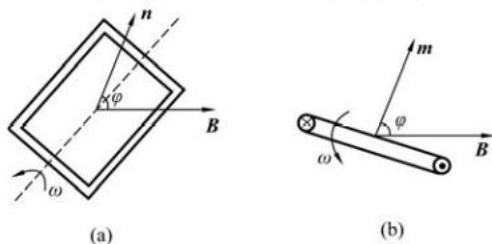


答:  $t = \frac{2\pi B^2}{3RF} r_0^3$

16-3. 在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场内, 有一面积为  $S$  的矩形线框, 线框回路的电阻为  $R$  (忽略自感), 线框绕其对称轴以匀角速度  $\omega$  旋转 (如图所示)。

(1) 求在如图位置时线框所受的磁力矩为多大?

(2) 为维持线框匀角速度转动, 外力矩对线框每转一周需作的功为多少?



答:  $\Phi = BS \cos \varphi = BS \cos \omega t$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} BS \omega \sin \omega t$$

$$p_m = IS = \frac{1}{R} BS^2 \omega \sin \omega t$$

$$M = B p_m \sin \omega t = \frac{1}{R} B^2 S^2 \omega \sin^2 \omega t$$

$$W = \int M d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} B^2 S^2 \omega \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{R} B^2 S^2 \omega \pi$$

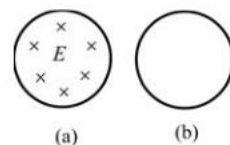
16-4. 一平板电容器充电以后断开电源, 然后缓慢拉开电容器两极板的间距, 则拉开过程中两极板间的位移电流为多大? 若电容器两端始终维持恒定电压, 则在缓慢拉开电容器两极板间距的过程中两极板间有无位移电流? 若有位移电流, 则它的方向怎样?

答:  $I_d = C \frac{dU}{dt}$ ,

16-5. 图 a 为一量值随时间减小, 方向垂直纸面向内的变化电场, 均匀分布在圆柱形区域内. 试在图 b 中画出:

(1) 位移电流的大致分布和方向;

(2) 磁场的大致分布和方向。



答: 略

16-6. 试写出与下列内容相应的麦克斯韦方程的积分形式:

(1) 电力线起始于正电荷终止于负电荷;

(2) 磁力线无头无尾;

(3) 变化的电场伴有磁场;

(4) 变化的磁场伴有电场。

解: (1)  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i$

(2)  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$$(3) \oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_c + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(4) \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

## 习题

17-1. 已知电磁波在空气中的波速为  $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，试计算下列各种频率的电磁波在空气中的波长：(1) 上海人民广播电台使用的一种频率  $\nu = 990 \text{ kHz}$ ；(2) 我国第一颗人造地球卫星播放东方红乐曲使用的无线电波的频率  $\nu = 20.009 \text{ MHz}$ ；(3) 上海电视台八频道使用的图像载波频率  $\nu = 184.25 \text{ MHz}$ 。

解：  $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$$(1) \lambda = \frac{3 \times 10^8}{990 \times 10^3} = 303 \text{ m}$$

$$(2) \lambda = \frac{3 \times 10^8}{20.009 \times 10^6} = 14.99 \text{ m}$$

$$(3) \lambda = \frac{3 \times 10^8}{184.25 \times 10^6} = 1.63 \text{ m}$$

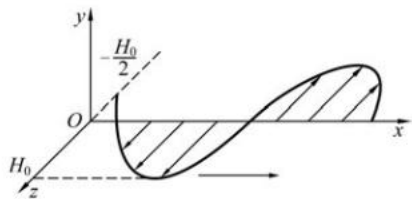
17-2. 一电台辐射电磁波，若电磁波的能量均匀分布在以电台为球心的球面上，功率为  $10^5 \text{ W}$ 。求离电台  $10 \text{ km}$  处电磁波的坡因廷矢量和电场分量的幅值。

解：  $S = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^5}{4\pi \times 10000^2} = 7.96 \times 10^{-5} \text{ J/m}^2 \cdot \text{s}$

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \quad \sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \quad E^2 = \frac{1}{2} E_0^2$$

所以  $E_m = (2S \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}})^{1/2} = 2.45 \times 10^{-2} \text{ V/m}$

17-3. 真空中沿  $x$  正方向传播的平面余弦波，其磁场分量的波长为  $\lambda$ ，幅值为  $H_0$ 。在  $t = 0$  时刻的波形如图所示。(1) 写出磁场分量的波动表达式；(2) 写出电场分量的波动表达式，并在图中画出  $t = 0$  时刻的电场分量波形；(3) 计算  $t = 0$  时， $x = 0$  处的坡因廷矢量。



解：(1) 设  $H = H_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi)$

$$t = 0, x = 0 \text{ 时 } H = -\frac{H_0}{2}$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2} \quad \varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$$

根据波形曲线可以判断出  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\pi}{3}) = H_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x) + \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$(2) \quad E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H = \mu_0 c H = \mu_0 c H_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) + \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$(3) \quad t=0, x=0 \text{ 时} \quad H = \frac{H_0}{2} \quad E = \frac{\mu_0 c H_0}{2}$$

$$S = EH = \frac{\mu_0 c H_0^2}{4} \quad \text{方向沿 } x \text{ 轴正向}$$

17-4. 氦氖激光器发出的圆柱形激光束, 功率为 10mW, 光束截面直径为 2mm. 求该激光的最大电场强度和磁感应强度.

$$\text{解: } S = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{3.14 \times 10^{-6}} = 3.18 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

$$E_m = (2S \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}})^{1/2} = 1.529 \times 10^3 \text{ V/m}$$

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m \quad B_m = \mu_0 H_m = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} H_m = 4.30 \times 10^{-6} \text{ T}$$

### 思考题

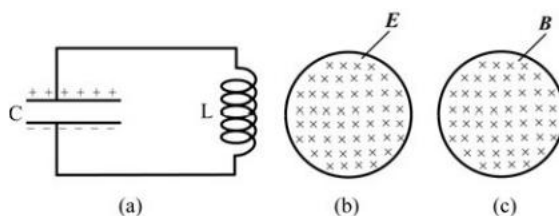
17-1. 试述电磁波的性质.

- (1) 电磁波是横波 , ;
- (2)  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  同相位 ;
- (3)  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  数值成比例  $\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$  ;

- (4) 电磁波传播速度  $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  , 真空中波速  $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$  等于光速 .

17-2. 图 a 为一 LC 电路,  $C$  为圆形平行板电容器,  $L$  为长直螺线管, 图 b 及图 c 分别表示电容器放电时平行板电容器的电场分布和螺线管内的磁场分布.

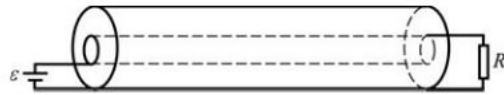
- (1) 在图 b 内画出电容器内部的磁场分布和坡因廷矢量分布.
- (2) 在图 c 内画出螺线管内部的电场分布和坡因廷矢量分布.



答: 略

17-3. 如图所示, 同轴电缆内外半径分别为  $a$  和  $b$ , 用来作为电源  $\varepsilon$  和电阻  $R$  的传输线, 电缆本身的电阻忽略不计.

- (1) 求电缆中任一点 ( $a < r < b$ ) 处的坡因廷矢量  $\mathbf{S}$  .
- (2) 求通过电缆横截面的能流, 该结果说明什么物理图象?



解： 在导体内部，场强为 0，在两圆桶之间

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} \quad \text{方向沿径向}$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} \quad \text{方向沿圆周的切向}$$

$$S = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{b}{a}} \quad \text{沿电缆轴线方向}$$

表明电源向负载提供的能量是通过坡因廷矢量传递的

## 习题

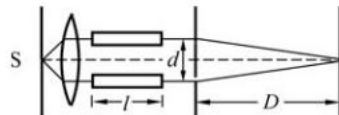
18-1. 杨氏双缝的间距为  $0.2\text{mm}$ ，距离屏幕为  $1\text{m}$ ，求：(1) 若第一到第四明纹距离为  $7.5\text{mm}$ ，求入射光波长。(2) 若入射光的波长为  $6000\text{\AA}$ ，求相邻两明纹的间距。

解：(1) 根据条纹间距的公式：
$$\Delta x = \Delta k \frac{D\lambda}{d} = 3 \times \frac{1 \times \lambda}{2 \times 10^{-4}} = 0.0075\text{m}$$

所以波长为： $\lambda = 5000\text{\AA}$

(2) 若入射光的波长为  $6000\text{\AA}$ ，相邻两明纹的间距：
$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{1 \times 6000 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-4}} = 3\text{mm}$$

18-2. 图示为用双缝干涉来测定空气折射率  $n$  的装置。实验前，在长度为  $l$  的两个相同密封玻璃管内都充以一大气压的空气。现将上管中的空气逐渐抽去，(1) 则光屏上的干涉条纹将向什么方向移动；(2) 当上管中空气完全抽到真空，发现屏上波长为  $\lambda$  的干涉条纹移过  $N$  条。计算空气的折射率。

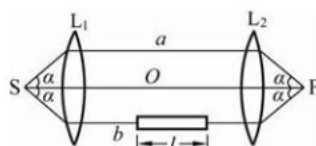


解：(1) 当上面的空气被抽去，它的光程减小，所以它将通过增加路程来弥补，所以条纹向下移动。

(2) 当上管中空气完全抽到真空，发现屏上波长为  $\lambda$  的干涉条纹移过  $N$  条。可列出： $l(n-1) = N\lambda$

解得：
$$n = \frac{N\lambda}{l} + 1$$

18-3. 在图示的光路中， $S$  为光源，透镜  $L_1$ 、 $L_2$  的焦距都为  $f$ ，求(1)图中光线  $SaF$  与光线  $SOF$  的光程差为多少？(2)



若光线  $SbF$  路径中有长为  $l$ ，折射率为  $n$  的玻璃，那么该光线与  $SOF$  的光程差为多少？

解：(1) 图中光线  $SaF$  与光线  $SOF$  的几何路程相同，介质相同，所以  $SaF$  与光线  $SoF$  光程差为 0。

(2) 若光线  $SbF$  路径中有长为  $l$ ，折射率为  $n$  的玻璃，那么光程差为几何路程差与介质折射率差的乘积，即  $l(n-1)$

18-4. 在玻璃板（折射率为 1.50）上有一层油膜（折射率为 1.30）。已知对于波长为  $500\text{nm}$  和  $700\text{nm}$  的垂直入射光都发生反射相消，而这两波长之间没有别的波长光反射相消，求此油膜的厚度。

解：油膜上、下两表面反射光的光程差为  $2ne$ ，由反射相消条件有  $2ne = (2k+1)\lambda/2 = (k+1/2)\lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) ①

当  $\lambda_1 = 5000\text{\AA}$  时，有  $2ne = (k_1 + 1/2)\lambda_1 = k_1\lambda_1 + 2500$  ②

$$\text{当 } \lambda_2 = 7000 \text{ \AA} \text{ 时, 有 } 2ne = (k_2 + 1/2) \lambda_2 = k_2 \lambda_2 + 3500 \quad (3)$$

因  $\lambda_2 > \lambda_1$ , 所以  $k_2 < k_1$ ; 又因为  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  之间不存在  $\lambda_3$  满足  $2ne = (k_3 + 1/2) \lambda_3$  式  
即不存在  $k_2 < k_3 < k_1$  的情形, 所以  $k_2$ 、 $k_1$  应为连续整数, 即  $k_2 = k_1 - 1 \quad (4)$

由②、③、④式可得:

$$k_1 = (k_2 \lambda_2 + 1000) / \lambda_1 = (7k_2 + 1) / 5 = [7(k_1 - 1) + 1] / 5$$

$$\text{得 } k_1 = 3 \quad k_2 = k_1 - 1 = 2$$

$$\text{可由②式求得油膜的厚度为 } e = (k_1 \lambda_1 + 2500) / (2n) = 6731 \text{ \AA}$$

18-5. 一块厚  $1.2 \mu\text{m}$  的折射率为  $1.50$  的透明膜片。设以波长介于  $400 \sim 700 \text{nm}$  的可见

光. 垂直入射, 求反射光中哪些波长的光最强?

解: 由反射干涉相长公式有

$$2ne + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\text{得 } \lambda = 4ne / (2k - 1) = (4 \times 1.5 \times 12000) / (2k - 1) = 72000 / (2k - 1) \text{ \AA}$$

$$k=6, \lambda = 6550 \text{ \AA}; \quad k=7, \lambda = 5540 \text{ \AA};$$

$$k=8, \lambda = 4800 \text{ \AA}; \quad k=9, \lambda = 4240 \text{ \AA};$$

18-6. 用  $\lambda = 589.3 \text{nm}$  的光垂直入射到楔形薄透明片上, 形成等厚条纹, 已知膜片的折射率为  $1.52$ , 等厚条纹相邻纹间距为  $5.0 \text{mm}$ , 求楔形面间的夹角.

$$\text{解: 等厚条纹相邻纹间距为: } l = \frac{\lambda}{2\theta n} = \frac{589.3 \times 10^{-9}}{2 \times 1.52 \theta} = 5.0 \times 10^{-3}$$

$$\text{所以 } \theta = 0.002^\circ$$

18-7. 人造水晶珐琅戒是用玻璃(折射率为  $1.50$ )做材料, 表面镀上一氧化硅(折射率为  $2.0$ )以增强反射。要增强  $\lambda = 560 \text{nm}$  垂直入射光的反射, 求镀膜厚度。

解: 由反射干涉相长公式有

$$2ne + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots) \quad \text{当 } k=1 \text{ 时, 为膜的最小厚度。}$$

$$\text{得 } e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{560 \times 10^{-9}}{4 \times 2} = 0.07 \mu\text{m}$$

18-8. 由两平玻璃板构成的一密封空气劈尖, 在单色光照射下, 形成  $4001$  条暗纹的等厚干涉, 若将劈尖中的空气抽空, 则留下  $4000$  条暗纹。求空气的折射率。

$$\text{解: } 2nd = k\lambda = 4001\lambda \quad (1)$$

$$2d = k'\lambda = 4000\lambda \quad ②$$

由①/②得

$$n = \frac{4001}{4000} = 1.00025$$

18-9. 用钠灯 ( $\lambda = 589.3\text{nm}$ ) 观察牛顿环, 看到第  $k$  条暗环的半径为  $r = 4\text{mm}$ , 第  $k + 5$  条暗环半径  $r = 6\text{mm}$ , 求所用平凸透镜的曲率半径  $R$ 。

解: 由牛顿环暗环公式  $r = \sqrt{kR\lambda}$

$$\text{据题意有 } r = \sqrt{kR\lambda} = 4\text{mm}; \quad r = \sqrt{(k+5)R\lambda} = 6\text{mm}$$

所以:  $k=4$ , 代入上式, 可得:  $R=6.79\text{m}$

18-10. 当把折射率为  $n = 1.40$  的薄膜放入迈克尔逊干涉仪的一臂时, 如果产生了 7.0 条条纹的移动, 求薄膜的厚度。(已知钠光的波长为  $\lambda = 589.3\text{nm}$ )。

解: 设插入薄膜的厚度为  $d$ , 则相应光程差变化为

$$2(n-1)d = \Delta N\lambda$$

$$\therefore d = (\Delta N\lambda) / (2(n-1)) = (7 \times 589.3 \times 10^{-10}) / (2(1.4-1)) \\ = 5.154 \times 10^{-6} \text{ m}$$

### 思考题

18-1 在劈尖的干涉实验中, 相邻明纹的间距\_\_\_\_\_ (填相等或不等), 当劈尖的角度增加时, 相邻明纹的间距离将\_\_\_\_\_ (填增加或减小), 当劈尖内介质的折射率增加时, 相邻明纹的间距离将\_\_\_\_\_ (填增加或减小)。

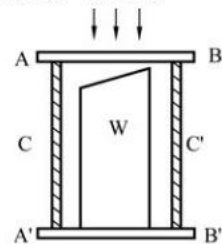
答: 根据相邻条纹的间距:  $l = \frac{\lambda}{2\theta n}$  条纹间距相等;

当劈尖的角度增加时, 相邻明纹的间距离将减小。

当劈尖内介质的折射率增加时, 相邻明纹的间距离将减小。

18-2. 图示为一干涉膨胀仪示意图, 上下两平行玻璃板用一对热膨胀系数极小的石英柱支撑着, 被测样品  $W$  在两玻璃板之间, 样品上表面与玻璃板下表面间形成一空气劈尖, 在以波长为  $\lambda$  的单色光照射下, 可以看到平行的等厚干涉条纹。当  $W$  受热膨胀时, 条纹将

- (A) 条纹变密, 向右靠拢;
- (B) 条纹变疏, 向上展开;
- (C) 条纹疏密不变, 向右平移;
- (D) 条纹疏密不变, 向左平移。;

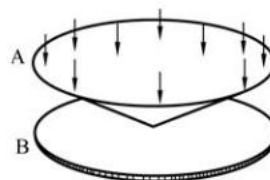




答：根据相邻条纹的间距： $l = \frac{\lambda}{2\theta n}$ ，只要劈尖角不变，间距不变。

由于W受热膨胀时，厚度变化，所以当厚度向左平移，则相应的条纹也向左平移。  
选择（D）。

18-3. 如图所示，在一块光学平玻璃片B上，端正地放一锥顶角很大的圆锥形平凸透镜A，在A、B间形成劈尖角 $\varphi$ 很小的空气薄层。当波长为 $\lambda$ 的单色平行光垂直地射向平凸透镜时，可以观察到在透镜锥面上出现干涉条纹。



- (1) 画出于干涉条纹的大致分布并说明其主要特征；
- (2) 计算明暗条纹的位置；
- (3) 若平凸透镜稍向左倾斜，干涉条纹有何变化？用图表示。

答：(1) 图略，分析：这是一个牛顿环和劈尖的综合体，所以它的形状类似于牛顿环，也属于等厚干涉。

- (2) 计算明暗条纹的位置；

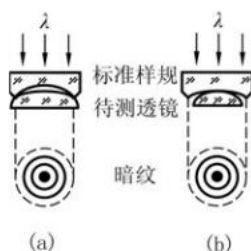
明条纹： $2ne + \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$

暗条纹： $2ne + \frac{\lambda}{2} = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

- (3) 若平凸透镜稍向左倾斜，干涉条纹将不再是对称的圆环，而是左密右疏的类圆环。

图示略。

18-4. 若待测透镜的表面已确定是球面，可用观察等厚条纹半径变化的方法来确定透镜球面半径比标准样规所要求的半径是大还是小。如图，若轻轻地从上面向下按样规，则图\_\_\_\_\_中的条纹半径将缩小，而图\_\_\_\_\_中的条纹半径将增大。



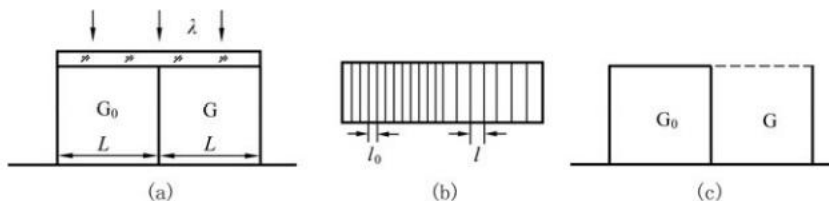
答：设工件为L，标准样规为G。若待测工件表面合格，则L与G之间无间隙，也就没有光圈出现。如果L的曲率R太小（如图b），则L与G的光圈很多，轻压后中心仍然为暗斑，但条纹半径要减小；如果L的曲率R太大（如图a），则L与G的光圈除边缘接触，中间部分形成空气膜，轻压后中心斑点明暗交替变化，而且所有光圈向外扩展。

18-5. 图a为检查块规的装置， $G_0$ 为标准块规，G为上端面待测的块规，用波长为 $\lambda$ 的平行光垂直照射，测得平晶与块规之间空气劈尖的干涉条纹如图所示，对于与 $G_0$ 和G的条

纹间距分别为  $l_0$  和  $l$ ，且  $l_0 < l$ 。若将  $G$  转过  $180^\circ$ ，两侧条纹均比原来密。

(1) 判断并在图 c 中画出  $G$  规上端面的形貌示意图；

(2) 求  $G$  规左、右侧与  $G_0$  的高度差。

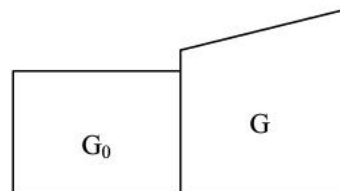


答：(1) 根据相邻条纹的间距： $l = \frac{\lambda}{2\theta}$  对于  $G_0$  和  $G$

的条纹间距分别为  $l_0$  和  $l$ ， $l_0 < l$ ，可知  $\theta_0 > \theta$ 。将  $G$

转过  $180^\circ$ ，两侧条纹均比原来密，即角度变大了，所以

图中  $G$  的形状为：



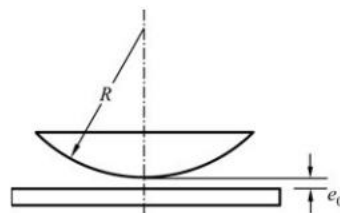
(2) 求  $G$  规左、右侧与  $G_0$  的高度差。

$$h_{\text{左}} = L \sin \theta_0 = \frac{\lambda L}{2l_0} \quad h_{\text{右}} = L \sin \theta = h_{\text{左}} + \frac{\lambda L}{2l} = \frac{\lambda L}{2l_0} + \frac{\lambda L}{2l}$$

18-6. 牛顿环装置中平凸透镜与平板玻璃间留有一厚度为  $e_0$  的气隙，若已知观测所用的单色光波长为  $\lambda$ ，平凸透镜的曲率半径为  $R$ 。

(1) 试导出  $k$  级明条纹和暗条纹的公式；

(2) 若调节平凸透镜与平板玻璃靠近，试述此过程中牛顿环将如何变化？



(3) 试判别在调节过程中，在离开中心  $r$  处的牛顿环某干涉

条纹宽度  $\Delta r_k$  与  $e$  的厚度有无关系？叙述简明理由，并算出在该处的条纹宽度。

答：(1) 与牛顿环计算相似：

$$\text{明条纹: } 2(e + e_0) + \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\text{暗条纹: } 2(e + e_0) + \frac{\lambda}{2} = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=1,2,\dots)$$

(2) 若调节平凸透镜与平板玻璃靠近，则厚度向边缘走动，根据等厚条纹的定义，相应

的条纹也要向边缘移动，即条纹扩展。

(3) 在调节过程中，在离开中心  $r$  处的牛顿环某干涉条纹宽度  $\Delta r_k$  与  $e$  的厚度有关系

根据 
$$e = \frac{r^2}{2R}$$

比如暗环半径： 
$$2\left(\frac{r^2}{2R} + e_0\right) = k\lambda \quad r = \sqrt{(k\lambda - 2e_0) R}$$

那么 
$$\Delta r = \sqrt{[(k+1)\lambda - 2e_0]R} - \sqrt{(k\lambda - 2e_0) R}$$

由于平方根的存在，所以  $e_0$  不能抵消，对条纹宽度产生影响。

18-7. 登月宇航员声称在月球上唯独能够用肉眼分辨地球上的人工建筑是中国的长城。  
你依据什么可以判断这句话是否真的？需要哪些数据？  
(略)

## 习题

19-1. 波长为  $546\text{nm}$  的平行光垂直照射在缝宽为  $0.437\text{mm}$  的单缝上，缝后有焦距为  $40\text{cm}$  的凸透镜，求透镜焦平面上出现的衍射中央明纹的线宽度。

解：中央明纹的线宽即为两个暗纹之间的距离

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\lambda}{a}$$

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2x}{f}$$

利用两者相等，所以：
$$2x = \frac{2\lambda f}{a} = \frac{2 \times 546 \times 10^{-9} \times 0.4}{0.437 \times 10^{-3}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{m}$$

19-2. 波长为  $500\text{nm}$  和  $520\text{nm}$  的两种单色光同时垂直入射在光栅常数为  $0.002\text{cm}$  的光栅上，紧靠光栅后用焦距为  $2\text{m}$  的透镜把光线聚焦在屏幕上。求这两束光的第三级谱线之间的距离。

解：两种波长的第三谱线的位置分别为  $x_1, x_2$

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad \sin \varphi = \tan \varphi = \frac{x}{f}$$

$$x_1 = \frac{3f\lambda_1}{a} \quad x_2 = \frac{3f\lambda_2}{a}$$

所以：
$$\Delta x = |x_1 - x_2| = 0.006\text{m}$$

19-3. 在通常的环境中，人眼的瞳孔直径为  $3\text{mm}$ 。设人眼最敏感的光波长为  $\lambda = 550\text{nm}$ ，人眼最小分辨角为多大？如果窗纱上两根细丝之间的距离为  $2.0\text{mm}$ ，人在多远处恰能分辨。

解：最小分辨角为：
$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} = 2.2 \times 10^{-4} \text{rad}$$

如果窗纱上两根细丝之间的距离为  $2.0\text{mm}$ ，人在多远处恰能分辨。

$$\theta = \frac{l}{s} = 2.2 \times 10^{-4} \text{rad}, \text{ 当 } l = 2\text{mm}, \text{ 可得: } s = 9.1\text{m}$$

19-4. 已知氯化钠晶体的晶面距离  $d = 0.282\text{nm}$ ，现用波长  $\lambda = 0.154\text{nm}$  的 X 射线射向晶体表面，观察到第一级反射主极大，求 X 射线与晶体所成的掠射角。

解：
$$d \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{第一级即 } k=0.$$

$$\varphi = \sin \varphi = \frac{\lambda}{2d} = 0.276\text{rad}$$

19-5. 如能用一光栅在第一级光谱中分辨在波长间隔  $\Delta\lambda = 0.18\text{nm}$ ，发射中心波长为

$\lambda = 656.3nm$  的红双线, 则该光栅的总缝数至少为多少?

解: 根据瑞利判据:  $k\lambda = \frac{kN-1}{N}(\lambda + \Delta\lambda)$

$$653.6 = \frac{N-1}{N}(653.6 + 0.18) \quad \text{所以 } N=3647。$$

19-6. 一缝间距  $d=0.1mm$ , 缝宽  $a=0.02mm$  的双缝, 用波长  $\lambda = 600nm$  的平行单色光垂直入射, 双缝后放一焦距为  $f=2.0m$  的透镜, 求: (1) 单缝衍射中央亮条纹的宽度内有几条干涉主极大条纹; (2) 在这双缝的中间再开一条相同的单缝, 中央亮条纹的宽度内又有几条干涉主极大?

解:  $a \sin \varphi = \pm k\lambda$  所以中央亮条纹位置为:  $2x = 2 \frac{f\lambda}{a} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} = 0.12m$

中央明条纹位于: 中心位置的上下方各  $0.06m$  处。

而干涉条纹的条纹间距为:  $\Delta x = \frac{f\lambda}{d} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-4}} = 0.012m$

中央明条纹在中心位置的上下方各  $0.006m$  的位置上, 第  $K$  级明条纹的位置为:

$$x = 0.006 + k \times 0.012 < 0.06 \quad \text{所以对应的 } k=4,$$

即在单缝衍射中央亮条纹的宽度内有 9 条干涉主极大条纹 (两边各四条+中央明纹)。

(2) 在这双缝的中间再开一条相同的单缝,

干涉条纹的条纹间距将变为:  $\Delta x = \frac{f\lambda}{\frac{1}{2}d} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{0.5 \times 10^{-4}} = 0.024m$

中央明条纹在中心位置的上下方各  $0.012m$  的位置上, 第  $K$  级明条纹的位置为:

$$x = 0.012 + k \times 0.024 < 0.06 \quad \text{所以对应的 } k=2,$$

即在单缝衍射中央亮条纹的宽度内有 5 条干涉主极大条纹 (两边各两条+中央明纹)。

19-7 一个平面透射光栅, 当用光垂直入射时, 能在  $30^\circ$  角的衍射方向上得到  $600nm$  的第二级主极大, 并且第二级主极大能分辨  $\Delta\lambda = 0.05nm$  的两条光谱线, 但不能得到  $400nm$  的第三级主极大, 求: (1) 此光栅的透光部分的宽度  $a$  和不透光部分的宽度  $b$ ; (2) 此光栅的总缝数  $N$ 。

解: (1) 利用:  $(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda$

根据题意:  $30^\circ$  角的衍射方向上得到  $600nm$  的第二级主极大, 所以:

$$a+b = 2 \frac{\lambda}{\sin\varphi} = 2 \times \frac{600}{\frac{1}{2}} = 2400nm$$

不能得到  $400nm$  的第三级主极大: 说明第三级条纹缺级。

由缺级的定义可得到:  $\frac{a+b}{a} = 3$

所以:  $a=800nm$ ,  $b=1600nm$ 。

(2) 根据瑞利判据:  $k\lambda = \frac{kN-1}{N}(\lambda + \Delta\lambda)$

$$2 \times 600 = \frac{2N-1}{N}(600 + 0.05)$$

所以:  $N=6000$ 。

19-8 波长 400nm 到 750nm 的白光垂直照射到某光栅上, 在离光栅 0.50m 处的光屏上测得第一级彩带离中央明条纹中心最近的距离为 4.0cm, 求: (1) 第一级彩带的宽度; (2) 第三级的哪些波长的光与第二级光谱的光相重合。

解: (1) 衍射光栅中  $x = (2k+1) \frac{\lambda}{2a}$

波长越小, 则离中央明纹就越近, 所以:  $0.04 = 3 \times \frac{400 \times 10^{-7}}{2a}$

那么 750nm 的波长的第一级条纹位置在:  $x = 3 \times \frac{750 \times 10^{-7}}{2a} = 0.075m$

第一级彩带的宽度:  $\Delta x = 0.075 - 0.04 = 0.035m = 3.5cm$

(2) 第二级的 750nm 的波长对应的光的位置:  $x_2 = 5 \times \frac{750 \times 10^{-7}}{2a} = 0.125m$

第三级中有一部分和它将重合:  $x_3 = 7 \times \frac{\lambda}{2a} = \frac{7}{3} \times 10^3 \lambda \leq 0.125m$

对应的波长为 400——500nm 的波

19-9 如要用衍射光谱区别氢原子巴尔末系第 11 条和第 12 条谱线, 光栅的分辨本领应为多大? 如光栅常数为每毫米 200 条的光栅, 要想在第 2 级中能分辨这两条谱线, 这光栅的宽度至少多宽? (提示: 巴尔末系第 11 条和第 12 条谱线由量子数  $n$  分别为 13 和 14 到  $n=2$  的跃迁所产生。)

解: (1) 根据瑞利判据: 光栅的分辨本领为  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ , 只要知道它们的波长就可以了。

$n$  从 13 $\rightarrow$ 2:  $\tilde{\nu} = R [1/2^2 - 1/13^2] = (3/4)R$ ,  $\lambda_2 = 676 / (165R)$

$n$  从 14 $\rightarrow$ 2:  $\tilde{\nu} = R [1/2^2 - 1/14^2] = (5/36)R$ ,  $\lambda_3 = (49) / (12R)$

所以:  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} = 300$

(2) 根据瑞利判据:  $k\lambda = \frac{kN-1}{N}(\lambda + \Delta\lambda)$

$k=2$ , 所以:  $2 \times 3722 = \frac{2N-1}{N} \times 3734$  得出:  $N=151$  条,

如光栅常数为每毫米 200 条的光栅, 那么只要光栅的宽度为:  $\frac{151}{200} = 0.75mm$  就可以满足要求了。

19-10 用每毫米 500 条栅纹的光栅, 观察钠光光谱 ( $\lambda = 5900 \text{ \AA}$ )。问: (1) 光线垂直入射; (2) 光线以入射角  $30^\circ$  入射时, 最多能看到几级条纹?

解：(1) 正入射时， $d = \frac{10^{-3}}{500} = 2 \times 10^{-6} m$        $d \sin \varphi = \pm k \lambda$

所以当  $\sin \varphi = 1$ ，对应的级次（取整数）最大： $k = \frac{d}{\lambda} = 3$

能看到的条纹为：3, 2, 1, 0, -1, -2, -3。

(2) 斜入射时， $d (\sin \varphi \pm \sin \theta) = \pm k \lambda$

所以当  $\sin \varphi + \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$ ，对应的级次（取整数）最大： $k = \frac{3d}{2\lambda} = 5$

当  $\sin \varphi + \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ，对应的级次（取整数）最小： $k = -\frac{d}{2\lambda} = -1$

能看到的条纹为：5, 4, 3, 2, 1, 0, -1。

### 思考题

19-1. 要分辨出天空遥远的双星，为什么要用直径很大的天文望远镜？

答：最小分辨角为： $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，它的倒数为分辨本领，当D越大， $\theta$  越小，那么分辨本领就越大。所以用的天文望远镜的直径很大，提高了分辨本领。

19-2. 使用蓝色激光在光盘上进行数据读写较红色激光有何优越性？

答：最小分辨角为： $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，它的倒数为分辨本领，当  $\lambda$  越小， $\theta$  越小，那么分辨本领就越大。所以用的蓝色光比红色光好，提高了分辨本领。

19-3. 光栅形成的光谱较玻璃棱镜形成的色散光谱有何不同？

答：两者都是分光元件。不同点：

(1) 光栅光谱有一系列的级次，每一级次都有正负两套光谱，零级光谱因波长重合而不能分光；而棱镜光谱只有一套零级光谱，相对强度大。

(2) 低级次的光栅光谱波长与衍射角近似有正比关系，称为匀排光谱；而棱镜光谱的波长与角度为非线性关系，不是匀排光谱。

19-4. 孔径相同的微波望远镜和光学望远镜相比较，哪个分辨本领大？为什么？

答：最小分辨角为： $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，它的倒数为分辨本领，当  $\lambda$  越小， $\theta$  越小，那么分辨本领就越大。由于微波的波长大于光波的波长，所以光波望远镜的分辨本领大。

19-5. 登月宇航员声称在月球上唯独能够用肉眼分辨地球上的人工建筑是中国的长城。  
你依据什么可以判断这句话是否真的？需要哪些数据？

答：可以根据瑞利判据。



## 习题

20-1. 从某湖水表面反射来的日光正好是完全偏振光, 已知湖水的折射率为1.33。推算太阳在地平面上的仰角, 并说明反射光中光矢量的振动方向。

解: 由布儒斯特定律

$$\alpha = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan 1.33 = 53^\circ$$

$$\pi - \frac{\alpha}{2} = 37^\circ$$

在反射光中振动方向为与入射面垂直。

20-2. 自然光投射到叠在一起的两块偏振片上, 则两偏振片的偏振化方向夹角为多大才能使:

- (1) 透射光强为入射光强的1/3;
- (2) 透射光强为最大透射光强的1/3. (均不计吸收)

解: 设夹角为  $\alpha$ , 则透射光强  $I = I_0 \cos^2 \alpha$

通过第一块偏振片之后, 光强为:  $1/2 I_0$ . 通过第二块偏振片之后:  $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$

由题意透射光强为入射光强的1/3得

$I = I_0/3$  则

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \alpha = 35.26^\circ$$

同样由题意当透射光强为最大透射光强的1/3时, 也就是透射光强为入射光强的 1/6, 可得:  $\alpha = 54.74^\circ$

20-3. 设一部分偏振光由一自然光和一线偏振光混合构成。现通过偏振片观察到这部分偏振光在偏振片由对应最大透射光强位置转过  $60^\circ$  时, 透射光强减为一半, 试求部分偏振光中自然光和线偏振光两光强各占的比例。

解:  $I_{\max} = \frac{1}{2} I_0 + I_1$

$$\frac{1}{2} I_{\max} = I_0 + I_1 \cos^2 60^\circ$$

即得  $I_0 : I_1 = 1:1$

20-4. 由钠灯射出的波长为 589.0nm 的平行光束以  $50^\circ$  角入射到方解石制成的晶片上,

晶片光轴垂直于入射面且平行于晶片表面, 已知折射率  $n_o = 1.65$ ,  $n_e = 1.486$ , 求

- (1) 在晶片内 o 光与 e 光的波长;
- (2) o 光与 e 光两光束间的夹角.

解:由  $n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_c}{\lambda_n}$

$$\therefore \lambda_o = \frac{\lambda_c}{n_o} = \frac{589.0}{1.65} = 356.97nm \quad \lambda_e = \frac{\lambda_c}{n_e} = \frac{589.0}{1.486} = 396.37nm$$

$$n_o = \frac{\sin 50^\circ}{\sin \varphi_o}$$

$$\varphi_o = \arcsin \frac{\sin 50^\circ}{n_o} = 27.66^\circ \quad \varphi_e = \arcsin \frac{\sin 50^\circ}{n_e} = 31.03^\circ$$

$$\Delta\varphi = 3.37^\circ$$

20-5. 在偏振化方向正交的两偏振片  $P_1, P_2$  之间, 插入一晶片, 其光轴平行于表面且与起偏器的偏振化方向成  $35^\circ$ , 求

(1) 由晶片分成的 o 光和 e 光强度之比;

(2) 经检偏器  $P_2$  后上述两光的强度之比。

解: (1) 由晶片分成的 o 光的振幅:  $A_o = A \sin \theta$       e 光的振幅:  $A_e = A \cos \theta$

强度之比为振幅的平方比, 所以:  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 0.49$

(2) 经检偏器后上述两光中 o 光的振幅:  $A_o = A \sin \theta \cos \theta$

e 光的振幅:  $A_e = A \cos \theta \sin \theta$

也就是振幅相同, 所以强度之比为 1: 1。

20-6. 把一个楔角为  $0.33^\circ$  的石英劈尖(光轴平行于棱)放在偏振化方向正交的两偏振片之间。用  $\lambda = 654.3nm$  的红光垂直照射, 并将透射光的干涉条纹显示在屏上。已知石英的折射率  $n_o = 1.5419$ ,  $n_e = 1.5509$ , 计算相邻干涉条纹的间距。

解: 选择劈尖的暗条纹, 则条纹位置为:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d + \pi = (2k+1) \pi$$

$$(n_e - n_o) d = k\lambda$$

那么这样的劈尖的相邻干涉条纹的间距：
$$\Delta d = \frac{\lambda}{(n_e - n_o) \theta} = 12.6 \text{ mm}$$

### 思考题

20-1. 用偏振片怎样来区分自然光、部分偏振光和线偏振光？

答:将光通过偏振片，光强无变化的为自然光；光强有变化但不会出现完全消光的为部分偏振光；光强有变化且在某个方向为零的为线偏振光。

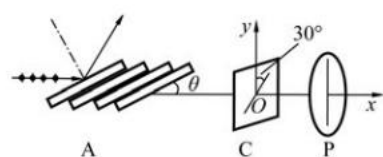
20-2. 如图所示，玻璃片堆 A 的折射率为  $n$ ，二分之一波片 C 的光轴与  $y$  轴夹角为  $30^\circ$ ，

偏振片 P 的偏振化方向沿  $y$  轴方向，自然光沿水平方向入射。

(1) 欲使反射光为完全偏振光，玻璃片堆 A 的倾角  $\theta$  应为多少？在图中画出反射光的偏振态；

(2) 若将部分偏振光看作自然光与线偏振光两部分的叠加，则经过 C 后线偏振光的振动面有何变化？说明理由；

(3) 若透射光中自然光的光强为  $I$ ，偏振光的光强为  $3I$ ，计算透过 P 后的光强。



答：(1) 根据马吕斯定律： $\alpha = \arctan n$ ， $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 。

(2) 椭圆偏振光

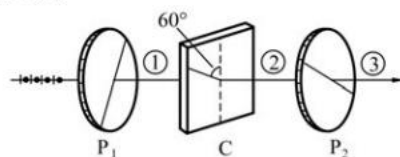
(3) 可用相干叠加公式计算。(略)

20-3. 在图示的装置中， $P_1$ 、 $P_2$  为两个正交的偏振片，C 为四分之一波片，其光轴与  $P_1$  的

偏振化方向间夹角为  $60^\circ$ ，强度为  $I$  的单色自然光垂直入射于  $P_1$ 。

(1) 试述①、②、③各区光的偏振态；

(2) 计算①、②、③各区的光强。



答：(1) ①区：为线偏振光；②区为椭圆偏振光；③区为椭圆偏振光。

(2) ①区光强： $\frac{1}{2} I_0$

②区的光强：O 光的光强： $I_o = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \theta = \frac{3}{8} I_0$

e 光的光强： $I_e = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta = \frac{1}{8} I_0$

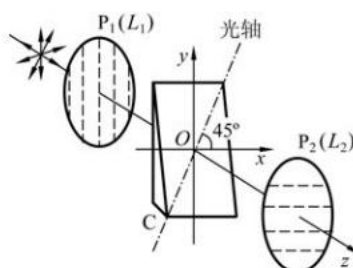
③区的光强： $I_o = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{3}{32} I_0$   $I_e = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{3}{32} I_0$

两者发生干涉现象，并且干涉加强： $I = I_o + I_e = \frac{3}{16} I_0$

20-4. 如图所示的偏振光干涉装置中,  $C$  是劈尖角很小的双折射晶片, 折射率  $n_e > n_o$ ,

$P_1$ 、 $P_2$  的偏振化方向相互正交, 与光轴方向皆成  $45^\circ$  角。若以波长为  $\lambda$  的单色自然光垂直照射, 试讨论:

- (1) 通过晶片  $C$  不同厚度处出射光的偏振态;
- (2) 经过偏振片  $P_2$  的出射光干涉相长及相消位置与劈尖厚度  $d$  之间的关系, 并求干涉相长的光强与入射光光强之比;
- (3) 若转动  $P_2$  到与  $P_1$  平时, 干涉条纹如何变化? 为什么?



答: (1) 通过晶片  $C$  不同厚度处出射光的偏振态为圆偏振光。

(2) 这是一个劈尖干涉的情况, 所以列式:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o) d + \pi = 2k\pi \quad (\text{明条纹})$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o) d + \pi = (2k + 1)\pi \quad (\text{暗条纹})$$

$$\text{干涉相长时的光强: } I = I_o + I_e = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{4} I_0$$

干涉相长的光强与入射光光强之比为: 1: 4

(3) 若转动  $P_2$  到与  $P_1$  平时, 相位差中的  $\pi$  就没有了, 所以干涉条纹中明暗条纹互换位置。

## 习题

21-1. 测量星体表面温度的方法之一是将其看作黑体，测量它的峰值波长 $\lambda_m$ ，利用维恩定律便可求出 $T$ 。已知太阳、北极星和天狼星的 $\lambda_m$ 分别为 $0.50 \times 10^{-6} \text{ m}$ ， $0.43 \times 10^{-6} \text{ m}$ 和 $0.29 \times 10^{-6} \text{ m}$ ，试计算它们的表面温度。

解： 维恩定律  $T\lambda_m = b$  其中  $b = 2.898 \times 10^{-3}$

$$\text{太阳} \quad T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{0.5 \times 10^{-6}} = 5796 \text{ K}$$

$$\text{北极星} \quad T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{0.43 \times 10^{-6}} = 6740 \text{ K}$$

$$\text{天狼星} \quad T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{0.29 \times 10^{-6}} = 9993 \text{ K}$$

21-2. 宇宙大爆炸遗留在宇宙空间的均匀背景辐射相当于温度为 $3\text{ K}$ 的黑体辐射，试计算：

- (1) 此辐射的单色辐出度的峰值波长；
- (2) 地球表面接收到此辐射的功率。

$$\text{解： (1) } T\lambda_m = b \quad \lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{3} = 9.66 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$(2) \quad P = S\sigma T^4 = 4\pi \times (6370 \times 10^3)^2 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 3^4 = 2.34 \times 10^9 \text{ W}$$

21-3. 已知 $2000\text{ K}$ 时钨的辐出度与黑体的辐出度之比为 $0.259$ 。设灯泡的钨丝面积为 $10\text{ cm}^2$ ，其他能量损失不计，求维持灯丝温度所消耗的电功率。

解：消耗的功率等于辐出度

$$P = 0.259 S \sigma T^4 = 0.259 \times 10 \times 10^{-4} \times 5.67 \times 10^{-8} \times 2000^4 = 235 \text{ W}$$

21-4. 天文学中常用热辐射定律估算恒星的半径。现观测到某恒星热辐射的峰值波长为 $\lambda_m$ ；辐射到地面上单位面积的功率为 $W$ 。已测得该恒星与地球间的距离为 $l$ ，若将恒星看作黑体，试求该恒星的半径。（维恩常量 $b$ 和斯特藩常量 $\sigma$ 均为已知）

$$\text{解：} \quad T\lambda_m = b \quad M = \sigma T^4$$

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = W \cdot 4\pi l^2$$

由上得 
$$r = \frac{l_m^2}{b^2} \sqrt{\frac{W}{\sigma}}$$

21-5. 分别求出红光 ( $\lambda = 7 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ), X 射线 ( $\lambda = 0.25 \text{ \AA}$ ),  $\gamma$  射线 ( $\lambda = 1.24 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ ) 的光子的能量、动量和质量。

解:由公式 
$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad E = mc^2 \quad P = \frac{h}{\lambda}$$

红光: 
$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{7 \times 10^{-7}} = 2.84 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{7 \times 10^{-7}} = 9.47 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{2.84 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} = 3.16 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

X 射线: 
$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.25 \times 10^{-10}} = 7.956 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.25 \times 10^{-10}} = 2.65 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{7.956 \times 10^{-15}}{(3 \times 10^8)^2} = 8.84 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

$\gamma$  射线: 
$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.24 \times 10^{-12}} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.24 \times 10^{-12}} = 5.35 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1.6 \times 10^{-13}}{(3 \times 10^8)^2} = 1.78 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

21-6. 100W 钨丝灯在1800K 温度下工作。假定可视其为黑体, 试计算每秒钟内, 在  $5000 \text{ \AA}$  到  $5001 \text{ \AA}$  波长间隔内发射多少个光子?

解: 设钨丝灯的发射面积为  $S$ , 由斯特藩-玻耳兹曼定律可得辐射总功率  $P = \sigma T^4 \cdot S$

$$S = \frac{P}{\sigma T^4} = 1.68 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

单位时间内从黑体辐射出的在  $\Delta\lambda$  范围内的能量为

$$P_{\Delta\lambda} = M_{\lambda}(T) \cdot \Delta\lambda \cdot S = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot \Delta\lambda \cdot S$$

波长为  $500nm$  的光子的能量为  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$

设每秒发射出  $N$  个光子, 则有  $P_{\Delta\lambda} = N\varepsilon$

$$N = \frac{P_{\Delta\lambda}}{\varepsilon} = \frac{2\pi c \lambda^{-4} S \Delta\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = 5.7 \times 10^{13}$$

21-7. 波长为  $1\text{\AA}$  的 X 光在石墨上发生康普顿散射, 如在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处观察散射光。试求:

(1) 散射光的波长  $\lambda'$ ;

(2) 反冲电子的运动方向和动能。

解:(1)  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$  而  $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0.024262\text{\AA}$

$$\lambda' = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1.024262\text{\AA}$$

(2) 由动量守恒定律, 在  $y$  轴方向上  $0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - p_e \sin\varphi$  (1)

由余弦定理得  $p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda'\lambda_0} \cos\theta$  (2)

由 (2) 式可得  $p_e = 9.26 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

$$\sin\varphi = \frac{h}{p_e \lambda'} \sin\theta = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.26 \times 10^{-24} \times 1.024262 \times 10^{-10}} \sin\frac{\pi}{2} = 0.699$$

$$\varphi = 44.35^\circ$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 291 \text{ eV}$$

21-8. 在氢原子被外来单色光激发后发出的巴尔末系中, 仅观察到三条光谱线, 试求这三条谱线的波长以及外来光的频率。

解: 由于观察到三条谱线, 最高能级为  $n = 5$

$$5 \rightarrow 2 \quad \frac{1}{\lambda_1} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

$$\lambda_1 = 4.34 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$4 \rightarrow 2 \quad \frac{1}{\lambda_2} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)$$

$$\lambda_2 = 4.86 \times 10^{-7} m$$

$$3 \rightarrow 2 \quad \frac{1}{\lambda_3} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

$$\lambda_3 = 6.563 \times 10^{-7} m$$

$$\gamma = \frac{E_5 - E_1}{h} = \frac{-0.544 - (-13.6)}{6.63 \times 10^{-34}} \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.15 \times 10^{15} Hz$$

21-9. 一个氢原子从  $n=1$  的基态激发到  $n=4$  的能态。

(1) 计算原子所吸收的能量；

(2) 若原子回到基态，可能发射哪些不同能量的光子？

(3) 若氢原子原来静止，则从  $n=4$  直接跃回到基态时，计算原子的反冲速率。

$$\text{解: (1) } \Delta E = \frac{E_1}{4^2} - E_1 = \frac{-13.6}{16} - (-13.6) = 12.75 eV$$

$$(2) E_1 = -13.6 eV \quad E_2 = -3.4 eV \quad E_3 = -1.5 eV \quad E_4 = -0.85 eV$$

$$4-1 \quad \Delta E = E_4 - E_1 = 12.75 eV$$

$$4-2 \quad \Delta E = E_4 - E_2 = 2.55 eV$$

$$4-3 \quad \Delta E = E_4 - E_3 = 0.65 eV$$

$$3-2 \quad \Delta E = E_3 - E_2 = 1.9 eV$$

$$3-1 \quad \Delta E = E_3 - E_1 = 12.1 eV$$

$$2-1 \quad \Delta E = E_2 - E_1 = 10.2 eV$$

$$(3) \quad h\nu = E_5 - E_1 \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$u = \frac{P}{m_H} = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_4 - E_1}{m_H c} = \frac{12.75 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^8} = 4.07 m/s$$

21-10. 砷化镓半导体激光器 (GaAlAs), 发射  $\lambda = 8.0 \times 10^3 nm$  红外光, 功率为 5.0mW, 计算光子的产生率.

解: 设每秒钟发射的光子数为  $n$

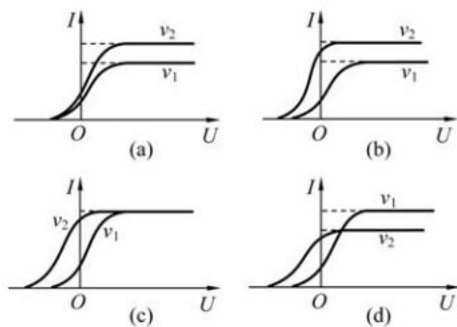
$$P = nh\nu$$

$$n = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 8.0 \times 10^3 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 2.01 \times 10^{17}$$



### 思考题

21-1. 在光电效应实验中，用光强相同、频率分别为 $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 的光做伏安特性曲线。已知 $\nu_2 > \nu_1$ ，那么它们的伏安特性曲线应该是图？



答：图（C）

21-2. 试比较光电效应与康普顿效应之间的异同。

答：光电效应和康普顿效应都通过光和物质的相互作用过程揭示了光具有粒子性的一面。光电效应揭示了光子能量与频率的关系，康普顿效应则进一步揭示了光子动量与波长的关系。两者区别源于产生这两效应的能量范围大不相同，光电效应中光子的波长在光学范围，能量的数量级是几个eV，金属中电子逸出功的数量级是1eV。在线性光学范围内的光电效应中，入射光子能量大于或等于逸出功时，一个电子吸收一个光子，电子和光子系统的能量守恒，而因电子受束缚，系统的动量不守恒；康普顿效应中的光子在X射线波段，具有 $10^4$ eV数量级的能量，相对来说电子逸出功和电子热运动的能量都可以忽略，原子的外层电子可看作是自由的、静止的。所以康普顿效应反映的是高能光子和低能自由态电子间的弹性碰撞问题，系统的能量和动量都守恒。

21-3. 用可见光照射能否使基态氢原子受到激发？为什么？

答：使基态氢原子受到激发所需要的最小能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{13.6}{4} - (-13.6) = 10.2 \text{ eV}$$

而可见光的最大能量为  $E = h\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4000 \times 10^{-10} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 3.1 eV$

所以用可见光照射不能使基态氢原子受到激发

21-4. 氢原子的赖曼系是原子由激发态跃迁至基态而发射的谱线系, 为使处于基态的氢原子发射此线系中最大波长的谱线, 则向该原子提供的能量至少应为多少?

答: 氢原子的赖曼系是从受激态往基态发射光子, 此线系中最大波长是从  $n = 2$  向基态发射的, 故  $\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{13.6}{4} - (-13.6) = 10.2 eV$

21-5. 用玻尔氢原子理论判断, 氢原子巴尔末系(向第 1 激发态跃迁而发射的谱线系)中最小波长与最大波长之比为多少?

答:  $\frac{1}{\lambda} = R_c \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

$n = \infty$  时波长最小用  $\lambda_1$  表示,  $n = 3$  时波长最大用  $\lambda_2$  表示

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4}{R_c} \cdot \frac{5R_c}{36} = \frac{5}{9}$$

21-6. 根据氢原子理论推导类氢离子(核电荷数为  $Ze$ , 核外只剩最后一个电子)轨道半径, 电子绕核运动的线速度及原子的能级和电子跃迁时所发射单色光的频率公式。

答: 应用牛顿定律和库仑定律得:  $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$

根据量子化条件  $L = mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$r_n = n^2 \left( \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \left( \frac{m Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right)$$

$$\tilde{\gamma}_{nk} = Z^2 R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = k + 1$$

## 习题

22-1. 计算下列客体具有10MeV动能时的物质波波长, (1)电子; (2) 质子。

解: (1) 电子高速运动, 设电子的总能量可写为:  $E = E_k + m_0c^2$  用相对论公式,

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad \text{可得}$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{(E_k + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{ch}{\sqrt{E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k}}$$

$$= \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{(10 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})^2 + 2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \times 10 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}}$$

$$= 1.2 \times 10^{-13} \text{ m}$$

(2) 对于质子, 利用德布罗意波的计算公式即可得出:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 10 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 9.1 \times 10^{-15} \text{ m}$$

22-2. 计算在彩色电视显像管的加速电压作用下电子的物质波波长, 已知加速电压为25.0kV, (1) 用非相对论公式; (2) 用相对论公式。

解: (1) 用非相对论公式:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 25 \times 10^3}} = 7.8 \times 10^{-12} \text{ m}$$

(2) 用相对论公式:

$$\begin{cases} E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ E - m_0 c^2 = E_k = eU \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 c^2 eU + (eU)^2}} = 7.7 \times 10^{-12} \text{ m}$$

22-3. 一中子束通过晶体发生衍射。已知晶面间距  $d = 7.32 \times 10^{-2} \text{ nm}$ , 中子的动能

$E_k = 4.20 \text{ eV}$ , 求对此晶面簇反射方向发生一级极大的中子束的掠射角。

解: 先利用德布罗意波的计算公式即可得出波长:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 4.2 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 1.4 \times 10^{-11} \text{ m}$$

再利用晶体衍射的公式，可得出： $2d \sin \varphi = k\lambda \quad k = 0, 1, 2 \dots$

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{2d} = \frac{1.4 \times 10^{-11}}{2 \times 7.32 \times 10^{-11}} = 0.095, \quad \varphi = 5.48^\circ$$

22-4. 以速度  $v = 6 \times 10^3 \text{ m/s}$  运动的电子射入场强为  $E = 5 \text{ V/cm}$  的匀强电场中加速，

为使电子波长  $\lambda = 1 \text{ \AA}$ ，电子在此场中应该飞行多长的距离？

$$\text{解：} \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} U}} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$$

可得： $U = 150.9 \text{ V}$ ，所以  $U = Ed$ ，得出  $d = 30.2 \text{ cm}$ 。

22-5. 设电子的位置不确定度为  $0.1 \text{ \AA}$ ，计算它的动量的不确定度；若电子的能量约为  $1 \text{ keV}$ ，计算电子能量的不确定度。

$$\text{解：由测不准关系：} \Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 0.1 \times 10^{-10}} = 5.25 \times 10^{-24}$$

$$\text{由波长关系式：} \lambda = h \frac{c}{E} \quad \text{可推出：} \Delta \lambda = h \frac{c \Delta E}{E^2}$$

$$\Delta E = \frac{\Delta \lambda E^2}{hc} = \frac{E^2}{\Delta p c} = 1.24 \times 10^{-15} \text{ J}$$

22-6. 氢原子的吸收谱线  $\lambda = 4340.5 \text{ \AA}$  的谱线宽度为  $10^{-2} \text{ \AA}$ ，计算原子处在被激发态上的平均寿命。

解：能量  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ ，由于激发能级有一定的宽度  $\Delta E$ ，造成谱线也有一定宽度  $\Delta \lambda$ ，两者之间的关系为： $\Delta E = \Delta \lambda \frac{hc}{\lambda^2}$

由测不准关系， $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ ，平均寿命  $\tau = \Delta t$ ，则

$$\tau = \Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E} = \hbar \frac{\lambda^2}{2\Delta \lambda hc} = \frac{\lambda^2}{4\pi \Delta \lambda c} = \frac{(4340.5 \times 10^{-10})^2}{4 \times 3.14 \times 10^{-2} \times 10^{-10} \times 3 \times 10^8} = 5 \times 10^{-11} \text{ s}$$

22-7. 若红宝石发出中心波长  $\lambda = 6.3 \times 10^{-7} \text{ m}$  的短脉冲信号，时距为  $1 \text{ ns} (10^{-9} \text{ s})$ ，计算该信号的波长宽度  $\Delta \lambda$ 。

解：光波列长度与原子发光寿命有如下关系：

$$\Delta x = c \Delta t$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi \Delta \lambda} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{c \Delta t} = \frac{(6.3 \times 10^{-7})^2}{3 \times 10^8 \times 10^{-9}} = 1.323 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

22-8. 设粒子作圆周运动，试证其不确定性关系可以表示为  $\Delta L \Delta \theta \geq \hbar$ ，式中  $\Delta L$  为粒

子角动量的不确定度， $\Delta\theta$  为粒子角位置的不确定度。

证明：当粒子做圆周运动时，半径为  $r$ ，角动量为： $L=rmv=rp$  其不确定度  $\Delta L = r\Delta P$

而做圆周运动时： $\Delta x = r\Delta\theta$

利用： $\Delta P \bullet \Delta x \geq h$  代入，可得到： $\Delta L \Delta\theta \geq h$ 。

22-9. 计算一维无限深势阱中基态粒子处在  $x=0$  到  $x=L/3$  区间的几率。设粒子的势能分布函数为：

$$\begin{cases} U(x) = 0, 0 < x < L \\ U(x) = \infty, x < 0 \text{ 和 } x > L \end{cases}$$

解：根据一维无限深势阱的态函数的计算，当粒子被限定在  $0 < x < L$  之间运动时，其定态归一

化的波函数为：

$$\begin{cases} \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, 0 < x < L \\ \Psi_n(x) = 0, x < 0 \text{ 和 } x > L \end{cases}$$

概率密度为：

$$P_n(x) = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x, 0 < x < L$$

粒子处在  $x=0$  到  $x=L/3$  区间的几率：

$$P_n(x) = \int_0^{L/3} \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3}$$

如果是基态， $n=1$ ，则  $P_n(x) = \int_0^{L/3} \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi}{l} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{3} = 0.195$

22-10. 一个质子放在一维无限深阱中，阱宽  $L = 10^{-14} \text{ m}$ 。

(1) 质子的零点能量有多大？

(2) 由  $n=2$  态跃迁到  $n=1$  态时，质子放出多大能量的光子？

解：(1) 由一维无限深势阱粒子的能级表达式： $E_n = \frac{h^2}{8ma} n^2$

$n=1$  时为零点能量： $E_n = \frac{h^2}{8ma} = 3.29 \times 10^{-13} \text{ J}$ 。

(2) 由  $n=2$  态跃迁到  $n=1$  态时，质子放出光子的能量为：

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (4-1) \frac{h^2}{8ma} = 9.87 \times 10^{-13} \text{ J}。$$

22-11. 对应于氢原子中电子轨道运动，试计算  $n=3$  时氢原子可能具有的轨道角动量。

解：当  $n=3$ ， $l$  的可能取值为：0, 1, 2。

而轨道角动量  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  所以  $L$  的取值为：0,  $\sqrt{2}\hbar$ ,  $\sqrt{6}\hbar$

22-12. 氢原子处于  $n = 2, l = 1$  的激发态时, 原子的轨道角动量在空间有哪些可能取向?

并计算各种可能取向的角动量与  $z$  轴的夹角?

解:  $l=1$ , 所以轨道角动量:  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$

$m = 0, \pm 1$  三个取向。夹角分别为:

$$L_z = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad L_z = \hbar, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad L_z = -\hbar, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

## 思考题

22-1. 证明玻尔理论中氢原子中的电子轨道是电子德布罗意波长的整数倍。

证明：分别看这两个内容是什么：

玻尔理论中氢原子中的电子轨道：
$$r_n = n^2 r_0 = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

电子德布罗意波长：先求其能量：
$$E_n = \frac{1}{n^2} \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2}$$

再代入德布罗意波长求解式子中：
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = n \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

可见： $r_n = n\lambda$  是它的整数倍。

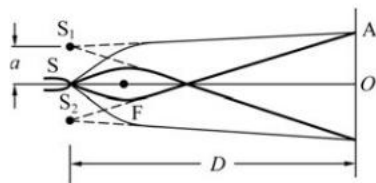
22-2. 为什么说电子既不是经典意义的波，也不是经典意义的粒子？

答：因为单个的电子是不具有波动的性质的，所以它不是经典意义的波，同时对于经典意义的粒子它的整体行为也不具有波动性，而电子却具有这个性质，所以电子也不是经典意义的粒子。

22-3. 图中所示为电子波干涉实验示意图， $S$  为电子束发射源，发射出沿不同方向运动的电子， $F$  为极细的带强正电的金属丝，电子被吸引后改变运动方向，下方的电子折向上方，上方的电子折向下方，在前方交叉区放一电子感光板  $A$ ， $S_1$ 、 $S_2$  分别为上、下方电子束的虚电子源， $S_1 S = S S_2$ ，底板  $A$  离源  $S$  的距离为  $D$ ，

设  $D \gg a$ ，电子的动量为  $p$ ，试求：

- (1) 电子几率密度最大的位置；
- (2) 相邻暗条纹的距离（近似计算）。

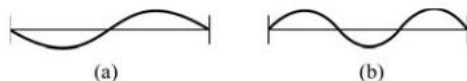


答：(1) 电子的德布罗意波长： $\lambda = \frac{h}{p}$  类似于波的干涉现象，在两边的第一级明纹之间

分布的电子最多，所以其几率最大的位置应该在  $\pm \frac{D}{d} \lambda = \pm \frac{Dh}{2ap}$  之间。

(2) 相邻暗条纹的距离：
$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda = \frac{Dh}{2ap}$$

22-4. 在一维势箱中运动的粒子，它的一个定态波函数如图 a 所示，对应的总能量为  $4\text{eV}$ ，若它处于另一个波函数（如图 b 所示）的态上时，它的总能量是多少？粒子的零点能是多少？



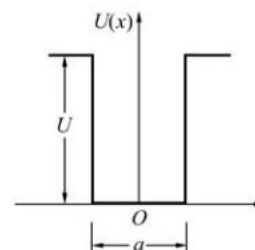
答：由一维无限深势阱粒子的能级表达式： $E_n = E_0 n^2$ 。在 a 图中， $n=2$ ，所以粒子的零点能  $E_0=1$ 。

若它处于另一个波函数 ( $n=3$ ) 的态上时，它的总能量是  $E_3 = E_0 n^2 = E_0 3^2 = 9$

22-5. 图中所示为一有限深势阱，宽为  $a$ ，高为  $U$ 。

(1) 写出各区域的定态薛定谔方程和边界条件；

(2) 比较具有相同宽度的有限深势阱和无限深势阱中粒子的最低能量值的大小。



答：第 I 区域定态薛定谔方程： $\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0$

第 II 区域定态薛定谔方程：

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0$$

边界条件： $\psi_1(-\frac{a}{2}) = \psi_2(-\frac{a}{2})$        $\psi_1(\frac{a}{2}) = \psi_2(\frac{a}{2})$

22-6. 在钠光谱中，主线系的第一条谱线（钠黄线）是由  $3p-3s$  之间的电子跃迁产生

的，它由两条谱线组成，波长分别为  $\lambda_1 = 5889.963 \text{ \AA}$  和  $\lambda_2 = 5895.930 \text{ \AA}$ 。试用电子自旋来解释产生双线的原因。

答：Na 光谱双线产生的原因是比电相互作用小的磁相互作用的结果，是自旋—轨道相互作用能，是一个小量。即电子轨道运动产生的磁场和电子自旋磁矩的作用，使原子的能级发生改变，其中电子自旋磁矩  $\mu_s = -\frac{e}{m} S$ ，在 Z 方向投影有两条，所以 Na 光谱产生了双线。



## 习题

23-1. 铜、银、金、铝、铂等许多金属的晶格均为面心立方点阵结构。其边长  $a$  称为晶格常数，一般晶格常数并不一定代表原子间的最近距离。

(1) 分析面心立方点阵中每个原子周围有几个最近邻原子；

(2) 求最近邻原子间的距离与晶格常数的关系。

解：  $N = 12$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

23-2. n型半导体Si中含有杂质磷P原子。在计算施主能级时，作为初级近似，可看作一个电子围绕离子实  $P^+$  运动，好似一个浸没在无限大电介质Si中的一个类氢原子。已知Si的相对介电常数  $\epsilon_r = 11.5$ ，求此半导体的施主基态能级。

解：  $E_D = -\frac{me^4}{8(\epsilon_0\epsilon_r)^2 n^2 h^2}$

基态能级  $n = 1$

$$E_D = -\frac{me^4}{8(\epsilon_0\epsilon_r)^2 h^2} = -\frac{9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{8 \times (8.85 \times 10^{-12} \times 11.5)^2 \times (6.63 \times 10^{-34})^2} = -0.1eV$$

23-3. 钒V是第一类超导体，天然钒中同位素  $V^{51}$  占99.76%， $V^{50}$  占0.24%，它们的质量分别为50.9440u和49.9472u。已知天然钒的转变温度为5.300K，试根据超导体的同位素效应： $M^{1/2}T_c = C$ （ $M$ 为同位素质量， $T_c$ 为转变温度， $C$ 为常量），计算钒  $V^{50}$  的转变温度。

解：  $M_1^{1/2}T_{c1} = M_2^{1/2}T_{c2}$

$$T_{c2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{1/2} T_{c1} = \left(\frac{50.944 \times 0.9976 + 49.9472 \times 0.0024}{49.9472}\right)^{1/2} \times 5.3 = 5.352K$$

25-4. 已知硅的禁带宽度为1.14eV，金刚石的禁带宽度为5.33eV。求能使之发生光电导的入射光最大波长。

解：对硅  $\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.14 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.1 \times 10^{-6} m$

对金刚石  $\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5.33 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 2.3 \times 10^{-7} m$

23-5. 发光二极管的半导体材料能隙为1.9eV，求它所发射光的波长。

解：  $\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.9 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 6.54 \times 10^{-7} m$

### 思考题

23-1. 晶体的四种主要类型的结合键各有什么特征？

答：离子晶体：原子的结合力为库仑力，结合力的强度中等。

共价晶体：原子的结合力为共价键。

分子晶体：原子的结合力为范德瓦耳斯力。

金属晶体：原子的结合力与共价键类似。

23-2. 如何从泡利不相容原理来说明当原子结合成晶体时原子能级会发生分裂？

略

23-3. 当电子能量处在禁带之中时，电子的布洛赫波矢是复数，这电子为什么不能存在于晶体中？

略

23-4. 能级与能带有何不同？固体的能带是怎么形成的？

答：晶体中电子共有化的结果，使原先每个原子中具有相同能量的电子能级，因各原子相互影响而分裂成为一系列和原来能级很接近的新能级，这些新能级基本上连成一片，而形成能带。

23-5. 从能带结构来看导体、绝缘体、半导体有什么差异？

答：绝缘体的禁带都比半导体的宽，常温下从满带激发到空带的电子数微不足道，宏观上表现为导电性能差。半导体的禁带宽度较小，满带中的电子只需较小的能量就能激发到空带中，宏观上表现为有较绝缘体大而较金属导体小的电导率。

对金属导体而言，有的价带未被电子添满，是未满带，有的虽然价带中所有量子态被电子占满，成为满带，但禁带宽度为 0，满带与较高的空带相交叠，电子可自由占据空带，还有的是未满带与空带相交叠。在外电场作用下，未满带中的电子都能参与导电过程，因此未满带也称为导带。

能带理论在阐明固体的导电机构、合金的某些性质及金属的结合能等方面取得了重大成就，但它毕竟是一种近似理论，不能解释涉及电子相互作用的许多现象。

23-6. 掺杂与加热均能使半导体的电导率增加，但二者有何不同？

答：杂质半导体由于掺有微量杂质，在禁带中产生附加的杂质能级。掺入施主杂质的  $N$  型半导体，施主能级位于禁带上方靠近导带底，施主能级上的电子激发到导带成为导电载流子所需的能量远小于从满带跃迁到导带所需的能量。同理，掺入受主杂质的  $P$  型半导体，受主能级通常位于禁带下方，满带中的电子跃迁到受主能级，在满带中形成一个能导电的空穴所需能量远小于本征半导体形成电子-空穴对所需能量。因此掺杂后的半导体可分为以导带中的电子为主要载流子的电子型导电和以满带中的空穴为主要载流子的空穴型导电两种类型。由于掺杂半导体产生载流子所需能量很小，其载流子的浓度远大于在同一温度下产生电子-空穴对的浓度，因此，室温下杂质半导体的电导率主要由杂质电离产生的载流子浓度决定。温度升高时本征激发也加剧，同样使电导率增大，但达到一定温度时，无论是  $P$  型还是  $N$  型半导体都将转变为本征导电。

23-7. 本征半导体与杂质半导体导电机构有何不同？

答：见教材  $P_{257}$  页

23-8. 本征半导体掺何种杂质即可成为  $n$  型半导体，它的多数载流子是什么？又怎样成为  $p$  型半导体？它的多数载流子是什么？

答：本征半导体掺五价杂质即可成为  $n$  型半导体，它的多数载流子是电子。本征半导体

掺三价杂质可成为 p 型半导体，它的多数载流子是空穴。

23-9. p-n 结为何有单向导电性？

答：p-n 结中由于阻挡层的存在，把电压加到 p-n 结两端时，阻挡层处的电势差将发生变化。若 p 端接正，n 端接负，外电场的方向与 p-n 结中电场方向相反，使结中电场减弱，阻挡层减薄，n 区的电子和 p 区的空穴容易通过阻挡层向对方扩散，形成了 p 区流向 n 区的宏观电流。若反向连接，外电场的方向与 p-n 结中电场方向相同，这时阻挡层增厚，n 区的电子和 p 区的空穴很难通过阻挡层向对方扩散。因此说 p-n 结有单向导电性。

23-10. 超导态的两个互相独立的基本属性是什么？

答：(1) 零电阻 (2) 完全抗磁性

23-11. 什么是超导体的临界温度、临界磁场和临界电流？

答：超导体电阻降为零的温度称为临界温度。材料的超导态可以被外加磁场破坏而转入正常态，这种破坏超导态所需的最小磁场强度称为临界磁场。临界磁场的存在，限制了超导体中能够通过电流，当通过超导态导线的电流超过一定数值  $I_c$  后，超导态被破坏， $I_c$  称为超导态的临界电流。

23-12. 何谓迈斯纳效应？超导体与电阻率为零的理想导体有何不同？

答：使样品转变为超导态的过程中，无论先降温后加磁场，还是先加磁场后降温，超导体内部的磁感应强度总是为零，这一现象称为迈斯纳效应。

零电阻是超导体的一个重要特征，超导体处于超导态时电阻完全消失，若用它组成闭合回路，一旦回路中有电流，则回路中没有电能消耗，不需要任何电源补充能量，电流可以持续存在下去，形成所谓的持久电流。超导体具有完全抗磁性，而理想导体放在外磁场中，外加磁场的变化不会改变通过理想导体的磁通量，通过理想导体的磁通量可以是非零的常数，其变化历史与外磁场的作用历史有关。

23-13. 超导材料和技术有哪些应用？超导磁体比传统电磁铁有什么优越性？

答：超导在能源、运输、医疗、信息和基础科学等各个领域已经开展了应用研究。在电力工业中用 超导电缆可实现无损耗输电，超导电机可突破常规发电机的极限容量，提高效率。用超导线圈储能可改善电网稳定性和调制峰值负载。用超导线圈制成的超导磁体不仅体积小、重量轻，而且损耗小，所需励磁功率小，为受控核聚变、高能加速器、磁流体发电、磁悬浮列车、核磁共振成像装置提供大范围的强磁场。在科学实验、计算、军事侦察、地质勘探的生物医学方面都有显著的应用效果。